Medição e Optimização do Risco em Selecção de Carteiras

João Paulo Farinha Rodrigues

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Medição e Optimização do Risco em Selecção de Carteiras

João Paulo Farinha Rodrigues

Dissertação para a obtenção do Grau de **Mestre em Matemática**

Área de Especialização em **Matemática Financeira, Estatística e Optimização**

Orientada por **Professor Luís Nunes Vicente**

Júri

Presidente: Professor Paulo Eduardo Oliveira

Vogais: Professor José Luís Esteves dos Santos

Professor Luís Nunes Vicente

Data: Junho de 2015

Resumo

Este trabalho tem como objectivo estudar medidas de risco e a sua utilização em problemas de optimização em selecção de carteiras. Pretende-se comprender as alternativas à abordagem tradicional de optimização média-variância, introduzida por Markowitz, em que o risco é medido pela variância dos retornos dos títulos accionistas.

Para o efeito, estudámos os Momentos Parcialmente Inferiores (LPMs) e os Momentos Parcialmente Bilaterais (BPMs), cobrindo os casos particulares da semi-variância e da semi-variância balanceada. Abordou-se, igualmente, o Valor em Risco Condicional (CVaR). Depois, analisámos a incorporação destas medidas de risco enquanto funções objectivo de problemas de optimização em selecção de carteiras.

Realizou-se um estudo empírico do desempenho das carteiras que resultaram da solução dos problemas de optimização associados às diversas medidas de risco, recorrendo a dados históricos do índice PSI20. O desempenho destas carteiras foi avaliado, fora da amostra, pelos rácios de Sharpe e Sortino, tendo revelado que as medidas alternativas de risco superam a variância.

Palavras Chave: optimização em selecção em carteiras, medidas de risco, Momentos Parcialmente Inferiores e Bilaterais, semi-variância

Abstract

The goal of this work is to study risk measures and its use in optimization for portfolio selection. One aims at understanding the alternatives to the traditional approach of mean-variance optimization, introduced by Markowitz, where risk is measured by the variance of the returns of the financial assets.

For this purpose, we studied Lower Partial Moments (LPMs) and Bilateral Partial Moments (BPMs), covering the particular cases of semi-variance and balanced semi-variance. We also approached the Conditional Value-at-Risk (CVaR). We then analyzed the incorporation of these measures of risk as objective functions of optimization problems in portfolio selection.

It was carried out an empirical study of the performance of the portfolios that resulted from the solution of the optimization problems associated with the various risk measures, based on historical data of the PSI20 index. The performance of these portfolios was evaluated, out-of-sample, by the Sharpe and Sortino ratios, having revealed that the alternative risk measures outperform the variance.

Keywords: portfolio selection optimization, risk measures, Lower and Bilateral

Partial Moments, semivariance

Agradecimentos

Queria começar por agradecer ao Professor Luís Nunes Vicente, meu orientador, pela paciência, orientação científica e pessoal, dedicação e revisão desta dissertação. Este ano foi, devido ao Professor, de grande aprendizagem científica e também pessoal. Ensinou-me, guiou-me e, mais do que um professor, foi um amigo. Por tudo isto, os meus sinceros agradecimentos.

Ao meu colega e amigo Luís Baía, um dos melhores matemáticos que alguma vez conheci, agradeço por me ter feito acreditar em mim e, acima de tudo, por me ter permitido aprender consigo. Aos amigos (família de Coimbra), que comigo percorreram este longo caminho, que comigo riram e choraram, que tornaram esta viagem inesquecível. Quero ainda agradecer o apoio dos amigos de Oleiros (terra que me viu e fez crescer), pessoas que me apoiaram e incentivaram nesta luta.

Ao meu Avô João por todo apoio que me deu e pela ajuda que sempre me ofereceu. Nunca o esquecerei, nem à Avó. Aos meus Pais, pelo apoio incondicional, pelas palavras de incentivo, por serem as pessoas fantásticas que são e por me ajudarem a tornar a pessoa que sou hoje. Ao meu Irmão, amigo em todos os momentos, que espero que tenha tanto orgulho em mim como eu tenho em si. À Esplanada JP, por me ensinar que na vida nada se consegue sem trabalho.

À minha namorada Fernanda, por quase cinco anos de cumplicidade, entreajuda, disponibilidade, paciência e, principalmente, de amor e dedicação. À sua família, por ser também uma família para mim.

Conteúdo

1 Introdução **1**

2 Medidas de risco **3**
2.1 Propriedades das medidas de risco 3
2.2 Medidas tradicionais 4
2.3 Momentos parcialmente inferiores (LPMs) 6
2.4 O caso particular da semi-variância 7
2.4.1 Simetria 8
2.4.2 Alterações nas distribuições 8
2.5 Momento parcialmente bilateral (BPM) 9
2.6 Valor em risco condicional (CVaR) 11

3 Optimização do risco em selecção de carteiras **15**
3.1 Abordagem tradicional (média-variância) 15
3.2 Limitações da abordagem tradicional e utilidade quadrática 17
3.3 Abordagem utilizando os momentos parcialmente inferiores (LPMs) . 20
3.3.1 Risco definido pelos LPMs 20
3.3.2 Risco definido pelo desvio semi-absoluto inferior 23
3.3.3 Risco definido pela semi-variância 23
3.4 Abordagem utilizando momentos parcialmente bilaterais (BPMs) . . 25
3.4.1 O caso particular da optimização semi-variância balanceada . 27
3.4.2 O caso particular da optimização média-desvio semi-absoluto balanceado 29
3.5 Abordagem utilizando valor em risco condicional (CVaR) 30
3.6 Fronteira de eficiência 31
3.7 Medidas de desempenho 32
3.7.1 Rácio de Sharpe 32
3.7.2 Desempenho média-LPM e rácio de Sortino 33
3.7.3 Desempenho média-BPM 33

4 Desempenho empírico **35**
4.1 Base de dados 35
4.2 Desempenho *in-sample* 36
4.3 Impacto do coeficiente α de aversão ao risco 36
4.4 Impacto do valor de referência τ 38
4.5 Impacto do coeficiente b de balanceamento 39
4.6 Desempenho *out-of-sample* 39
4.6.1 Desempenho *out-of-sample* medido pelo rácio de Sharpe . . . 40
4.6.2 Desempenho *out-of-sample* medido pelo rácio de Sortino . . . 41
4.7 Discussão dos resultados 41

5 Conclusão **47**

Apêndice A
Figuras e tabelas referentes ao Capítulo 4 **49**

Capítulo 1

Introdução

As características dos retornos de títulos accionistas transaccionados em mercados financeiros puseram em causa os pressupostos da abordagem tradicional para a selecção de carteiras, introduzida por Markowitz (1952). Esta abordagem utiliza a optimização média-variância, em que o risco da carteira é medido pela variância do seu retorno, e teve forte influência no desenvolvimento do estudo de selecção de carteiras.

Entre as críticas colocadas à abordagem tradicional, mencionamos o facto desta pressupor que seja quadrática a utilidade do capital do investimento ou que sejam normais as distribuições dos títulos. Na literatura relevante sobre este assunto (Eichholtz (1996), Newell e Acheampong (2001), Conover et al. (2002), Liow (2008), Schindler (2009), Srivatsa et al. (2010), entre outros) está bem documentado que carteiras constituídas por títulos accionistas não satisfazem os pressupostos da teoria de selecção de carteiras definida por Markowitz (1952), uma vez que os retornos não são, geralmente, normalmente distribuídos e são (negativamente) assimétricos.

Foram assim propostas nas últimas décadas[1] formas alternativas de medir o risco e de o incorporar na optimização em selecção de carteiras. As medidas de risco dividem-se, essencialmente, em medidas de risco globais e medidas de risco em perdas. Entre estas últimas, encontra-se o Momento Parcialmente Inferior (LPM), proposto por Fishburn (1977), definido para um grau α que pode ser escolhido consoante a utilidade do investimento. Quanto mais elevado for o valor de α, maior aversão ao risco terá um investidor. Existem dois casos particulares dos LPMs com relevância própria, o Desvio Semi-Absoluto Inferior (SDA) e a Semi-Variância (SV).

É possível formular problemas de optimização em selecção de carteiras associados aos LPMs (caso geral), ao SDA e à SV (casos particulares), em que estas medidas de risco são minimizadas no âmbito de programas lineares e quadráticos, recorrendo-

[1] Diga-se, aliás, o que próprio Markowitz (1959) sugeriu na altura uma análise baseada em semi-variância e, mais tarde, criticou a sua própria abordagem, ver Markowitz (1991), página 194.

se ao conceito de co-momentos parcialmente inferiores (simétricos e assimétricos) introduzido originalmente por Nawrocki (1991).

Uma outra medida de risco em perdas considerada nesta tese é o Valor em Risco Condicional (CVaR), introduzido, pela primeira vez em selecção de carteiras, por Rockafellar e Uryasev (2000). Esta medida tem atraído bastante atenção, em parte por apresentar propriedades teóricas interessantes, como a coerência e a convexidade. A sua incorporação em selecção de carteiras pode ser feita no âmbito da programação linear.

A ideia geral das medidas de risco em perdas é que a parte esquerda (relativamente a um valor de referência τ) de uma distribuição dos retornos envolve risco, enquanto que a parte direita descreve as melhores oportunidades de investimento. Assim, só devemos ter em conta a variabilidade abaixo desse valor de referência. Contudo, a omissão de informação relevante sobre potenciais ganhos apresenta-se como uma fraqueza da abordagem utilizando medidas de risco em perdas. Surgiu, desta forma, o Momento Parcialmente Bilateral (BPM), motivado pelo facto de os investidores responderem de forma diferente à variabilidade acima e abaixo de um valor de referência τ. Cumova e Nawrocki (2004) apresentaram um procedimento para aplicar os BPMs em problemas de optimização em selecção de carteiras, considerando os casos particulares do desvio semi-absoluto inferior balanceado e da semi-variância balanceada, quando determinados graus são especificados.

Mostraremos nesta tese um estudo empírico que fizemos sobre o desempenho das carteiras resultantes dos problemas de optimização associados às diversas medidas de risco, recorrendo a dados históricos do índice PSI20. Avaliámos esse desempenho pelos rácios de Sharpe e Sortino, num contexto *out-of-sample*, como em DeMiguel et al. (2013). A fim de estudar o problema biobjectivo (minimizar o risco e maximizar o retorno) que está associado à selecção de carteiras, calculámos as respectivas fronteiras de eficiência e analisámos o impacto de diversos parâmetros nestas fronteiras, como ordens e valores de referência dos LPMs e BPMs.

A estrutura desta tese tem início no Capítulo 2 onde se apresenta a definição matemática de medida de risco, algumas das suas propriedades e as várias medidas em análise neste estudo. Os problemas de optimização em selecção de carteiras associados às várias medidas de risco são introduzidos no Capítulo 3. O Capítulo 4 descreve o estudo empírico acima mencionado. Por fim, no Capítulo 5, é feita uma conclusão geral de todo o estudo.

Capítulo 2

Medidas de risco

Ao pensarmos em risco ocorre-nos saber como o definir e medir. Intuitivamente, o risco é algo que tem em conta a probabilidade e a severidade de um evento. De uma forma algo arcaica, podemos dizer que as pessoas sabem que para ganhar têm de apostar e para ganhar bastante têm de arriscar ainda mais. Numa perspectiva financeira este facto traduz-se em que grandes retornos estão normalmente associados a grandes incertezas.

Uma medida de risco é definida como um mapeamento de um conjunto de variáveis aleatórias para o conjunto dos números reais, em que o primeiro representa os retornos de uma carteira. A notação normalmente utilizada para uma medida de risco associada à variável aleatória X é $\rho(X)$. Desta forma, podemos definir formalmente uma medida de risco, introduzindo três axiomas para esse efeito.

Definição 2.1. *Seja $\mathcal{L}$ um conjunto de variáveis aleatórias definido num espaço de probabilidade. Uma função $\rho : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é uma medida de risco se satisfizer*

- $\rho(0) = 0$ *(Normalização),*
- $\rho(\alpha + Z) = \rho(Z) - \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\forall Z \in \mathcal{L}$ *(Invariância de Translação),*
- *Se* $Z_1 \leq Z_2$ *então* $\rho(Z_1) \geq \rho(Z_2)$, $\forall Z_1, Z_2 \in \mathcal{L}$ *(Monotonia Decrescente).*

2.1. Propriedades das medidas de risco

As medidas de risco podem-se dividir em medidas de risco globais e medidas de risco em perdas, de acordo com o trabalho de Dhaene et al. (2003). Uma *medida de risco global* é uma medida da "distância" entre uma situação de risco e a situação livre de risco correspondente, quando as discrepâncias favoráveis e desfavoráveis são tidas em conta. Uma *medida de risco em perdas* é uma medida da "distância" entre uma situação de risco e a situação livre de risco correspondente, quando apenas as discrepâncias desfavoráveis contribuem para o risco.

Neste trabalho vamos focar-nos nas medidas de risco em perdas como as apresentadas nas Secções 2.3 e 2.4 e compará-las com uma medida de risco global, a variância, apresentada na Secção 2.2. Um outro conceito bastante importante no estudo das medidas de risco é o de medida de risco coerente. A sua definição é apresentada de seguida.

Definição 2.2. *Uma medida de risco* $\rho : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *é denominada coerente se satisfizer os seguintes axiomas*

- $\rho(Z_1 + Z_2) \leq \rho(Z_1) + \rho(Z_2)$, $\forall Z_1, Z_2 \in \mathcal{L}$ *(Subaditividade),*
- $\rho(\alpha Z_1) = \alpha\rho(Z_1)$, $\forall \alpha \geq 0$ *e* $\forall Z_1 \in \mathcal{L}$ *(Homogeneidade Positiva).*

De seguida apresenta-se uma outra classe de medidas de risco, a das medidas de risco convexas.

Definição 2.3. *Uma medida de risco* $\rho : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *diz-se convexa se*

- $\rho(\lambda Z_1 + (1-\lambda)Z_2) \leq \lambda\rho(Z_1 + (1-\lambda)\rho(Z_2)$, $\forall \lambda \in [0,1]$ *e* $\forall Z_1, Z_2 \in \mathcal{L}$ *(Convexidade).*

Neste estudo a única medida de risco coerente (e consequentemente convexa) será o Valor em Risco Condicional (CVaR). Este facto leva-nos a pensar que esta medida de risco poderá apresentar melhores resultados empíricos que as restantes. Contudo, este facto não implica que as outras medidas de risco não possuam interesse, bem pelo contrário. O facto de algumas medidas de risco não serem coerentes e mesmo assim apresentarem bons resultados é interessante e merece atenção especial.

2.2. Medidas tradicionais

A teoria da selecção de carteiras em conjunto com o conceito de risco/retorno iniciou-se com a publicação do trabalho *Portfolio Selection* por Markowitz (1952). Aí foram consideradas medidas de risco tradicionais como é o caso da variância (e do desvio-padrão).

Definição 2.4. *Dada uma variável aleatória* $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *com valor médio* $E(Y)$*, o desvio-padrão* $\sigma(Y)$ *é dado por*

$$\sigma(Y) = \sqrt{E[(Y - E(Y))^2]}.$$

Por definição a variância é o valor do desvio-padrão ao quadrado, ou seja,

$$V(Y) = E[(Y - E(Y))^2].$$

Se estivermos na presença de uma variável aleatória Y com função densidade $f_Y(y)$, a variância pode ser expressa na forma

$$V(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - E(Y))^2 f_Y(y)dy,$$

com $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy$.

Definição 2.5. *Considerem-se n variáveis aleatórias $Y_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n$ com valores médios $E(Y_1), \ldots, E(Y_n)$. A matriz de covariâncias $\Sigma(Y)$ é definida, entrada a entrada, por*

$$\Sigma(Y)_{ij} = E\left[(Y_i - E(Y_i))(Y_j - E(Y_j))\right],$$

em que $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$.

Outras noções importantes neste trabalho são a média estimada, a variância estimada e a matriz de covariância estimada. Assim, as fórmulas para estimar $E(Y)$ e $V(Y)$ são

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t \\ V &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} (Y_t - \mu)^2, \end{aligned}$$

onde T é o número de observações e Y_t é o valor amostral (estimado) da variável aleatória Y no instante t.

Por fim, a matriz de covariância $\Sigma(Y)$ pode ser estimada, entrada a entrada, por

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} (Y_{it} - \mu_i)(Y_{jt} - \mu_j),$$

em que $\mu_i \simeq E(Y_i)$, $\mu_j \simeq E(Y_j)$ e Y_{it} representa o valor estimado da variável aleatória $Y_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ no instante t.

A variância não é uma medida de risco coerente pois não satisfaz, por exemplo, o axioma da homogeneidade positiva. Entre as propriedades associadas a esta medida de risco está o facto de a matriz de covariâncias correspondente ser simétrica e semi-definida positiva. No trabalho que se segue vai-se supor que esta matriz Σ é definida positiva.

A variância é então uma medida de risco global, uma vez que tem em conta, de igual forma, tanto a cauda superior como a cauda inferior da distribuição de uma variável aleatória Y. É uma das duas medidas globais que iremos estudar neste trabalho, mas existem outras medidas de risco global como é o caso do risco de mercado (β_Y) e do intervalo interquartil (IQR).

2.3. Momentos parcialmente inferiores (LPMs)

O grande avanço no estudo das medidas de risco em perdas ocorreu com a introdução da medida de risco momento parcialmente inferior (LPM) por Bawa (1975) e Fishburn (1977). Neste capítulo vamos começar por definir Momento Parcialmente Inferior (LPM), sendo este um modelo geral para as medidas de risco abaixo de um valor de referência. Vamos, ainda, introduzir outras definições pertinentes para o estudo dos LPMs.

Vimos que a média e variância são momentos de primeira e de segunda ordem, respectivamente. Uma definição mais geral de momentos é apresentada de seguida, onde τ é um valor que serve de referência para medir a distância da variável aleatória Y a um valor fixo à partida.

Definição 2.6. *Seja $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ uma variável aleatória absolutamente contínua com função densidade $f_Y(y)$. O momento de grau α com referência a τ é dado por*

$$\mu_\alpha(\tau, Y) = E((\tau - Y)^\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} (\tau - y)^\alpha f_Y(y)dy.$$

O caso em que o valor de referência τ é igual à média da distribuição, ou seja, $\tau = E(Y)$ denomina-se momento central. O momento central normalizado também é introduzido

$$\bar{\mu}_\alpha(\tau, Y) = \frac{E\left[(Y - E(Y))^\alpha\right]}{\sigma^\alpha}.$$

Note-se que o momento central normalizado de ordem três ($\alpha = 3$) é a assimetria (skewness) de uma distribuição. A curtose é o quarto momento central normalizado ($\alpha = 4$) (retirando três unidades ao valor obtido). Algumas distribuições com valor de curtose muito elevada podem apresentar caudas pesadas. Este facto é bastante importante para o nosso trabalho, uma vez que, as distribuições que nos interessam devem apresentar essa propriedade.

O momento parcialmente inferior (LPM) foi então introduzido pela primeira vez por Bawa (1975) e a sua definição é apresentada de seguida.

Definição 2.7. *Seja $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória absolutamente contínua com função densidade $f_Y(y)$. O Momento Parcialmente Inferior (*LPM*) de grau α com referência a τ é definido por*

$$\mathrm{LPM}_\alpha(\tau, Y) = E(\max(\tau - Y, 0)^\alpha) = \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - y)^\alpha f_Y(y)dy.$$

Os LPMs examinam simplesmente o momento de ordem α abaixo de um valor de referência τ. Uma hipótese a analizar neste trabalho é a de que os benefícios teóricos e empíricos em utilizar os LPMs (entre outras medidas de risco) vão superar os benefícios da utilização da variância como medida de risco. Na prática, os LPMs podem ser estimados, para T observações, por

$$\mathrm{LPM}_\alpha(\tau) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \max(\tau - Y_t, 0)^\alpha,$$

onde Y_t é o valor da variável aleatória Y no momento da t-ésima observação.

A adopção desta medida de risco vai possibilitar a não suposição de uma distribuição normal (Gaussiana) das variáveis em análise, necessária quando a variância é utilizada como medida de risco. Este assunto vai ser abordado posteriormente neste estudo. Para além disso, pela capacidade de se poder escolher o grau do momento, ou seja, definir o valor de α em $\mathrm{LPM}_\alpha(\tau, Y)$ previamente, um investidor pode especificar aquela medida de risco que melhor se ajusta à sua aversão ao risco. Intuitivamente, maiores valores de α vão penalizar maiores desvios do que valores mais baixos.

Os momentos parcialmente inferiores são uma *medida de risco em perdas*, uma vez que apenas se preocupam com a distribuição de uma variável aleatória Y abaixo de um valor de referência τ. Os LPMs não são uma medida de risco coerente uma vez que, por exemplo, não satisfazem o axioma da homogeneidade positiva.

2.4. O caso particular da semi-variância

Um facto que pode ser desconhecido para muitos é que, muito antes da definição de momento parcialmente inferior, Markowitz já tinha considerado um seu caso particular, o da semi-variância. De facto, ele dedicou todo o capítulo *IX* (*Portfolio Selection*, Markowitz) a discutir a semi-variância.

Assim como os momentos parcialmente inferiores, também a semi-variância é uma medida de risco em perdas. Partindo da definição de momentos parcialmente inferiores e tendo por base que a semi-variância é um caso particular dos LPMs em que o grau do momento α é definido como sendo 2, pode definir-se semi-variância de forma análoga.

Definição 2.8. *Seja $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória absolutamente contínua com função densidade $f_Y(y)$. A semi-variância com referência a τ é dada por*

$$\mathrm{SV}(\tau, Y) = E(\max(\tau - Y, 0)^2) = \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - y)^2 f_Y(y)dy. \tag{2.1}$$

Sendo um caso particular dos momentos parcialmente inferiores, a semi-variância é também uma medida de risco em perdas, uma vez que apenas se preocupa em medir as ocorrências (discrepâncias) que ocorrem na cauda inferior (abaixo de um valor de referência τ) da distribuição de uma variável aleatória Y.

Os Momentos Parcialmente Inferiores (LPM) estão para os momentos de uma distribuição como a semi-variância é vista para a variância. Sendo um caso particular dos momentos parcialmente inferiores esta medida de risco apresenta algumas propriedades interessantes para o estudo que se segue, propriedades essas que se apresentam de seguida.

2.4.1. Simetria

Por definição, uma distribuição diz-se simétrica se reflectida em $E(Y)$ (em que $E(Y)$ é o valor médio de uma variável aleatória), reproduz exactamente a mesma distribuição. Tem-se que a variância de uma distribuição é sempre a mesma que a da sua reflexão enquanto que tal não acontece com a semi-variância. Uma distribuição que possui maior concentração de valores à direita de $E(Y)$ do que à esquerda diz-se enviesada à direita. O valor de

$$\frac{V(Y)}{2\,\mathrm{SV}(E(Y),Y)},$$

pode ser utilizado como forma de medir o enviesamento, em que $V(Y)$ é a variância de uma variável aleatória Y e $\mathrm{SV}(E(Y),Y)$ é dado por (2.1) com $\tau = E(Y)$. Para distribuições simétricas tem-se que $V(Y)/2\,\mathrm{SV}(E(Y),Y) = 1$. Se a distribuição for enviesada à direita, então $V(Y)/2\,\mathrm{SV}(E(Y),Y) > 1$, se acontecer o contrário então $V(Y)/2\,\mathrm{SV}(E(Y),Y) < 1$.

Quando todas as distribuições das variáveis aleatórias presentes numa carteira são simétricas, ou têm o mesmo valor de enviesamento, as carteiras não se distinguem, quer se utilize como medida de variabilidade o valor de $V(Y)$, quer se utilize o valor de $\mathrm{SV}(E(Y),Y)$.

Uma análise baseada em $\mathrm{SV}(E(Y),Y)$ leva ao favorecimento de carteiras que têm maior enviesamento à direita, ou menor enviesamento à esquerda em cada distribuição, quando existem várias carteiras com o mesmo retorno e variância esperados.

2.4.2. Alterações nas distribuições

Consideram-se agora alterações nas distribuições, particularmente aquelas que mantêm a média da distribuição inalterada. Vai-se comparar o efeito dessas altera-

ções tanto na variância como na semi-variância.

Uma possível alteração é o movimento de dois pontos em direções opostas, com a mesma distância. Este movimento mantém a média $E(Y)$ constante e denomina-se por alteração binária. Qualquer alteração binária em que se dá a aproximação de dois pontos diminui a variância. Pelo contrário, uma alteração em que os pontos se afastam aumenta a variância.

Em relação à semi-variância uma alteração binária em que dois pontos se aproximam diminui o valor de $\mathrm{SV}(E(Y), Y)$ desde que, pelo menos, um deles se encontre abaixo de $E(Y)$. Se os dois pontos se encontrarem acima de $E(Y)$, o valor de $\mathrm{SV}(E(Y), Y)$ não se altera. Se os dois pontos estiverem abaixo de $E(Y)$, então a alteração no valor de $\mathrm{SV}(E(Y), Y)$ é a mesma que no valor de $V(Y)$. Estes resultados aplicam-se não só a $\mathrm{SV}(E(Y), Y)$, mas também a $\mathrm{SV}(\tau, Y)$ para um valor de referência τ definido pelo investidor.

2.5. Momento parcialmente bilateral (BPM)

A omissão de dados potencialmente relevantes, existentes na cauda superior da distribuição de uma variável aleatória Y, pode ser uma fraqueza das regras que servem de base ao estudo do risco em perdas, pelo facto de apenas se considerar a variabilidade abaixo de um valor de referência τ.

Os Momentos Parcialmente Bilaterais (BPMs) são introduzidos para detectar movimentos negativos indesejados (cauda inferior da distribuição) e movimentos positivos desejados (cauda superior da distribuição). Os BPMs são uma medida de risco bastante abrangente, conseguindo alcançar a maioria dos aspectos relevantes da definição de risco. Tanto os LPMs como a variância são casos particulares dos momentos parcialmente bilaterais.

Para definir os BPMs vamos utilizar a definição de LPMs introduzida antes e definir, em primeiro lugar, os Momentos Parcialmente Superiores (UPMs). Os momentos parcialmente superiores requerem um valor de referência superior η e são definidos da seguinte forma.

Definição 2.9. *Seja $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória absolutamente contínua com função densidade $f_Y(y)$. O Momento Parcialmente Superior (*UPM*) de grau α com referência a η é definido por*

$$\mathrm{UPM}_\alpha(\eta, Y) = E[(\max(0, Y - \eta))^\alpha] = \int_\eta^{+\infty} (Y - \eta)^\alpha f_Y(y) dy.$$

Tal como no caso dos LPMs, as diferentes ordens α nos UPMs representam comportamentos distintos por parte dos investidores. Quando $\alpha > 1$ os investidores são propensos aos ganhos potenciais, quando $\alpha = 1$ são neutros aos ganhos potenciais e no caso de $\alpha < 1$ são adversos aos ganhos potenciais.

Por forma a utilizar toda a informação proveniente da distribuição, não olhando apenas para a parte inferior nem punindo o "risco de ganhos", como é feito ao utilizar a variância como medida de risco, Kahneman e Tversky (1979) introduziram os momentos parcialmente bilaterais.

Definição 2.10. *Seja $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória absolutamente contínua com função densidade $f_Y(y)$. O Momento Parcialmente Bilateral (*BPM*) de grau α com referência a τ e η é definido por*

$$\mathrm{BPM}_\alpha(\tau, \eta, b, Y) = \mathrm{LPM}_\alpha(\tau, Y) + b \cdot \mathrm{UPM}_\alpha(\eta, Y), \qquad \alpha = 0, 1, 2, \ldots$$

onde $-\infty < \tau \leq \eta < +\infty$ e o coeficiente de balanceamento $b \in \mathbb{R}$ é determinado pela atitude do investidor face ao risco.

O coeficiente b é geralmente negativo por forma a compensar perdas com ganhos. Os $\mathrm{BPM}_\alpha(\tau, \eta, b, Y), \alpha = 0, 1$ e 2, são conhecidos como probabilidade de perda balanceada, desvio semi-absoluto balanceado e semi-variância balanceada, respectivamente.

Intuitivamente, os momentos parcialmente bilaterais podem ser modificados para suportar os momentos parcialmente inferiores e superiores de diferentes níveis (de liberdade), dando origem a

$$\mathrm{BPM}_{\alpha,\beta}(\tau, \eta, b, Y) = \mathrm{LPM}_\alpha(\tau, Y) + b \cdot \mathrm{UPM}_\beta(\eta, Y), \tag{2.2}$$

em que α e β são números reais positivos (que podem também tomar o valor 0, mas não é comum isso acontecer). Quanto maior forem as ordens α e β, mais ênfase se dá aos eventos extremos nas caudas das distribuições.

No caso em que que os valores de referência inferior e superior são iguais, isto é, quando $\tau = \eta$, os $\mathrm{BPM}_\alpha(\tau, \eta, b, Y)$ representam-se por $\mathrm{BPM}_\alpha(\tau, b, Y)$. Quando $\alpha = 2, b = 1$ e $\tau = E(Y)$, a semi-variância balanceada coincide com a variância. Tem-se ainda que quando $b = 0$ os BPMs coincidem com os LPMs, isto é,

$$\mathrm{BPM}_\alpha(\tau, 0, Y) = \mathrm{LPM}_\alpha(\tau, Y).$$

Os BPMs são uma medida de risco global pois debruçam-se em toda a distribuição de uma variável aleatória Y. No entanto, não são uma medida de risco coerente nem convexa.

Como veremos mais à frente, é complicado utilizar os BPMs, na sua definição mais geral, como medida de risco em problemas de optimização em selecção de carteiras. No entanto, em casos particulares como o da semi-variância balanceada, será mais fácil formular problemas de optimização tratáveis computacionalmente. Para interpretar melhor os BPMs, definem-se as seguintes variáveis aleatórias

$$\begin{aligned} g(\tau, Y) &= \max(0, \tau - Y), \\ h(\tau, Y) &= \max(0, Y - \tau). \end{aligned}$$

É fácil verificar que $g \geq 0$ e $h \geq 0$. A variável $g(\tau, Y)$ representa os retornos negativos enquanto que a variável $h(\tau, Y)$ descreve os retornos positivos, ambas com respeito à referência $\tau = \eta$. Com o auxílio destas duas variáveis aleatórias pode-se reescrever os BPMs como

$$\mathrm{BPM}_\alpha(\tau, b, Y) = E(g(\tau, Y)^\alpha) + b \cdot E(h(\tau, Y)^\alpha), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

Em suma, os BPMs são uma generalização dos LPMs, onde o risco de perdas (simétrico dos retornos) é complementado com o potencial de ganhos (retornos). Os momentos parcialmente bilaterais são consistentes com a percepção de risco que um investidor tem e, para muitos, são uma medida de risco apropriada e atraente.

2.6. Valor em risco condicional (CVaR)

Existem outras medidas de risco para além daquelas descritas até aqui. Uma das medidas mais importantes a ter em consideração é o Valor em Risco Condicional (CVaR) (também denominado Perda Esperada (ES)). Esta medida está relacionada, de forma explícita, a outra medida de risco mais simples, o Valor em Risco (VaR). Neste trabalho vamos introduzir o conceito de valor em risco, mas apenas com a intenção de definir valor em risco condicional e não como uma medida de risco a estudar.

Uma das principais propriedades do CVaR é o facto de ser uma medida de risco coerente (ao contrário do VaR e de todas as outras estudadas), satisfazendo, assim, as propridades importantes desse tipo de medidas de risco introduzidas no início deste capítulo. Com o objectivo de definir VaR começa-se por introduzir a variável aleatória $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que representa as perdas associadas a um investimento.

Definição 2.11. *Seja $\beta \in (0,1)$. Define-se Valor em Risco (*VaR*) (expresso em níveis de probabilidade) como sendo*

$$\mathrm{VaR}_\beta(Y) = \min\{\gamma : P(Y \leq \gamma) \geq \beta\},$$

em que β toma valores, normalmente, perto de 1.

Assim, o VaR representa a menor perda possível com probabilidade superior, ou igual, a β. Como já foi visto no início do capítulo uma das propriedades que as medidas de risco devem satisfazer é a subaditividade. O valor em risco não satisfaz esta propriedade e, para além disso, não é convexa. Não é também suave no sentido de admitir derivadas contínuas. Sendo assim não é uma medida de risco apropriada e interessante. No entanto, o CVaR satisfaz estas propriedades tornando-o muito mais atraente como medida de risco na prática.

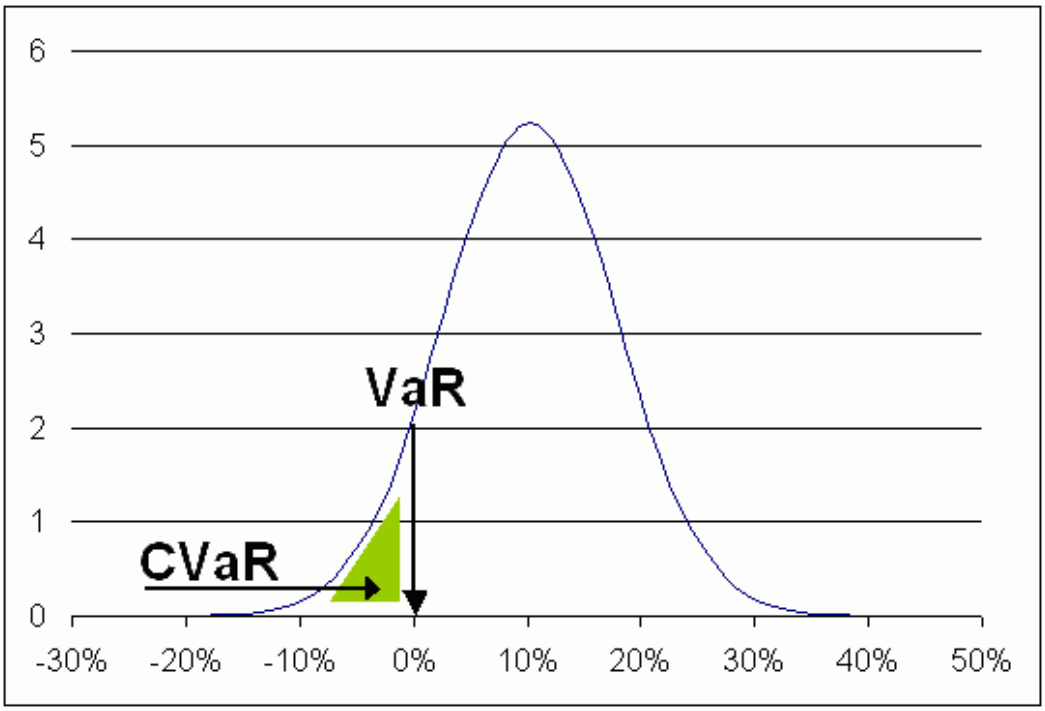


Figura 2.1: VaR e CVaR

Definição 2.12. *Seja $\beta \in (0,1)$ e $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória absolutamente contínua com função densidade $f_Y(y)$. Define-se Valor em Risco Condicional (*CVaR*) como sendo*

$$\mathrm{CVaR}_\beta(Y) = \frac{1}{1-\beta}\int_{y \geq \mathrm{VaR}_\beta(Y)} y f_Y(y)dy.$$

O CVaR mede a perda esperada para além do VaR. O CVaR dá-nos então uma indicação do tamanho das perdas extremas, quando o valor do VaR é ultrapassado. A Figura 2.1 mostra-nos a relação que existe entre o valor em risco e o valor em risco condicional e também que o CVaR se localiza sempre à esquerda do VaR, algo que se prova matematicamente com facilidade [4, 38].

O valor em risco condicional é uma medida de risco coerente. Para além disso, o $\mathrm{CVaR}_\beta(Y)$ é uma função contínua de β. Por isso, independentemente das distribuições subjacentes, temos a convicção que o risco medido através do CVaR não se altera drasticamente quando há uma alteração no nível de confiança (em alguns pontos percentuais). Outra propriedade do $\mathrm{CVaR}_\beta(Y)$ é o facto deste ser uma função monótona em β. Assim, quanto menor for o valor de β, maior é o risco (variabilidade indesejada da distribuição em causa).

Capítulo 3

Optimização do risco em selecção de carteiras

Harry Markowitz foi o primeiro investigador a quantificar a noção de risco no âmbito do investimento em carteiras (Markowitz, 1952). Usando o trabalho de Markowitz, um investidor pode escolher títulos accionistas e definir uma carteira de forma a maximizar o retorno esperado para um determinado nível de risco ou minimizar o risco para um determinado nível de retorno.

As carteiras de investimentos são, de forma geral, um conjunto de títulos accionistas (acções ou obrigações, por exemplo). A gestão de investimentos tem incorporada uma relação clara entre risco e retorno. O retorno esperado pelo investidor está relacionado com o risco que pretende correr. Esta atitude depende do seu perfil de risco. No caso do investidor possuir aversão ao risco irá optar por uma carteira com menor risco, logo menor retorno, se for propenso ao risco irá optar por uma carteira de maior risco, logo maior retorno.

Ao longo deste capítulo vamos introduzir vários problemas de optimização (essencialmente problemas lineares e quadráticos) que servirão de base para o estudo empírico relatado no capítulo seguinte. Estes problemas assentam na intenção de minimizar o risco, medido de diversas formas consoante a medida de risco em causa (média-variância, LPM, BPM, entre outras).

3.1. Abordagem tradicional (média-variância)

Na abordagem tradicional começa-se por definir as variáveis aleatórias R_i que representam o retorno esperado de um título accionista i entre um conjunto de n títulos. Em relação a esses retornos conhece-se uma estimação μ_i da média de cada um, normalmente feita utilizando dados históricos. Denota-se por x_i a proporção de investimento feito no título accionista i.

O retorno esperado da carteira é dado e estimado por

$$E(R(x)) = E(x_1R_1 + \cdots + x_nR_n) \simeq x_1\mu_1 + \cdots + x_n\mu_n = \mu^\top x.$$

A variância do retorno é introduzida e estimada por

$$V(R(x)) = E\left(\left[\sum_{i=1}^{n} x_iR_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} x_iR_i\right)\right]^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j \simeq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Sigma_{ij}x_ix_j,$$

em que a matriz de covariâncias $\Sigma(R(x))$ é dada, entrada a entrada, por $\sigma_{ij} = E[(R_i - E(R_i))(R_j - E(R_j))]$. A matriz Σ representa uma estimação de $\Sigma(R(x))$. De forma equivalente pode-se escrever a estimação da variância na forma matricial $x^\top\Sigma x$.

Como foi dito na Secção 2.2 vamos então supor que a matriz Σ é definida positiva, traduzindo-se este facto na inexistência de títulos accionistas redundantes. Nesta Secção, a teoria de selecção de carteiras vai ser abordada recorrendo à optimização média-variância.

Esta teoria explica como um investidor deve distribuir os pesos numa carteira de forma a maximizar o retorno para um dado risco, ou minimizar o risco para um dado retorno. Um aspecto importante que se deve considerar é que algumas carteiras não são admissíveis. De uma forma simples vai-se representar por X o conjunto das carteiras admissíveis. Consideraremos apenas casos em que X é poliédrico.

A restrição mais comum impõe que as variáveis x_i representem as proporções do investimento total

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Outras restrições do modelo média-variância traduzem a impossibilidade do investidor tomar posições curtas (vendas a descoberto) e podem-se representar como

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Estas restrições de desigualdade podem ser relaxadas, por forma a estudar a diferença entre a possibilidade de existirem ou não posições curtas e quais os resultados (teóricos e empíricos) dessa alteração. Pode-se então escrever o conjunto X como sendo

$$X = \left\{x \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n\right\}.$$

Dado um nível de retorno r, o problema de optimização média-variância OMV(r) formula-se como um problema de optimização quadrática (QP)

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{2}x^\top \Sigma x \\ \text{s.a} \quad & \mu^\top x \geq r \\ & x \in X, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde o factor $\frac{1}{2}$ serve apenas para tornar os cálculos mais simples e não afecta o problema de optimização. Trata-se, de facto, de um QP pois a função objectivo é quadrática e as restrições são lineares. É também um problema de optimização convexo dado que as restrições são convexas e a função objectivo é convexa. Para cada valor de retorno r, o programa OMV(r) tem apenas uma única solução óptima (se existir $x \in X$ tal que $\mu^\top x \geq r$), uma vez que a função é uniformemente convexa.

Um dos principais pressupostos na teoria da optimização média-variância é que os retornos das carteiras se comportam como se seguissem uma distribuição normal. De facto, uma distribuição normal utilizaria apenas dois parâmetros para descrever toda a distribuição dos retornos: a média e a variância (covariâncias), tornando irrelevante especificar momentos de ordem superior (curtose, por exemplo). A variância procura descrever o quanto os retornos se diferenciam do valor médio, para ambos os lados de uma distribuição. Para além disto se um utilizador possuir uma função de utilidade quadrática, a optimização média-variância pode produzir resultados satisfatórios. Esta questão vai ser abordada na próxima secção.

3.2. Limitações da abordagem tradicional e utilidade quadrática

A abordagem tradicional da optimização em selecção de carteiras (recorrendo à utilização de médias e variâncias) nem sempre é viável. No entanto, mostra-se que a sua utilização é satisfatória (do ponto de vista das soluções obtidas) quando a distribuição dos retornos R é aproximada por uma distribuição normal multivariada ou se o investidor possui uma função de utilidade quadrática.

É fácil para um investidor saber se os retornos dos seus títulos accionistas são distribuídos normalmente usando, por exemplo, um gráfico de probabilidade normal. Caso não sejam distribuídos normalmente tem-se, à partida, uma resposta negativa à utilização da abordagem tradicional, pois a teoria de selecção de carteiras clássica não responde, de forma satisfatória, a tais distribuições.

Além disso, a matriz de covariâncias $\Sigma(Y)$ e o vector de médias $E(Y)$ não são observáveis e precisam de ser estimados. O processo de estimação é feito normalmente

recorrendo aos dados históricos. No entanto, não se podem utilizar dados muito antigos uma vez que estes são irrelevantes e geram uma má previsão dos movimentos futuros dos títulos accionistas. Os investidores são então induzidos a utilizar poucos dados o que pode levar a erros de estimação.

Substituir a variância permite atenuar o pressuposto de que as distribuições (dos retornos R de uma carteira) são aproximadamente normais e abre a porta à utilização de outras medidas de risco (CVaR, LPMs, entre outras) em selecção de carteiras.

O objectivo do nosso trabalho não é utilizar a teoria da utilidade para resolver problemas de selecção de carteiras, mas sim utilizar novas medidas de risco, diferentes das usuais (ou seja, diferente da variância, por exemplo). Contudo a noção de utilidade, mais concretamente, a de função de utilidade, é importante na teoria da selecção de carteiras. A teoria da utilidade tem como objectivo estudar uma forma de construir um modelo matemático que descreva a avaliação que um indivíduo faz de eventos que envolvam variáveis aleatórias. A primeira definição a introduzir é a de função de utilidade.

Definição 3.1. *À função $u(\cdot)$ que exprime a importância atribuída pelo investidor ao seu capital disponível chama-se função de utilidade.*

Naturalmente, uma função utilidade é não decrescente, pois quanto maior o capital disponível, maior é a importância que se lhe atribui. As funções de utilidade são, geralmente, côncavas reflectindo o facto de que, à medida que o capital dos investidores aumenta, o aumento monetário vai ter menos importância na sua utilidade.

Neste trabalho, ao falar de funções de utilidade, referir-nos-emos a funções $u(x)$ duas vezes diferenciáveis e que, em geral, satisfazem $u'(x) \geq 0$ e $u''(x) \leq 0$. Define-se o coeficiente de aversão ao risco de Arrow-Pratt por

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

Este coeficiente explica como a aversão ao risco muda com o nível de saúde financeira (relativa ao valor de capital a investir). Por exemplo, $u(x) = \ln(x)$ implica que $r(x) = \frac{1}{x}$, ou seja, a aversão ao risco diminui quanto mais um investidor for saudável (maior capital possuir). Define-se ainda o equivalente de certeza C

$$u(C) = E(u(X)). \tag{3.2}$$

Assim sendo, o montante que pode ser tido como certo C tem o mesmo nível de utilidade que a utilidade esperada da variável aleatória X.

Seja agora $R(x)$ o retorno de uma carteira, que pode ser expresso, num modelo a um período, por $R(x) = x^\top R,\ R = (R_1, \ldots, R_n)$. Isto significa que o valor da carteira no instante $t = 1$ aumenta de um valor inicial V_0 para $V_1 = V_0(1+x^\top R)$. Esta expressão conduz a um problema de optimização no âmbito do estudo da utilidade esperada

$$\begin{array}{ll} \min_x & E(V_0(1 + x^\top R)) \\ \text{s.a} & x^\top \mathbf{1} = 1, \end{array} \tag{3.3}$$

onde $\mathbf{1}$ é um vector de uns em $\mathbb{R}^n$. A função objectivo deste problema designa-se por utilidade esperada.

Supõe-se ainda que o investidor tem uma função de utilidade quadrática da forma

$$u(x) = c_1 x - \frac{c_2}{2} x^2.$$

A expressão da utilidade esperada pode ser reescrita utilizando a equação anterior, o equivalente de certeza (3.2) e alguns cálculos [39]. Obtém-se assim

$$\begin{aligned} E(V_0(1 + x^\top R)) &= c_1 V_0 E(1 + x^\top R) - \frac{c_2 V_0^2}{2} E((1 + x^\top R)^2) \\ &= c_2 V_0^2 \left(\frac{c_1 V_0}{c_2 V_0^2} - \frac{1}{2} + \frac{c_1 V_0 - c_2 V_0^2}{c_2 V_0^2} x^\top \mu - \frac{1}{2} \left(x^\top \mu \right)^2 - \frac{1}{2} x^\top Q x \right). \end{aligned}$$

Introduzindo a constante $\phi = \dfrac{c_1 V_0 - c_2 V_0^2}{c_2 V_0^2}$, a expressão da utilidade esperada pode ser escrita por fim como

$$E(V_0(1 + x^\top \mu)) = \phi x^\top \mu - \frac{1}{2}(x^\top \mu)^2 - \frac{1}{2} x^\top \Sigma x.$$

O problema de optimização (3.3) pode ser reescrito com a fórmula anterior para $E(V_0(1+x^\top \mu))$. As condições necessárias de primeira ordem deste problema vão ser iguais às do problema de optimização média-variância $\min_x x^\top \Sigma x$ s.a $\mu^\top x = r,\ x^\top \mathbf{1} = 1$[1], se este último for resolvido com

$$r = \frac{b}{c} + \left(\frac{ac - b^2}{ac - b^2 + c} \right) \left(\frac{\phi c - b}{c} \right),$$

para $a = \mu^\top \Sigma^{-1} \mu,\ b = \mu^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1}$ e $c = \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1}$.

Concluímos que maximizar a utilidade esperada de um investidor com função de utilidade quadrática conduz à mesma solução óptima que resolver um problema de optimização média-variância em selecção de carteiras. Se a função de utilidade de um investidor não for quadrática, a abordagem tradicional não consegue, do ponto de vista teórico, obter resultados satisfatórios e, assim, existe a necessidade de recorrer a medidas de risco alternativas como as apresentadas neste estudo.

[1] Ver explicação pormenorizada em [39].

3.3. Abordagem utilizando os momentos parcialmente inferiores (LPMs)

São essencialmente dois os problemas que se colocam à teoria de selecção de carteiras clássica

- A teoria não é suficientemente boa, no sentido de não responder a vários tipos de distribuições (normais e não-normais) de igual forma.
- A teoria não permite a utilização de medidas de risco alternativas, como por exemplo, os LPMs, os BPMs e o CVaR, que levariam a respostas (soluções) melhores que as dadas pelas medidas clássicas.

Uma alternativa à utilização da variância como medida de risco e consequentemente à necessidade do investidor possuir uma função de utilidade quadrática é a medida de risco Momento Parcialmente Inferior (LPM). Esta medida é caracterizada por um conjunto mais geral de funções de utilidade [15] e a sua utilização não está condicionada a uma distribuição de probabilidade específica.

Nesta secção, supõe-se que os investidores se preocupam com médias e LPMs (em vez de com médias e variâncias) e, assim, a teoria passa a intitular-se optimização média-LPMs. Para além disso, também serão introduzidos os problemas de optimização referentes aos particulares da Semi-Variância (SV) e Desvio Semi-Absoluto Inferior (SDA).

3.3.1. Risco definido pelos LPMs

Ainda antes de introduzir o problema de optimização em selecção de carteiras média-LPM, recordam-se as vantagens de utilizar o LPM em vez da variância como medida de risco na teoria de carteiras

1. A variância mede tanto o risco associado a grandes perdas (simétrico do retorno) como o risco associado a grandes retornos. Os investidores, por seu lado, têm como objectivo maximizar o risco de subida (valores elevados na distribuição do retorno R) em vez de o minimizar. Os LPMs evitam a minimização do risco de subida.
2. A variância é o momento centrado de segunda ordem mas, por vezes, são necessários momentos de ordem superior para descrever as distribuições. Os LPMs podem captar esses momentos superiores.

3. O uso da variância pressupõe que a função de utilidade dos investidores seja quadrática. Se um investidor não estiver de acordo com esta visão, a teoria de selecção de carteiras tradicional não irá maximizar a sua utilidade. A utilização dos LPM dá ao investidor a opção de escolher a ordem da sua função de utilidade [15].

Dadas T observações do retorno R_i do título i, é possivel aproximar o Momento Parcialmente Inferior $\mathrm{LPM}_\alpha(\tau, R_i)$ de grau α com referência a τ por

$$\mathrm{LPM}_\alpha(\tau, R_i) \simeq \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[\max\left(0, (\tau - R_{it})\right)\right]^\alpha .$$

A ordem α do LPM caracteriza a percepção de risco que um investidor possui. Assim, α pode ser considerado um parâmetro que descreve a aversão ao risco por parte de um investidor. Por este facto, a optimização média-LPM consegue captar as preferências de um investidor relativas ao risco, tais como aversão ao risco $\alpha > 1$, neutralidade ao risco $\alpha = 1$ e propensão ao risco $0 < \alpha < 1$. Quanto maior for essa aversão mais elevado será o valor de α.

Para resolver o problema de optimização média-LPM, introduzem-se os co-Momentos Parcialmente Inferiores (CLPM) associados aos títulos accionistas. Dado um conjunto de observações $R_{it},\ i = 1, \ldots, n,\ t = 1, \ldots, T$, para os retornos dos títulos accionistas, o CLPM de ordem 2 e com referência a τ do retorno do título accionista i com o título accionista j é aproximado por

$$\mathrm{CLPM}_2(\tau)_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}(\tau - R_{it})(\tau - R_{jt})d_i, \tag{3.4}$$

onde $d_i = 1$ quando R_{it} está abaixo do nível de referência τ e $d_i = 0$ caso contrário. Em geral tem-se que $d_i \neq d_j$, o que implica que a matriz dos CLPMs não é simétrica. Tal facto dificulta a representação dos LPMs de uma forma semelhante àquela apresentada para a variância na teoria de selecção de carteiras tradicional.

A expressão anterior, para o caso $\alpha = 2$, foi generalizada por Nawrocki (1991), que assim introduziu uma aproximação para a definição de $\mathrm{LPM}_\alpha(\tau, R(x))$

$$\mathrm{LPM}_\alpha(\tau, R(x)) \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \,\mathrm{CLPM}_{\alpha-1}(\tau)_{ij},$$

com

$$\mathrm{CLPM}_{\alpha-1}(\tau)_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[\max(0, \tau - R_{it})\right]^{\alpha-1}(\tau - R_{jt}).$$

Com esta definição é possível colocar o problema de optimização média-LPM

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{2} x^\top \text{ CL } x \\ \text{s.a} \quad & \mu^\top x \geq r \\ & x \in X, \end{aligned}$$

com $\text{CL}_{ij} = \text{CLPM}_{\alpha-1}(\tau)_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Como foi referido, os CLPMs não são, geralmente, simétricos. Contudo, calcular o CLPM como uma medida simétrica torna o cálculo mais simples e leva a bons resultados (Nawrocki (1991)), e como tal essa essa possibilidade vai ser apresentada.

Dadas T observações do retorno R_i do título i, define-se semi-desvio de grau α com referência a τ por

$$\text{SD}_{\alpha,i}(\tau) = \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} [\max(0, (\tau - R_{it}))]^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} = [\text{LPM}_\alpha(\tau, R_i)]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Agora, baseando-nos no semi-desvio de dois títulos i e j $(\text{SD}_{\alpha,i}(\tau), \text{SD}_{\alpha,j}(\tau))$ e no coeficiente de correlação $\rho_{ij} = \text{cov}(R_i, R_j)/(\sigma_i \sigma_j)$ entre esses dois títulos, pode-se aproximar os CLPMs simétricos (SCLPMs) da seguinte forma

$$\text{SCLPM}_{\alpha,i,j}(\tau) = \text{SD}_{\alpha,i}(\tau)\, \text{SD}_{\alpha,j}(\tau) \rho_{ij},$$

o que significa que o CLPM entre dois títulos pode ser expresso em termos de LPM.

Assim, denomina-se um LPM, em que o CLPM é simétrico, por Momento Parcialmente Inferior Simétrico (SLPM). O SLPM de uma carteira de títulos accionistas pode ser estimado por

$$\text{LPM}_\alpha(\tau, R(x)) \approx \sum_{i=1}^{T} \sum_{j=1}^{T} x_i x_j \, \text{SCLPM}_{\alpha-1,i,j}(\tau) = x^\top L\, x,$$

em que $L_{ij} = \text{SCLPM}_{\alpha-1,i,j}(\tau)$.

O problema de optimização que deve ser resolvido pode ser então escrito como

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{2} x^\top L x \\ \text{s.a} \quad & x^\top \mu \geq r \\ & x \in X. \end{aligned}$$

Uma vez que L é simétrica, o problema é quase idêntico ao que foi resolvido no caso da optimização média-variância. A única diferença é a substituição da matriz de covariâncias Σ pela matriz L.

3.3.2. Risco definido pelo desvio semi-absoluto inferior

Dado uma carteira de n títulos accionistas com retorno descrito pelo vector aleatório R, o desvio semi-absoluto inferior corresponde ao momento parcial inferior de grau 1 e valor de referência τ, ou seja, $\mathrm{LPM}_1(\tau, R(x))$. Assim, define-se o desvio semi-absoluto inferior [16] como

$$\mathrm{SDA}(\tau, R) = E\left[|R-\tau|_-\right],$$

com $|u|_- = \max\{0, -u\}$.

Por forma a formular um modelo de optimização média-desvio semi-absoluto inferior vai-se supor que se conhecem $R_{it},\ i = 1, \ldots, n$ e $t = 1, \ldots, T$ observações do vector R. Seja p_t a probabilidade de R tomar um dos valores $R_{1,t}, \ldots, R_{n,t}$ (normalmente define-se $p_t = 1/T$). O modelo de optimização média-desvio semi-absoluto inferior pode ser apresentado como

$$\begin{array}{ll} \min_x & \displaystyle\sum_{t=1}^{T} p_t \left| \sum_{i=1}^{n} (R_{it} - \mu_i) x_i \right|_- \\ \text{s.a} & \mu^\top x \geq r \\ & x \in X. \end{array} \tag{3.5}$$

Este programa de optimização média-SDA é equivalente ao seguinte programa linear (com $p_t = 1/T$)

$$\begin{array}{ll} \min_{x,z} & \displaystyle\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t \\ \text{s.a} & \displaystyle z_t \geq -\sum_{i=1}^{n} (R_{it} - \mu_i) x_i, \quad t = 1, \ldots, T \\ & \mu^\top x \geq r \\ & x \in X \\ & z_t \geq 0, \quad t = 1, \ldots, T. \end{array} \tag{3.6}$$

Uma sua solução óptima (x^*, z^*) contém uma solução óptima x^* para o problema (3.5). Reciprocamente, uma solução óptima x^* do problema (3.5) está presente numa solução óptima (x^*, z^*) para o problema (3.6). Assim, os dois problemas de optimização são equivalentes.

3.3.3. Risco definido pela semi-variância

Em relação à optimização média-semi-variância de problemas de selecção de carteiras podemos utilizar uma abordagem análoga à feita anteriormente. Assim, a

semi-variância do vector de retornos R associado aos n títulos accionistas, pode ser estimada por

$$\sum_{t=1}^{T} p_t \left| \sum_{i=1}^{n} (R_{it} - \mu_i) x_i \right|_{-}^{2} . \tag{3.7}$$

Utilizando esta formulação, o programa de optimização média-semivariância é expresso por

$$\begin{aligned} \min_{x,z} \quad & \sum_{t=1}^{T} p_t \left| \sum_{i=1}^{n} (R_{it} - \mu_i) x_i \right|_{-}^{2} \\ \text{s.a} \quad & \mu^\top x \geq r \\ & x \in X. \end{aligned}$$

Este problema de optimização é equivalente ao seguinte programa quadrático (com $p_t = 1/T$)

$$\begin{aligned} \min_{x,z} \quad & \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} z_t^2 \\ \text{s.a} \quad & z_t \geq -\sum_{i=1}^{n} (R_{it} - \mu_i) x_i, \quad t = 1, \ldots, T \\ & \mu^\top x \geq r \\ & x \in X \\ & z_t \geq 0, \quad t = 1, \ldots, T, \end{aligned} \tag{3.8}$$

em que a parte x^* de uma solução óptima (x^*, z^*) é uma solução óptima para o problema (3.8).

A semi-variância associada aos retornos de dois títulos i e j pode ser definida por (ver Hogan e Warren (1974))

$$\Sigma_{ij}^{HW}(R) = E\left[(R_i - r_f)\min(r_f - R_j, 0)\right],$$

No entanto, esta definição apresenta dois inconvenientes

1. O valor de referência é igual ao valor do retorno do título livre de risco r_f e não pode ser alterado para um valor mais desejado.

2. Normalmente $\Sigma_{ij}^{HW}(R) \neq \Sigma_{ji}^{HW}(R)$.

O segundo inconveniente é particularmente limitante tanto matematicamente (porque assim a matriz de semi-covariância é assimétrica) como financeiramente (não é claro como interpretar a contribuição do título i e j para o risco de uma carteira).

Por forma a resolver estes problemas, Estrada (2002) redefiniu a semi-covariância entre os títulos i e j com respeito a um valor de referência τ por

$$\Sigma_{ij}^{\mathrm{SV}}(R) = E\left[(\min(R_i - \tau, 0))(\min(R_j - \tau, 0))\right].$$

Esta definição pode ser utilizada para qualquer valor de τ desejado e gera uma matriz de semi-covariâncias simétrica. Esta semi-covariância entre os títulos i e j com referência a τ pode ser discretizada (dadas T observações para cada título) por

$$\Sigma_{ij}^{\mathrm{SV}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[\min(R_{it} - \tau, 0)\min(R_{jt} - \tau, 0)\right].$$

Assim, é possível introduzir uma nova formulação para o problema de optimização média-semi-variância recorrendo à matriz de semi-covariâncias introduzida por Estrada [8]

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{2}x^\top \Sigma^{\mathrm{SV}} x \\ \text{s.a} \quad & \mu^\top x = r \\ & x \in X. \end{aligned} \tag{3.9}$$

O risco descrito pela semi-variância, ao contrário do que acontece na optimização média-variância, considera a atitude assimétrica de um investidor. Assim, a informação contida na parte superior (acima do valor de referência τ) da distribuição dos retornos de uma carteira não contribui para o risco, sendo apenas considerada na média da distribuição.

3.4. Abordagem utilizando momentos parcialmente bilaterais (BPMs)

Recordamos que na abordagem utilizando BPMs são tidos em consideração dois tipos de assimetria, uma na preferência entre a variabilidade acima e abaixo de um valor de referência e outro na preferência entre pequenos e grandes desvios de um valor de referência. A primeira assimetria descreve as diferenças de atitude que um investidor exibe perante ganhos e perdas. A segunda assimetria reflecte a inclinação do investidor (no caso de retornos esperados) ou aversão (no caso de perdas esperadas) aos acontecimentos extremos.

Estamos interessados em estudar como é que um investidor, que mede o seu risco através dos BPMs e de um retorno de referência τ, define as proporções de investimento em cada título accionista de uma carteira, de modo a obter a melhor

oportunidade de investimento entre todas as possibilidades. Dados n títulos accionistas com retorno descrito pelo vector aleatório R, o problema de optimização média-momentos parcialmente bilaterais com referência a τ e coeficiente de balanceamento b é não linear e formula-se por

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \mathrm{BPM}_\alpha(\tau, b, R(x)) \\ \text{s.a} \quad & x^\top \mu \geq r \\ & x \in X. \end{aligned}$$

Para simplificar a selecção de carteiras utilizando BPMs, recorre-se aos dados históricos e usa-se uma abordagem discreta. Usando aproximações históricas $R_{it},\ i = 1, \ldots, n,\ t = 1, \ldots, T$ para os retornos, os BPMs podem ser aproximados por

$$\mathrm{BPM}_\alpha(\tau, b) = \frac{1}{T} \sum_{R_{it} \leq \tau} (\tau - R_{it})^\alpha + \frac{b}{T} \sum_{R_{it} > \tau} (\tau - R_{it})^\alpha.$$

Esta abordagem não conduz, porém, a um problema de optimização de fácil resolução e vai ser substituida por outra.

Suponhamos que os dados históricos dos retornos dos n títulos accionistas são armazenados numa matriz H de dimensão $n \times T$ (com $H_{it} = R_{it}$). Neste caso, o vector das perdas (retornos abaixo do valor de referência τ) da carteira x é dado por

$$\mathbf{g} = \max(0, \tau \mathbf{1} - Hx) \tag{3.10}$$

e o vector dos ganhos (retornos acima do valor de referência τ) é

$$\mathbf{h} = \max(0, Hx - \tau \mathbf{1}), \tag{3.11}$$

onde, recorde-se, $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$.

Existe uma relação entre estes dois vectores que irá possibilitar a introdução de problemas de optimização mais simples. Tal relação é descrita pela equivalência

$$\begin{cases} \mathbf{g} = \max(0, \tau \mathbf{1} - Hx) \\ \mathbf{h} = \max(0, Hx - \tau \mathbf{1}) \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{h} - \mathbf{g} = Hx - \tau \mathbf{1} \\ \mathbf{g}^\top \mathbf{h} = 0 \\ \mathbf{h} \geq 0, \quad \mathbf{g} \geq 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Esta equivalência permite-nos relacionar as condições de um operador (função máximo) descontínuo e um conjunto de restrições que são lineares, de complementaridade e não-negativas. Esta equivalência desempenha um papel fundamental na formulação dos problemas de optimização em selecção de carteiras usando BPMs.

3.4.1. O caso particular da optimização semi-variância balanceada

O problema de optimização em selecção de carteiras com risco definido através da semi-variância balanceada $\mathrm{BPM}_2(\tau, b, R(x))$ pode ser apresentado recorrendo à decomposição do retorno da carteira acima descrita, da seguinte forma

$$\begin{array}{ll} \min_{x,\mathbf{g},\mathbf{h}} & \frac{1}{T}(\mathbf{g}^\top \mathbf{g} + b\mathbf{h}^\top \mathbf{h}) \\ \text{s.a} & \mathbf{g} = \max(0, \tau\mathbf{1} - Hx) \\ & \mathbf{h} = \max(0, Hx - \tau\mathbf{1}) \\ & \frac{1}{T}\mathbf{1}^\top Hx \geq r \\ & x \in X. \end{array}$$

Com a equivalência (3.12) apresentada anteriormente e recorrendo às transformações

$$(\mathbf{h} - \mathbf{g})^\top (\mathbf{h} - \mathbf{g}) = \mathbf{h}^\top \mathbf{h} + \mathbf{g}^\top \mathbf{g}$$

e

$$(\mathbf{h} - \mathbf{g})^\top (\mathbf{h} - \mathbf{g}) = (Hx - \tau\mathbf{1})^\top (Hx - \tau\mathbf{1}),$$

tem-se que

$$\mathbf{h}^\top \mathbf{h} = (Hx - \tau\mathbf{1})^\top (Hx - \tau\mathbf{1}) - \mathbf{g}^\top \mathbf{g}.$$

Assim, pode-se reescrever o problema anterior da seguinte forma

$$\begin{array}{ll} \min_{x,\mathbf{g},\mathbf{h}} & \xi(x, \mathbf{g}, \mathbf{h}) = b(Hx)^\top Hx - 2b\tau\mathbf{1}^\top Hx + (1-b)\mathbf{g}^\top \mathbf{g} \\ \text{s.a} & Hx + \mathbf{g} - \mathbf{h} = \tau\mathbf{1} \\ & \mathbf{g}^\top h = 0 \\ & \mathbf{h} \geq 0, \quad \mathbf{g} \geq 0 \\ & \frac{1}{T}\mathbf{1}^\top Hx \geq r \\ & x \in X. \end{array} \tag{3.13}$$

Se, além disso, o factor de balanceamento b for tal que $b < 1$ então o problema anterior pode ser simplificado e reescrito como um programa quadrático (QP)

$$\begin{array}{ll} \min_{x,\mathbf{g}} & \zeta(x, \mathbf{g}) = b(Hx)^\top Hx - 2b\tau\mathbf{1}^\top Hx + (1-b)\mathbf{g}^\top \mathbf{g} \\ \text{s.a} & Hx + \mathbf{g} \geq \tau\mathbf{1}, \quad \mathbf{g} \geq 0 \\ & \frac{1}{T}\mathbf{1}^\top Hx = r \\ & x \in X. \end{array} \tag{3.14}$$

A possibilidade de reescrever o problema de optimização em selecção de carteiras com risco definido através da semi-variância balanceada como um programa quadrático deve-se às duas proposições apresentadas de seguida.

Proposição 3.1. *Denote-se por* $(x, \mathbf{g})$ *a solução óptima do programa quadrático (3.14). Se* $b < 1$ *e se* $\mathbf{h} = Hx + \mathbf{g} - \tau\mathbf{1}$*, então* $\mathbf{g}^\top \mathbf{h} = 0$.

Demonstração 3.1. *Seguindo os passos de [2] e por redução ao absurdo suponha-se que* $\mathbf{g}^\top \mathbf{h} \neq 0$. *Uma vez que* $\mathbf{g} \geq 0$, $\mathbf{h} = Hx + \mathbf{g} - \tau 1 \geq 0$, *irá existir pelo menos um* $i \in \{1, \ldots, T\}$, *tal que* $g_i > 0$ *e* $h_i > 0$. *Seja agora*

$$p_i = \max(g_i - h_i, 0) \geq 0.$$

Seja ainda $\mathbf{g}_*^i$ *o vector obtido de* $\mathbf{g}$, *trocando a componente* g_i *por* p_i. *É fácil mostrar que* $(x, \mathbf{g}_*^i)$ *é um ponto admissível para (3.14). Para além disso, tem-se que* $q_i - p_i = h_i - g_i$. *Logo,*

$$\begin{aligned}
\zeta(x, \mathbf{g}) - \zeta(x, \mathbf{g}_*^i) &= (1-b)(\mathbf{g}^\top \mathbf{g} - (\mathbf{g}_*^{i\top} \mathbf{g}_*^i)) \\
&= (1-b)(g_i^2 - p_i^2) \\
&= (1-b)(g_i + p_i)[g_i - \max(g_i - h_i, 0)] \\
&\geq (1-b) g_i [g_i - \max(g_i - h_i, 0)] \\
&= (1-b) g_i \min(g_i, h_i) \\
&> 0,
\end{aligned}$$

o que prova que $(x, \mathbf{g})$ *não é uma solução óptima de (3.14). Chegou-se a uma contradição, o que mostra que* $\mathbf{g}^\top \mathbf{h} = 0$. ■

Teorema 3.2. *A solução óptima para o programa não-linear com semi-variância balanceada (3.13) e a solução óptima para o programa quadrático (3.14) são idênticas quando* $b < 1$.

Demonstração 3.2. *A demonstração segue os passos de [2]. Suponha-se que* $(x, \mathbf{g})$ *é uma solução de (3.14) e que* $(x, \mathbf{g}, \mathbf{h})$, *com* $\mathbf{h} = Hx + \mathbf{g} - \tau\mathbf{1}$, *não é uma solução óptima de (3.13). Seja* $(x^*, \mathbf{g}^*, \mathbf{h}^*)$ *uma solução óptima arbitrária de (3.13). Então* $(x^*, \mathbf{g}^*)$ *é um ponto admissível para (3.14) e* $\xi(x^*, \mathbf{g}^*, \mathbf{h}^*) < \xi(x, \mathbf{g}, \mathbf{h})$, *ou seja* $\zeta(x^*, \mathbf{g}^*) < \zeta(x, \mathbf{g})$, *o que significa que* $(x, \mathbf{g})$ *não é uma solução óptima de (3.14), e chega-se assim a uma contradição.*

Veja-se agora o caso em que $(x, \mathbf{g}, \mathbf{h})$ *é uma solução óptima de (3.13) e* $(x, \mathbf{g})$ *não é uma solução óptima de (3.14). Seja* $(x^*, \mathbf{g}^*)$ *uma solução óptima arbitrária de (3.14). Definindo-se* $\mathbf{h}^* = Hx^* + \mathbf{g}^* - \tau\mathbf{1}$*, conclui-se, da demonstração da Proposição 3.1, que* $(x^*, \mathbf{g}^*, \mathbf{h}^*)$ *é um ponto admissível para (3.13). Contudo,* $\zeta(x^*, \mathbf{g}^*) < \zeta(x, \mathbf{g})$ *traduz-se em* $\xi(x^*, \mathbf{g}^*, \mathbf{h}^*) < \xi(x, \mathbf{g}, \mathbf{h})$*, o que mostra que* $(x, \mathbf{g}, \mathbf{h})$ *não é uma solução óptima para (3.13), conduzindo a uma contradição.* ■

3.4.2. O caso particular da optimização média-desvio semi-absoluto balanceado

Recordando o facto do desvio semi-absoluto balanceado corresponder ao Momento Parcialmente Bilateral com $\alpha = 1$, podemos descrevê-lo (utilizando a fórmula (2.3)) como

$$\mathrm{SDB}(\tau, R(x)) = \mathrm{BPM}_1(\tau, b, R(x)) = E(\mathbf{g}(\tau, R(x))) + b \cdot E(\mathbf{h}(\tau, R(x)))$$

com as funções $\mathbf{g}$ e $\mathbf{h}$ descritas em (3.10) e (3.11).

Analogamente aos resultados obtidos na subsecção anterior, o problema de optimização em selecção de carteiras com risco definido pelo desvio semi-absoluto balanceado pode ser colocado na forma

$$\begin{array}{ll} \min_{x,\mathbf{g},\mathbf{h}} & \frac{1}{T}(\mathbf{1}^\top \mathbf{g} + b\mathbf{1}^\top \mathbf{h}) \\ \text{s.a} & \mathbf{g} = \max(0, \tau\mathbf{1} - Hx) \\ & \mathbf{h} = \max(0, Hx - \tau\mathbf{1}) \\ & \frac{1}{T}\mathbf{1}^\top Hx \geq r \\ & x \in X. \end{array}$$

Também de forma semelhante ao ocorrido na subsecção anterior, este programa pode ser simplificado no programa linear apresentado de seguida, quando o coeficiente de balanceamento b é superior a -1.

$$\begin{array}{ll} \min_{x,\mathbf{g}} & b\mathbf{1}^\top Hx + (1+b)\mathbf{1}^\top \mathbf{g} \\ \text{s.a} & Hx + \mathbf{g} \geq \tau\mathbf{1} \quad \mathbf{g} \geq 0 \\ & \frac{1}{T}\mathbf{1}^\top Hx \geq r \\ & x \in X. \end{array} \tag{3.15}$$

3.5. Abordagem utilizando valor em risco condicional (CVaR)

Recordando a apresentação da Secção 2.6, vamos apresentar uma formulação geral para o problema de optimização média-CVaR em selecção de carteiras, para, de seguida, introduzir um programa linear que o aproxima (e que será utilizado no estudo empírico desta tese).

Vamos supor que a fonte de aleatoriedade não depende dos títulos accionistas. Usamos a variável aleatória W absolutamente contínua para o efeito, com função densidade $f_W(w)$. A perda $L(x,W)$ associada à carteira corresponde ao simétrico do retorno, $L(x,W) = -R(x,W) = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i(W)$. A sua função de distribuição é dada por

$$\Psi(x,\gamma) = P(L(x,W) \leq \gamma) = P(W \in L(x,W)^{-1}\{]-\infty,\gamma]\}) = \int_{L(x,w)\leq\gamma} f_W(w)dw.$$

O valor em risco condicional para a carteira x e para um determinado nível de probabilidade β define-se então como

$$\mathrm{CVaR}_\beta(x)\,[= \mathrm{CVaR}_\beta(L(x,W))] = \frac{1}{1-\beta}\int_{L(x,w)\geq \mathrm{VaR}_\beta(x)} L(x,w) f_W(w)dw,$$

em que

$$\mathrm{VaR}_\beta(x) = \mathrm{VaR}_\beta(L(x,W)) = \min\{\gamma : \Psi(x,\gamma) \geq \beta\}.$$

O problema de optimização média-CVaR (utilizando a notação da Secção 3.1) é colocado na forma

$$\begin{array}{ll} \min_x & \mathrm{CVaR}_\beta(x) \\ \text{s.a} & \mu^\top x \geq r \\ & x \in X. \end{array} \tag{3.16}$$

Para resolver este problema, Rockafellar e Uryasev (2002) definiram a seguinte função auxiliar (dependente de x e γ)

$$\begin{aligned} F_\beta(x,\gamma) &= \gamma + \frac{1}{1-\beta}\int_{L(x,w)\geq\gamma} [L(x,w)-\gamma]\, f_W(w)dw \\ &= \gamma + \frac{1}{1-\beta}\int (L(x,w)-\gamma)^+ f_W(w)dw, \end{aligned}$$

utilizando a função auxiliar $(\cdot)^+ = \max\{\cdot, 0\}$ e provaram que o problema (3.16) é equivalente a

$$\begin{array}{ll} \min_{x,\gamma} & F_\beta(x,\gamma) \\ \text{s.a} & x \in X. \end{array} \tag{3.17}$$

Mais concretamente, provaram que

1. Para cada x, $F_\beta(x,\gamma)$ é uma função convexa em γ,

2. Para cada x,$\mathrm{VaR}_\beta(x)$ é um minimizante de $F_\beta(x,\gamma)$ em γ,

3. O valor de $F_\beta(x,\gamma)$, quando $\gamma = \mathrm{VaR}_\beta(x)$, é precisamente, $\mathrm{CVaR}_\beta(x)$.

O problema (3.17) pode ser simplificado se forem conhecidas observações $R_{it} = -L_{it},\ i = 1,\ldots,n$ e $t = 1,\ldots,T$, para os retornos $R_i = R_i(W),\ i = 1,\ldots,n$. Tem-se assim que $L(x,W_t) = \sum_{i=1}^{n} L_{it}x_i$. A função $F_\beta(x,\gamma)$ é então aproximada por

$$\gamma + \frac{1}{(1-\beta)T}\sum_{t=1}^{T}(L(x,W_t)-\gamma)^+. \tag{3.18}$$

Com a aproximação (3.18), o problema (3.17) reduz-se a um programa linear

$$\begin{aligned} \min_{x,z} \quad & \gamma + \frac{1}{(1-\beta)T}\sum_{t=1}^{T} z_t \\ \text{s.a} \quad & z_t \geq \sum_{i=1}^{n} L_{it}x_i - \gamma, \quad t = 1,\ldots,T \\ & z_t \geq 0, \quad t = 1,\ldots,T \\ & x \in X. \end{aligned} \tag{3.19}$$

3.6. Fronteira de eficiência

Ao longo deste capítulo descrevemos um conjunto de problemas de optimização em selecção de carteiras em que se pretende minimizar uma medida de risco sujeito a um conjunto de restrições que, entre outras coisas, impõem a admissibilidade das carteiras. As medidas de risco variância, SDA, SV, SDB, semi-variância balanceada e CVaR, introduzidas no Capítulo 2, foram utilizadas para formular os problemas de optimização (3.1), (3.6), (3.9), (3.15), (3.13) e (3.19), respectivamente.

Em todos estes problemas de optimização de carteiras referidos anteriormente foi incluída uma restrição que impunha que o retorno esperado da carteira era superior um determinado nível r fixo. De facto, tipicamente, em selecção de carteiras não existe apenas uma função objectivo, o risco, mas sim duas funções objectivo, o risco e o retorno.

Dado um problema biobjectivo em que se pretende minimizar $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sujeito a $x \in X$, o objectivo é calcular o conjunto das soluções não dominadas. Neste tipo de problemas não existe uma única solução óptima, porque, geralmente, as duas funções são conflituosas. Calcula-se, assim, o conjunto das soluções eficientes ou não dominadas.

Definição 3.2. *Um ponto $x \in X$ diz-se uma solução não dominada se não existir nenhum ponto $\bar{x} \in X$ tal que $f_1(\bar{x}) > f_1(x)$ e $f_2(\bar{x}) > f_2(x)$.*

Ou seja, uma solução admissível diz-se não dominada se não existir um outro ponto admissível que melhore o valor das funções objectivo em simultâneo. No âmbito da selecção de carteiras considera-se, tipicamente, um gráfico em $\mathbb{R}^2$, a representar uma curva que é a imagem por f_1 e f_2 do conjunto de soluções não dominadas. Esta curva E define-se então por

$$E = \{(f_1(x), f_2(x)), \quad x \in N\},$$

onde N é o conjunto das soluções não dominadas de f_1 e f_2 em X. Usualmente, neste gráfico, representa-se no eixo das abcissas o risco e no eixo das ordenadas o retorno.

Uma forma de obter soluções não dominadas para os problemas em causa (que envolvem os dois objectivos) é minimizar uma das funções, a f_1 (que descreve as várias medidas de risco introduzidas neste estudo) sujeito a que f_2 ($\mu^\top x$, neste caso) seja maior ou igual que um nível r. Na prática, o que fizemos para determinar as várias fronteiras eficientes descritas no próximo capítulo, foi calcular um valor mínimo e máximo de r, a seguir discretizar o intervalo entre estes valores e depois resolver um conjunto de problemas de optimização da forma indicada anteriormente para vários valores de r, traçando de seguida a fronteira de eficiência como descrito anteriormente.

3.7. Medidas de desempenho

Nesta secção estamos interessados em estudar formas possíveis de avaliar o desempenho de carteiras calculadas através de soluções dos problemas de optimização baseados nas diferentes medidas de risco apresentadas nas Secções 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5. Para este efeito, existem vários rácios, entre os quais se destacam o rácio de Sharpe e o rácio de Sortino. No nosso estudo empírico, como veremos mais à frente, o desempenho *out-of-sample* das carteiras será avaliado por estes dois rácios.

3.7.1. Rácio de Sharpe

Baseado na abordagem tradicional proposta por Markowitz, Sharpe (1966) introduziu uma medida de desempenho assente no retorno médio e desvio-padrão de uma carteira. Esta medida denomina-se rácio de Sharpe e, define-se, para uma carteira x,

pelo quociente

$$\frac{\mu^\top x - r_f}{\sqrt{x^\top \Sigma x}},$$

onde, relembre-se, r_f é um valor de referência para o retorno de uma carteira sem risco. Após a introdução do conceito por Sharpe (1966), foi Ross (1976) que o utilizou para efeitos de avaliação do desempenho de carteiras. O rácio de Sortino, apresentado a seguir, usa a mesma ideia mas substitui a variância pela semi-variância.

3.7.2. Desempenho média-LPM e rácio de Sortino

Utilizando os Momentos Parcialmente Inferiores $\mathrm{LPM}_\alpha(\tau, R(x))$ e o valor r_f de referência para o retorno de uma carteira sem risco, define-se medida de desempenho média-LPM como sendo

$$\frac{\mu^\top x - r_f}{\sqrt[\alpha]{\mathrm{LPM}_\alpha(\tau, R(x))}}.$$

Ao contrário do que acontece no rácio de Sharpe, onde é utilizada a raíz quadrada do desvio (variabilidade do risco), na medida de desempenho média-LPM o desvio pode ser calculado para uma determinada ordem α. Fazendo $\alpha = 2$ na definição anterior, surge o rácio de Sortino

$$\frac{\mu^\top x - r_f}{\sqrt{\mathrm{SV}(\tau, R(x))}},$$

onde a parte relativa ao risco, em denominador, é dada pela raíz quadrada da semi-variância para o retorno de uma carteira x.

3.7.3. Desempenho média-BPM

O rácio de desempenho baseado no momento parcialmente bilateral para um título com retorno total descrito pela variável aleatória R_1 e valor de referência τ é definido, para quaisquer $\alpha, \beta > 0$, por

$$\frac{\left(E\left[\{\max(0, R_1 - \tau)\}^\beta\right]\right)^{1/\beta}}{\left(E\left[\{\max(0, \tau - R_1)\}^\alpha\right]\right)^{1/\alpha}},$$

onde α e β são definidos como na Fórmula (2.2).

O rácio anterior pode ser visto como uma forma de estudar o retorno por unidade de variabilidade. Quanto maior for o seu valor mais desejável será o título com retorno R_1. Podemos então pensar neste rácio como um critério de escolha para um conjunto de títulos comparáveis, dado um valor de referência τ igual para todos os títulos.

Este rácio utiliza diferentes ordens para o LPM e o UPM e esse facto é interessante, pois, na vida real, é normal existir assimetria nas preferências entre eventos favoráveis e desfavoráveis. Por exemplo, para $\beta = 1$ e $\alpha = 2$ temos que

$$\frac{E\left[\{\max(0, R_1 - \mathrm{MAR})\}\right]}{\sqrt{E\left[\{\max(0, \mathrm{MAR} - R_1)\}^2\right]}},$$

onde MAR é o retorno mínimo aceitável. Este rácio foi definido como uma medida de desempenho de fundos de pensões por Sortino (1999). Não será considerado no nosso estudo empírico, pois isso implicaria uma análise mais profunda do mesmo e um conjunto de dados diferente daqueles que utilizaremos.

Capítulo 4

Desempenho empírico

Neste capítulo vão ser reportados os testes realizados para determinar numericamente as diferentes fronteiras de eficiência das medidas de risco em estudo (LPM, BPM, CVaR e média-variância, entre outras) e avaliar o seu desempenho. Aplicou-se a metodologia apresentada no capítulo anterior (variando o valor de retorno pretendido) para determinar a fronteira de Pareto ou fronteira de eficiência associada aos problemas de optimização (3.1), (3.6), (3.9), (3.14), (3.15) e (3.19). Foram testados três conjuntos de dados obtidos a partir do índice português PSI 20 (ver Secção 4.1). As diferentes fronteiras de eficiência obtidas pela optimização *in-sample* inicial são apresentadas na Secção 4.2. Um estudo sobre o impacto dos coeficientes α, τ e b é introduzido nas Secções 4.3, 4.4 e 4.5, respectivamente.

O desempenho *out-of-sample* das carteiras resultantes destes problemas de optimização para as várias medidas de risco, quantificado através de uma estratégia de janela móvel, é descrito na Subsecção 4.6. Avaliou-se o desempenho *out-of-sample* recorrendo aos rácios de Sharpe e Sortino. Realizou-se ainda um comparação entre o retorno *out-of-sample* das carteiras produzidas pelos diversos problemas de optimização e o retorno *out-of-sample* resultante da implementação da estratégia *naive*. Este capítulo termina com uma discussão dos resultados obtidos.

4.1. Base de dados

A base de dados deste estudo consiste em títulos accionistas com elevado volume de transação que pertencem, actualmente, ao índice accionista PSI20 (*Portuguese Stock Index*). Considerou-se este mercado por ser constituído por uma grande variedade de títulos de diferentes áreas e sectores e incluir as principais empresas portuguesas com cotação em bolsa. Os títulos foram seleccionados considerando aqueles que estavam continuamente em transação há mais tempo até ao final do ano de 2014. A informação relativa aos títulos accionistas foi recolhida da base de dados existente publicamente no site http://www.bolsapt.com. As amostras que se utiliza-

ram respeitam aos períodos de 02/01/2009 a 31/12/2014 (correspondentes a (1542) observações). Neste trabalho utilizou-se o *software* MATLAB (versão 2.0 R2015a) para desenvolver o estudo empírico.

Formaram-se três conjuntos de dados, denominados $C4$, $C8$ e $C24$, com 4, 8 e 24 títulos accionistas, respectivamente. A Tabela 1 descreve a composição destes três conjuntos. Para definir estes conjuntos começou-se por determinar (recorrendo ao teste de normalidade Jarques-Bera) quais os títulos cujos retornos eram normalmente distribuídos. O conjunto $C4$ é constituído por 4 títulos que apresentaram um p-valor igual a zero no teste de Jarques-Bera. O conjunto $C8$ reuniu aos 4 títulos de $C4$ outros 4 que não possuem distribuição normal dos retornos. O conjunto $C24$ é composto por todos os títulos. Ao longo deste estudo empírico focar-nos-emos nas carteiras $C4$ e $C24$, a primeira constituída por títulos com distribuições de retornos não-normais e a segunda englobando todos os títulos em análise.

4.2. Desempenho *in-sample*

No estudo do desempenho *in-sample* começámos por analisar as propriedades estatísticas dos títulos que constituem o nosso conjunto de dados. Tais propriedades são descritas na Tabela 2, onde podemos verificar que a curtose e a assimetria dos títulos que constituem a carteira $C4$ é bastante mais elevada do que nos restantes. Traçámos as fronteiras de eficiência dos problemas de optimização média-variância, média-LPM (de ordem um e dois), média-BPM (de ordem um e dois) e média-CVaR.

A amostra *in-sample* utilizada foi de 02/01/2009 até 31/12/2013. As Figuras 1(a), 1(b) e 1(c) contêm os gráficos das fronteiras de eficiência calculadas para as carteiras $C4$, $C8$ e $C24$, respectivamente. Nestas figuras, o risco associado à carteira em análise, é medido pelo desvio-padrão. Nas Figuras 1(d), 1(e) e 1(f) estão representadas fronteiras de eficência para as mesmas carteiras, mas com o risco associado medido pelo CVaR. As Figuras 1(g), 1(h) e 1(i) medem o risco da carteira pela semi-variância e o retorno é descrito pelo UPM de grau três ($\alpha = 3$). Estes gráficos correspondem às fronteiras de eficiência associados aos problemas de optimização (3.1), (3.6), (3.9), (3.15), (3.14) e (3.19).

4.3. Impacto do coeficiente α de aversão ao risco

O nível de aversão ao risco de um investidor aumenta à medida que se eleva o valor do coeficiente α de aversão ao risco tanto nos problemas de optimização

média-LPM, descritos na Secção 3.3, como nos problemas de optimização média-BPM, que se apresentam na Secção 3.4. Estudámos a variação do coeficiente α entre 1 e 3 para o caso em que a medida de risco é o momento parcialmente inferior.

Construímos as fronteiras de eficiência (substituindo $x^\top \mu \geq r$ por $x^\top \mu = r$) associadas aos problemas de optimização média-LPM$_1(\tau, R(x))$, média-LPM$_2(\tau, R(x))$ e média-LPM$_3(\tau, R(x))$ (com $\tau = 0$) para os três conjuntos de dados ($C4$, $C8$ e $C24$), mostrando o risco em unidades de desvio-padrão e CVaR. As figuras 2(a) a 2(f) mostram-nos que as fronteiras de eficiência deslocam-se para a esquerda à medida que o coeficiente de aversão ao risco α aumenta. Por outras palavras, um investidor com elevada aversão ao risco que prefira menor risco de perdas irá escolher uma fronteira de eficiência mais à direita na Figura 2(a).

Nas fronteiras de eficiência, da Figura 2(a), associada aos problemas de optimização média-LPM$_\alpha(\tau, R(x))$, dado um retorno de referência r de 0.1%, o desvio-padrão da carteira é aproximadamente 4.05%, 3.75% e 3.70% quando, respectivamente, $\alpha = 1$, 2 e 3. Estes resultados, ainda que as diferenças não sejam muito significativas, são consistentes com a hipótese de que um investidor com maior aversão ao risco ($\alpha = 3$) prefere menos risco do que um investidor com menor aversão ao risco ($\alpha = 1$), para um mesmo nível de retorno.

Fez-se um estudo análogo para o momento parcialmente bilateral. Aqui estudaram-se os casos em que $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$ no problema de optimização média-BPM$_\alpha(\tau, b, R(x))$, ou seja, estudou-se a comparação entre o desvio semi-absoluto balanceado e a semi-variância balanceada (com $\tau = 0$). Nas figuras 3(a) a 3(f) traçaram-se as fronteiras de eficiência destes dois casos para os conjuntos de dados $C4$, $C8$ e $C24$, mostrando o risco em unidades de desvio-padrão e CVaR. Podemos observar que, tal como no estudo relativo aos LPMs, quando o coeficiente α é maior a fronteira de eficiência está mais à esquerda.

No caso dos BPMs, o coeficiente α aqui estudado descreve o coeficiente de aversão ao risco relativo ao LPM e o coeficiente de potencial de ganhos relativo ao UPM. Quando $\alpha = 1$ estamos perante uma situação em que o investidor é neutro ao risco e neutro ao potencial de ganhos e se $\alpha = 2$ o investidor diz-se propenso ao risco e ao potencial de ganhos. Assim, e como seria de esperar, se fixarmos o valor de retorno 0.1% observamos que, para $\alpha = 1$, o desvio-padrão é, aproximadamente, 4.1% e para $\alpha = 2$ é, aproximadamente, 3.6%. Mesmo que similares, estes valores indicam que um investidor com maior aversão ao risco ($\alpha = 2$) tem preferência por carteiras com

menor risco do que um com menor aversão ao risco ($\alpha = 1$).

Dado um valor fixo 4% para o desvio-padrão, da carteira em estudo na Figura 3(a), observamos que o retorno é 0.0955% e 0.1055% quando $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$, respectivamente. Este facto indica-nos que um investidor com coeficiente de potencial de ganhos superior ($\alpha = 2$) apresenta um maior retorno (mesmo que não muito significativo neste caso) do que um com coeficiente de potencial de ganhos inferior ($\alpha = 1$), quando o valor do desvio-padrão da carteira é o mesmo.

4.4. Impacto do valor de referência τ

De forma a estudar o impacto do valor de referência τ nas carteiras resultantes dos problemas de optimização média-LPM$_2(\tau, R(x))$, fez-se variar τ entre 0, 1, e 2%. Traçaram-se as respectivas fronteiras de eficiência relativas a estes problemas. Os resultados são apresentados nas figuras 4(a) a 4(f), mostrando o risco em unidades de desvio-padrão e CVaR. Observamos que em quase todo o intervalo de retornos da carteira $C4$, descrito na Figura 4(a), a fronteira de eficiência relativa ao problema média-LPM$_\alpha(0, R(x))$ domina (no sentido de apresentar melhores valores) as fronteiras relativas aos maiores valores de referência ($\tau = 1$ e 2%).

Além disso, as variações no valor de referência τ apresentam efeitos significativos na convexidade das fronteiras de eficiência (lida nas funções inversas). Quando τ aumenta, a dispersão dos retornos de uma carteira diminui, para qualquer tipo de unidade de risco (desvio-padrão, por exemplo) dessa carteira. Noutra perspectiva, a convexidade nas caudas inferiores e superiores das curvas (de eficiência) diminui para a direita ao longo do eixo que descreve o risco (desvio-padrão, por exemplo). Neste estudo empírico, o efeito na convexividade não foi notório devido, possivelmente, aos dados utilizados. No entanto, podemos encontrar provas destes efeitos em [32].

Nos momentos parcialmente bilaterais, um aumento no valor de referência τ acentua a percepção dos riscos de um título e diminui a percepção dos ganhos. Intuitivamente, é esperado que o uso de diferentes valores de referência tenha um impacto significativo na selecção de carteiras. Para estudar este impacto calcularam-se as fronteiras de eficiência relativas ao problema de optimização média-BPM$_2(\tau, b, R(x))$ (optimização média-semi-variância balanceada) para $\tau = 0,\ 1$ e 2%. As figuras 5(a) a 5(f) expõem estas fronteiras, mostrando o risco em unidades de desvio-padrão e CVaR.

Tal como descrito em [15], o valor de referência τ serve de ponto de mudança entre

a parte inferior (risco de perdas) e parte superior (risco de ganhos). Quando o valor de τ sobe, a parte inferior (das distribuições) a miminizar na optimização em selecção de carteiras aumenta e a parte superior diminiu. Assim, à medida que o valor de τ aumenta, a fronteira de eficiência correspondente desloca-se para a parte inferior direita no sistema de coordenadas utilizado (retorno e desvio-padrão da carteira, neste caso). Este efeito pode ser observado na Figura 5(a) para o conjunto de dados $C4$.

4.5. Impacto do coeficiente b de balanceamento

Recorrendo novamente à fronteira de eficiência associada ao problema de optimização média-BPM$_2(\tau, b, R(x))$ (com $\tau = 0$) descrito em (3.14), vamos analisar os resultados provocados pela alteração do coeficiente b. Para isso traçámos estas fronteiras de eficiência com b a tomar os valores 0, 0.25 e 0.75. Os resultados para os conjuntos de dados $C4$, $C8$ e $C24$ encontram-se nas figuras 6(a) a 6(f), mostrando o risco em unidades de desvio-padrão e CVaR. Observamos que à medida que o valor de b aumenta, a fronteira de eficiência correspondente tende a deslocar-se mais para a esquerda (ver por exemplo o caso $C4$ na Figura 6(a)). Destes resultados podemos tirar duas conclusões

- Ao definirmos o coeficiente $b = 0$ estamos na presença do problema de optimização média-semi-variância e apenas nos preocupamos com as perdas. Pelas figuras, ficamos com a ideia que os BPMs são uma medida de risco mais adequada que os LPMs, pois a fronteira de eficiência para o coeficiente $b = 0$ é a que apresenta piores resultados.

- As fronteiras de eficiência associadas aos problemas de optimização média-BPM$_2(\tau, 0.25, R(x))$ e média-BPM$_2$ $(\tau, 0.75, R(x))$ apresentam resultados bastante semelhantes sobretudo nos conjuntos $C4$ e $C8$, podendo isto significar que os retornos não possuem uma grande variabilidade acima do valor de referência τ, ou que essa variabilidade é menos significativa do que aquela abaixo desse valor.

4.6. Desempenho *out-of-sample*

A análise do desempenho *out-of-sample* assenta numa estratégia de janela móvel tal como em DeMiguel et al. [6]. Para os conjunto de dados do índice PSI20, a janela

móvel utilizada tem uma duração de 502 dias de transação, o que corresponde a dois anos civis. Foram considerados 1, 5 e 10 dias de transação que correspondem, respectivamente, a três períodos de rebalanceamento: diário, semanal e quinzenal. Estes períodos de transação correspondem, no caso desta amostra, a aproximadamente 1039, 208 e 104 rebalanceamentos da carteia, respectivamente.

Em primeiro lugar, calcularam-se as carteiras óptimas dos vários problemas de optimização para a janela de tempo *in-sample* de 01/2009 até 12/2010. Nestes problemas, a restrição $\mu^\top x \geq r$ foi colocada com $r = 0$, pois, caso contrário os resultados não seriam tão regulares. A seguir fixou-se cada carteira e observaram-se os seus retornos durante o período de rebalanceamento seguinte (1 dia, 1 semana ou 1 quinzena, neste caso). Depois descartou-se 1 dia, 1 semana ou 1 quinzena, conforme o período de rebalanceamento pretendido e acrescentou-se um período do mesmo tamanho à amostra existente. Este processo foi repetido até esgotarmos a amostra. Simultaneamente, foram guardados os retornos produzidos pelas carteiras rebalanceadas para cada uma das medidas de risco (associadas aos respectivos problemas de optimização).

4.6.1. Desempenho *out-of-sample* medido pelo rácio de Sharpe

Uma das formas mais utilizadas para a medição do desempenho *out-of-sample* é o rácio entre o valor médio do retorno e o seu desvio-padrão (algo que se assemelha ao rácio de Sharpe em selecção de carteiras). Se fixarmos a carteira $x_t^{\text{estratégia}}$ durante o período de avaliação Δt, obtemos o retorno *out-of-sample* no instante $t + \Delta t$, isto é, $r_{t+\Delta t}^{\text{estratégia}} = (x_t^{\text{estratégia}})^\top r_{t+\Delta t}$, onde $r_{t+\Delta t}$ denota o retorno entre t e $t + \Delta t$, e Δt é um dia, uma semana ou uma quinzena. Depois de recolhermos a série temporal dos $T - \chi - \Delta t$ retornos $r_t^{\text{estratégia}}$ (χ indica a dimensão da janela móvel, neste estudo $\chi = 502$) a média, o desvio-padrão e o rácio de Sharpe *out-of sample* dos retornos são

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mu}^{\text{estratégia}} &= \frac{1}{T-\chi-\Delta t} \sum_{t=\chi}^{T-\Delta t} r_{t+\Delta t}^{\text{estratégia}}, \\
\widehat{\sigma}^{\text{estratégia}} &= \left(\frac{1}{T-\chi-\Delta t-1} \sum_{t=\chi}^{T-\Delta t} \left(r_{t+\Delta t}^{\text{estratégia}} - \widehat{\mu}^{\text{estratégia}} \right)^2 \right)^{1/2}, \\
\widehat{\text{RS}}^{\text{estratégia}} &= \frac{\widehat{\mu}^{\text{estratégia}}}{\widehat{\sigma}^{\text{estratégia}}}.
\end{aligned}
$$

Os resultados obtidos assim pelo rácio de Sharpe para os diversos problemas

de optimização são apresentados nas Tabelas 4, 5 e 6 para os conjuntos $C4$, $C8$ e $C24$, respectivamente. Com recurso ao software IBM SPSS Statistics, foram ainda calculados os p-valores para a estatística de significância da diferença entre o retorno *out-of-sample* da estratégia *naive* ($x_i = 1/n,\ i = 1, \ldots, n$), tida como referência, e o retorno *out-of-sample* das carteiras referentes a todas as outras estratégias testadas: média-variância, média-LPM (de ordem um e dois), média-BPM (de ordem um e dois) e média-CVaR. O resultado deste estudo pode ser encontrado nas Tabelas 4, 5 e 6 imediatamente abaixo do rácio de Sharpe, entre parênteses curvos.

4.6.2. Desempenho *out-of-sample* medido pelo rácio de Sortino

Recorrendo à implementação da janela móvel descrita anteriormente, calculou-se também o rácio de Sortino. Utilizando a descrição feita para o rácio de Sharpe *out-of-sample*, a série temporal dos $T - \chi - \Delta t$ retornos $r_t^{\text{estratégia}}$ e a média *out-of-sample* $\widehat{\mu}^{\text{estratégia}}$, podemos de forma simples, calcular a raíz quadrada da semi-variância *out-of-sample* e, consequentemente, obter o rácio de Sortino *out-of-sample*

$$\begin{aligned}
\widehat{SV}^{\text{estratégia}} &= \frac{1}{T - \chi - \Delta t - 1} \sum_{t=\chi}^{T-\Delta t} \max\left(0, r_{t+\Delta t}^{\text{estratégia}} - \tau\right)^2, \\
\widehat{\text{RSV}}^{\text{estratégia}} &= \frac{\widehat{\mu}^{\text{estratégia}}}{\sqrt{\widehat{SV}^{\text{estratégia}}}},
\end{aligned}$$

onde τ é um valor de referência a definir pelo investidor.

O objectivo da análise de desempenho *out-of-sample* através do rácio de Sortino é verificar se existem diferenças no desempenho das diferentes medidas de risco, medido pelos rácios de Sharpe e Sortino. Os resultados usando este rácio para as diferentes medidas de risco encontram-se também nas tabelas 4, 5 e 6, para os conjuntos $C4$, $C8$ e $C24$, respectivamente.

4.7. Discussão dos resultados

No estudo do desempenho empírico *in-sample*, quando se utilizaram coordenadas média e desvio-padrão (Figuras 1(a), 1(b) e 1(c)), a fronteira de eficiência associada ao problema de optimização média-variância domina, de uma forma geral, todas as outras fronteiras. As fronteiras que se encontram mais próximas desta são as que correspondem às medidas de risco CVaR e SV. Este facto pode dever-se, no caso da semi-variância, à proximidade que existe nas funções objectivo destes dois problemas de optimização. No entanto, a optimização média-SV sacrifica alguma eficiência na

região média-desvio-padrão, pois só minimiza o risco abaixo do valor de referência τ ($\tau = 0$ neste estudo), em vez de toda a variabilidade. As fronteiras mais afastadas da melhor (ou seja, da da mais acima) são aquelas em que o investidor é neutro face ao risco (fronteiras dos problemas de optimização média-SDA e média-SDB).

Quando as coordenadas são descritas pela média e CVaR da carteiras em estudo, os resultados obtidos são análogos aos das coordenadas média e desvio-padrão, com a fronteira de eficiência associada ao problema de optimização média-CVaR a dominar todas as restantes (no sentido de estar acima delas). As fronteiras mais próximas desta são as relativas aos problemas de optimização média-variância e média-SV e as mais distantes são as mesmas que nas coordenadas média e desvio-padrão.

Nas coordenadas UPM / BPM ($\alpha = 2/3$), é esperado que a fronteira de eficiência do problema de optimização média-BPM ($\alpha = 2$) domine todas as outras. Contudo, este facto não se verifica tão nitidamente como nas outras coordenadas, existindo outras fronteiras que em alguns momentos, apresentam melhores valores que a fronteira do problema média-BPM ($\alpha = 2$). Estes resultados podem dever-se ao facto de no problema média-BPM ($\alpha = 2$) medirmos o grau do UPM e do LPM da mesma forma. Neste sistema de coordenadas, as fronteiras de eficiência dos problemas de optimização média-variância e média-CVaR são as que estão mais distantes da fronteira que apresenta melhores resultados em cada carteira.

Assim, podemos concluir a partir dos resultados *in-sample*, que se estudarmos os problemas optimização para as diferentes medidas de risco através das coordenadas usuais, estes não irão apresentar os melhores resultados. No entanto, se avaliarmos o risco e retorno de uma carteira através de novas coordenadas (UPM / BPM ($\alpha = 2/3$), por exemplo), as medidas de risco alternativas à variância irão apresentar melhores resultados empíricos.

Em relação ao desempenho *out-of-sample*, o primeiro estudo supôs possível a venda a descoberto. No entanto, isto levou a posições longas e curtas em títulos irrealistas e, por isso, impusemos a restrição $x \geq 0$ em todos os problemas de optimização para a análise do desempenho *out-of-sample*.

Nas primeiras duas linhas das Tabelas 4, 5 e 6 são apresentados os rácios de Sharpe e Sortino da estratégia (de referência) *naive* para os conjuntos $C4$, $C8$ e $C24$, respectivamente. Esta estratégia é a que apresenta melhores resultados (juntamente com a da optimização média-CVaR) para o conjunto $C4$ com o rebalanceamento diário, podendo isto resultar do facto de estarmos na presença de um índice pequeno

(apenas 4 títulos) e de uma elevada frequência de rebalanceamento. Por outro lado, tanto no conjunto $C8$ como no $C24$, a estratégia *naive* é a que apresenta menores valores para os rácios de Sharpe e Sortino para os períodos de rebalanceamento semanal e quinzenal.

O valor do rácio de Sharpe para o rebalanceamento diário é superior (de forma geral) aos valores dos rebalanceamentos semanal e quinzenal, para os três conjuntos. No conjunto $C8$ assiste-se a uma diminuição dos rácios de Sharpe e de Sortino com rebalanceamentos semanais e quinzenais. Esta diminuição não se verifica nos conjuntos $C4$ e $C24$, ocorrendo com maior frequência o caso inverso, ou seja, uma melhoria nos rácios quando elevamos a frequência de rebalanceamento de 5 para 10 dias de transação. O aumento da frequência de rebalanceamento possibilita maiores retornos, sendo isto mais vísivel quando avançamos do rebalanceamento semanal e quinzenal para o diário.

Para o conjunto $C4$ (Tabela 4), a optimização média-variância exibe piores resultados em termos de rácios (Sharpe e Sortino) relativamente à estratégia *naive* para todas as frequências de rebalanceamento. O p-valor apresentado, que resulta da comparação entre a carteira resultante da optimização média-variância e a carteira *naive*, indica-nos que, para os níveis de significância usuais, não se rejeita a hipótese dita nula que consiste na diferença das carteiras *out-of-sample* ser igual a zero. Observando os valores entre parêntes rectos que descrevem, respectivamente, o número médio, mínimo, mediana e máximo de títulos que constituem a carteira correspondente, verificamos que em algumas constituições da carteira ocorre um investimento em todos os títulos accionistas disponíveis.

O número mínimo, máximo e a mediana dos títulos da carteira resultante da optimização média-variância mantêm-se constantes à medida que a frequência de rebalanceamento aumenta. Este facto também se verifica para todas as carteiras resultantes das várias optimizações e para os conjuntos $C8$ e $C24$. Ainda no índice $C4$, podemos observar que a optimização média-CVaR apresenta melhores resultados para os dois rácios e para as três frequências de rebalanceamento. Todas as outras optimizações apresentam valores para os rácios de Sharpe e Sortino superiores (com pequenas excepções para o rebalanceamento diário) aos da optimização média-variância, como seria expectável, uma vez que este índice é constituído apenas por títulos accionistas com distribuições não normais.

Contrariamente ao ocorrido no índice $C4$, ao analisar o $C24$ (Tabela 6) verifi-

camos que a optimização média-CVaR apresenta os piores resultados para os dois rácios, nas três frequências de rebalanceamento. Isto pode dever-se ao grande número de títulos e às suas distribuições muito distintas. Neste índice é ainda mais visível que a optimização média-variância, introduzida por Markowitz, apresenta piores resultados que as optimizações média-SDA, média-SV, média-SDB e média-semi-variância balanceada para os dois rácios, ao longo das três frequências de rebalanceamento. A optimização média-SDA é a que apresenta, em geral, melhores resultados. Isto significa, que na presença de uma grande variedade de títulos, de diversos sectores e com distribuições distintas, um investidor neutro ao risco e ao potencial de ganhos vai obter melhores resultados uma vez que, penaliza menos a variabilidade inferior (abaixo de um valor de referência) e simultaneamente, não deseja grande variabilidade positiva (acima de um valor de referência).

O valor mediano de 15 títulos utilizados na construção da carteira referente ao problema de optimização média-SDA afigura-se reduzido dados os 24 títulos disponíveis. Observamos ainda que, na optimização média-SV e média-semivariância balanceada, o número de títulos utilizados na construção das carteiras é, em média, muito superior ao das optimizações média-SDA e média-SDB. Este facto demonstra que um investidor com maior aversão ao risco tende a diversificar significativamente mais a carteira do que um com menor aversão ao risco. Verificamos que as únicas ocorrências de um investimento em todos os títulos são, precisamente, quando o investidor possui maior aversão ao risco (optimização média-SV e média-semi-variância balanceada).

A análise do índice $C8$ (Tabela 5) revela-se complicada, pelo facto da maioria dos rácios, tanto de Sharpe como de Sortino, apresentarem valores negativos para as várias optimizações e para a estratégia de referência. De uma forma geral podemos dizer que os resultados para este conjunto são coerentes com os apresentados para os índices $C4$ e $C24$, ou seja, a optimização média-variância (juntamente com a estratégia *naive*) é a que apresenta piores resultados tanto para o rácio de Sharpe como para o rácio de Sortino, ao longo das três frequências de rebalanceamento. As optimizações média-SDA e média-SDB são as que apresentam melhores valores (os únicos positivos) para os dois rácios. O facto de para estas optimizações o investidor se assumir neutro face ao risco é visto como a principal explicação para estes resultados.

Por fim, apesar de alguns dos resultados empíricos não serem os expectáveis,

os problemas de optimização alternativos ao proposto por Markowitz apresentam bons resultados e corroboram a ideia de que, se os retornos dos títulos não seguirem distribuições normais, a optimização média-variância não é a estratégia que apresenta melhores resultados. O facto de os p-valores apresentados indicarem que as carteiras *out-of-sample* das várias optimizações não são diferentes da carteira de referência, dá-nos a sensação de que este teste não é estatisticamente significante.

Capítulo 5

Conclusão

No âmbito da selecção de carteiras, estudámos diferentes medidas de risco alternativas à variância dos retornos de títulos accionistas. Começámos pela medida de risco em perdas LPM e os seus casos particulares (desvio semi-absoluto inferior e semi-variância). De seguida, avançámos para uma medida de risco mais geral, os BPMs, e demos ainda ênfase aos seus casos particulares (desvio semi-absoluto balanceado e semi-variância balanceada). Considerámos também o Valor em Risco Condicional, CVaR. Além disso, mostrámos como os problemas de optimização em selecção de carteiras baseados na minimização das diferentes medidas de risco podem ser formulados recorrendo a programação linear ou quadrática.

Vimos que as medidas de risco alternativas à variância apresentam várias vantagens teóricas como, por exemplo, um melhor ajuste a distribuições não normais dos retornos dos títulos accionistas e a possibilidade de se escolher o grau dos momentos de acordo com o nível de aversão ao risco que um investidor apresente.

Vários estudos existentes na literatura indiciam que quanto maior for a aversão ao risco por parte de um investidor mais diversificadas serão as carteiras associadas aos problemas de optimização. Os resultados empíricos desta tese corroboram esta ideia uma vez que as carteiras obtidas tendem a incluir mais títulos na sua constituição quando um investidor possui maior aversão ao risco (caracterizada pela escolha de um coeficiente α superior).

Analisámos também o impacto da alteração do valor dos coeficientes α, τ e b presentes nos problemas de optimização associados aos LPMs e BPMs. Concluímos que, quando α aumenta, as fronteiras de eficiência associadas aos problemas de optimização média-LPM e média-BPM são, geralmente, melhores (no sentido de estarem mais acima). Por outro lado, ao aumentarmos o valor de τ, estas fronteiras de eficiência tenderam a ser piores, tanto para os LPMs como para os BPMs. No caso do coeficiente b, as fronteiras de eficiência associadas à optimização média-BPM foram melhores para valores de b mais elevados.

Com recurso aos rácios de Sharpe e Sortino concluímos que as carteiras associadas à optimização média-CVaR apresentaram os melhores resultados para o conjunto de 4 títulos. Para os conjuntos de 8 e 24 títulos, as carteiras com valores mais elevados para os dois rácios foram as que estão associadas à optimização média-SDA e média-SDB, sendo este facto mais vísivel nos períodos de rebalanceamento diário e semanal.

Os resultados obtidos para os dois rácios mostraram, para os três conjuntos de dados em questão, que existem sempre medidas de risco alternativas à variância que, quando minimizadas, conduzem a carteiras com melhor desempenho do que o associado à minimização da variância. O facto de nenhuma destas carteiras óptimas ser estatisticamente melhor que a *naive* (no sentido em que nenhum dos p-valores apresentados conduziu à rejeição da hipótese nula) deve-se, muito provavelmente, a serem aproximadamente nulas as rentabilidades médias da maioria dos títulos accionistas.

O presente estudo poderia, eventualmente, produzir resultados mais robustos se fosse realizada uma análise mais profunda das séries temporais dos retornos, ou se introduzíssemos custos de transação nos rebalanceamentos, ou se recorrêssemos a conjuntos de dados diferentes (distribuições de retornos não-normais, com maior variabilidade e rentabilidade, por exemplo).

Apêndice A
Figuras e tabelas referentes ao Capítulo 4

Títulos accionistas	
SUMOLIS (1,2,3)	NOVABASE SGPS (3)
BPI SGPS (1,2,3)	MARTIFER SGPS SA (3)
REN – Redes Energéticas Nacionais (1,2,3)	IMPRESA SGPS (3)
ALTRI SGPS SA (1,2,3)	IBERSOL SGPS (3)
Jerónimo Martins SGPS (2,3)	SEMAPA – Soc. de Investimento e Gestão SGPS (3)
PT – Portugal Telecom SGPS (2,3)	Teixeira Duarte – Engenharia e Construção (3)
BANCO SANTANDER R (2,3)	SONAE SGPS (3)
GALP ENERGIA (2,3)	EDP Renováveis (3)
EDP – Energias de Portugal SA (3)	SONAE CAPITAL SGPS SA (3)
PORTUCEL (3)	SLB SAD – Sociedade Desportiva de Futebol (3)
Corticeira Amorim SGPS (3)	F.RAMADA (3)
OREY ANTUNES R (3)	BCP – Banco Comercial Português (3)

Tabela 1: Composição dos três conjuntos de dados constituídos por títulos accionistas do índice PSI20. Entre parênteses indica-se a que conjuntos de dados cada título pertence (1 para $C4$, 2 para $C8$ e 3 para $C24$).

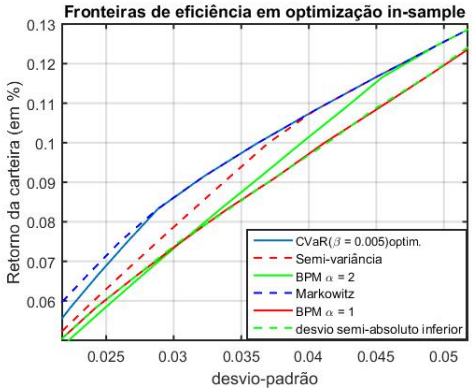
Descriptive Statistics

	N	Range	Minimum	Maximum	Sum	Mean	Std. Deviation	Variance	Skewness		Kurtosis	
	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Std. Error	Statistic	Std. Error
CloseALTR	1285	,656966	-,477341	,179625	,568645	,00044253	,024616532	,001	-5,324	,068	112,835	,136
CloseSuco	1285	2,056061	-,583333	1,472727	2,031763	,00158114	,069262034	,005	12,830	,068	288,803	,136
CloseBPI	1285	,261409	-,110465	,150943	-,197670	-,00015383	,026275574	,001	,538	,068	3,744	,136
CLoseRENE	1285	,130570	-,067010	,063559	-,111584	-,00008684	,011525138	,000	-,146	,068	6,198	,136
FechoGalp	1285	,205967	-,107744	,098223	,666246	,00051848	,018460089	,000	,123	,068	3,317	,136
FechoJMT	1285	,191100	-,081633	,109467	1,508097	,00117362	,019388636	,000	,239	,068	2,254	,136
FechoPTC	1285	,315659	-,128931	,186728	-,355126	-,00027636	,019696562	,000	,156	,068	10,763	,136
FechoSANT	1285	,340990	-,131209	,209781	,363295	,00028272	,024859694	,001	,555	,068	6,063	,136
CloseBCP	1285	,422222	-,222222	,200000	-,530765	-,00041305	,039177138	,002	,264	,068	5,034	,136
CloseEDP	1285	,158223	-,074890	,083333	,179507	,00013969	,015458459	,000	-,327	,068	2,587	,136
ClosePTI	1285	,153662	-,089623	,064039	,873188	,00067952	,015465937	,000	-,080	,068	3,391	,136
CloseCOR	1285	,215707	-,114583	,101124	1,260171	,00098068	,020498505	,000	,292	,068	2,760	,136
CloseORE	1285	,361345	-,147059	,214286	,652994	,00050817	,036811492	,001	,641	,068	4,693	,136
CloseNBA	1285	,240055	-,154341	,085714	-,192610	-,00014989	,018257592	,000	-,246	,068	7,619	,136
CLoseMAR	1285	,279516	-,121622	,157895	-1,141434	-,00088828	,025023679	,001	,627	,068	4,336	,136
CloseIPR	1285	,494289	-,111111	,383178	1,033680	,00080442	,035508685	,001	2,348	,068	17,337	,136
CloseIBS	1285	,211135	-,108696	,102439	,298756	,00023249	,019638320	,000	,116	,068	3,745	,136
CloseSEM	1285	,136146	-,064039	,072106	,492613	,00038336	,016397630	,000	,187	,068	1,690	,136
CloseTDSA	1285	,332653	-,132653	,200000	1,201019	,00093465	,035375897	,001	,825	,068	3,767	,136
CLoseSON	1285	,247585	-,108696	,138889	1,187244	,00092393	,020565569	,000	,265	,068	3,443	,136
CloseEDPR	1285	,163097	-,076000	,087097	-,033870	-,00002636	,018958804	,000	,111	,068	1,800	,136
CloseSONC	1285	,314402	-,137931	,176471	,568300	,00044226	,034644625	,001	,475	,068	2,557	,136
CloseSLBEN	1285	,727778	-,377778	,350000	,448372	,00034893	,047178533	,002	,793	,068	10,015	,136
CloseRAM	1285	,404762	-,166667	,238095	1,654179	,00128730	,036257164	,001	,286	,068	5,257	,136
Valid N (listwise)	1285											

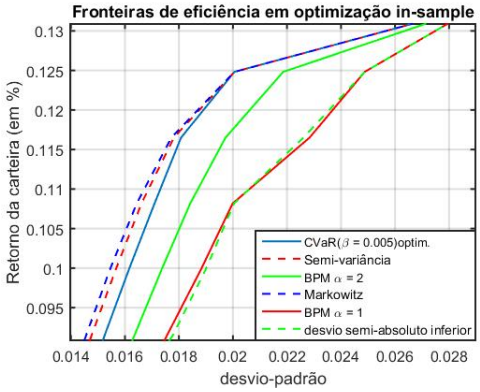
Tabela 2: Estatística descritiva dos 24 títulos accionistas para o estudo de desempenho *in-sample*.

Título	p-valor
SUMOLIS (1,2,3)	0
BPI SGPS (1,2,3)	0
REN – Redes Energéticas Nacionais (1,2,3)	0
ALTRI SGPS SA (1,2,3)	0
Jerónimo Martins SGPS (2,3)	0,3783
PT – Portugal Telecom SGPS (2,3)	0,1415
BANCO SANTANDER R (2,3)	0,1876
GALP ENERGIA (2,3)	0,3956
EDP – Energias de Portugal SA (3)	0,0433
PORTUCEL (3)	0,4052
Corticeira Amorim SGPS (3)	0,4294
OREY ANTUNES R (3)	0,2699
NOVABASE SGPS (3)	0,1776
MARTIFER SGPS SA (3)	0,0407
IMPRESA SGPS (3)	0,001
IBERSOL SGPS (3)	0,3724
SEMAPA – Soc. de Investimento e Gestão SGPS (3)	0,4739
Teixeira Duarte – Engenharia e Construção (3)	0,344
SONAE SGPS (3)	0,0828
EDP Renováveis (3)	0,1455
SONAE CAPITAL SGPS SA (3)	0,436
SLB SAD – Sociedade Desportiva de Futebol (3)	0,0705
F.RAMADA (3)	0,2297
BCP – Banco Comercial Português (3)	0,2917

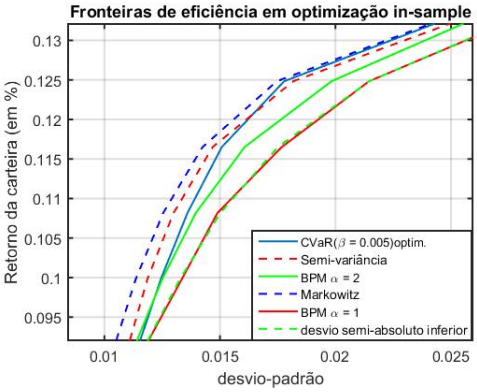
Tabela 3: Teste Jarque-Bera da normalidade de uma distribuição para os retornos dos 24 títulos que constituem a base de dados em estudo. Entre parênteses indica-se a que conjuntos de dados cada título pertence (1 para $C4$, 2 para $C8$ e 3 para $C24$).



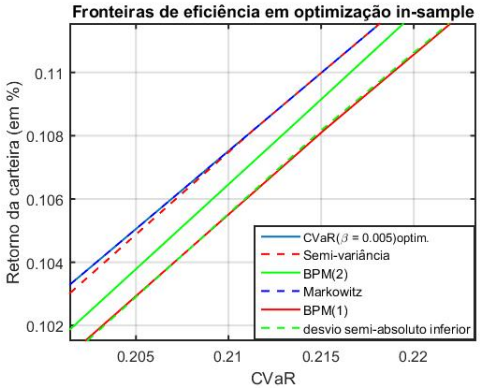
(a) Fronteiras de eficiência para a carteira $C4$ em coordenadas média-variância.



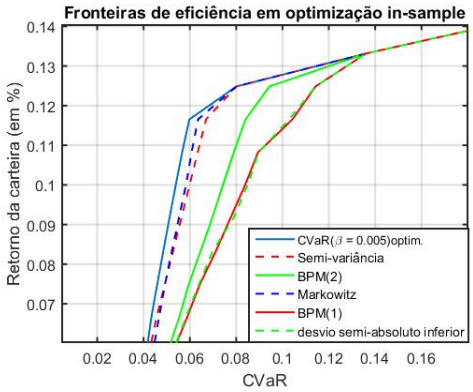
(b) Fronteiras de eficiência para a carteira $C8$ em coordenadas média-variância.



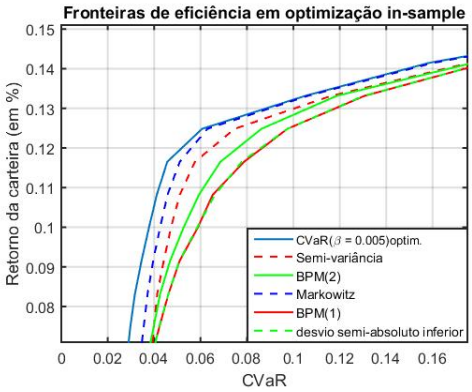
(c) Fronteiras de eficiência para a carteira $C24$ em coordenadas média-variância.



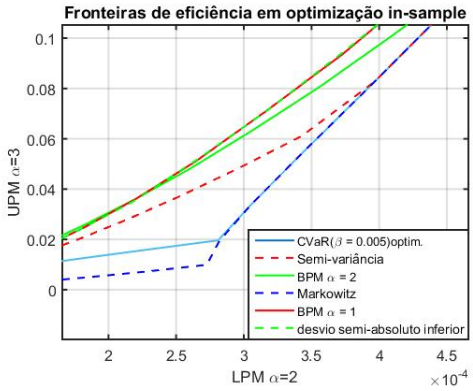
(d) Fronteiras de eficiência para a carteira $C4$ em coordenadas média-CVaR.



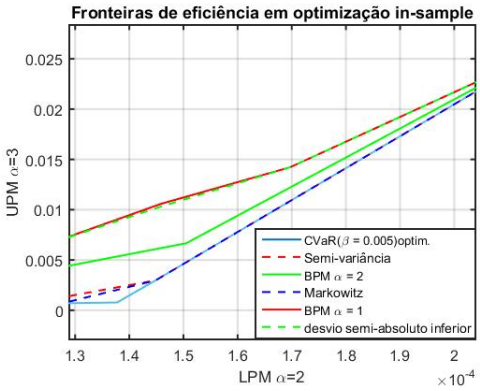
(e) Fronteiras de eficiência para a carteira $C8$ em coordenadas média-CVaR.



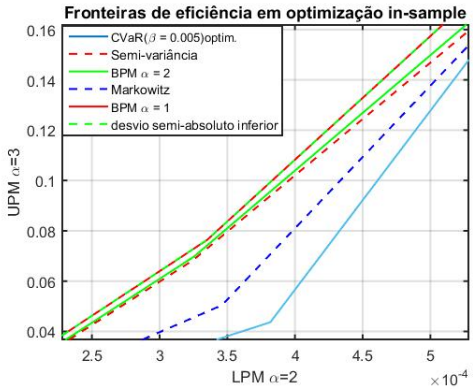
(f) Fronteiras de eficiência para a carteira $C24$ em coordenadas média-CVaR.



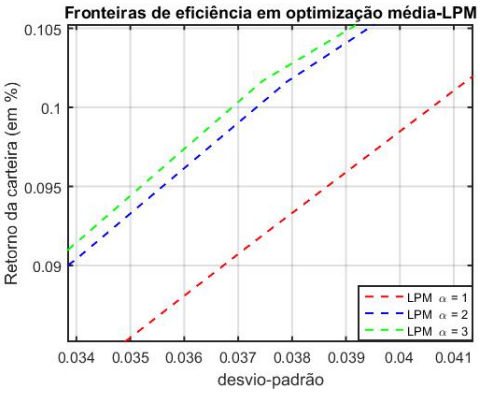
(g) Fronteiras de eficiência para a carteira $C4$ em coordenadas UPM/LPM.



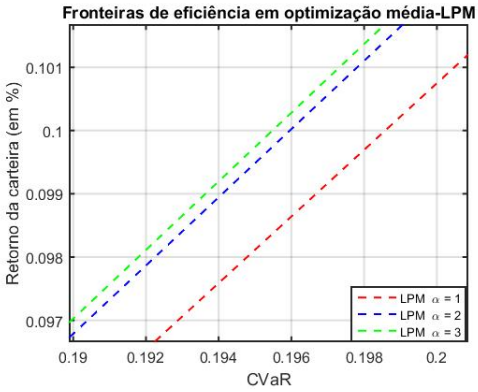
(h) Fronteiras de eficiência para a carteira $C8$ em coordenadas UPM/LPM.



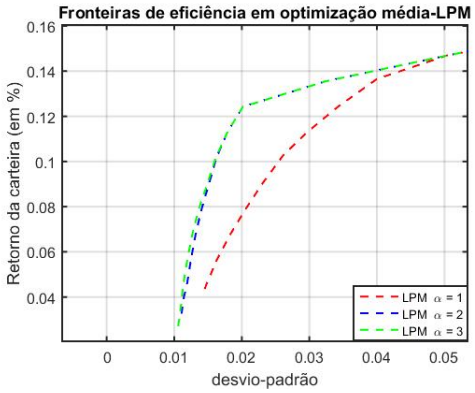
(i) Fronteiras de eficiência para a carteira $C24$ em coordenadas UPM/LPM.



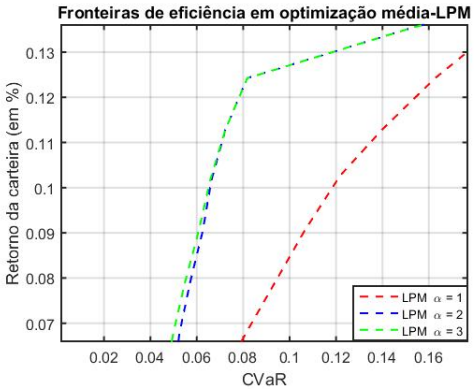
(a) Variação do coeficiente α nos problemas de optimização média-LPM$_\alpha(\tau, R(x))$, para a carteira $C4$.



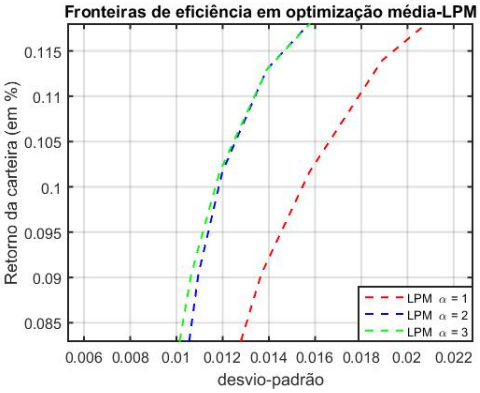
(b) Variação do coeficiente α nos problemas de optimização média-LPM$_\alpha(\tau, R(x))$, para a carteira $C4$.



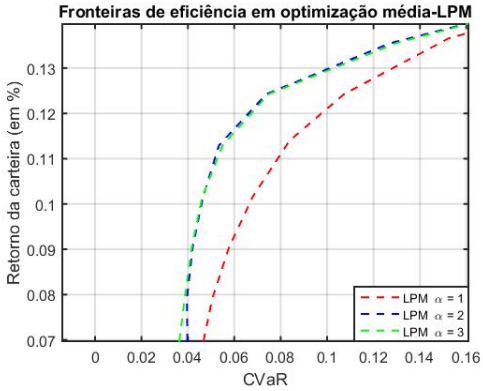
(c) Variação do coeficiente α nos problemas de optimização média-LPM$_\alpha(\tau, R(x))$, para a carteira $C8$.



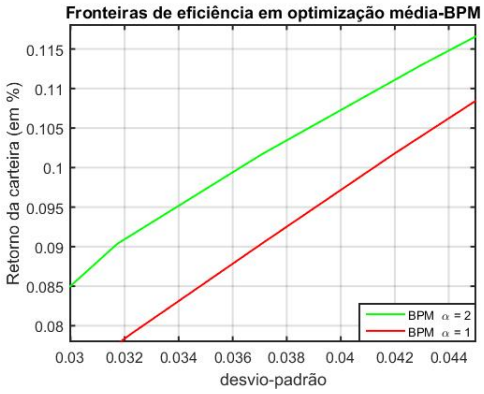
(d) Variação do coeficiente α nos problemas de optimização média-LPM$_\alpha(\tau, R(x))$, para a carteira $C8$.



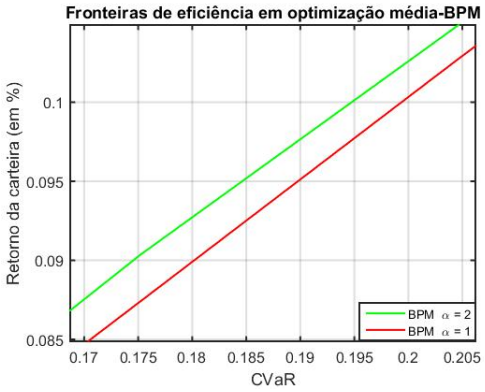
(e) Variação do coeficiente α nos problemas de optimização média-LPM$_\alpha(\tau, R(x))$, para a carteira $C24$.



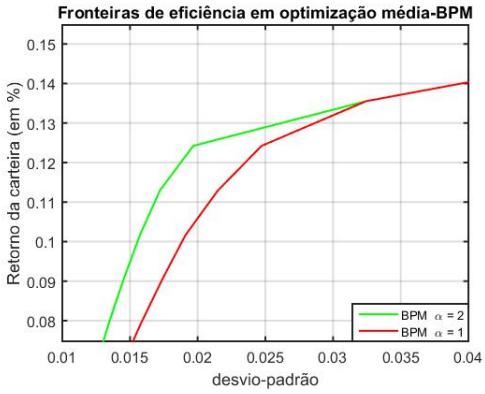
(f) Variação do coeficiente α nos problemas de optimização média-LPM$_\alpha(\tau, R(x))$, para a carteira $C24$.



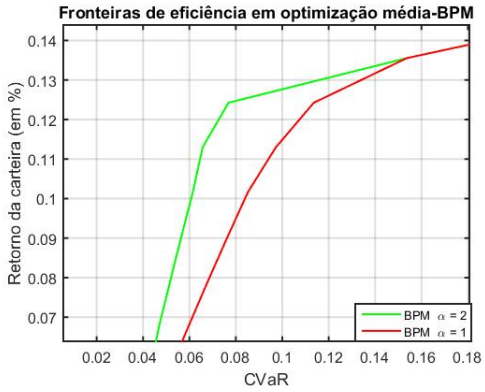
(a) Variação do coeficiente α nos problemas de optimização média-BPM$_\alpha(\tau, b, R(x))$, para a carteira $C4$.



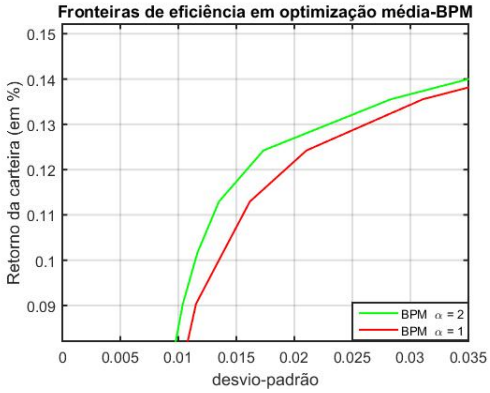
(b) Variação do coeficiente α nos problemas de optimização média-BPM$_\alpha(\tau, b, R(x))$, para a carteira $C4$.



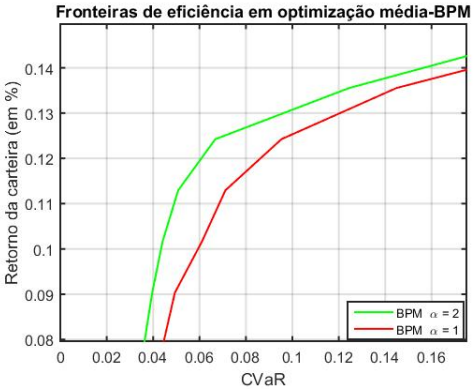
(c) Variação do coeficiente α nos problemas de optimização média-BPM$_\alpha(\tau, b, R(x))$, para a carteira $C8$.



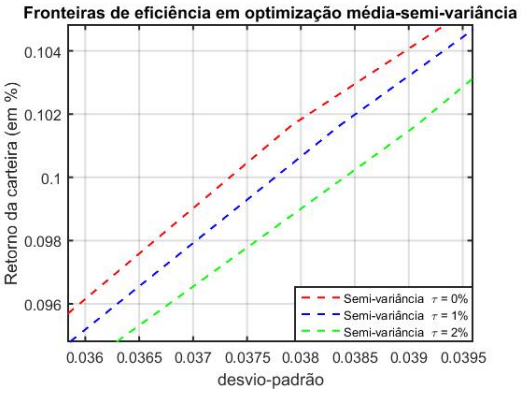
(d) Variação do coeficiente α nos problemas de optimização média-BPM$_\alpha(\tau, b, R(x))$, para a carteira $C8$.



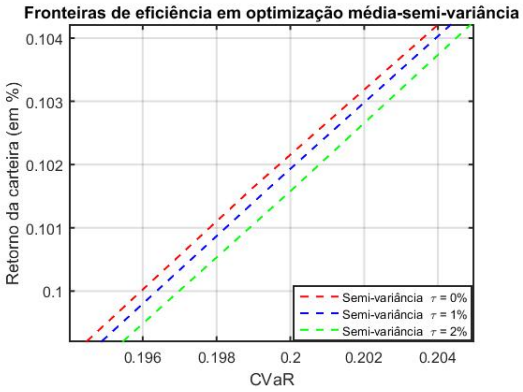
(e) Variação do coeficiente α nos problemas de optimização média-BPM$_\alpha(\tau, b, R(x))$, para a carteira $C24$.



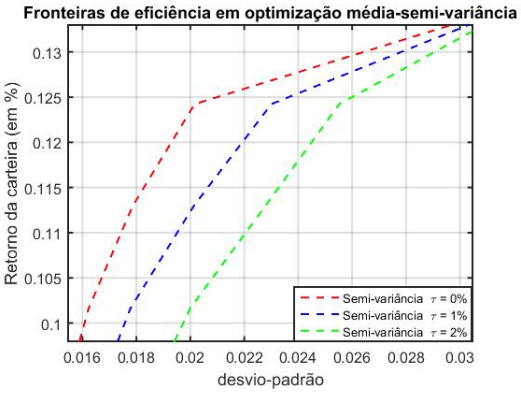
(f) Variação do coeficiente α nos problemas de optimização média-BPM$_\alpha(\tau, b, R(x))$, para a carteira $C24$.



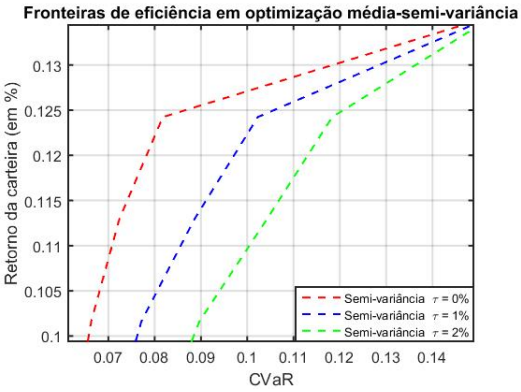
(a) Variação do coeficiente τ nos problemas de optimização média-LPM$_\alpha(\tau, R(x))$, para a carteira $C4$.



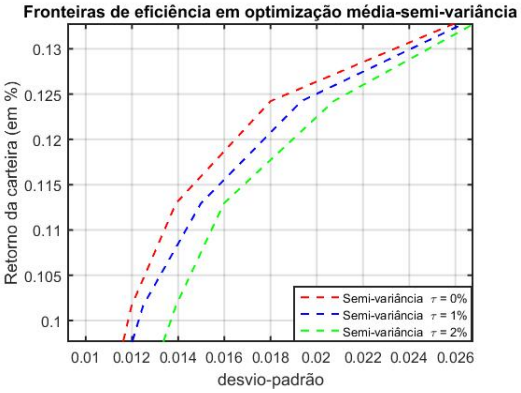
(b) Variação do coeficiente τ nos problemas de optimização média-LPM$_\alpha(\tau, R(x))$, para a carteira $C4$.



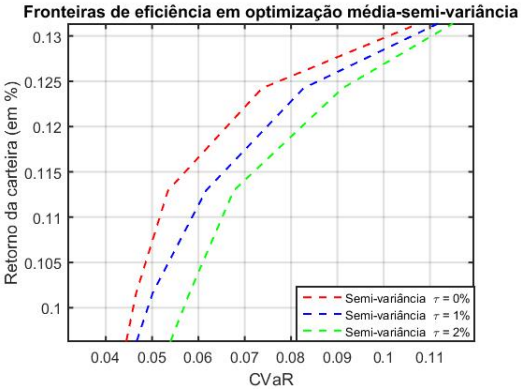
(c) Variação do coeficiente τ nos problemas de optimização média-LPM$_\alpha(\tau, R(x))$, para a carteira $C8$.



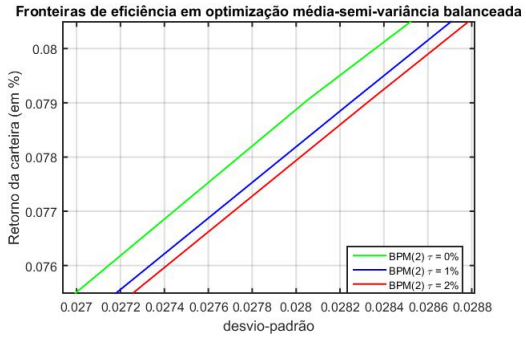
(d) Variação do coeficiente τ nos problemas de optimização média-LPM$_\alpha(\tau, R(x))$, para a carteira $C8$.



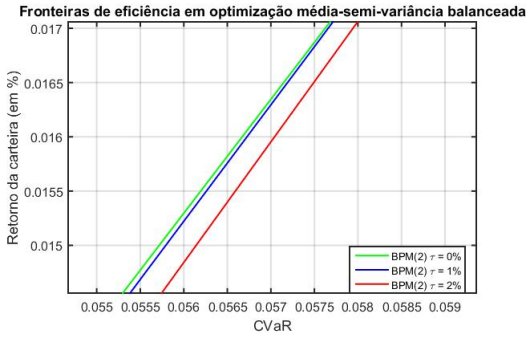
(e) Variação do coeficiente τ nos problemas de optimização média-LPM$_\alpha(\tau, R(x))$, para a carteira $C24$.



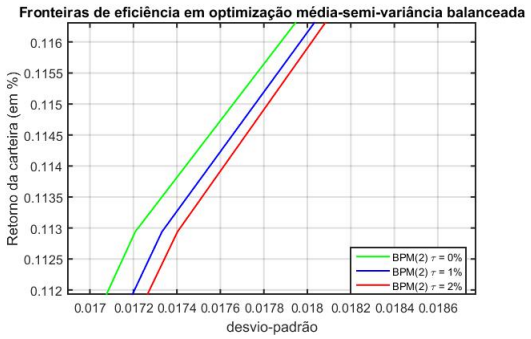
(f) Variação do coeficiente τ nos problemas de optimização média-LPM$_\alpha(\tau, R(x))$, para a carteira $C24$.



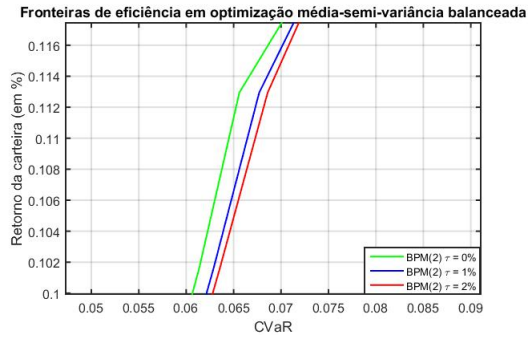
(a) Variação do coeficiente τ nos problemas de optimização média-$\mathrm{BPM}_\alpha(\tau, b, R(x))$, para a carteira $C4$.



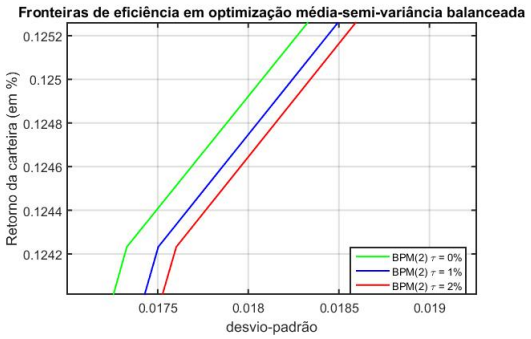
(b) Variação do coeficiente τ nos problemas de optimização média-$\mathrm{LPM}_\alpha(\tau, b, R(x))$, para a carteira $C4$.



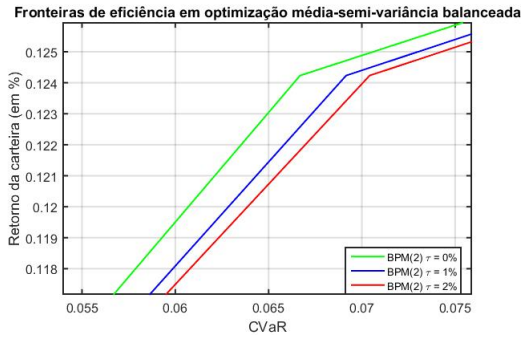
(c) Variação do coeficiente τ nos problemas de optimização média-$\mathrm{BPM}_\alpha(\tau, b, R(x))$, para a carteira $C8$.



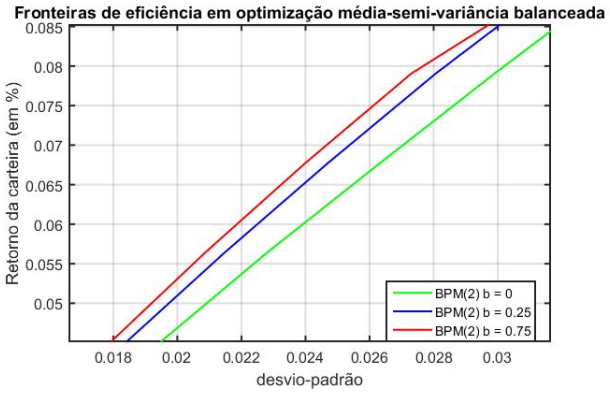
(d) Variação do coeficiente τ nos problemas de optimização média-$\mathrm{LPM}_\alpha(\tau, b, R(x))$, para a carteira $C8$.



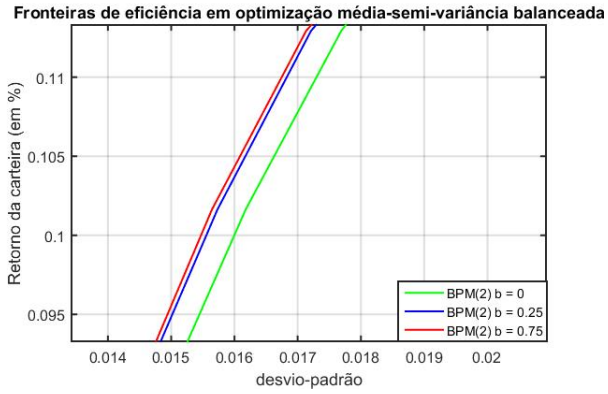
(e) Variação do coeficiente τ nos problemas de optimização média-$\mathrm{BPM}_\alpha(\tau, b, R(x))$, para a carteira $C24$.



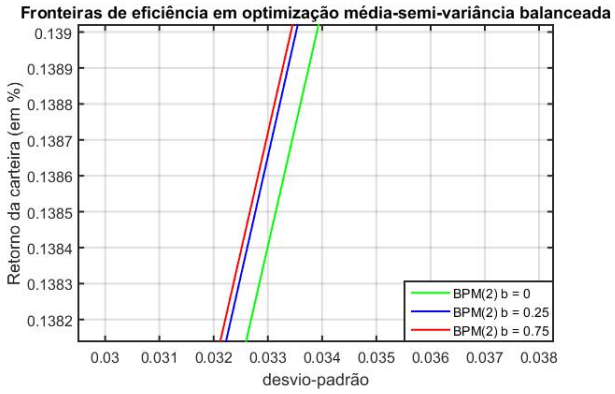
(f) Variação do coeficiente τ nos problemas de optimização média-$\mathrm{LPM}_\alpha(\tau, b, R(x))$, para a carteira $C24$.



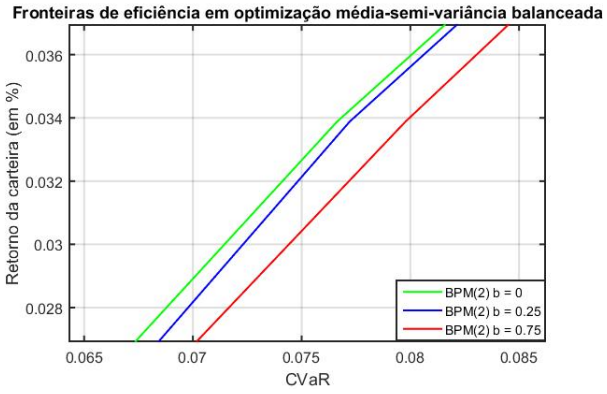
(a) Variação do coeficiente de balanceamento b nos problemas de optimização média-$\mathrm{BPM}_2(\tau, b, R(x))$, para a carteira $C4$.



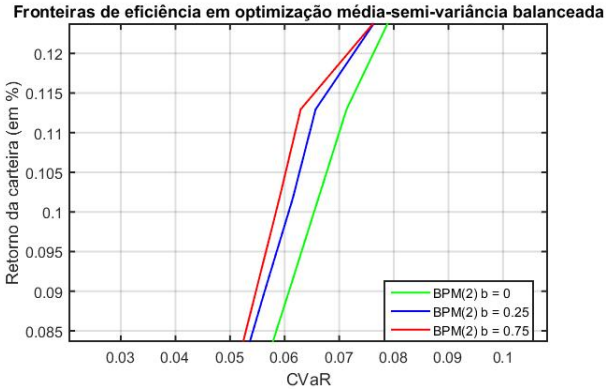
(b) Variação do coeficiente de balanceamento b nos problemas de optimização média-$\mathrm{BPM}_2(\tau, b, R(x))$, para a carteira $C8$.



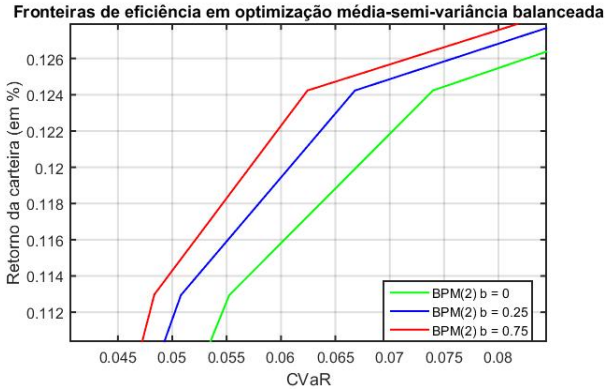
(c) Variação do coeficiente de balanceamento b nos problemas de optimização média-$\mathrm{BPM}_2(\tau, b, R(x))$, para a carteira $C24$.



(d) Variação do coeficiente de balanceamento b nos problemas de optimização média-$\mathrm{BPM}_2(\tau, b, R(x))$, para a carteira $C4$.



(e) Variação do coeficiente de balanceamento b nos problemas de optimização média-$\mathrm{BPM}_2(\tau, b, R(x))$, para a carteira $C8$.



(f) Variação do coeficiente de balanceamento b nos problemas de optimização média-$\mathrm{BPM}_2(\tau, b, R(x))$, para a carteira $C24$.

	Carteira C4		
	Diário	**Semanal**	**Quinzenal**
Estratégia Naive			
RS	0.3375	0.0658	0.0691
RSV	0.6689	0.1060	0.1133
Opt. Média-Variância			
RS	0.1272	0.0086	0.0157
	(0.569)	(0.833)	(0.836)
RSV	0.2089	0.0133	0.0242
	[3.0038;2;3;4]	[3.0048;2;3;4]	[3.0192;2;3;4]
Opt. Média-SDA			
RS	0.1878	0.0640	0.0781
	(0.655)	(0.936)	(0.919)
RSV	0.3280	0.1065	0.1302
	[2.7421;2;3;4]	[2.7548;2;3;4]	[2.7500;2;3;4]
Opt. Média-SV			
RS	0.0290	0.0372	0.0177
	(0.467)	(0.927)	(0.854)
RSV	0.0483	0.0645	0.0299
	[3.1405;2;3;4]	[3.1490;2;3;4]	[3.1635;2;3;4]
Opt. Média-SDB			
RS	0.1170	0.0475	0.0255
	(0.503)	(0.848)	(0.793)
RSV	0.1918	0.0822	0.0429
	[3.1139;2;3;4]	[3.1202;2;3;4]	[3.1250;2;3;4]
Opt. Média-SV balanceada			
RS	0.1640	0.0873	0.0655
	(0.507)	(0.893)	(0.870)
RSV	0.2688	0.1528	0.1118
	[3.2963;2;4;4]	[3.3077;2;4;4]	[3.2981;2;4;4]
Opt. Média-CVaR			
RS	0.3231	0.2378	0.2527
	(0.675)	(0.880)	(0.836)
RSV	0.5490	0.3990	0.4370
	[3.6468;3;4;4]	[3.6346;3;4;4]	[3.6442;3;4;4]

Tabela 4: Rácio de Sharpe (RS) e de Sortino (RSV) associados ao desempenho *out-of-sample* dos vários problemas de optimização para o conjunto $C4$ (rebalanceamento diário, semanal e quinzenal). Entre parênteses curvos o p-valor da comparação entre o retorno *out-of-sample* da estratégia *naive* e de todas as outras estratégias. Os valores entre parêntese rectos referem-se ao número de títulos nas carteiras, apresentando-se o valor médio, mínimo, mediana e máximo, respectivamente.

	Carteira C8		
	Diário	Semanal	Quinzenal
Estratégia Naive			
RS	-0.0860	-0.3654	-0.3649
RSV	-0.1419	-0.5059	-0.4932
Opt. Média-Variância			
RS	-0.1052	-0.1654	-0.1961
	(0.729)	(0.756)	(0.563)
RSV	-0.1608	-0.2445	-0.2707
	[5.8726;4;6;8]	[5.8798;4;6;8]	[5.8558;4;5;8]
Opt. Média-SDA			
RS	0.1033	0.0245	0.0232
	(0.705)	(0.934)	(0.271)
RSV	0.1661	0.0380	0.0352
	[5.8951;4;6;8]	[5.9135;4;6;8]	[5.9231;4;6;8]
Opt. Média-SV			
RS	-0.0144	-0.0741	-0.0803
	(0.871)	(0.334)	(0.301)
RSV	-0.0234	-0.1150	-0.1222
	[6.8460;4;7;8]	[6.8365;4;7;8]	[6.8173;4;7;8]
Opt. Média-SDB			
RS	0.1039	0.0604	0.0469
	(0.803)	(0.244)	(0.273)
RSV	0.1643	0.0991	0.0737
	[5.8436;4;5;8]	[5.8557;4;5;8]	[5.8173;4;5;8]
Opt. Média-SV balanceada			
RS	-0.0550	-0.1144	-0.1390
	(0.951)	(0.507)	(0.466)
RSV	-0.0842	-0.1737	-0.2000
	[6.8552;5;8;8]	[6.8606;5;8;8]	[6.8365;5;7.5;8]
Opt. Média-CVaR			
RS	-0.0202	-0.1178	-0.1442
	(0.834)	(0.350)	(0.367)
RSV	-0.0309	-0.1796	-0.2147
	[6.2926;5;6;8]	[6.284;5;6;8]	[6.2885;5;6;8]

Tabela 5: Rácio de Sharpe (RS) e de Sortino (RSV) associados ao desempenho *out-of-sample* dos vários problemas de optimização para o conjunto $C8$ (rebalanceamento diário, semanal e quinzenal). Entre parênteses curvos o p-valor da comparação entre o retorno *out-of-sample* da estratégia *naive* e de todas as outras estratégias. Os valores entre parêntese rectos referem-se ao número de títulos nas carteiras, apresentando-se o valor médio, mínimo, mediana e máximo, respectivamente.

	Carteira C24		
	Diário	Semanal	Quinzenal
Estratégia Naive			
RS	0.3028	0.0426	0.0432
RSV	0.4499	0.0610	0.0631
Opt. Média-Variância			
RS	0.1989	0.1372	0.1444
	(0.983)	(0.437)	(0.787)
RSV	0.2912	0.2003	0.2088
	[15.7886;10;16;20]	[15.8077;10;16;20]	[15.7692;11;16;19]
Opt. Média-SDA			
RS	0.3039	0.2310	0.1841
	(0.920)	(0.291)	(0.672)
RSV	0.4757	0.3406	0.2754
	[15.5043;11;14;22]	[15.5048;11;14;22]	[15.4327;11;14;22]
Opt. Média-SV			
RS	0.2539	0.2049	0.2252
	(0.879)	(0.712)	-587
RSV	0.4190	0.3127	0.3586
	[21.4013;8;24;24]	[21.3509;12;24;24]	[21.5096;13;24;24]
Opt. Média-SDB			
RS	0.2904	0.2600	0.2714
	(0.801)	(0.642)	-472
RSV	0.4271	0.3740	0.4054
	[15.2656;10;15;21]	[15.2548;10;14.5;21]	[15.2500;10;15;21]
Opt. Média-SV balanceada			
RS	0.2419	0.1815	0.1909
	(0.681)	(0.882)	(0.701)
RSV	0.3551	0.2693	0.2817
	[20.7162;13;21;24]	[20.7548;13;21;24]	[20.7981;14;21;24]
Opt. Média-CVaR			
RS	0.1851	0.0315	0.0201
	(0.667	(0.889)	(0.984)
RSV	0.2710	0.0443	0.0293
	[15.1367;9;15;20]	[15.1202;9;15;20]	[15.1346;9;15;20]

Tabela 6: Rácio de Sharpe (RS) e de Sortino (RSV) associados ao desempenho *out-of-sample* dos vários problemas de optimização para o conjunto $C24$ (rebalanceamento diário, semanal e quinzenal). Entre parênteses curvos o p-valor da comparação entre o retorno *out-of-sample* da estratégia *naive* e de todas as outras estratégias. Os valores entre parêntese rectos referem-se ao número de títulos nas carteiras, apresentando-se o valor médio, mínimo, mediana e máximo, respectivamente.

Bibliografia

[1] R. P. Brito and L. N. Vicente. *Efficient cardinality/mean-variance portfolios.* System Modeling and Optimization, Springer series IFIP Advances in Information and Communication Technology, 45:307–317, 2014.

[2] M. Chen. *Negative Risk: A Generalized Risk Measure and Application to Portfolio Selection.* School of Business. Huaqiao University.

[3] C. M. Conover, H. S. Friday, and G. S. Sirmans. *Diversification benefits from foreign real estate investments.* Journal of Real Estate Portfolio Management, 7:125–131, 2002.

[4] G. Cornuejols and R. Tütüncü. *Optimization Methods in Finance.* Cambridge University Press, 2006.

[5] D. Cumova, D. Moreno, and D. Nawrocki. *The critical line algorithm for upm-lpm parametric general asset allocation problem with allocation boundaries and linear constrains.* Asset Allocation and International Investments. Palgrave Macmillan, London, pages 80–95, 2006.

[6] V. DeMiguel, Y. Plyakha, and R. Uppal e G. Vilkov. *Improving portfolio selection using option-implied volatility and skewness.* Journal of Financial and Quantitative Analysis, 48:1813–1845, 2013.

[7] P. M. A. Eichholtz. *The stability of the covariance of international property share returns.* The Journal of Real Estate Research, 67:116–126, 1996.

[8] J. Estrada. *Mean-semivariance behavior: An alternative behavioral model.* Journal of Emerging Market Finance, 3:231–248, 2004.

[9] J. Estrada. *Mean-semivariance optimization: A heuristic approach.* Journal of Applied Finance, 2008.

[10] J. R. Gerlash and F. J. DiTraglia. *Portfolio selection: An extreme value approach.* Journal of Banking & Finance, 37(2):305–323, 2013.

[11] D. Hampton and P. Darbyshire. *Hedge Fund Modelling and Analysis using MATLAB®.* John Wiley & Sons, Ltd, New York, 2014.

[12] R. Jarrow and F. Zhao. *Downside loss aversion and portfolio management.* Management Science, 52(4):558–566, 2006.

[13] J. S. Kamdem. *Value-at-risk and expected shortfall for linear portfolios with elliptically distribued risk.* International Journal of Theoretical and Applied Finance, 8:537–551, 2005.

[14] J. S. Kamdem. *Downside Risk and Kappa Index of Non-Gaussian Portfolio with LPM.* 2011. No. hal-00733043.

[15] L. Kong. *The UPM/LPM Framework on Portfolio Performance Measurement and Optimization.* Department of Mathematics, Uppsala University, U.U.D.M, 2006.

[16] H. Konno, H. Waki, and A. Yuuki. *Portfolio optimization under lower partial risk measures.* Asia-Pacific Financial Markets, 9(2):127–140, 2002.

[17] M. D. Lara, L. Andrieu, and B. Seck. *Optimization under risk constraints: an economic interpretation as maxmin over a family of utility functions.* 8 de Dezembro de 2011.

[18] K. H. Liow. *Extreme returns and value at risk in international securitized real estate markets.* Journal of Property Investment and Finance, 7:63–75, 2008.

[19] A. Mahmoudi and M. Jasemi. *On competence of lower partial moments of the first order for drawing the efficient frontier of portfolios.* International Research Journal of Applied and Basic Sciences, 7:441–450, 2013.

[20] H. Markowitz. *Portfolio selection.* The Journal of Finance, 7:77–91, 1952.

[21] H. Markowitz. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments.* John Wiley & Sons, Ltd, new york, ny edition, 1959.

[22] H. Markowitz. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments.* John Wiley & Sons, Ltd, 2nd ed., cambrige, ma, basil blackwell edition, 1991.

[23] H. Markowitz, P. Todd, G. Xu, and Y. Yamane. *Computing of mean-semivariance efficient sets by the critical line algorithm.* Annals of Operations Research, 45:307–317, 1993.

[24] D. Nawrocki. *A brief history of downside risk measures.* The Journal of Investing, 8:9–25, 1999.

[25] D. N. Nawrocki. *Optimal algorithms and lower partial moment: ex post results.* Applied Economics, 23:465–470, 1991.

[26] D. N. Nawrocki. *The characteristics of portfolios selected by n-degree lower partial moments.* International Review of Financial Analysis, 1:195–209, 1992.

[27] G. Newell and P. Ancheampong. *The dynamics of the australian property market risk and correlation profile.* Pacific Rim Property Research Journal, 7:259–270, 2001.

[28] R. T. Rockafellar and S. Uryasev. *Optimization of conditional value-at-risk.* Journal of Risk 2, 2:21–41, 2000.

[29] R. T. Rockafellar and S. Uryasev. *Conditional value-at-risk for general loss distributions.* Journal of banking & finance, 26(7):1443–1471, 2002.

[30] F. Schindler. *Correlation structure of real estate markets over time.* Journal of Property Investment and Finance, 27:579–592, 2009.

[31] F. Schindler and T. Kroencke. *Downside risk optimization in securitized real estate markets.* Journal of Property Investment & Finance, 28:434–453, 2010.

[32] T. F. Sing and S. E. Ong. *Asset allocation in downside risk framework.* Journal of Real Estate Portfolio Management, 6(3):213–223, 2000.

[33] R. Srivatsa, A. Simth, and J. Lekander. *Portfolio optimisation and bootstrapping.* Journal of Property Investment and Finance, 28:24–33, 2010.

[34] Inc. The MathWorks. *Financial Tolbox^{TM} User's Guide.* 2003.

[35] Inc. The MathWorks. *Econometrics Tolbox^{TM} User's Guide.* 2015.

[36] M. Unser. *Lower partial moments as measures of perceived risk: An experimental study.* Journal of Economic Psychology, 21:253–280, 2000.

[37] S. Uryasev, J. Palmquist, and P. Krokhmal. *Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints.* Journal of Risk, 4:43–68, 2002.

[38] L. N. Vicente. *Introdução à Matemática Financeira.* Departamento de Matemática da F.C.T.U.C., Ano Lectivo de 2012/2013.

[39] A. Wojt. *Portfolio Selection and Lower Partial Moments.* Royal Institute of Technology, Department of Mathematics, Stockholm, Sweden, 2009.