

O Método do Ângulo Completo

Benvindo do Rosário Évora da Cruz



O Método do Ângulo Completo

Benvindo do Rosário Évora da Cruz

Dissertação para a obtenção do Grau de **Mestre em Matemática**
Área de Especialização em **Análise Aplicada e Computação**
Orientada por **Pedro Henrique e Figueiredo Quaresma de Almeida**

Júri

Presidente: José Carlos de Gouveia Teixeira

Vogais: Alexander Kovačec

Pedro Henrique e Figueiredo Quaresma de Almeida

Data: 22 de Junho de 2015

Resumo

Este trabalho descreve o Método do Ângulo Completo para a geometria euclidiana construtiva assim como a sua implementação no âmbito do *Open Geo Prover*.

O Método do Ângulo Completo é baseado na noção de ângulo completo e num conjunto de axiomas e regras de inferência.

Apresentamos um conjunto de regras de inferência para o método do ângulo completo como sendo a base de demonstrações automatizadas de teoremas de geometria. Este método é uma extensão do método da área, obtendo-se a partir deste pela introdução de uma nova quantidade geométrica designada por ângulo completo.

Descreve-se também a implementação do método do ângulo completo no projecto *Open Geo Prover*.

Palavras Chave: Demonstração Automática de Teoremas em Geometria, Método do Ângulo Completo, Open Geo Prover

Abstract

This paper describes the Full Angle Method for constructive Euclidean geometry and its implementation on the *Open Geo Prover* project.

The Full Angle Method is based on the notion of full angle and a set of axioms and inference rules.

We present a set of rules based on the full angle as being a basis to automatic demonstration of geometry theorems. This method is an extension of the area method that we can obtain by introducing a new geometric quantity, designated the Full Angle.

We also describe the implementation of the full angle method on the *Open Geo Prover* project.

Keywords: Geometric Automated Theorem Proving, Full Angle Method, Open Geo Prover

Agradecimentos

Ao Professor Doutor Pedro Henrique e Figueiredo Quaresma de Almeida pela permanente disponibilidade demonstrada no acompanhamento deste trabalho desde o seu planeamento até à sua concretização.

Ao Nuno Baeta, Ivan Petrović e Zoltán Kovács pela ajuda prestada no esclarecimento de dúvidas e sugestões.

À família e amigos que, mesmo indirectamente, me apoiaram durante este período.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	O Método do Ângulo Completo	5
2.1	Introdução	5
2.2	Grandezas Geométricas	6
2.3	Regras Básicas	11
2.4	Regras Combinadas	11
2.5	Construções Geométricas	12
2.5.1	Afirmações Geométricas Construtivas	15
2.6	Lemas de Eliminação	15
2.7	Exemplos	18
3	Projecto Open Geo Prover	25
3.1	Estrutura do OGP	25
3.1.1	Pacotes	26
3.1.2	Diagrama UML	27
3.2	Comparação com Outros Sistemas	27
4	Implementação do Método do Ângulo Completo no OGP	29
4.1	Algoritmo do Método Ângulo Completo	29
4.2	Trabalho Desenvolvido	30
4.2.1	A Gramática \mathcal{G}_{EMAC}	30
4.2.2	UML do Pacote <code>com.ogprover.thmprover</code>	31
4.3	Exemplo de Utilização	32
4.3.1	Construção dos Exemplos no GeoGebra	32
4.3.2	Código XML	33
4.3.3	Execução do OGP	33
5	Conclusões	35
5.1	Relevância do Método do Ângulo Completo	35
5.2	Aplicações	35
5.3	Trabalho Futuro	35
A	Estrutura do Open Geo Prover	37
A.1	Pacotes	37
A.2	Classes nos Pacotes	38
B	Implementação da Gramática \mathcal{G}_{EMAC}	43
B.1	Código JavaCC	43
C	Diagramas UML	45
C.1	Diagramas UML	45

Lista de Figuras

1.1	Teorema de Ceva	2
2.1	Segmento dirigido \overline{AB}	6
2.2	Segmentos paralelos dirigidos coincidentes	7
2.3	Segmentos paralelos dirigidos não coincidentes	7
2.4	Área com Sinal de um Triângulo	8
2.5	Quadrilátero $\square A_1 A_2 A_3 A_4$	9
2.6	Ângulo Completo	9
2.7	Ângulo Completo (múltiplas denotações)	10
2.8	Soma de Ângulos Completos	10
2.9	Passo de construção 1	13
2.10	Passo de construção 2	13
2.11	Passo de construção 3	14
2.12	Passo de construção 4	14
2.13	Passo de construção 5	14
2.14	Passo de construção 6	15
2.15	<i>Exemplo_11</i>	19
2.16	<i>Exemplo_44</i>	20
2.17	<i>Exemplo_57</i>	21
2.18	<i>Exemplo_65</i>	22
2.19	<i>Exemplo_104</i>	23
2.20	<i>Exemplo_105</i>	24
3.1	Diagrama UML do OGP	27
4.1	UML do Pacote <code>com.ogprover.thmprover</code>	32
4.2	Construção no GeoGebra do exemplo <i>exemplo_65</i>	32
C.1	<code>com.ogprover.api</code>	45
C.2	<code>com.ogprover.api.converter</code>	45
C.3	<code>com.ogprover.geogebra</code>	45
C.4	<code>com.ogprover.geogebra.command</code>	46
C.5	<code>com.ogprover.geogebra.command.construction</code>	46
C.6	<code>com.ogprover.geogebra.command.statement</code>	46
C.7	<code>com.ogprover.main</code>	47
C.8	<code>com.ogprover.polynomials</code>	47
C.9	<code>com.ogprover.pp</code>	47
C.10	<code>com.ogprover.pp.tp</code>	47
C.11	<code>com.ogprover.pp.tp.auxiliary</code>	48
C.12	<code>com.ogprover.pp.tp.expressions</code>	48
C.13	<code>com.ogprover.pp.tp.expressions.parse</code>	48
C.14	<code>com.ogprover.pp.tp.geoconstruction 1</code>	49

C.15	com.ogprover.pp.tp.geoconstruction 2	49
C.16	com.ogprover.pp.tp.geoconstruction 3	49
C.17	com.ogprover.pp.tp.geoobject	49
C.18	com.ogprover.pp.tp.ndgcondition	50
C.19	com.ogprover.pp.tp.thmstatement 1	50
C.20	com.ogprover.pp.tp.thmstatement 2	50
C.21	com.ogprover.pp.tp.thmstatement 3	51
C.22	com.ogprover.test.junit	51
C.23	com.ogprover.test.manual	51
C.24	com.ogprover.thmprover	51
C.25	com.ogprover.utilities	51
C.26	com.ogprover.utilities.io	52
C.27	com.ogprover.utilities.logger	52

Capítulo 1

Introdução

A geometria com o seu carácter axiomático presta-se à utilização de métodos de demonstrações automáticas de teoremas. Entende-se por demonstrações automáticas de teoremas (*Automatic Theorem Proving*, ATP) como sendo um programa de computador que mostra se uma proposição (conjectura) é uma consequência lógica de um conjunto de proposições (axiomas e hipóteses). A linguagem utilizada pelos programas de ATP é formal. A demonstração é constituída por uma sequência de passos (consequências lógicas) que a partir de um dado conjunto de axiomas validam uma conjectura.

As demonstrações automáticas podem ser úteis tanto na investigação como no ensino. Relativamente ao ensino, interessam demonstrações que sejam legíveis.

Existem duas aproximações principais de demonstração automática em geometria:

- Métodos de Demonstrações Algébricas;
- Métodos de Demonstrações Sintéticas.

Os métodos algébricos surgiram na obra de Descartes (1596-1650) e na tradução de problemas de geometria em problemas algébricos. Alguns dos métodos práticos com base na aproximação algébrica são [4, 7, 19, 20, 28, 30]:

- Método de Wu;
- Método de eliminação;
- Método das bases de Gröbner.

Todos estes métodos têm em comum um estilo algébrico, sendo métodos eficientes e capazes de resolver problemas de grande complexidade. No entanto, nenhum deles fornece demonstrações legíveis, ou seja, eles lidam com polinómios que muitas vezes são extremamente complexos para um matemático entender, não tendo uma ligação directa com conteúdos geométricos.

Os métodos sintéticos abordam demonstrações automatizadas de teoremas de geometria e concentra-se em demonstrações sintéticas, numa tentativa de automatizar demonstrações do tipo “tradicional”, isto é, usando inferências geométricas. Muitos desses métodos adicionam elementos auxiliares para a configuração geométrica considerada, por forma a que esta possa ser aplicada num axioma. Estes métodos são baseados em conjuntos de axiomas e regras de inferência geométrica, próprias de cada método. São em geral poucos eficientes [5, 10, 13, 22, 27].

Desta forma surge a necessidade da utilização de métodos eficientes que produzam demonstrações legíveis e curtas. Para tal são utilizados métodos semi-algébricos, tais como o *método da área* [17, 18, 25] e o *método do ângulo completo* [6, 9]. O termo “semi-algébrico” pode ser melhor entendido como um método que utiliza características tanto dos métodos algébricos como dos métodos sintéticos. Convém realçar que as demonstrações fornecidas por estes métodos não recorrem a coordenadas, isto é, cada passo da demonstração tem um significado geométrico que é fácil de entender.

O método da área consegue produzir demonstrações automatizadas e legíveis facilmente compreensíveis por um matemático. O exemplo seguinte foi desenvolvido no âmbito do método da área.

Teorema 1.1 (Teorema de Ceva) *Sejam $\triangle ABC$ um triângulo e P um ponto arbitrário no plano (ver Figura 1.1). Considere os pontos D , E , e F tal que, D é o ponto de intersecção de AP com BC , E é o ponto de intersecção de BP com CA e F é o ponto de intersecção de CP com AB . Então, tem-se que:*

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$$

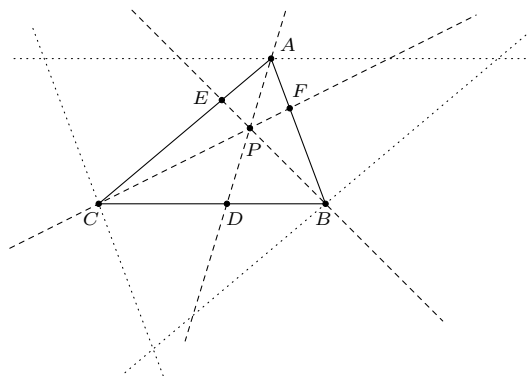


Figura 1.1: Teorema de Ceva

Os pontos A , B , C e P são pontos livres. Os pontos D , E e F são pontos definidos

por passos de construção, ou seja, o ponto D é a intersecção da linha determinada pelos pontos A e P com a linha determinada pelos pontos B e C . Os pontos E e F são construídas de forma análoga. A demonstração seguinte foi produzida pelo método da área:

Demonstração: Utilizando lemas de eliminação estudadas no método da área temos que $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\mathcal{S}_{APC}}{\mathcal{S}_{BCP}}$. Por analogia $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\mathcal{S}_{BPA}}{\mathcal{S}_{CAP}}$ e $\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\mathcal{S}_{CPB}}{\mathcal{S}_{ABP}}$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} &= \frac{\mathcal{S}_{APC}}{\mathcal{S}_{BCP}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} && \text{o ponto } F \text{ é eliminado} \\ &= \frac{\mathcal{S}_{APC}}{\mathcal{S}_{BCP}} \cdot \frac{\mathcal{S}_{BPA}}{\mathcal{S}_{CAP}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} && \text{o ponto } D \text{ é eliminado} \\ &= \frac{\mathcal{S}_{APC}}{\mathcal{S}_{BCP}} \cdot \frac{\mathcal{S}_{BPA}}{\mathcal{S}_{CAP}} \cdot \frac{\mathcal{S}_{CPB}}{\mathcal{S}_{ABP}} && \text{o ponto } E \text{ é eliminado} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Note-se também que P não é um ponto totalmente arbitrário no plano, uma vez que não pode pertencer a nenhuma das três linhas paralelas aos lados do triângulo e passando pelos vértices opostos. Este tipo de condições adicionais vão ser designadas por condições de não-degenerescência.

□

O método do ângulo completo é uma extensão do método da área, que se obtém deste introduzindo uma nova quantidade geométrica designada por ângulo completo e foi desenvolvido por Chou, Gao e Zhan. Este método é capaz de produzir demonstrações curtas e elegantes sendo estas semelhantes a demonstrações produzidas por matemáticos. Ao combinar o método da área com o método do ângulo completo consegue-se produzir provas simples e legíveis para um número significativo de teoremas da geometria euclidiana (sem incluir desigualdades).

Nesta dissertação ir-se-à estudar o método do ângulo completo e a sua implementação no sistema *Open Geo Prover*¹, o qual é um projecto código aberto desenvolvido em *Java* para a implementação de vários demonstradores automáticos de teoremas geométricos. Ele pode ser usado como uma aplicação independente, mas também pode ser integrado em ferramentas da geometria já existentes, tais como o *GeoGebra* [2].

¹<https://code.google.com/p/open-geo-prover/>

Capítulo 2

O Método do Ângulo Completo

2.1. Introdução

O método da ângulo completo (MAC) [9] é um método semi-algébrico de demonstração automática de teoremas em geometria. O MAC expressa as hipóteses de um teorema, usando:

- um conjunto de pontos livres como ponto de partida;
- um conjunto de instruções construtivas, cada uma das quais introduzindo um novo ponto ou recta, e expressa a conclusão por uma igualdade entre polinómios (sem considerar as coordenadas cartesianas).

A demonstração é desenvolvida através da eliminação por ordem inversa dos pontos e rectas introduzidos antes, usando para esse efeito um conjunto de lemas adequados. Depois de eliminar todos os pontos introduzidos, a conclusão do teorema é uma equação entre duas expressões envolvendo apenas ângulos completos. A conclusão só é válida se as expressões em ambos os lados forem iguais, caso contrário não é válida. Todos os passos da demonstração gerados pelo método do ângulo completo são expressos em termos de aplicação de lemas e simplificações de expressões.

O método do ângulo completo estende o método da área, introduzindo uma nova quantidade geométrica designada por ângulo completo, alargando deste modo o âmbito do demonstrador, permitindo demonstrar conjecturas relacionadas com:

- **Pontos** - igualdade, colinearidade, cíclicos e harmónicos;
- **Rectas** - paralelismo e perpendicularidade;
- **Segmentos** - ponto médio e proporcionalidade;
- **Ângulos** - igualdade.

Neste capítulo vamos abordar a parte teórica do método do ângulo completo, onde em primeiro lugar vamos descrever as grandezas geométricas que são quantidades próprias do método do ângulo completo. Em seguida introduzimos as regras de inferência (regras básicas e combinadas) que são regras satisfeitas por um ângulo completo, as construções geométricas onde por passos de construção construímos objectos geométricos, as afirmações geométricas construtivas, os lemas de eliminação que são utilizadas para eliminar pontos e rectas auxiliares usadas na construção dos objectos. Por fim introduzimos alguns exemplos que ilustram a aplicação do método do ângulo completo.

2.2. Grandezas Geométricas

As grandezas geométricas utilizadas pelo método do ângulo completo permitem simplificar muito o enunciado e a demonstração de teoremas em geometria. As propriedades destas quantidades geométricas são estabelecidas por um conjunto extenso de lemas [9, 17, 25].

Por convenção, vamos assumir que: pontos no plano são denotados por letras maiúsculas; rectas no plano são denotados por letras minúsculas; uma recta que passa por dois pontos A e B é denotado por AB ; um triângulo com vértices A, B e C é denotado por $\triangle ABC$; a área convencional¹ de um triângulo $\triangle ABC$ é denotado por ∇ABC ;

Começemos por definir um segmento dirigido e razão entre segmentos.

Definição 2.1 (Segmento Dirigido) *Um segmento dirigido nada mais é que um segmento de recta onde se atribui uma escolha para as extremidades inicial e final do segmento. Usaremos a notação \overline{AB} para designar o segmento dirigido cuja a extremidade inicial é A e a extremidade final é B , assim como o seu comprimento (ver figura 2.1).*



Figura 2.1: Segmento dirigido \overline{AB}

Note que,

$$\overline{AB} = -\overline{BA} \quad e \quad \overline{AB} = 0 \text{ se, e somente se, } A = B$$

A seguir vamos definir as quantidades próprias do método da área as quais são também necessárias no método do ângulo completo.

¹Em contraposição com a área com sinal introduzida pelo método da área.

Definição 2.2 (Razão de Segmentos Paralelos Dirigidos) *Sejam A, B, C e D quatro pontos de uma recta r com $A \neq B$, definimos a razão de segmentos paralelos dirigidos como número real t dado por:*

$$t = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}},$$

de modo que $\overline{CD} = t \cdot \overline{AB}$. Note-se que \overline{AB} e \overline{CD} têm a mesma orientação se $t > 0$ e orientações contrários se $t < 0$ (ver figura 2.2).



Figura 2.2: Segmentos paralelos dirigidos coincidentes

Pode-se ver claramente que $\overline{CD}/\overline{AB} > 0$ pois \overline{CD} e \overline{AB} possuem a mesma orientação. Consideremos agora os pontos Q e P , tais que $ABQP$ é um paralelogramo e C, D estão na linha AB (ver figura 2.3). Então

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{PQ}}.$$

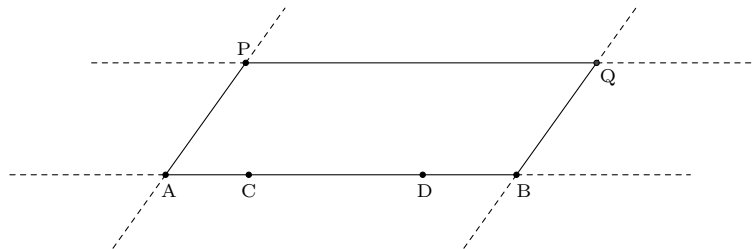


Figura 2.3: Segmentos paralelos dirigidos não coincidentes

A área (convencional) de um triângulo $\triangle ABC$ formado por três pontos A, B e C não-colineares é definida por

$$\nabla ABC = \frac{b \cdot h}{2}$$

onde h é a medida de uma altura relativamente a uma base de medida b do triângulo $\triangle ABC$. A noção de áreas com sinal baseia-se na noção de orientação de triângulos.

Definição 2.3 (Área com Sinal de um Triângulo) *Sejam A, B e C três pontos no plano. Se A, B e C forem colineares, definimos a área com sinal denotado por S_{ABC} , do triângulo (degenerado) $\triangle ABC$ como sendo 0. Caso contrário se A, B e C*

Capítulo 2 O Método do Ângulo Completo

forem não-colineares (ver figura 2.4) então definimos

$$\mathcal{S}_{ABC} = +\nabla ABC$$

se A, B e C estão dispostos no sentido anti-horário e

$$\mathcal{S}_{ABC} = -\nabla ABC$$

se A, B e C estão dispostos no sentido horário,

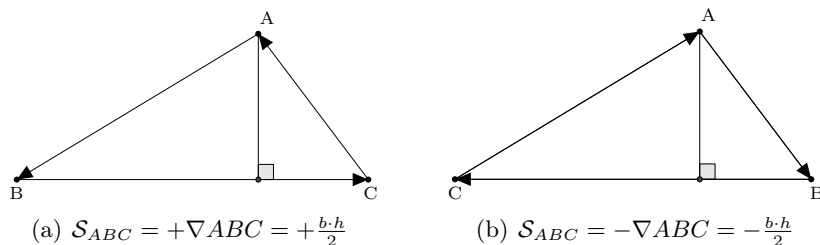


Figura 2.4: Área com Sinal de um Triângulo

Portanto podemos concluir de imediato que

$$\mathcal{S}_{ABC} = \mathcal{S}_{BCA} = \mathcal{S}_{CAB} = -\mathcal{S}_{ACB} = -\mathcal{S}_{BAC} = -\mathcal{S}_{CBA}.$$

Note-se que, de modo mais geral, podemos definir o sinal da área de um polígono de ordem n orientado, $A_1 A_2 \cdots A_n$, ($n \geq 3$) como:

$$\mathcal{S}_{A_1 A_2 \cdots A_n} = \sum_{i=3}^n \mathcal{S}_{A_1 A_{i-1} A_i}.$$

Por exemplo, para $n = 4$ temos um quadrilátero orientado $\square A_1 A_2 A_3 A_4$ (ver figura 2.5) donde, da definição acima, tem-se que a área com sinal de $\square A_1 A_2 A_3 A_4$ é dado por

$$\mathcal{S}_{A_1 A_2 A_3 A_4} = \mathcal{S}_{A_1 A_2 A_3} + \mathcal{S}_{A_1 A_3 A_4}.$$

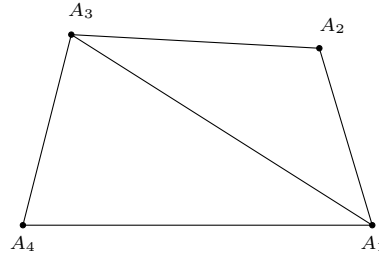


Figura 2.5: Quadrilátero $\square A_1 A_2 A_3 A_4$

A diferença de Pitágoras é uma generalização da igualdade de Pitágoras em relação aos três lados de um triângulo recto, para uma expressão aplicável a qualquer triângulo.

Definição 2.4 (Diferença de Pitágoras) *Dados três pontos A , B , e C , a diferença de Pitágoras, denotada por \mathcal{P}_{ABC} , é definida do seguinte modo:*

$$\mathcal{P}_{ABC} = \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 - \overline{AC}^2.$$

Definição 2.5 *Dado um quadrilátero $\square ABCD$, \mathcal{P}_{ABCD} é definida como se segue:*

$$\mathcal{P}_{ABCD} = \mathcal{P}_{ABD} - \mathcal{P}_{CBD} = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{DA}^2.$$

De seguida define-se a grandeza geométrica que está na base do método do ângulo completo.

Definição 2.6 (Ângulo Completo) *Sejam u e v duas rectas no plano, definimos o ângulo completo denotado por $\angle[u, v]$, como sendo o ângulo da recta u para a recta v , (ver figura 2.6).*

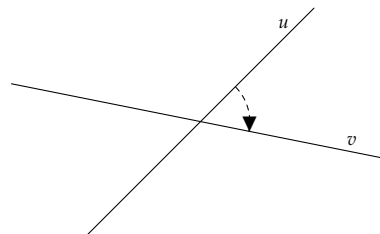


Figura 2.6: Ângulo Completo

Dois ângulos completos $\angle[u, v]$ e $\angle[l, m]$ são iguais se existir uma rotação K tal que: $K(l) \parallel u$ e $K(m) \parallel v$.

Capítulo 2 O Método do Ângulo Completo

Note-se que u e v não são semi-rectas, como na definição dos ângulos comuns. Sejam A e B pontos pertencentes à recta u com $A \neq B$, e sejam C e D pontos pertencentes à recta v com $C \neq D$, (ver figura 2.7) então o ângulo completo $\angle[u, v]$ pode também ser denotado por $\angle[u, CD]$, $\angle[u, DC]$, $\angle[AB, v]$, $\angle[BA, v]$, $\angle[AB, CD]$, $\angle[AB, DC]$, $\angle[BA, CD]$, ou ainda por $\angle[BA, DC]$.

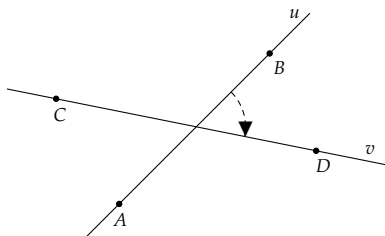


Figura 2.7: Ângulo Completo (múltiplas denotações)

Definição 2.7 (Ângulo Completo Recto) Sejam u e v duas rectas. Se $u \perp v$, então $\angle[u, v]$ diz-se um ângulo completo recto e denota-se por $\angle[1]$.

Definição 2.8 (Ângulo Completo Raso) Sejam u e v duas rectas. Se $u \parallel v$, então $\angle[u, v]$ diz-se um ângulo completo raso e denota-se por $\angle[0]$.

Definição 2.9 (Soma de Ângulos Completos) Para o significado geométrico da adição de ângulos completos (ver figura 2.8), sejam u, v, l e m quatro linhas que formam os ângulos completos $\angle[u, v]$ e $\angle[l, m]$. Seja K uma rotação tal que $K(l) \parallel v$. Então

$$\angle[u, v] + \angle[l, m] = \angle[u, K(m)].$$

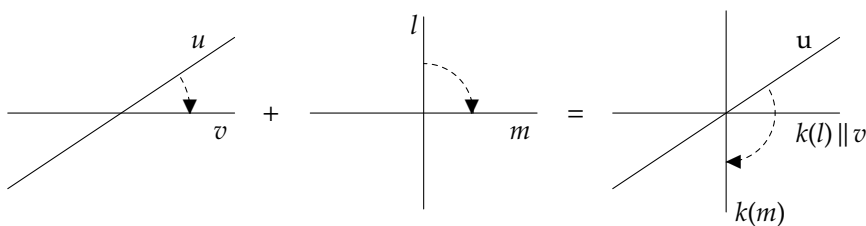


Figura 2.8: Soma de Ângulos Completos

A noção de ângulo completo pode também ser definida formalmente a partir da área com sinal e diferença de Pitágoras.

Proposição 1 Dois ângulos completos $\angle[AB, CD]$ e $\angle[PQ, UV]$ dizem-se iguais se e só se $\mathcal{S}_{ACBD}\mathcal{P}_{PUQV} = \mathcal{S}_{PUQV}\mathcal{P}_{ACBD}$.

2.3. Regras Básicas

O ângulo completo é definido como um par ordenado de rectas que satisfazem as seguintes regras [9]:

R1 Para todas as rectas paralelas $AB \parallel CD$, $\angle[0] = \angle[AB, CD]$ é uma constante.

R2 Para todas as rectas perpendiculares $AB \perp CD$, $\angle[1] = \angle[AB, CD]$ é uma constante.

R3 Há uma operação “adição” entre dois ângulos completos que é comutativa e associativa.

R4 $\angle[1] + \angle[1] = \angle[0]$.

R5 $\angle[u, v] + \angle[0] = \angle[u, v]$.

R6 Se X está na recta CD , então $\angle[AB, CX] = \angle[AB, CD]$.

R7 Se AB é paralela a CD , então $\angle[EF, AB] = \angle[EF, CD]$.

R8 Se AB é perpendicular a CD então $\angle[EF, AB] = \angle[1] + \angle[EF, CD]$.

R9 Se $\overline{XA} = \overline{XB}$, então $\angle[AX, AB] = \angle[AB, XB]$.

R10 (Teorema do Ângulo Inscrito) Se os pontos A, B, C e D forem cíclicos, então $\angle[AD, CD] = \angle[AB, CB]$.

R11 Se o ponto O é circuncentro do $\triangle ABC$ e se o ponto M for o ponto médio de AB , então $\angle[AO, OM] = \angle[AC, BC]$.

R12 Se $\overline{MA} = \overline{MB}$ e se os pontos A, B, P e M forem cíclicos, então $\angle[PA, PM] = \angle[PM, PB]$.

R13 $\angle[AB, CD] = -\angle[CD, AB]$.

R14 Para qualquer recta EF , $\angle[AB, CD] = \angle[AB, EF] + \angle[EF, CD]$.

2.4. Regras Combinadas

As regras que se seguem são combinações das regras básicas:

R15 Se os pontos A, X e U e os pontos P, X e R forem colineares e se os pontos X, P, Q e U forem cíclicos, então pelas regras **R14**, **R6** e **R10** temos que $\angle[AX, BC] = \angle[AX, XP] + \angle[XP, BC] = \angle[QU, QP] + \angle[PR, BC]$.

- R16** Se os pontos X, C e D , os pontos X, U e A e os pontos X, V e B são colineares e se os pontos X, U, C e E e os pontos X, V, D e F forem cíclicos, então pelas regras **R14**, **R6** e **R10** temos que $\angle[AX, BX] = \angle[AX, XC] + \angle[XD, XB] = \angle[EU, EC] + \angle[FD, EV]$. Em particular, se $C = D$, então XC é uma corda comum entre os dois círculos.
- R17** Se $\overline{XA} = \overline{XB}$ e se os pontos X, A e W forem colineares, então pelas regras **R14** e **R9** temos que $\angle[AX, BX] = \angle[AX, AB] + \angle[AB, XB] = 2\angle[AX, AB] = 2\angle[AW, AB]$. Neste caso, o ponto W pode ser o mesmo que o ponto X .
- R18** Se $\overline{XA} = \overline{XB}$ e se os pontos X, A e W e os pontos A, B e U forem colineares, então pelas regras **R14**, **R6** e **R9** temos que $\angle[BX, CD] = \angle[BX, AB] + \angle[AB, CD] = \angle[AU, AW] + \angle[AU, CD]$.
- R19** Se o ponto O é o circuncentro do triângulo de vértices A, B e C e se o ponto M for o ponto médio de \overline{AB} , então pelas regras **R14**, **R6** e **R11** temos que $\angle[AO, AB] = \angle[AO, OM] + \angle[OM, AB] = \angle[AC, CB] + \angle[1]$.
- R20** Se X, W, U e V forem pontos cíclicos, os pontos X, U e A forem pontos colineares e os pontos X, V, P e Q forem perpendiculares, então temos que $\angle[AX, BC] = \angle[AX, VX] + \angle[VX, BC] = \angle[WU, WV] + \angle[PQ, BC] + \angle[1]$.
- R21** Se o ponto I é o incentro do triângulo de vértices A, B e C , então temos que $\angle[AI, AB] + \angle[BI, BC] + \angle[CI, CA] = \angle[1]$.

2.5. Construções Geométricas

O método do ângulo completo é utilizado para demonstrar conjecturas geométricas construtivas, isto é, declarações sobre as propriedades dos objectos construídos utilizando um conjunto fixo de passos de construções elementares. Nesta secção vamos descrever o conjunto de passos de construções elementares (*PCE*) utilizados no método do ângulo completo.

Todas as construções suportadas pelo método do ângulo completo são expressas em termos de pontos e/ou rectas. Apenas rectas e círculos determinados por pontos específicos podem ser usados (em vez de serem escolhidas arbitrariamente rectas e círculos). O passo chave de construção consiste em introduzir novos pontos ou uma recta passando por um ponto específico. Para que os passos de construção sejam bem definidos certas condições têm de ser verificadas. Essas condições são chamadas

condições de não-degenerescência ou, abreviadamente condições-ndg. O grau de liberdade diz-nos se um ponto ou recta é livre (grau de liberdade superior a 0), ou não.

No texto a seguir, vamos denotar por: (LINE A B) a recta definida pelos pontos A e B; (CIRCLE O A) a circunferência tal que o centro é o ponto O e o ponto A pertence à circunferência; (ANGLE A B C D) o ângulo da recta AB para a recta CD.

De seguida apresenta-se a lista de construções elementares do método do ângulo completo, com as correspondentes condições de não-degenerescência e os graus de liberdade dos pontos construídos.

PCE 1 Construção de um ponto arbitrário A (ver figura 2.9). Denotamos esse passo de construção por (POINT A).



Figura 2.9: Passo de construção 1

Condições-ndg: –

Grau de liberdade para A: 2

PCE 2 Construção de um ponto E (ver figura 2.10), que é o ponto de intersecção de (LINE A B) e (LINE C D). Denotamos esse passo de construção por (INTER E (LINE A B)(LINE C D)).

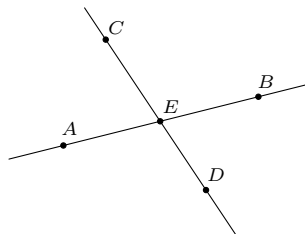


Figura 2.10: Passo de construção 2

Condições-ndg: $AB \nparallel CD$, $A \neq B$, $C \neq D$

Grau de liberdade para E: 0

PCE 3 Construção de um ponto E (ver figura 2.11), que é o ponto de intersecção da recta que passa pelo ponto C e é perpendicular a (LINE A B). Denotamos esse passo de construção por (FOOT E (LINE A B)(LINE C D)).

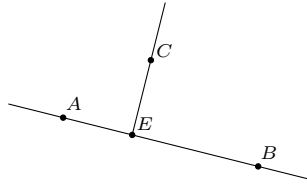


Figura 2.11: Passo de construção 3

Condições-ndg: $A \neq B$

Grau de liberdade para E: 0

PCE 4 Construção de um ponto E (ver figura 2.12), na recta que passa pelo ponto C, e paralela a (LINE A B) tal que $\overline{CE} = r\overline{AB}$ onde r é um número racional, uma expressão racional na geometria quantitativa, ou uma variável. Denotamos esse passo de construção por (PRATIO E C (LINE A B) r).

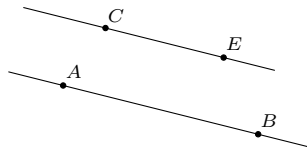


Figura 2.12: Passo de construção 4

Condições-ndg: $A \neq B$. Se r é uma expressão racional na geometria quantitativa então o denominador de r não pode ser zero.

Grau de liberdade para E: $\begin{cases} 0, & \text{se } r \text{ é uma quantidade fixa;} \\ 1, & \text{se } r \text{ é uma variável.} \end{cases}$

PCE 5 Construção dum ponto E (ver figura 2.13), na recta que passa pelo ponto A e perpendicular a (LINE A B) e tal que $r = \frac{4S_{ABE}}{P_{ABA}}$, onde r pode ser um número racional, uma expressão racional na geometria quantitativa, ou uma variável. Denotamos esse passo de construção por (TRATIO E (LINE A B) r).

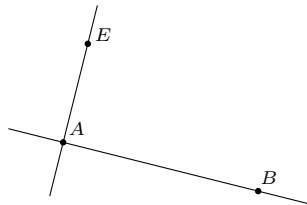


Figura 2.13: Passo de construção 5

Condições-ndg: $A \neq B$. Se r é uma expressão racional na geometria quantitativa então o denominador de r não pode ser zero.

Grau de liberdade para E: $\begin{cases} 0, & \text{se } r \text{ é uma quantidade fixa;} \\ 1, & \text{se } r \text{ é uma variável.} \end{cases}$

PCE 6 Construção de uma recta l , onde é dado uma recta AB e um ângulo completo $\angle[CD, DE]$ tal que l passa por A e $\angle[AB, l] = \angle[CD, DE]$, (ver figura 2.14). Denotamos esse passo de construção por (ALINE A (ANGLE B C D E)).

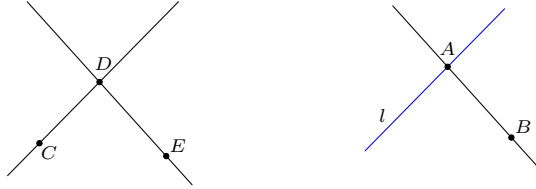


Figura 2.14: Passo de construção 6

Condições-ndg: $A \neq B, C \neq D, D \neq E$

Grau de liberdade para l : 0

2.5.1. Afirmações Geométricas Construtivas

No método do ângulo completo as afirmações geométricas construtivas têm uma forma específica.

Definição 2.10 (Afirmações Geométricas Construtivas) *Uma afirmação geométrica construtiva é uma lista $S = (C_1, C_2, \dots, C_n, G)$ onde C_i , para $1 \leq i \leq n$, são passos de construções elementares, e G é uma afirmação que pode tomar uma das seguintes formas:*

- $E_1 = E_2$, onde E_1 e E_2 são polinômios na geometria quantitativa dos pontos introduzidos pelos passos de construções elementares C_i .
- $\sum_{i=1}^{k_1} a_i \angle[l_i, m_i] = \sum_{j=1}^{k_2} b_j \angle[u_j, v_j]$, onde $a_i, b_j \in \mathbb{Z}$, para $1 \leq i \leq k_1$ e $1 \leq j \leq k_2$.

Denotamos a classe de todas as afirmações geométricas construtivas por \mathcal{C} .

Para a afirmação $S = (C_1, C_2, \dots, C_n, G)$ de \mathcal{C} , a condição de não-degenerescência é o conjunto das condições de não-degenerescência dos passos C_i mais a condição de que as razões dos comprimentos dos denominadores em E_1 e E_2 não podem ser zero.

Note-se que o método do ângulo completo não consegue lidar com desigualdades em G .

2.6. Lemas de Eliminação

Apresentamos aqui os lemas de eliminação associados ao método do ângulo completo.

Capítulo 2 O Método do Ângulo Completo

Lema 2.1 (EL1) Para qualquer recta EF , existem rectas AB e CD tal que $\angle[AB, CD] = \angle[AB, EF] + \angle[EF, CD]$.

Demonstração: Este resultado é consequência da definição de soma de ângulos completos e o facto de $EF \parallel EF$. \square

Lema 2.2 (EL2) Se as rectas AB e CD forem paralelas, isto é, $AB \parallel CD$, então dado qualquer recta EF tem-se que $\angle[EF, AB] = \angle[EF, CD]$.

Demonstração: Por hipótese tem-se que $AB \parallel CD$, então pela regra **R1** tem-se que $\angle[AB, CD] = \angle[0]$. Portanto,

$$\begin{aligned}
 \angle[EF, AB] &= -\angle[AB, EF] && \text{por R13} \\
 &= -(\angle[AB, CD] + \angle[CD, EF]) && \text{por R14} \\
 &= -(\angle[0] + \angle[CD, EF]) && \text{por R1} \\
 &= -(\angle[CD, EF] + \angle[0]) && \text{por R3} \\
 &= -(\angle[CD, EF]) && \text{por R5} \\
 &= \angle[EF, CD] && \text{por R13}
 \end{aligned}$$

\square

Lema 2.3 (EL3) Dado o ângulo completo $\angle[AB, CD]$, se o ponto X pertence à recta CD , então $\angle[AB, CX] = \angle[AB, CD]$.

Demonstração: Por hipótese tem-se que o ponto X pertence à recta CD , portanto $CX \parallel CD$. Logo usando a regra **R7** podemos concluir que $\angle[AB, CX] = \angle[AB, CD]$. \square

Lema 2.4 (EL4) Se as rectas AB e CD forem perpendiculares, isto é, $AB \perp CD$, então dada qualquer recta EF tem-se que $\angle[EF, AB] = \angle[1] + \angle[EF, CD]$.

Demonstração: Por hipótese tem-se que $AB \perp CD$, então pela regra **R2** tem-se que $\angle[AB, CD] = \angle[1]$. Portanto,

$$\begin{aligned}
 \angle[EF, AB] &= \angle[EF, CD] + \angle[AB, CD] && \text{por R14} \\
 &= \angle[EF, CD] + \angle[1] && \text{por R2} \\
 &= \angle[1] + \angle[EF, CD] && \text{por R3}
 \end{aligned}$$

\square

Lema 2.5 (EL5) Se $\overline{XA} = \overline{XB}$, então $\angle[AX, AB] = \angle[AB, XB]$.

Demonstração: Por hipótese tem-se que $\overline{XA} = \overline{XB}$. Pela **proposição 1**, provar que $\angle[AX, AB] = \angle[AB, XB]$ é equivalente a provar que

$$\mathcal{S}_{AAXB}\mathcal{P}_{AXBB} = \mathcal{S}_{AXBB}\mathcal{P}_{AAXB}. \quad (2.1)$$

Usando a **Definição 2.2**, podemos ver que

$$\mathcal{S}_{AAXB} = \mathcal{S}_{AAX} + \mathcal{S}_{AXB} = \mathcal{S}_{AXB} \quad (2.2)$$

$$\mathcal{S}_{AXBB} = \mathcal{S}_{AXB} + \mathcal{S}_{ABB} = \mathcal{S}_{AXB} \quad (2.3)$$

Portanto, das equações 2.2 e 2.3, sabendo que $\mathcal{S}_{AAX} = \mathcal{S}_{ABB} = 0$ temos que

$$\mathcal{S}_{AAXB} = \mathcal{S}_{AXBB} \quad (2.4)$$

Usando a **Definição 2.5**, podemos ver que

$$\mathcal{P}_{AAXB} = \overline{AA}^2 + \overline{XB}^2 - \overline{AX}^2 - \overline{AB}^2 \quad (2.5)$$

$$\mathcal{P}_{AXBB} = \overline{AX}^2 + \overline{BB}^2 - \overline{XB}^2 - \overline{BA}^2 \quad (2.6)$$

Das equações 2.5 e 2.6, sabendo que $\overline{AA}^2 = 0$ e $\overline{BB}^2 = 0$ e atendendo à hipótese de $\overline{XA} = \overline{XB}$ temos

$$\mathcal{P}_{AAXB} = \mathcal{P}_{AXBB} \quad (2.7)$$

Assim das equações 2.4 e 2.7, concluímos que

$$\mathcal{S}_{AAXB}\mathcal{P}_{AXBB} = \mathcal{S}_{AXBB}\mathcal{P}_{AAXB}.$$

□

Lema 2.6 (EL6 (Teorema do Ângulo Inscrito)) *Se os pontos A, B, C e D forem pontos cíclicos, então tem-se que $\angle[AD, CD] = \angle[AB, CB]$.*

Lema 2.7 (EL7) *Se o ponto O for o circuncentro do triângulo $\triangle ABC$ e se o ponto M for o ponto médio do lado AB , então tem-se que $\angle[AO, OM] = \angle[AC, BC]$.*

Lema 2.8 (EL8) *Se $\overline{MA} = \overline{MB}$ e se os pontos A, B, P e M forem pontos cíclicos, então tem-se que $\angle[PA, PM] = \angle[PM, PB]$.*

Note que (EL3) é para eliminar um ponto de um ângulo completo e os restantes (EL1–EL2) e (EL4–EL8) são para eliminar rectas de um ângulo completo.

2.7. Exemplos

Os exemplos seguintes são casos de aplicação do método do ângulo completo e foram retirados de [6]. As demonstrações foram efectuadas de forma automática no *Java Geometry Expert* (JGEX)² o qual é um software em código fechado, que combina um programa dinâmico da geometria (DGS) e demonstradores automáticos de teoremas geométricos (GATP).

Para facilitar a escrita vamos denotar por:

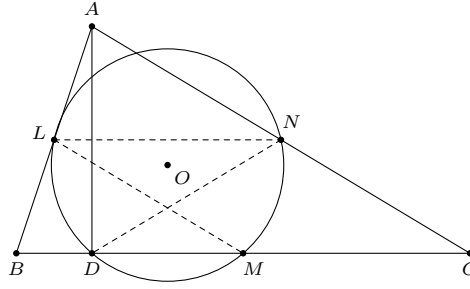
- MIDPOINT(C, A, B), que significa que o ponto C é o ponto médio de \overline{AB} ;
- FOOT(E, C, A, B), que significa que o ponto E é o pé de perpendicular do ponto C em \overline{AB} ;
- COLL(A, B, C), que significa que os pontos A, B e C são pontos colineares;
- CONG(A, B, C, D), que significa que \overline{AB} e \overline{CD} são segmentos congruentes;
- PARA(A, B, C, D), que significa que \overline{AB} e \overline{CD} são segmentos paralelos;
- PERP(A, B, C, D), que significa que \overline{AB} e \overline{CD} são segmentos perpendiculares;
- CIRCUMCENTER(O, A, B, C), que significa que o ponto O é o centro da circunferência circunscrita em $\triangle ABC$;
- CYCLIC(A, B, C, D), que significa que os pontos A, B, C e D são pontos cíclicos;
- EQANGLE(A, B, C, D, E, F), que significa que os ângulos completos $\angle[AB, BC]$ e $\angle[DE, EF]$ são ângulos congruentes.

Exemplo 1 (A Circunferência de nove pontos) *Seja $\triangle ABC$ um triângulo e sejam L, M e N os pontos médios dos lados AB, BC e CA , respectivamente (ver figura 2.15) e AD a altura em BC . Mostre que L, M, N e D são cíclicos.*

Ordem dos pontos: A, B, C, D, L, M, N .

Hipóteses: MIDPOINT(M, B, C), MIDPOINT(N, A, C), MIDPOINT(L, A, B), FOOT(D, A, B, C).

Conclusão: CYCLIC(L, D, M, N).

Figura 2.15: *Exemplo_11*

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 -\angle[NL, ND] + \angle[ML, MD] &= \angle[ND, CB] + \angle[ML, MD] \\
 &\quad (\text{pois, } \angle[NL, ND] = -\angle[ND, CB], \text{ porque } NL \parallel BC, \\
 &\quad \text{usando a regra (R7)}) \\
 &= \angle[ML, MD] + \angle[DA, CA] + \angle[1] \\
 &\quad (\text{pois, } \angle[ND, CB] = \angle[ND, DC] = \angle[DA, CA] + \angle[1], \\
 &\quad \text{por circuncentro } (N, D, C, A), \text{ usando a regra (R19)}) \\
 &= -\angle[MD, DA] + \angle[1] \\
 &\quad (\text{pois, } \angle[ML, MD] + \angle[DA, CA] = -\angle[MD, DA], \\
 &\quad \text{porque } ML \parallel CA, \text{ usando a regra (R14)}) \\
 &= \angle[0] \\
 &\quad (\text{pois, } \angle[MD, DA] = \angle[1], \text{ porque } MD \perp DA, \text{ usando a regra (R2)})
 \end{aligned}$$

□

Exemplo 2 Consideremos uma circunferência que passa pelos quatro vértices de um quadrilátero $\square ABCD$ (ver figura 2.16). Seja A_1 o ponto de intersecção da recta perpendicular ao lado AB com o lado CD passando pelo ponto A , e seja C_1 o ponto de intersecção da recta perpendicular ao lado CD com o lado AB passando pelo ponto C . Mostre que A_1C_1 é paralela à diagonal BD .

Ordem dos pontos: A, B, C, D, A_1, C_1 .

Hipóteses: $\text{CYCLIC}(A, B, C, D)$, $\text{COLL}(A_1, C, D)$, $\text{PERP}(A_1, A, A, B)$, $\text{COLL}(C_1, A, B)$, $\text{PERP}(C_1, C, C, D)$.

Conclusão: $\text{PARA}(A_1, C_1, B, D)$.

²<http://www.cs.wichita.edu/~ye/>

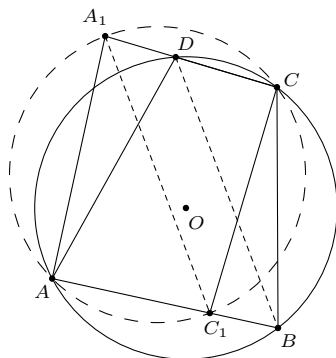


Figura 2.16: *Exemplo_44*

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 \angle[C_1A_1, DB] &= \angle[A_1C, CA] - \angle[DB, BA] \\
 &\quad (\text{pois, } \angle[C_1A_1, DB] = \angle[C_1A_1, C_1A] + \angle[AB, DB] = \\
 &\quad \angle[A_1C, CA] - \angle[DB, BA], \text{ porque } A, B \text{ e } C_1 \text{ são colineares,} \\
 &\quad \text{e } C_1, A_1, A \text{ e } C \text{ são cíclicos, usando a regra (R16)}) \\
 &= \angle[DC, CA] - \angle[DB, BA] \\
 &\quad (\text{pois, } \angle[A_1C, CA] = \angle[DC, CA], \\
 &\quad \text{porque } A_1, C \text{ e } D \text{ são colineares, usando a regra (R6)}) \\
 &= \angle[0] \\
 &\quad (\text{pois, } \angle[DC, CA] = \angle[DB, BA], \\
 &\quad \text{porque } A, B, C \text{ e } D \text{ são cíclicos, usando a regra (R10)})
 \end{aligned}$$

□

Exemplo 3 Seja $\triangle ABC$ um triângulo e seja D o ponto de intersecção da altura em A com o lado BC (ver figura 2.17). Consideremos a circunferência cujo o diâmetro é AD e que intersecta os lados AB e AC nos pontos E e F , respectivamente. Mostre que os pontos B, C, E e F são cíclicos.

Ordem dos pontos: A, B, C, D, O, E, F .

Hipóteses: FOOT(D, A, B, C), MIDPOINT(O, A, D), COLL(E, A, B),
 CONG(O, A, O, E), COLL(F, A, C), CONG(O, A, O, F).

Conclusão: CYCLIC(B, C, E, F).

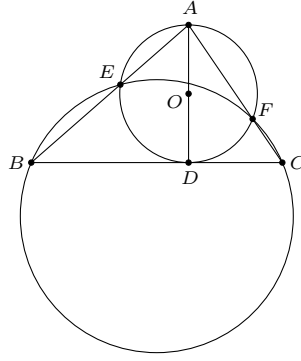


Figura 2.17: *Exemplo_57*

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 \angle[FE, EB] - \angle[FC, CB] &= \angle[FD, DA] - \angle[FC, CB] \\
 &\quad (\text{pois, } \angle[FE, EB] = \angle[FD, DA], \text{ porque } A, B \text{ e } E \text{ são} \\
 &\quad \text{colineares, e } E, F, A \text{ e } D \text{ são cíclicos, usando as regras (R6) e (R10)}) \\
 &= -\angle[FC, CB] - \angle[CB, CA] \\
 &\quad (\text{pois, } \angle[FD, DA] = -\angle[CB, CA], \\
 &\quad \text{porque } FD \perp AC \text{ e } DA \perp BC, \text{ usando as regras (R3), (R13) e (R14)}) \\
 &= -\angle[FC, CA] \\
 &\quad (\text{pois, } -\angle[FC, CB] - \angle[CB, CA] = -\angle[FC, CA], \\
 &\quad \text{porque } CB \parallel CB, \text{ usando a regra (R14)}) \\
 &= \angle[0] \\
 &\quad (\text{pois, } \angle[FC, CA] = \angle[0], \text{ porque } FC \parallel CA, \text{ usando a regra (R1)})
 \end{aligned}$$

□

Exemplo 4 Seja $\triangle ABC$ um triângulo e sejam D e E dois pontos nos lados AB e AC , respectivamente, tal que $DE \parallel BC$ (ver figura 2.18). Mostre que as circunferências circunscritas nos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ são tangentes.

Ordem dos pontos: A, B, C, O, D, E, N .

Hipóteses: CIRCUMCENTER(O, A, B, C), COLL(D, A, B), COLL(E, A, C),

PARA(D, E, B, C), CIRCUMCENTER(N, A, D, E).

Conclusão: COLL(A, N, O).

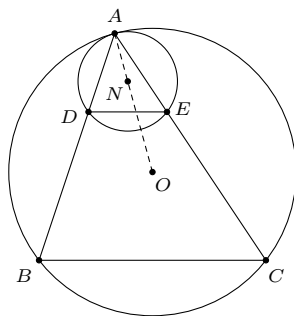


Figura 2.18: *Exemplo_65*

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 \angle[NA, OA] &= -\angle[ED, EA] + \angle[DA, OA] + \angle[1] \\
 &\quad (\text{pois, } \angle[NA, OA] = \angle[NA, AD] + \angle[AD, OA] = \\
 &\quad -\angle[ED, EA] + \angle[DA, OA] + \angle[1], \text{ porque o ponto } N \text{ é o centro} \\
 &\quad \text{da circunferência circunscrita em } \triangle ADE, \text{ usando a regra (R19)}) \\
 &= \angle[EA, CB] + \angle[DA, OA] + \angle[1] \\
 &\quad (\text{pois, } \angle[ED, EA] = -\angle[EA, CB], \text{ porque } ED \parallel BC, \text{ usando} \\
 &\quad \text{as regras (R7) e (R13)}) \\
 &= \angle[DA, OA] - \angle[CB, CA] + \angle[1] \\
 &\quad (\text{pois, } \angle[EA, CB] = -\angle[CB, CA], \text{ porque } A, C \text{ e } E \text{ são colineares,} \\
 &\quad \text{usando as regras (R6) e (R13)}) \\
 &= -\angle[OA, BA] - \angle[CB, CA] + \angle[1] \\
 &= \angle[0] \\
 &\quad (\text{pois, } \angle[OA, BA] = \angle[OA, AB] = -\angle[CB, CA] + \angle[1], \\
 &\quad \text{porque o ponto } O \text{ é o centro da circunferência circunscrita em } \triangle ABC, \\
 &\quad \text{usando a regra (R19)})
 \end{aligned}$$

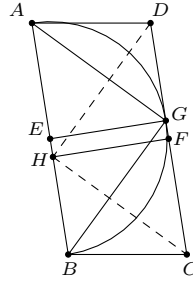
□

Exemplo 5 Consideremos o quadrilátero de vértices A, B, C e D tal que $BC \parallel AD$ e seja a circunferência de diâmetro AB tangente ao segmento CD (ver figura 2.19). Mostre que a circunferência de diâmetro CD é tangente ao segmento AB .

Ordem dos pontos: A, B, C, D, E, G, F, H .

Hipóteses: PARA(A, D, B, C), MIDPOINT(E, A, B), FOOT(G, E, C, D), PERP(A, G, B, G), MIDPOINT(F, C, D), FOOT(H, F, A, B).

Conclusão: PERP(C, H, H, D).

Figura 2.19: *Exemplo_104*

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 -\angle[HD, HC] + \angle[1] &= -\angle[GB, CB] + \angle[GA, DA] + \angle[1] \\
 &\quad (\text{pois } \angle[HD, HC] = \angle[HD, HG] + \angle[HG, HC] = \angle[GB, CB] - \angle[GA, DA], \\
 &\quad \text{porque os pontos } (D, H, G \text{ e } A) \text{ e } (C, H, G \text{ e } B) \text{ são pontos} \\
 &\quad \text{cíclicos, usando as regras (R14) e (R16)}) \\
 &= -\angle[GB, CB] + \angle[GA, CB] + \angle[1] \\
 &\quad (\text{pois, } -\angle[GA, DA] = \angle[GA, CB], \\
 &\quad \text{porque } DA \parallel BC, \text{ usando a regra (R7)}) \\
 &= \angle[0] \\
 &\quad (\text{pois, } \angle[GB, CB] = \angle[GA, CB] + \angle[1], \\
 &\quad \text{porque } GB \perp AG, \text{ usando a regra (R8)})
 \end{aligned}$$

□

Exemplo 6 Seja $\triangle ABC$ um triângulo tal que $AB = AC$. Consideremos a circunferência tangente à circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$ e tangente aos lados AB e AC nos pontos P e Q , respectivamente (ver figura 2.20). Mostre que o ponto médio de PQ é o ponto ao centro do $\triangle ABC$.

Ordem dos pontos: P, Q, A, N, D, B, C, E .

Hipóteses: $\text{CYCLIC}(A, B, C, D)$, $\text{CONG}(A, P, A, Q)$, $\text{CONG}(A, B, A, C)$,
 $\text{CONG}(D, B, D, C)$, $\text{COLL}(N, A, D)$, $\text{FOOT}(P, N, A, B)$, $\text{FOOT}(Q, N, A, C)$,
 $\text{CIRCUMCENTER}(N, D, P, Q)$, $\text{COLL}(E, P, Q)$, $\text{COLL}(E, A, D)$.

Conclusão: $\text{EQANGLE}(A, B, E, E, B, C)$.

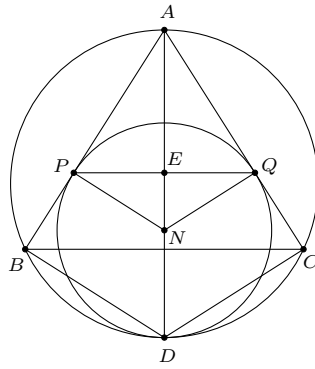


Figura 2.20: *Exemplo_105*

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 & -\angle[EB, CB] - \angle[EB, BA] = -\angle[EB, BA] - \angle[BD, DP] \\
 & \quad (\text{tem-se, } \angle[EB, CB] = \angle[BE, PE] = \angle[BD, DP], \\
 & \quad \text{porque } CB \parallel EP, \text{ usando a regra (R7)}) \\
 & = -\angle[ED, DP] - \angle[BD, DP] \\
 & \quad (\text{tem-se, } \angle[EB, BA] = \angle[ED, DP], \text{ porque os pontos} \\
 & \quad (A, B \text{ e } P) \text{ são colineares e } (B, E, P \text{ e } D) \text{ são} \\
 & \quad \text{cíclicos, usando a regra (R10)}) \\
 & = -\angle[ED, DP] + \angle[DP, NP] \\
 & \quad (\text{tem-se, } \angle[BD, DP] = -\angle[DP, NP], \\
 & \quad \text{porque } BD \parallel PN, \text{ usando a regra (R7)}) \\
 & = \angle[0] \\
 & \quad (\text{tem-se } \angle[ED, DP] = \angle[DP, NP], \text{ porque} \\
 & \quad \angle[AD, DP] = \angle[DP, PN], \text{ usando a regra (R6)})
 \end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Projecto Open Geo Prover

O *Open Geo Prover* (OGP) é um sistema muito complexo desenvolvido na linguagem *Java*, com 259 classes e milhares de linhas de código. Trata-se de um projecto de código aberto para a implementação de vários demonstradores automáticos de teoremas em geometria. Este está a ser desenvolvido por Ivan Petrović, estudante de doutoramento sob orientação de Predrag Janičić, professor da Universidade de Belgrado. Os métodos já implementados no OGP são:

- Método da Área;
- Método de Wu;
- Método das bases de Gröbner.

Os métodos de Wu e das bases de Gröbner são métodos algébricos e o método da área é um método semi-algébrico. O principal objectivo da minha dissertação consiste na implementação do método do ângulo completo no OGP.

Está também a ser considerada a integração do OGP no *GeoGebra*¹, um programa de geometria dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra numa única interface gráfica.

3.1. Estrutura do OGP

O OGP é constituído por oito directórios principais: `3rd_party_libs` (bibliotecas de terceiros); `config` (instruções de compilação); `documentation` (documentação diversa útil para o desenvolvimento do projecto e a gerada automaticamente aquando da compilação pelo Javadoc); `input` (teoremas que pretendemos demonstrar); `output` (resultados obtidos após a execução do demonstrador); `lib` (*executável* gerado pela compilação); `scripts` (utilitários para facilitar o desenvolvimento do projecto) e `src` (código-fonte).

¹<https://www.geogebra.org/>

Apresentamos de seguida a estrutura geral da implementação do OGP. Utilizando os pacotes (*packages*) que se descrevem em 3.1.1, na prática directórios localizados em `src`, classes semelhantes são agrupadas, implementando deste modo o conceito de encapsulamento. Visualmente a estrutura pode ser representada através de um diagrama UML (Unified Modeling Language²) genérico simplificado. Este permite exibir a hierarquia de classes, conforme se apresenta em 3.1.

3.1.1. Pacotes

Apresentamos de seguida os 23 pacotes utilizados na implementação do OGP, agrupados por funcionalidade.

- `com.ogprover.api`, `com.ogprover.api.converter`

Interface para conversão de construções, afirmações e teoremas entre sistemas de geometria dinâmica e o OGP.

- `com.ogprover.geogebra`, `com.ogprover.geogebra.command`,
`com.ogprover.geogebra.command.construction`,
`com.ogprover.geogebra.command.statement`

Interface para conversão de construções, afirmações e teoremas entre o sistema de geometria dinâmica GeoGebra e o OGP e respectiva implementação.

- `com.ogprover.main`

Classe principal (`main`) do OGP.

- `com.ogprover.polynomials`

Classes para manipulação de polinómios e expressões algébricas.

- `com.ogprover.pp`, `com.ogprover.pp.tp`, `com.ogprover.pp.tp.auxiliary`,
`com.ogprover.pp.tp.expressions`, `com.ogprover.pp.tp.expressions.parse`,
`com.ogprover.pp.tp.geoconstruction`, `com.ogprover.pp.tp.geobject`,
`com.ogprover.pp.tp.ndgcondition`, `com.ogprover.pp.tp.thmstatement`

Interface com o demonstrador: identificação do método, dados para o demonstrador (construção, condições de não-degenerescência, reconhecimento (*par-sing*) de expressões, afirmação a demonstrar) e resultados do demonstrador.

²<http://www.uml.org>

- `com.ogprover.test.junit`, `com.ogprover.test.manual`

Classes para teste de construções, de modo manual e automático.

- `com.ogprover.thmprover`

Métodos de demonstração implementados.

- `com.ogprover.utilities`, `com.ogprover.utilities.io`,
`com.ogprover.utilities.logger`

Classes de utilitários diversos: tempo gasto e limite da demonstração, relatório (*log*) do provador, formatos de saída (L^AT_EX, XML).

3.1.2. Diagrama UML

O diagrama apresentado na figura 3.1, mostra, de um modo abreviado, as dependências entre as principais classes do OGP³

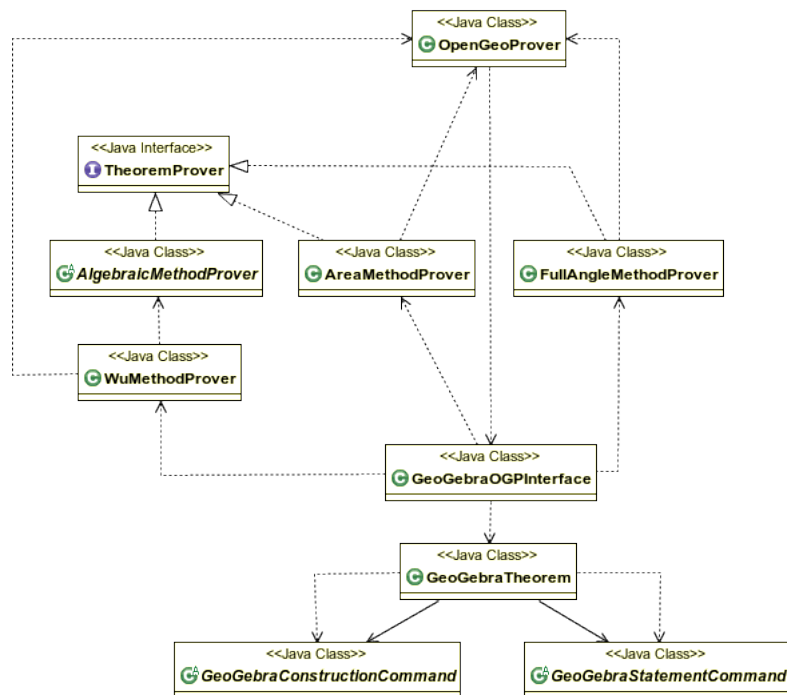


Figura 3.1: Diagrama UML do OGP

3.2. Comparação com Outros Sistemas

Em seguida, apresentamos dois dos principais sistemas equivalentes ao OGP que implementam também métodos automáticos de demonstrações.

³Os mesmos foram gerados através do ambiente integrado de desenvolvimento *Eclipse* (<http://www.eclipse.org/>) em conjunto com a extensão *ObjectAid* (<http://www.objectaid.com/>).

- **GCLC** - este sistema é uma ferramenta dinâmica da geometria de código fechado desenvolvido por Predrag Janičić [16]. Implementa os métodos: método da Área, método de Wu e método das bases de Gröbner.
- **JGEX** - este é um software em código fechado, que combina um programa dinâmico da geometria (DGS) e um demonstrador automático de teoremas geométricos (GATP). Implementa os seguintes métodos: método de Wu, o método do Ângulo Completo e o método das bases de dados dedutivas baseado no Ângulo Completo.

Em comparação com estes dois sistemas, pretende-se que o OGP seja um sistema de código aberto. Salienta-se ainda que o OGP está a ser desenvolvido como biblioteca passível de ser integrada num qualquer DGS.

Capítulo 4

Implementação do Método do Ângulo Completo no OGP

A implementação do método do ângulo completo no OGP foi possível graças à colaboração de Ivan Petrović, que criou um ramo (*branch*) para o desenvolvimento deste método de demonstração. Contamos também com a colaboração de Zoltán Kovács que nos forneceu uma versão do OGP com a implementação funcional do método da área. Sobre este código iniciamos a implementação do método do ângulo completo, que descrevemos de seguida.

4.1. Algoritmo do Método Ângulo Completo

Começemos por descrever o algoritmo para o método do ângulo completo, que se pretende implementar no *Open Geo Prover*. Dada uma afirmação geométrica construtiva $S = (C_1, C_2, \dots, C_n, G)$, o objectivo desse algoritmo é verificar se S é um teorema, isto é, se G é uma consequência dedutiva da construção (C_1, C_2, \dots, C_n) .

Algoritmo 1: Método do Ângulo Completo

input :

$S = (C_1, C_2, \dots, C_n, G)$ uma afirmação geométrica construtiva.

output:

se S for um teorema

demonstração passo a passo;

caso contrario

Se nada se concluir sobre S **ou** $t > T$

mensagem com essa indicação;

Em que t é o tempo gasto na demonstração (até um dado instante) e T é o tempo limite para a mesma.

Neste algoritmo vão ser efectuados os seguintes passos:

1. Converter a conclusão G para uma equação de ângulo completo G' com a forma

$$\sum_{i=1}^k a_i \angle[l_i, m_i] = \angle[0] \text{ onde cada } a_i \in \mathbb{Z}, \text{ para } 1 \leq i \leq k.$$

2. Processar os passos construtivos por ordem inversa, utilizando propriedades e lemas de eliminação do método do ângulo completo como regras de reescrita.
3. A demonstração termina quando se verificar uma das seguintes condições:
 - Após a reescrita da conclusão G' , esta foi transformada numa equação com a forma $\angle[0] = \angle[0]$, situação em que S é um teorema;
 - Após a reescrita da conclusão G' , não foi possível transformar esta numa equação com a forma $\angle[0] = \angle[0]$, situação em que S não é um teorema ou nada se pode concluir acerca de S ;
 - O tempo limite para efectuar a demonstração foi excedido, situação em que nada se pode concluir.

4.2. Trabalho Desenvolvido

Para poder desenvolver a implementação do método do ângulo completo no OGP, foi necessário realizar um estudo de diversas ferramentas, das quais destacamos: a linguagem de programação *Java* [21], o gerador de analisadores sintácticos *JavaCC*¹ [12], o utilitário para compilação automática *Apache Ant*², o ambiente integrado de desenvolvimento *Eclipse* [3] e o sistema de controle de versões *Apache Subversion*³ [11].

Destacamos ainda, como marcos do trabalho entretanto efectuado:

- A escrita da gramática para reconhecimento de expressões do método do ângulo completo, o que exigiu um estudo, ainda que breve, de linguagens formais;
- A implementação parcial da classe `FullAngleMethodProver.java`, tendo como ponto de partida uma cópia funcional do método da área;
- A primeira execução do OGP utilizando uma versão inicial do método do ângulo completo;

que descrevemos de seguida.

4.2.1. A Gramática \mathcal{G}_{EMAC}

Um dos problemas colocados pela implementação do MAC no OGP, relacionou-se com o reconhecimento de expressões do método do ângulo completo (EMAC).

¹<https://javacc.java.net/>

²<http://ant.apache.org/>

³<http://subversion.apache.org/>

Tal facto levou-nos a definir a linguagem EMAC através da definição da gramática para expressões do método do ângulo completo \mathcal{G}_{EMAC} . Assim, temos que $\mathcal{G}_{EMAC} = (V_N, V_T, S, F)$, onde [1]:

- $V_N = \{S, E, A\}$, é o conjunto dos símbolos não terminais ou variáveis;
- $V_T = \{'-', '+', \mathbf{FA0}, \mathbf{FA1}, \mathbf{FA}, '[', ']', ',', LABEL, NUMBER\}$, é o conjunto dos símbolos terminais;
- F é o conjunto das regras de reescrita ou produções, que é definido no formalismo de Backus-Naur por

$$\langle S \rangle ::= \langle E \rangle \mid - \langle E \rangle$$

$$\langle E \rangle ::= \langle A \rangle (+ \langle E \rangle \mid - \langle E \rangle)^*$$

$$\langle A \rangle ::= \mathbf{FA0}$$

$$\mid \mathbf{FA1}$$

$$\mid \mathbf{FA}[\langle LABEL \rangle, \langle LABEL \rangle, \langle LABEL \rangle, \langle LABEL \rangle]$$

$$\mid \langle NUMBER \rangle \mathbf{FA}[\langle LABEL \rangle, \langle LABEL \rangle, \langle LABEL \rangle, \langle LABEL \rangle]$$

$$\langle LABEL \rangle ::= [A-Za-z]^+$$

$$\langle NUMBER \rangle ::= [1-9][0-9]^*;$$

- $S \in V_N$ é o símbolo inicial.

A gramática \mathcal{G}_{EMAC} acima apresentada foi implementada em *JavaCC* e o respectivo código pode ser consultado no anexo B. Posteriormente, esta gramática foi integrada no OGP.

4.2.2. UML do Pacote `com.ogprover.thmprover`

No diagrama UML apresentado na figura 4.1 podemos ver a inclusão da classe `FullAngleMethodProver.java` no pacote `com.ogprover.thmprover` do projecto OGP.

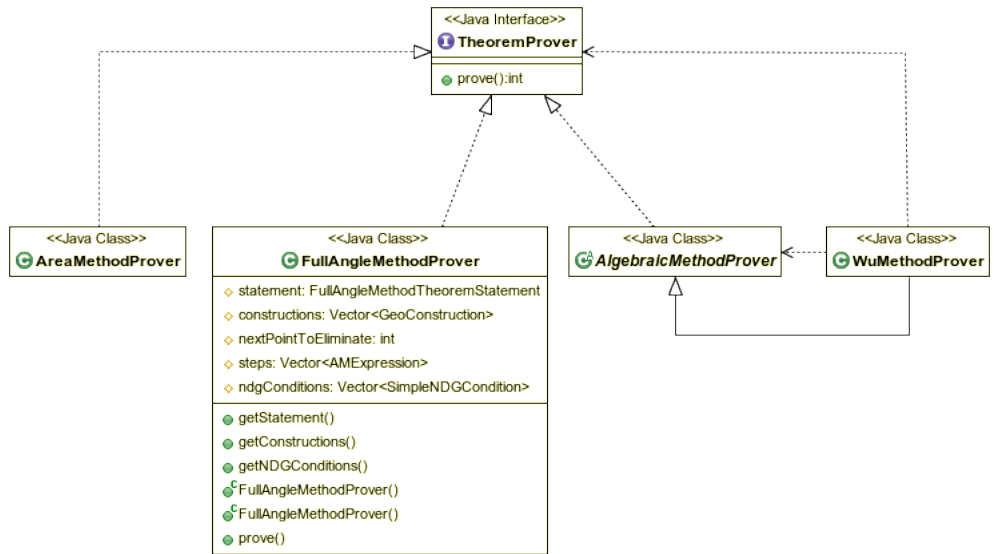


Figura 4.1: UML do Pacote com `ogprover.thmprover`

4.3. Exemplo de Utilização

Vamos fazer uma descrição dos passos a efectuar para submeter exemplos ao método do ângulo completo no OGP. Para isso vamos usar como modelo o exemplo 4 apresentado em 2.7, que designaremos por *exemplo_65*.

4.3.1. Construção dos Exemplos no GeoGebra

Dado o enunciado, fazer a construção no GeoGebra usando os passos de construção elementares. De seguida escrever a conjectura que queremos demonstrar. Finalmente gravar com um dado nome, neste caso *exemplo_65.ggb* (ver figura 4.2).

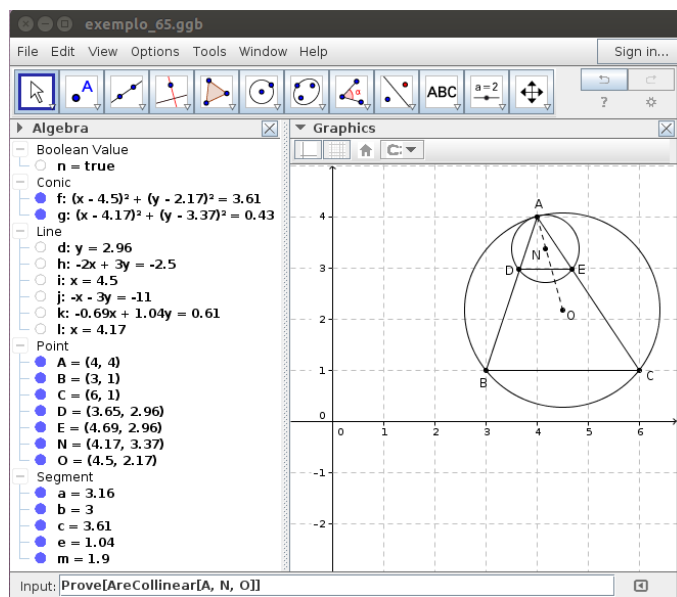


Figura 4.2: Construção no GeoGebra do exemplo *exemplo_65*

4.3.2. Código XML

Descompactar o arquivo `exemplo_65.ggb` que vai gerar automaticamente um directório com o nome `exemplo_65.ggb_FILES`, e dentro deste estará o arquivo `geogebra.xml` que será renomeado para `exemplo_65.xml` e guardado no directório `input` do OGP.

Como o arquivo `exemplo_65.xml` possui um código extenso apresenta-se na listagem 4.1 somente um pequeno fragmento, ou seja, um excerto.

Listagem 4.1: Excerto do arquivo `exemplo_65.xml`

```
<construction title ="exemplo65" author="Benvindo" date="5/5/2015">
<element type="point" label="A">
    <coords x="4.0" y="4.0" z="1.0" />
    <pointSize val="2" />
</element>
<element type="point" label="B">
    <coords x="3.0" y="1.0" z="1.0" />
    <pointSize val="2" />
</element>
<element type="point" label="C">
    <coords x="6.0" y="1.0" z="1.0" />
    <pointSize val="2" />
</element>
...
<element type="point" label="O">
    <coords x="40.5" y="19.5" z="9.0" />
    <pointSize val="2" />
</element>
<element type="point" label="N">
    <coords x="4.496" y="3.626" z="1.077" />
    <pointSize val="2" />
</element>
<command name="Prove">
    <input a0="AreCollinear [A,N,O]" />
    <output a0="n" />
</command>
</construction>
```

4.3.3. Execução do OGP

Na linha de comando, ir no directório `scripts` do OGP executar o comando: `runOGP.sh exemplo_65.xml` (ver listagem 4.2)

Se a demonstração for bem sucedida, será gerada uma mensagem na linha de comando a dizer que a conjectura é verdadeira (*true*), Caso contrário, será gerada

Capítulo 4 Implementação do Método do Ângulo Completo no OGP

uma mensagem a dizer que a conjectura é falsa (*false*) ou uma mensagem a informar que o tempo pré-estabelecido para a demonstração foi excedido.

Na listagem 4.2 apresenta-se um exemplo baseado na implementação inicial da classe `FullAngleMethodProver.java`.

Listagem 4.2: Resultado da execução

```
ben@ben-K56CM$ ./runOGP.sh exemplo_65.xml
...
OpenGeoProver Version 1.00;
written by Ivan Petrovic and Predrag Janicic , University of Belgrade.
Reimplementation of C++ version 2.00;
written by Goran Predovic and Predrag Janicic , University of Belgrade.
Copyright (c) 2005–2011. Not for commercial use.
...
12:52:47.555 INFO: com.ogprover.main.OpenGeoProver.main[86]: Parsing command
line ...
12:52:47.570 INFO: com.ogprover.api.GeoGebraOGPInterface.prove[254]: Reading
input geometry problem ...
12:52:47.632 INFO: com.ogprover.api.converter.
GGStatConverterForFullAngleMethod.convertEqual[226]: Converting equal
statement. Arguments :
...
12:52:47.711 DEBUG: com.ogprover.thmprover.FullAngleMethodProver.prove[215]:
(Size = 1)
12:52:47.712 INFO: com.ogprover.api.GeoGebraOGPInterface.prove[368]: Prover
results:

Prover results for theorem "exemplo_65":
success: true
failureMessage: null
proverResult: true
proverMessage: null
time: 0.063
numTerms: 0

NDG conditions
ben@ben-K56CM$
```

Capítulo 5

Conclusões

5.1. Relevância do Método do Ângulo Completo

O método do ângulo completo apresentado neste trabalho, é um método semi-algébrico que se revela de especial importância, em grande parte por efectuar demonstrações de teoremas com uma vasta gama de dificuldade. Acresce ainda o facto de estas serem legíveis para um matemático, elegantes e frequentemente curtas [8, 9, 17]. Em contrapartida, as demonstrações com métodos sintéticos produzem demonstrações legíveis mas não conseguem demonstrar teoremas com dificuldade moderada e os métodos algébricos, apesar de demonstrarem teoremas de elevada dificuldade e com grande rapidez, produzem demonstrações incompreensíveis porque são realizadas através de cálculos algébricos sem nenhuma ligação directa ao conteúdo geométrico.

5.2. Aplicações

As demonstrações efectuadas com o método do ângulo completo utilizam, como vimos, quantidades geométricas que possuem um significado geométrico claro. Aliado ao facto de estas demonstrações serem legíveis, leva-nos a pensar que a sua implementação em provadores automáticos de teoremas em geometria, como o OGP, ou em outras ferramentas geométricas, poderá ser útil na investigação assim como na educação. A sua utilização em ferramentas essencialmente vocacionadas para o ensino, dos quais o GeoGebra é possivelmente a mais divulgada, permitirá validar construções efectuadas nestas ferramentas. Tal facto dará azo ao aluno aprender e/ou consolidar conhecimentos em geometria, o que nos mostra outra face da utilidade do método do ângulo completo e sua implementação.

5.3. Trabalho Futuro

No trabalho realizado o método do ângulo completo só aceita conjecturas produzidas através do programa GeoGebra. A exemplo da implementação do método da

área é necessário estender o trabalho realizado para o caso mais geral de aceitação de conjecturas segundo a sintaxe geral do OGP.

Melhorar a implementação do MAC tornando-a mais eficiente.

Testar a implementação efectuada através da tentativa de demonstração automática de todos os problemas descritos em [6] e a integração desses exemplos e do MAC/OGP no sistema TGTP [24].

Apêndice A

Estrutura do Open Geo Prover

A.1. Pacotes

Apresentamos de seguida os 23 pacotes utilizados na implementação do OGP, agrupados por funcionalidade.

- `com.ogprover.api`, `com.ogprover.api.converter`

Interface para conversão de construções, afirmações e teoremas entre sistemas de geometria dinâmica e o OGP.

- `com.ogprover.geogebra`, `com.ogprover.geogebra.command`,
`com.ogprover.geogebra.command.construction`,
`com.ogprover.geogebra.command.statement`

Interface para conversão de construções, afirmações e teoremas entre o sistema de geometria dinâmica GeoGebra e o OGP e respectiva implementação.

- `com.ogprover.main`

Classe principal (main) do OGP.

- `com.ogprover.polynomials`

Classes para manipulação de polinómios e expressões algébricas.

- `com.ogprover.pp`, `com.ogprover.pp.tp`, `com.ogprover.pp.tp.auxiliary`,
`com.ogprover.pp.tp.expressions`, `com.ogprover.pp.tp.expressions.parse`,
`com.ogprover.pp.tp.geoconstruction`, `com.ogprover.pp.tp.geobject`,
`com.ogprover.pp.tp.ndgcondition`, `com.ogprover.pp.tp.thmstatement`

Interface com o demonstrador: identificação do método, dados para o demonstrador (construção, condições de não-degenerescência, reconhecimento (*parsing*) de expressões, afirmação a demonstrar) e resultados do demonstrador.

- `com.ogprover.test.junit`, `com.ogprover.test.manual`

Classes para teste de construções, de modo manual e automático.

- `com.ogprover.thmprover`

Métodos de demonstração implementados.

- `com.ogprover.utilities`, `com.ogprover.utilities.io`,
`com.ogprover.utilities.logger`

Classes de utilitários diversos: tempo gasto e limite da demonstração, relatório (*log*) do provador, formatos de saída (L^AT_EX, XML).

A.2. Classes nos Pacotes

default package: `ClassTemplate.java`; `InterfaceTemplate.java`

com.ogprover.api: `GeoGebraOGPInterface.java`; `OGPAPI.java`

com.ogprover.api.converter: `GeoGebraConstructionConverter.java`;
`GeoGebraStatementConverter.java`; `GeoGebraTheoremConverter.java`; `GGCons-`
`ConverterForAlgebraicProvers.java`; `GGConsConverterForAreaMethod.java`;
`GGConsConverterForFullAngleMethod.java`; `GGStatConverterForAlgebraicPro-`
`vers.java`; `GGStatConverterForAreaMethod.java`; `GGStatConverterForFullAn-`
`gleMethod.java`; `GGThmConverterForAlgebraicProvers.java`; `GGThmConverter-`
`ForAreaMethod.java`; `GGThmConverterForFullAngleMethod.java`

com.ogprover.geogebra: `GeoGebraObject.java`; `GeoGebraTheorem.java`

com.ogprover.geogebra.command `GeoGebraCommand.java`; `GeoGebraComman-`
`dFactory.java`; `ProveCmd.java`

com.ogprover.geogebra.command.construction: `AngleCmd.java`; `AngularB-`
`isectorCmd.java`; `CenterCmd.java`; `CircleArcCmd.java`; `CircleCmd.java`; `Ci-`
`rcleSectorCmd.java`; `CircumcircleArcCmd.java`; `CircumcircleSectorCmd.jav-`
`a`; `ConicCmd.java`; `DiameterCmd.java`; `DilateCmd.java`; `EllipseCmd.java`; `F-`
`reePointCmd.java`; `GeoGebraConstructionCommand.java`; `HyperbolaCmd.java`;
`IntersectCmd.java`; `LineBisectorCmd.java`; `LineCmd.java`; `MidpointCmd.jav-`
`a`; `MirrorCmd.java`; `OrthogonalLineCmd.java`; `ParabolaCmd.java`; `PointCmd.j-`
`ava`; `PointInCmd.java`; `PolarCmd.java`; `PolygonCmd.java`; `PolyLineCmd.java`;
`RayCmd.java`; `RotateCmd.java`; `SegmentCmd.java`; `SemicircleCmd.java`; `Tang-`
`entCmd.java`; `TranslateCmd.java`; `VectorCmd.java`

com.ogprover.geogebra.command.statement: BooleanCmd.java; CollinearCmd.java; ConcurrentCmd.java; ConccyclicCmd.java; EqualCmd.java; GeoGebraStatementCommand.java; ParallelCmd.java; PerpendicularCmd.java

com.ogprover.main: OGPCConfigurationSettings.java; OGPCConstants.java; OGPPParameters.java; OGPPReport.java; OpenGeoProver.java

com.ogprover.polynomials: GeoTheorem.java; Polynomial.java; Power.java; RationalAlgebraicExpression.java; SymbolicPolynomial.java; SymbolicTerm.java; SymbolicVariable.java; Term.java; UFraction.java; UPolynomial.java; UTerm.java; UXVariable.java; Variable.java; XPolynomial.java; XPolySystem.java; XTerm.java

com.ogprover.pp: GeoGebraOGPInputProverProtocol.java; GeoGebraOGPOutputProverProtocol.java; OGPInputProverProtocol.java; OGPOutputProverProtocol.java; OGPProverProtocol.java

com.ogprover.pp.tp: OGPTP.java; OGPTPConverter.java

com.ogprover.pp.tp.auxiliary: DoubleSignedAreaOfPolygon.java; FourPointsPositionChecker.java; GeneralizedAngleTangent.java; GeneralizedSegment.java; PointListManager.java; PointSetRelationshipManager.java; PointsPositionChecker.java; ProductOfTwoSegments.java; RatioOfTwoCollinearSegments.java; RatioProduct.java; ThreePointsPositionChecker.java; TwoPointsPositionChecker.java; UnknownStatementException.java

com.ogprover.pp.tp.expressions: AdditiveInverse.java; AMExpression.java; AMExpressionComparator.java; AreaOfTriangle.java; BasicNumber.java; Difference.java; Fraction.java; Product.java; PythagorasDifference.java; RatioOfCollinearSegments.java; Sum.java

com.ogprover.pp.tp.expressions.parse: ExpressionParser.java; ExpressionParserConstants.java; ExpressionParserTokenManager.java; ParseException.java; SimpleCharStream.java; Token.java; TokenMgrError.java; ExpressionParser.jj

com.ogprover.pp.tp.geoconstruction: AMFootPoint.java; AMIntersectionPoint.java; AngleBisector.java; AngleOf60Deg.java; AngleRay.java; AngleRayOfThirdAngleTo60Deg.java; AngleTrisector.java; CenterOfCircle.java; CentralSymmetricPoint.java; Circle.java; CircleWithCenterAndPoint.java; CircleWithCenterAndRadius.java; CircleWithDiameter.java; CircumscribedCircle.java; ConicSection.java; ConicSectionWithFivePoints.java; FootPoint.java; FreeParametricSet.java; FreePoint.java; GeneralConicSection.java; GeneralizedSegmentDivisionPoint.java; GeoConstruction.java; HarmonicConjugatePoint.java; IgnoredConstruction.java; IntersectionPoint.java; InverseOfPoint.java; Line.java; LineThroughTwoPoints.java; ListOfConstructions.java; MidPoint.java; ParallelLine.java; ParametricSet.java; PerpendicularBisector.java; PerpendicularLine.java; Point.java; Polar.java; Pole.java; PRatioPoint.java; RadicalAxis.java; RandomPointFromCircle.java; RandomPointFromGeneralConic.java; RandomPointFromLine.java; RandomPointFromParametricSet.java; RandomPointFromSetOfPoints.java; ReflectedPoint.java; RotatedPoint.java; SegmentDivisionPoint.java; SelfConditionalPoint.java; SetOfPoints.java; ShortcutConstruction.java; SpecialConstantAngle.java; TangentLine.java; TranslatedPoint.java; TRatioPoint.java; TripleAngleRay.java

com.ogprover.pp.tp.geoobject: Angle.java; GeoObject.java; PointList.java; PolygonLine.java; Segment.java

com.ogprover.pp.tp.ndgcondition: AlgebraicNDGCondition.java; DistinctPoints.java; NonParallelLines.java; NonZeroExpression.java; ParallelLines.java; SimpleNDGCondition.java

com.ogprover.pp.tp.thmstatement: AlgebraicSumOfThreeAngles.java; AlgebraicSumOfThreeSegments.java; AngleEqualToSpecialConstantAngle.java; AreaMethodTheoremStatement.java; CollinearPoints.java; CompoundThmStatement.java; ConcurrentCircles.java; ConcurrentLines.java; ConcylicPoints.java; CongruentTriangles.java; ConjunctionThmStatement.java; DimensionThmStatement.java; DisjunctionThmStatement.java; ElementaryThmStatement.java; EqualAngles.java; EqualityOfExpressions.java; EqualityOfRatioProducts.java; EqualityOfTwoRatios.java; EquilateralTriangle.java;

False.java; FourHarmonicConjugatePoints.java; FullAngleMethodTheoremStatement.java; IdenticalPoints.java; LinearCombinationOfDoubleSignedPolygonAreas.java; LinearCombinationOfOrientedSegments.java; LinearCombinationOfSquaresOfSegments.java; NegationThmStatement.java; PointOnSetOfPoints.java; PositionThmStatement.java; RatioOfOrientedSegments.java; RatioOfTwoSegments.java; SegmentsOfEqualLengths.java; SimilarTriangles.java; ThmStatement.java; TouchingCircles.java; True.java; TwoInversePoints.java; TwoParallelLines.java; TwoPerpendicularLines.java

com.ogprover.test.junit: JUTestCPSuite.java; JUTestPoint.java; JUTestPolynomialsSuite.java; JUTestPower.java; JUTestUTerm.java

com.ogprover.test.manual: MTestCP.java; MTestPolynomials.java; MTestQDParser.java; MTestTheoremProver.java; MTestUtilities.java

com.ogprover.thmprover: AlgebraicMethodProver.java; AreaMethodProver.java; FullAngleMethodProver.java; TheoremProver.java; WuMethodProver.java

com.ogprover.utilities: OGPTimer.java; OGPTimerTask.java; OGPUutilities.java; Stopwatch.java

com.ogprover.utilities.io: CustomFile.java; CustomFileReader.java; CustomFileWriter.java; DocHandler.java; LaTeXFileWriter.java; OGPDocHandler.java; OGPOutput.java; QDParser.java; SpecialFileFormatting.java; XMLFileWriter.java

com.ogprover.utilities.logger: GeoGebraLogger.java; ILogger.java

Apêndice B

Implementação da Gramática \mathcal{G}_{EMAC}

B.1. Código JavaCC

```
// JavaCC settings

options {
    JDK_VERSION = "1.5";
    STATIC = true;
    DEBUG_LOOKAHEAD = true;
}

// Mandatory parser class definition

PARSER_BEGIN(FAMExpParser)
import java.io.*;

public class FAMExpParser {

    public static void main(String args[]) {
        StringReader sr = new StringReader(args[0]);
        FAMExpParser fame = new FAMExpParser(sr);
        try {
            fame.start();
        } catch (ParseException pe) {
            pe.printStackTrace();
        } // try ... catch ...
    } // public static void main

} // public class FAMExpParser
PARSER_END(FAMExpParser)

// Tokens

SKIP : {
    " "
    | "\n"
    | "\r"
    | "\t"
}

TOKEN : {
    < FULLANGLE : "FullAngle" >
    | < FULLANGLE0 : "FullAngle[0]" >
    | < FULLANGLE1 : "FullAngle[1]" >

    | < MINUS : "-" >
    | < PLUS : "+" >

    | < LEFTBRACKET : "[" >
    | < RIGHTBRACKET : "]" >
}
```

```

| < COMMA : ", " >

| < NUMBER : ( < DIGIT > )+ >
| < LABEL : < LETTER > ( < LETTER > | < DIGIT > )* >

| < #DIGIT : [ "0"- "9" ] >
| < #LETTER : [ "A"- "Z", "a"- "z" ] >
}

// Rewriting rules

/*
 * Implementation of the following productions:
 *
 * 0. S -> FAE
 * 1. S -> - FAE
 * 2. FAE -> FA
 * 3. FAE -> FAE + FAE
 * 4. FAE -> FAE - FAE
 * 5. FA -> FA0
 * 6. FA -> FA1
 * 7. FA -> FA [ LB , LB , LB , LB ]
 * 8. FA -> NR FA [ LB , LB , LB , LB ]
 * 9. FA -> NR FA0
 * 10. FA -> NR FA1
 */

void start() : {}
{
    fullAngleExpression() { System.out.println("Production 0"); }
    | < MINUS > fullAngleExpression() { System.out.println("Production 1"); }
} // start

void fullAngleExpression() : {}
{
    fullAngle()
    (
        < PLUS > fullAngleExpression() { System.out.println("Production 3"); }
        | < MINUS > fullAngleExpression() { System.out.println("Production 4"); }
    ) * { System.out.println("Production 2"); }
} // fullAngleExpression

void fullAngle() : {}
{
    < FULLANGLE0 > { System.out.println("Production 5"); }
    | < FULLANGLE1 > { System.out.println("Production 6"); }
    | < FULLANGLE > < LEFTBRACKET > < LABEL > < COMMA >
        < LABEL > < COMMA >
        < LABEL > < COMMA >
        < LABEL > < RIGHTBRACKET >
        { System.out.println("Production 7"); }
    | LOOKAHEAD(2)
        < NUMBER > < FULLANGLE > < LEFTBRACKET > < LABEL > < COMMA >
            < LABEL > < COMMA >
            < LABEL > < COMMA >
            < LABEL > < RIGHTBRACKET >
            { System.out.println("Production 8"); }
    | LOOKAHEAD(2)
        < NUMBER > < FULLANGLE0 > { System.out.println("Production 9"); }
    | < NUMBER > < FULLANGLE1 > { System.out.println("Production 10"); }
} // fullAngle

```


Apêndice C

Diagramas UML

C.1. Diagramas UML

Todos os diagramas apresentados foram gerados através do ambiente integrado de desenvolvimento *Eclipse*.



Figura C.1: com.ogprover.api

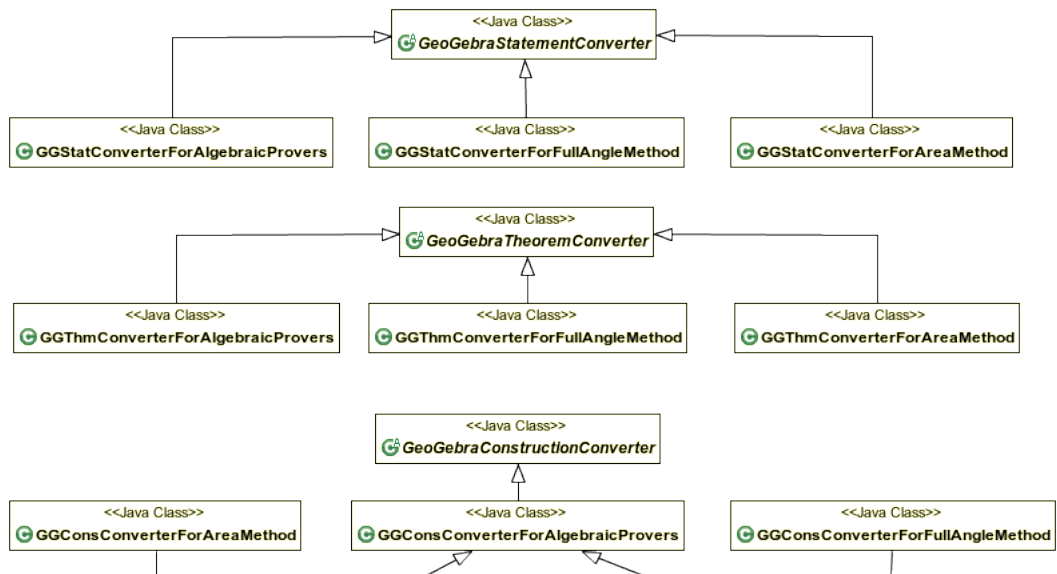


Figura C.2: com.ogprover.api.converter

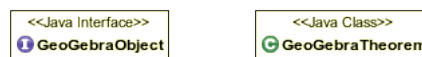


Figura C.3: com.ogprover.geogebra

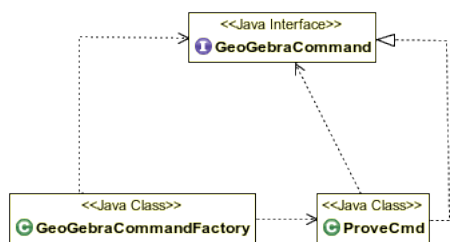


Figura C.4: com.ogprover.geogebra.command

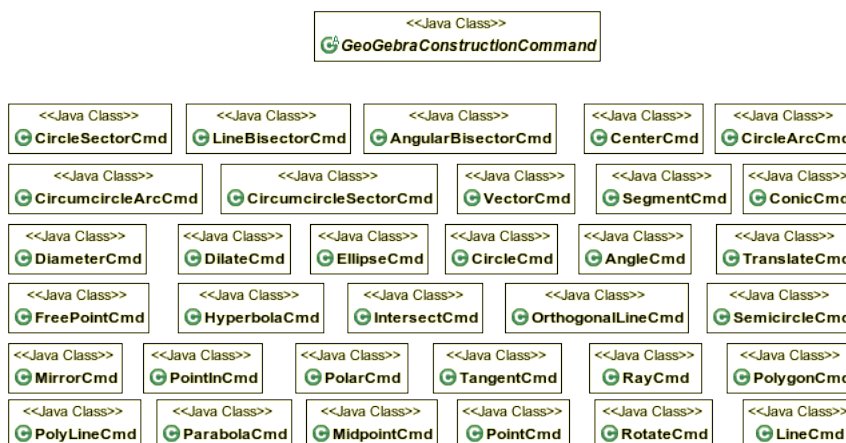


Figura C.5: com.ogprover.geogebra.command.construction

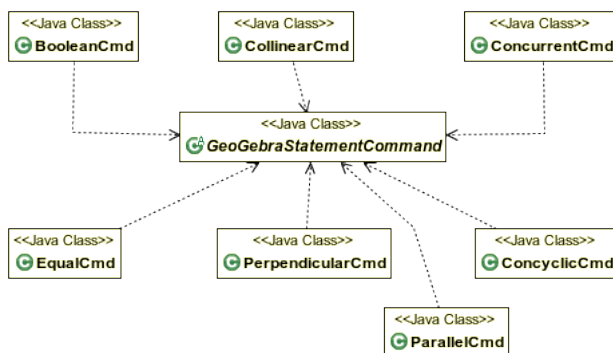


Figura C.6: com.ogprover.geogebra.command.statement

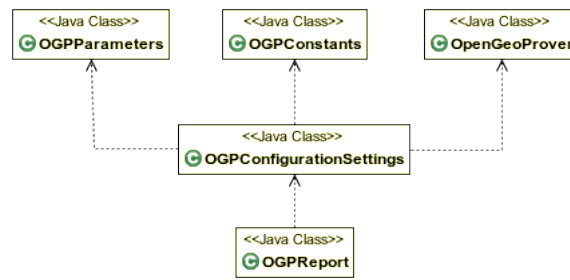


Figura C.7: com.ogprover.main

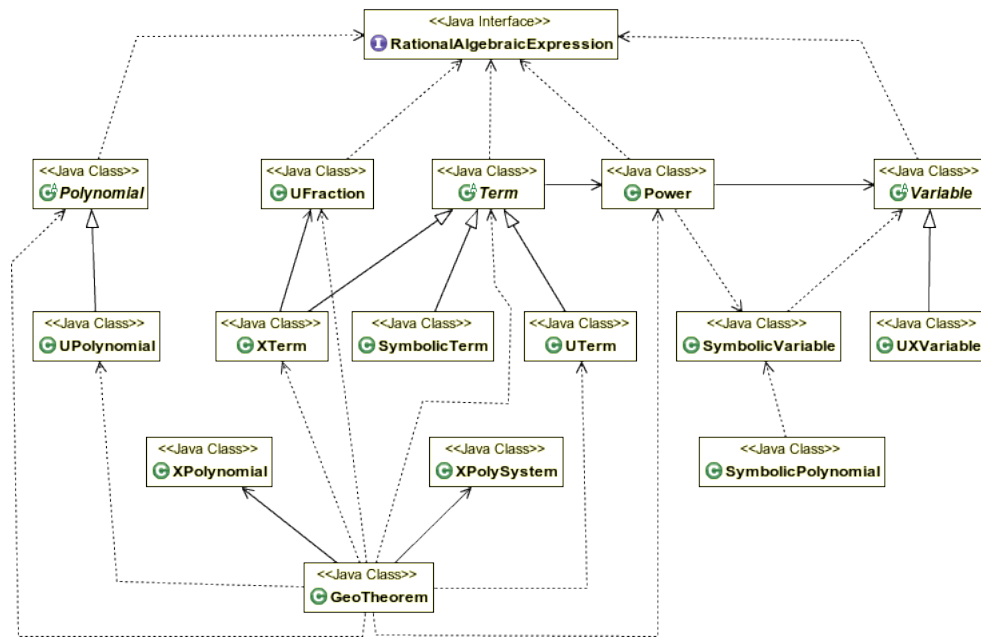


Figura C.8: com.ogprover.polynomials

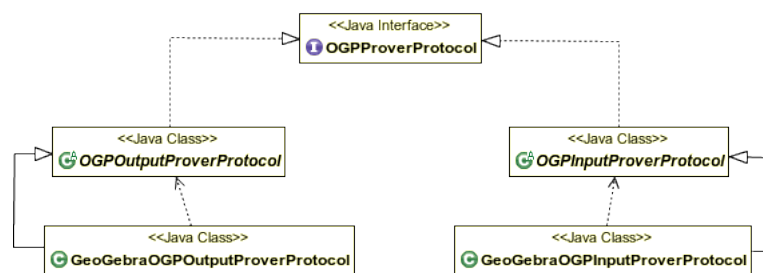


Figura C.9: com.ogprover.pp



Figura C.10: com.ogprover.pp.tp

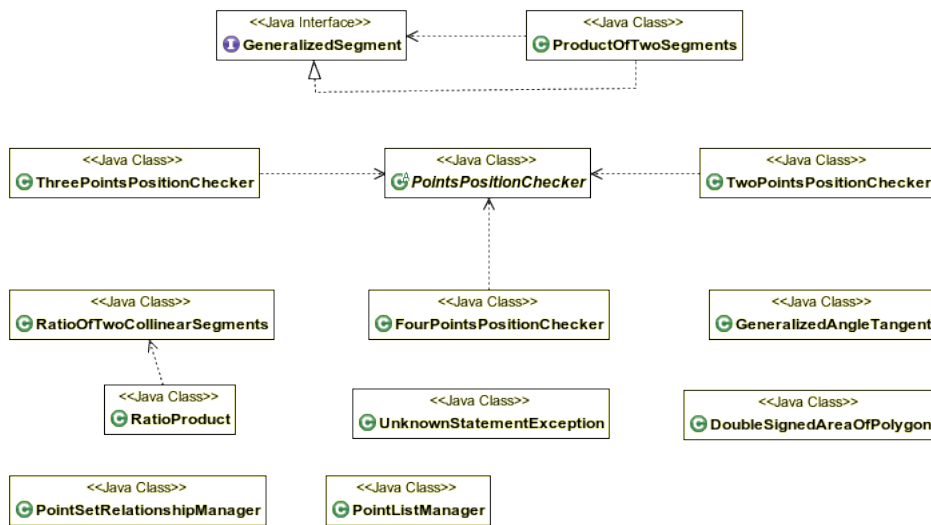


Figura C.11: com.ogprover.pp.tp.auxiliary

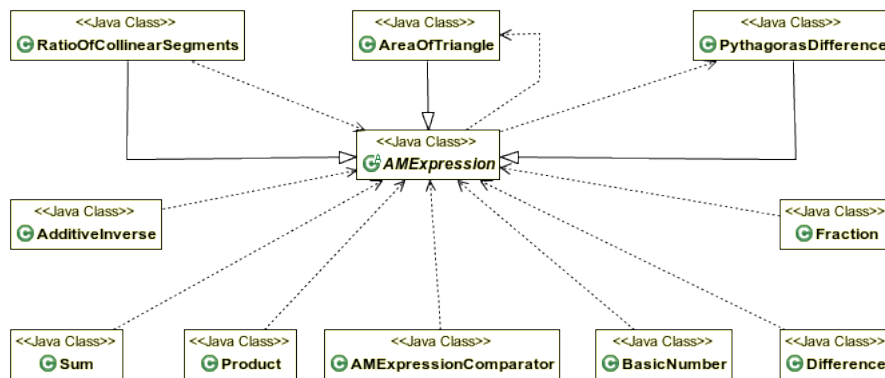


Figura C.12: com.ogprover.pp.tp.expressions

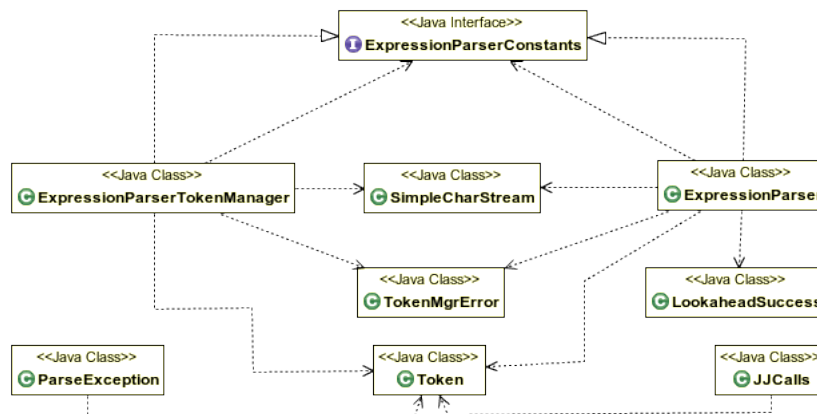


Figura C.13: com.ogprover.pp.tp.expressions.parse

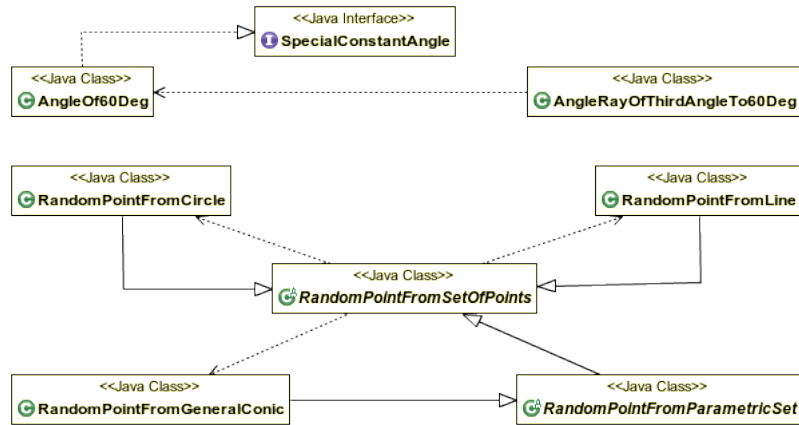


Figura C.14: com.ogprover.pp.tp.geoconstruction 1

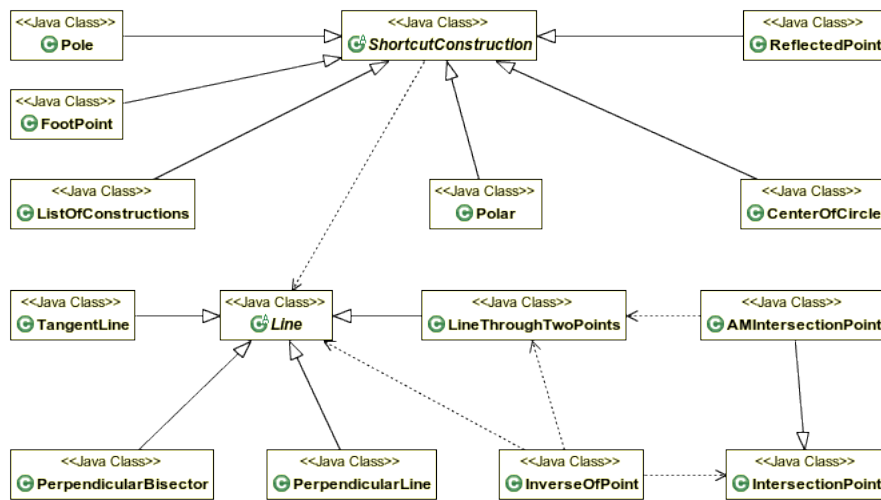


Figura C.15: com.ogprover.pp.tp.geoconstruction 2

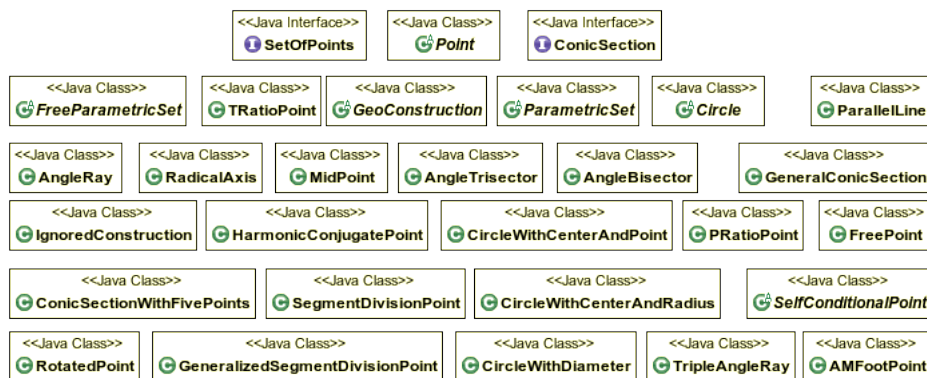


Figura C.16: com.ogprover.pp.tp.geoconstruction 3

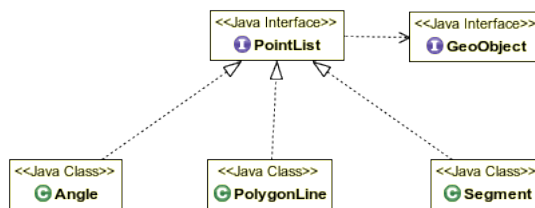


Figura C.17: com.ogprover.pp.tp.geobject

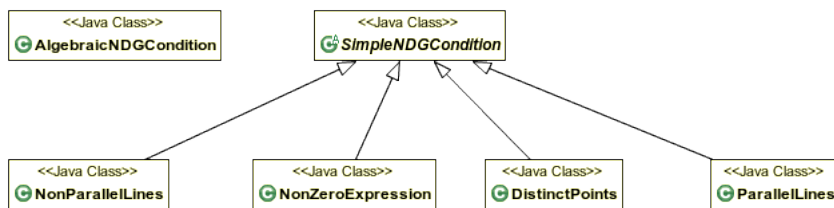


Figura C.18: com.opprover.pp.tp.ndgcondition

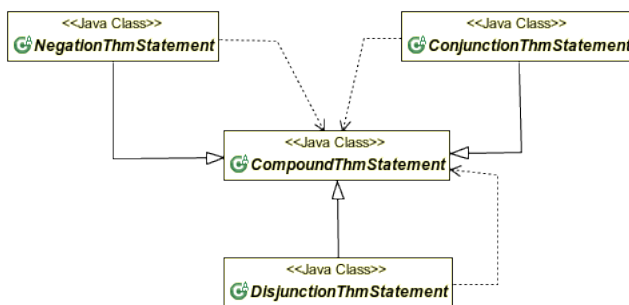


Figura C.19: com.opprover.pp.tp.thmstatement 1

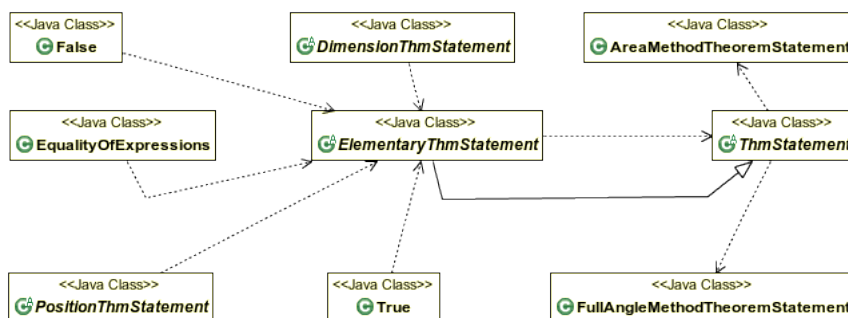


Figura C.20: com.opprover.pp.tp.thmstatement 2

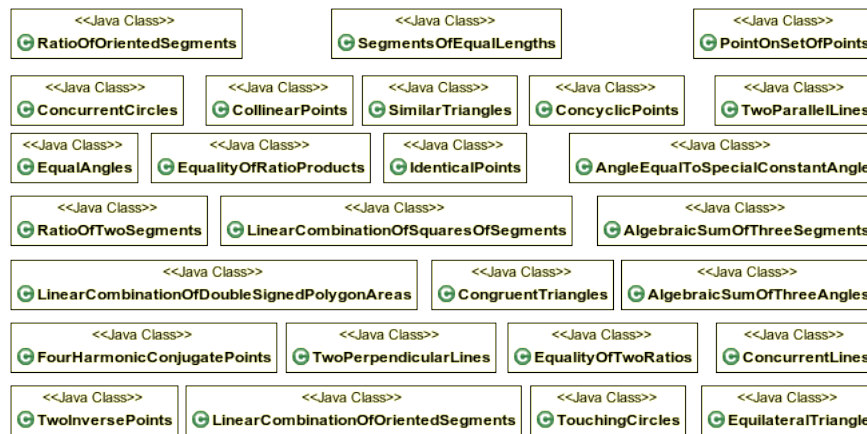


Figura C.21: `com.ogprover.pp.tp.thmstatement.3`

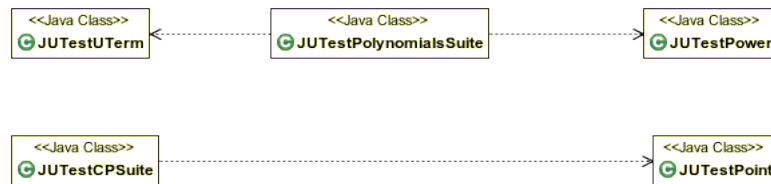


Figura C.22: `com.ogprover.test.junit`

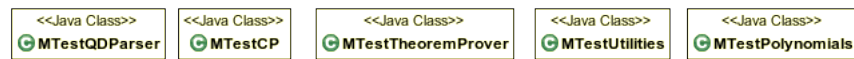


Figura C.23: `com.ogprover.test.manual`

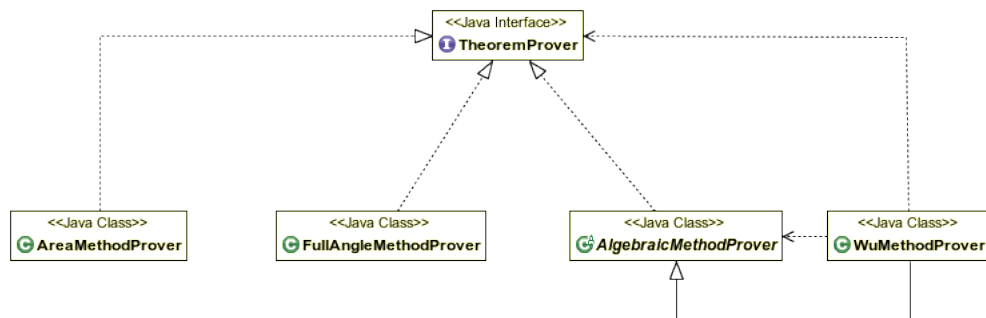


Figura C.24: `com.ogprover.thmprover`



Figura C.25: `com.ogprover.utilities`

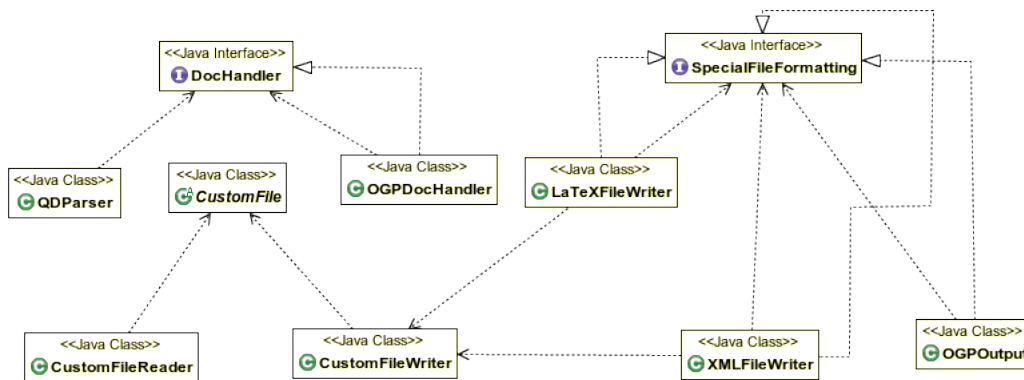


Figura C.26: com.ogprover.utilities.io

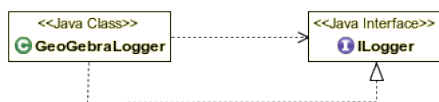


Figura C.27: com.ogprover.utilities.logger

Bibliografía

- [1] Alfred Aho, Ravi Sethi, and J. Ullman. *Compilers, Principles, Techniques and Tools*. Addison-Wesley, Reading, 1986.
- [2] Francisco Botana, Markus Hohenwarter, Predrag Janičić, Zoltán Kovács, Ivan Petrović, Tomás Recio, and Simon Weitzhofer. Automated Theorem Proving in GeoGebra: Current Achievements. *Journal of Automated Reasoning*, 55(1):39–59, 2015.
- [3] Barry Burd. *Eclipse For Dummies*. Wiley Publishing, Inc., 2005.
- [4] Shang-Ching Chou. *Proving and Discovering Geometry Theorem using Wu’s Method*. PhD thesis, University of Texas, Austin, 1985.
- [5] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. Automated production of traditional proofs for constructive geometry theorems. *In Proceedings of the Eighth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science LICS ’93*, pages 48–56, June 1993.
- [6] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. A collection of 110 geometry theorems and their machine proofs using full-angles. Technical Report 94-4, Department of Computer Science, The Wichita State University, March 1994.
- [7] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. *Machine Proofs in Geometry*, volume 6 of *Series on Applied Mathematics*. World Scientific, 1994.
- [8] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. Automated generation of readable proofs with geometric invariants, I. multiple and shortest proofs generation. *Journal of Automated Reasoning*, 17(13):325–347, 1996.

- [9] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. Automated generation of readable proofs with geometric invariants, II. theorem proving with full-angles. *Journal of Automated Reasoning*, 17:349–370, 1996.
- [10] H. Coelho and L. M. Pereira. Automated reasoning in geometry theorem proving with Prolog. *Journal of Automated Reasoning*, 2(4):329–390, 1986.
- [11] Ben Collins-Sussman, Brian W. Fitzpatrick, and C. Michael Pilato. *Version Control with Subversion*. O’Reilly, 2008.
- [12] Tom Copeland. *Generating Parsers with JavaCC*. Centennial Books, 2009.
- [13] E. W. Elcock. Representation of knowledge in geometry machine. *Machine Intelligence*, 8:11–29, 1977.
- [14] Xiao-Shan Gao. Using dynamic visual and logic models in education – An introduction to Geometry Expert4, 1998.
- [15] J.G. Greeno, M. E. Magone, and S. Chaiklin. Theory of constructions and set in problem solving. *Memory and Cognition*, 7(6):445–461, 1979.
- [16] Predrag Janičić. GCLC – A tool for constructive euclidean geometry and more than that. In Andrés Iglesias and Nobuki Takayama, editors, *Mathematical Software - ICMS 2006*, volume 4151 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 58–73. Springer, 2006.
- [17] Predrag Janičić, Julien Narboux, and Pedro Quaresma. The Area Method: a recapitulation. *Journal of Automated Reasoning*, 48(4):489–532, 2012.
- [18] Predrag Janičić and Pedro Quaresma. Automatic verification of regular constructions in dynamic geometry systems. In Francisco Botana and Tomás Recio, editors, *Automated Deduction in Geometry*, volume 4869 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 39–51. Springer Berlin / Heidelberg, 2007.
- [19] Deepak Kapur. Using Gröbner bases to reason about geometry problems. *Journal of Symbolic Computation*, 2(4):399–408, 1986.
- [20] H. Li. Clifford algebra approaches to mechanical geometry theorem proving. In X.-S. Gao and D. Wang, editors, *Mathematics Mechanization and Applications*, pages 205–299, San Diego, CA, 2000. Academic Press.

- [21] F. Mário Martins. *Programação Orientada aos Objectos em Java 2*. Universidade do Minho, 4 edition, 2000.
- [22] A.J. Nevis. Plane geometry theorem proving using forward chaining. *Artificial Intelligence*, 6(1):1–23, 1975.
- [23] Ivan Petrović and P. Janičić. Integration of OpenGeoProver with GeoGebra. Fifth Workshop on Formal and Automated Theorem Proving and Applications, February 3-4, 2012, Belgrade, Serbia, February 2012.
- [24] Pedro Quaresma. Thousands of Geometric problems for geometric Theorem Provers (TGTP). In Pascal Schreck, Julien Narboux, and Jürgen Richter-Gebert, editors, *Automated Deduction in Geometry*, volume 6877 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 169–181. Springer, 2011.
- [25] Pedro Quaresma and Predrag Janičić. The Area Method, rigorous proofs of lemmas in Hilbert’s style axiom system. Technical Report 2009/006, Centre for Informatics and Systems of the University of Coimbra, 2009.
- [26] Vanda Santos and Pedro Quaresma. Integrating DGSs and GATPs in an adaptive and collaborative blended-learning Web-environment. In *First Workshop on CTP Components for Educational Software (THedu’11)*, volume 79 of *EPTCS*, 2012.
- [27] Alfred Tarski. A decision method for elementary algebra and geometry. Technical report, RAND Corporation, 1951.
- [28] D. Wang. Reasoning about geometric problems using an elimination method. In J. Pfalzgraf and D. Wang, editors, *Automated Practical Reasoning*, pages 147–185, New York, 1995. Springer.
- [29] Sean Wilson and Jacques Fleuriot. Combining dynamic geometry, automated geometry theorem proving and diagrammatic proofs. In *Proceedings of the European Joint Conferences on Theory and Practice of Software (ETAPS) Satellite Workshop on User Interfaces for Theorem Provers (UITP)*. Springer, 2005.
- [30] W.T. Wu. *Automated Theorem Proving: After 25 Years*, volume 29, chapter On the decision problem and the mechanization of theorem proving in elementary geometry, pages 213–234. American Mathematical Society, 1984.