



Alberto Miguel Bizarro Martins

ANÁLISE E OPTIMIZAÇÃO DE PONTES ATIRANTADAS DE BETÃO

Tese de doutoramento em Engenharia Civil – Ramo de Estruturas, orientada pelo Professor Doutor Luís Miguel da Cruz Simões e pelo Professor Doutor João Henrique Jorge de Oliveira Negrão e apresentada ao Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Agosto de 2015



UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Alberto Miguel Bizarro Martins

ANÁLISE E OPTIMIZAÇÃO DE PONTES ATIRANTADAS DE BETÃO

Tese de doutoramento em Engenharia Civil – Ramo de Estruturas, orientada pelo Professor Doutor Luís Miguel da Cruz Simões e pelo Professor Doutor João Henrique Jorge de Oliveira Negrão e apresentada ao Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Agosto de 2015



UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Aos meus pais e à minha Sandra.

Agradecimentos

O autor deseja expressar o seu reconhecido agradecimento a todas as pessoas que o ajudaram a tornar possível este trabalho.

Aos meus orientadores científicos Prof. Doutor Luís Miguel da Cruz Simões e Prof. Doutor João Henrique Jorge de Oliveira Negrão um agradecimento especial, por todas as orientações, conhecimentos transmitidos e por todo o apoio prestado ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Doutor Adelino Lopes pelas muitas conversas, trocas de opiniões e pela aquisição do computador utilizado na resolução dos exemplos numéricos apresentados no Capítulo 5.

Ao Prof. Doutor Sérgio Lopes e ao Prof. Doutor Paulo Providência pelo esclarecimento de algumas questões relativas ao comportamento do betão estrutural e à consideração dos efeitos geometricamente não-lineares, respectivamente.

Ao Eng.º Tiago Abecasis pelas informações prestadas no que respeita aos custos dos materiais e custos de execução dos diversos elementos estruturais.

À Dr.ª Isabel França e à D.ª Anabela Reis da biblioteca do DEC-FCTUC pela ajuda prestada na obtenção de referências bibliográficas.

A toda a família e amigos pelas palavras de carinho e incentivo.

Aos pais da Sandra e à Joana por todo o carinho e ajuda que nos têm dado sempre.

Aos meus pais pelos valores e educação com que fui criado, por todo o amor e por sempre me terem incentivado a estudar e a trabalhar com afinco.

À minha Sandra por todo o amor, amizade, companheirismo e por estar sempre junto a mim ao longo desta caminhada.

Resumo

As pontes de tirantes são estruturas altamente hiperstáticas nas quais o tabuleiro se comporta como uma viga apoiada elasticamente nos tirantes inclinados. Estas pontes representam soluções estruturalmente eficientes para médios e longos vãos. A sua construção tem-se estendido a todo o mundo com diversas soluções estruturais, desde pequenas pontes pedonais até pontes rodoviárias e ferroviárias de médio e grande vão. O seu comportamento é governado pela rigidez dos elementos estruturais (tabuleiro, torres e tirantes) e pela distribuição de forças de pré-esforço nos tirantes. A sua popularidade deve-se não só à sua eficiência estrutural e construtiva mas também a vantagens económicas e estéticas, devido ao seu aspecto elegante e transparente.

O projecto de estruturas é um processo iterativo em que se procura, através da alteração de determinados parâmetros do sistema estrutural, uma solução que satisfaça um conjunto de critérios relacionados com a segurança, utilização e economia. No caso das pontes de tirantes o projecto envolve aspectos de grande complexidade relacionados com uma variedade de problemas como: a definição do sistema estrutural, a determinação das dimensões das secções transversais dos elementos, o cálculo das forças de pré-esforço a aplicar nos tirantes, a consideração das fases construtivas e de efeitos geometricamente não-lineares. Para as pontes em betão assume ainda especial relevância a consideração dos efeitos diferidos.

A optimização estrutural não é habitualmente utilizada na prática da Engenharia Civil. No entanto, no projecto de estruturas de grandes dimensões como as pontes de tirantes, o uso de técnicas de optimização surge naturalmente, como uma forma eficiente de tratar a enorme quantidade de informação envolvida, tendo em vista a redução de custos dos materiais e a obtenção de soluções económicas e estruturalmente eficientes.

Deste modo, realizou-se um estudo acerca da análise estrutural e optimização de pontes atirantadas com tabuleiros em betão, de modo a desenvolver uma ferramenta de apoio ao projecto deste tipo de estruturas. Para tal, desenvolveu-se um programa computacional, que inclui um módulo de análise estrutural e outro módulo destinado à análise de sensibilidades e optimização. O primeiro módulo baseia-se no Método dos Elementos Finitos e tem em conta todos os efeitos e acções relevantes, nomeadamente, as fases construtivas, os efeitos diferidos e os efeitos geometricamente não-lineares. No segundo módulo a resposta da estrutura face a variações nas variáveis de decisão é obtida através de uma análise de sensibilidades pelo *método analítico discreto directo*. O projecto de pontes atirantadas de betão é formulado

como um problema de optimização *multi-objectivo*, considerando objectivos de custo mínimo, deslocamentos e tensões, obtendo-se soluções de Pareto. O *Princípio da Máxima Entropia* é utilizado para obter a solução *minimax* através da minimização de uma função escalar convexa. A minimização do custo é formulada como a minimização do volume de material. Consideraram-se como variáveis de decisão as forças de pré-esforço e secções dos tirantes, as forças de pré-esforço no tabuleiro e as dimensões das secções transversais dos elementos do tabuleiro e das torres.

As características e capacidades do modelo numérico desenvolvido são ilustradas através da resolução de um conjunto de exemplos de aplicação relativos a problemas de optimização de uma ponte atirantada de betão de dimensões reais.

Palavras-chave: optimização estrutural; pontes atirantadas de betão; fases construtivas; efeitos diferidos; forças nos tirantes; variáveis seccionais

Abstract

Cable-stayed bridges are highly redundant structures in which the deck behaves like a continuous beam elastically supported by the inclined stays. These bridges represent structural efficient solutions for medium-to-long spans and are widely used all over the world, ranging from small pedestrian bridges to large span railway and road bridges. Their behaviour is governed by the stiffness of the load-bearing elements (deck, towers and cable stays) and the cable force distribution. Their popularity is owed not only to its structural and construction efficiency but also to economic and aesthetic advantages, due to their elegant and transparent appearance.

Structural design is an iterative process which, through changes in some parameters of the structural system, seeks a solution that satisfies a set of criteria related to safety, serviceability and economy. Cable-stayed bridge design deals with some complex problems, such as: the definition of the structural system, the finding of the members cross-sections, the calculation of the cable forces distribution, the construction stages and geometrical non-linear effects. For concrete bridges the time-dependent effects are of major importance and must be considered.

Structural optimization is not commonly used in civil engineering practice. However, in the design of large structures like cable-stayed bridges, the use of optimization techniques naturally arises as an efficient way to deal with the large amount of information aiming at reducing the material costs and thus obtaining economical and structurally efficient solutions.

Therefore, in order to develop a tool to aid in the design of concrete cable-stayed bridges a study concerning the structural analysis and optimization of such structures was carried out. For that, a computer program was developed, including two modules: a structural analysis module and a sensitivity analysis and optimization module. The first module is based in the finite element method and takes into account all the actions and relevant effects, namely, the construction stages, the time-dependent effects and the geometrical nonlinear effects. In the second module the structural response to changes in the design variables is done by a discrete direct sensitivity analysis procedure. The design of concrete cable-stayed bridges is formulated as a multi-objective optimization problem with objectives of minimum cost, minimum deflections and stresses and a Pareto solution is sought. An entropy-based approach is used to find the minimax solution through the minimization of a convex scalar function. The cost minimization is formulated as the minimization of material volume. The design

variables considered are the cable-stays areas and prestressing forces, the deck prestressing forces and the deck and towers cross-sections.

The features and applicability of the proposed method are demonstrated by numerical examples concerning optimization problems of a real sized concrete cable-stayed bridge.

Keywords: structural optimization; concrete cable-stayed bridges; construction stages; time-dependent effects; cable-stay forces; cross-sectional design variables

Índice Geral

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	v
Índice de Figuras	xi
Índice de Quadros.....	xxi
Abreviaturas	xxv
Simbologia	xxvii
Capítulo 1 - Introdução.....	1
1.1. Enquadramento do tema	1
1.2. Objectivos do trabalho.....	3
1.3. Organização do trabalho.....	4
Capítulo 2 - Estado da Arte	7
2.1. Introdução	7
2.2. Evolução histórica	8
2.3. Concepção estrutural	14
2.3.1. Configuração longitudinal	14
2.3.2. Sistemas de atirantamento	20
2.3.3. Geometria das torres.....	22
2.3.4. Geometria e materiais do tabuleiro.....	25
2.4. Projecto de pontes de tirantes	29
2.5. Métodos construtivos.....	32
2.5.1. Construção com apoios provisórios.....	32
2.5.2. Construção por rotação	33
2.5.3. Construção por lançamento incremental	34
2.5.4. Método dos avanços sucessivos	35
2.6. Análise estrutural de pontes de tirantes	36
2.6.1. Determinação das forças nos tirantes	37
2.6.2. Efeitos diferidos do betão	41
2.6.3. Fases construtivas	43
2.6.4. Análise não-linear material e geométrica	46
2.6.5. Análise dinâmica	50

2.7. Optimização de pontes de tirantes	53
2.7.1. Optimização das forças nos tirantes.....	53
2.7.2. Optimização com variáveis seccionais, geométricas e topológicas.....	56
Capítulo 3 - Modelação e Análise Estrutural	61
3.1. Introdução	61
3.2. Análise estrutural	63
3.2.1. Considerações gerais.....	63
3.2.2. Elemento finito de barra.....	67
3.2.3. Elemento finito de viga	69
3.2.4. Propriedades das secções transversais dos elementos.....	74
3.3. Modelação do betão estrutural	79
3.3.1. Lei constitutiva do betão	79
3.3.2. Maturação do betão	82
3.3.3. Retracção do betão	83
3.3.4. Fluência do betão	86
3.3.5. Modelação das armaduras passivas e activas.....	93
3.4. Análise dos efeitos diferidos do betão	100
3.4.1. Modelo desenvolvido	100
3.4.2. Exemplos de verificação	107
3.5. Análise evolutiva da estrutura.....	111
3.5.1. Modelo desenvolvido	111
3.5.2. Exemplos de verificação	114
3.6. Análise dos efeitos geometricamente não-lineares	121
3.6.1. Modelo desenvolvido	121
3.6.2. Exemplos de verificação	128
Capítulo 4 - Optimização e Análise de Sensibilidades	135
4.1. Introdução	135
4.2. Optimização estrutural	136
4.2.1. Considerações gerais.....	136
4.2.2. Variáveis de decisão.....	139
4.2.3. Objectivos de projecto	145
4.2.4. Função objectivo	154
4.3. Análise de sensibilidades	160
4.3.1. Formulação geral.....	160

4.3.2. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 1	166
4.3.3. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 2	172
4.3.4. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 3	174
4.3.5. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 4	176
4.3.6. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 5	178
4.3.7. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 6	179
4.3.8. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 7	180
4.3.9. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 8	181
4.3.10. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 9	182
4.3.11. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 10	184
4.3.12. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 11	185
4.3.13. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 12	186
4.3.14. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 13	187
4.3.15. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 14	188
4.3.16. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 15	189
4.3.17. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 16	189
4.3.18. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 17	190
4.3.19. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 18	191
4.3.20. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 19	192
4.3.21. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 20	193
4.3.22. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 21	193
4.3.23. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 22	194
4.3.24. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 23	197
4.3.25. Exemplos de verificação	198
Capítulo 5 - Exemplos de Aplicação	205
5.1. Introdução	205
5.2. Características gerais dos exemplos numéricos	207
5.3. Problema da determinação das forças nos tirantes	213
5.3.1. Optimização considerando a ponte completa	216
5.3.2. Optimização considerando o faseamento construtivo	228
5.3.3. Análise da influência dos efeitos diferidos	248
5.3.4. Análise da influência do faseamento construtivo	255
5.3.5. Análise da influência de parâmetros intervenientes nos modelos de fluência e retracção	256

5.3.6. Análise da influência dos efeitos geometricamente não-lineares	260
5.3.7. Análise a longo prazo.....	263
5.4. Problema de minimização do custo de uma ponte de tirantes	265
5.4.1. Optimização considerando a ponte completa.....	267
5.4.2. Optimização considerando o faseamento construtivo.....	280
5.4.3. Análise de soluções estruturais alternativas.....	304
5.4.4. Optimização considerando tabuleiro pré-esforçado.....	312
5.4.5. Optimização utilizando valores discretos para as variáveis de decisão	319
5.4.6. Análise da influência de parâmetros geométricos e topológicos	324
5.5. Sumário	329
Capítulo 6 - Conclusões e Recomendações para Estudos Futuros	333
6.1. Conclusões	333
6.2. Recomendações para estudos futuros	337
Referências Bibliográficas	343
Anexo.....	355

Índice de Figuras

Figura 2.1 – Ponte de Strömsund (Structurae, 2013)	9
Figura 2.2 – Ponte do Lago Maracaibo (Structurae, 2013)	10
Figura 2.3 – Ponte de Wadi Kuf (Structurae, 2013).....	11
Figura 2.4 – Ponte Friedrich Ebert (Wikimedia, 2013).....	11
Figura 2.5 – Ponte de Brotonne (Structurae, 2013).....	12
Figura 2.6 – Ponte de Skarnsund (Structurae, 2013).....	13
Figura 2.7 – Ponte de Tatara Island (Structurae, 2013).....	13
Figura 2.8 – Ponte Russky Island (Rusbridge, 2015).....	14
Figura 2.9 – Esquema de funcionamento estrutural de uma ponte de tirantes (adaptado de (Pedro, 2007)).....	15
Figura 2.10 – Ponte Vasco da Gama (Structurae, 2013)	16
Figura 2.11 – Ponte Sunshine Skyway (Structurae, 2013).....	17
Figura 2.12 – Ponte Barrios de Luna (Structurae, 2013).....	17
Figura 2.13 – Ponte Knie (Structurae, 2013).....	18
Figura 2.14 – Ponte Rainha Santa Isabel (Panoramio, 2013).....	18
Figura 2.15 – Viaduto de Millau (Structurae, 2013)	19
Figura 2.16 – Ponte de Rion-Antirion (Structurae, 2013)	19
Figura 2.17 – Configuração longitudinal do sistema de atirantamento.....	20
Figura 2.18 – Ponte de Stonecutters (a) e ponte Knie (b) (Structurae, 2015)	23
Figura 2.19 – Viaduto da Praça das Flores (Grid, 2015).....	23
Figura 2.20 – Ponte Severin (Structurae, 2015)	24
Figura 2.21 – Ponte Internacional do Guadiana (Wikimedia, 2015).....	24
Figura 2.22 – Esquema da secção transversal do tabuleiro da ponte de Brotonne (Walther <i>et al.</i> , 1999).....	26
Figura 2.23 – Esquema da secção transversal do tabuleiro da ponte de Pasco-Kennewick (Walther <i>et al.</i> , 1999).....	27
Figura 2.24 – Esquema da secção transversal do tabuleiro da ponte Barrios de Luna (Walther <i>et al.</i> , 1999).....	27
Figura 2.25 – Esquema da secção transversal do tabuleiro da ponte de Skarnsund (Walther <i>et al.</i> , 1999).....	27

Figura 2.26 Esquema da secção transversal do tabuleiro da ponte Vasco da Gama (adaptado de (Hewson, 2003)).....	28
Figura 2.27 – Esquema da secção transversal do tabuleiro da ponte Diepoldsau (Walther <i>et al.</i> , 1999)	28
Figura 2.28 – Diagrama de momento flector para as cargas permanentes (adaptado de (Hewson, 2003)).....	30
Figura 2.29 – Ponte de Stonecutters – construção do vão lateral com apoios provisórios (Structurae, 2015).....	33
Figura 2.30 – Ponte de Ben Ahin – construção por rotação (Cremer, 1990).....	34
Figura 2.31 – Viaduto de Millau – construção por lançamento incremental (Structurae, 2015)	35
Figura 2.32 – Ponte Vasco da Gama – construção por avanços sucessivos com betonagem “in situ” (GATTEL, 1999).....	36
Figura 2.33 – Ponte Sunshine Skyway – elevação de aduela pré-fabricada (Pedro, 2010)	36
Figura 3.1 – Diagrama de blocos do programa de computador desenvolvido.....	66
Figura 3.2 – Elemento finito de barra	67
Figura 3.3 – Elemento finito de viga.....	70
Figura 3.4 – Tipos de secções transversais disponíveis no programa.....	75
Figura 3.5 – Representação esquemática da relação tensão-extensão instantânea do betão em compressão (adaptado de (EN 1992-1-1, 2010))	80
Figura 3.6 – Representação esquemática da evolução ao longo do tempo da deformação do betão sujeito a uma tensão constante (adaptado de (Santos, 2002))	87
Figura 3.7 – Representação esquemática da evolução das diversas parcelas da deformação do betão (adaptado de (Virtuoso, 1991))	88
Figura 3.8 – Representação esquemática das relações tensão-extensão dos aços típicos das armaduras passivas (adaptado de (EN 1992-1-1, 2010))	93
Figura 3.9 – Representação esquemática da relação tensão-extensão do aço típico das armaduras activas (adaptado de (EN 1992-1-1, 2010))	95
Figura 3.10 – Elemento finito de viga com elemento de cabo de pré-esforço.....	98
Figura 3.11 – Modelo reológico de aproximação da função de fluência por uma série de Dirichlet	103
Figura 3.12 – Evolução das funções f_j para os valores dos tempos de retardação considerados	105
Figura 3.13 – Viga em consola sujeita a fluência com tensão variável	108

Figura 3.14 – Deslocamento axial da extremidade livre da consola	108
Figura 3.15 – Deslocamento vertical da extremidade livre da consola.....	109
Figura 3.16 – Rotação da extremidade livre da consola.....	109
Figura 3.17 – Viga de betão bi-encastada sujeita à retracção com ou sem fluência	110
Figura 3.18 – Tensão axial em viga bi-encastada sujeita à retracção com ou sem fluência .	110
Figura 3.19 – Esquema da análise das fases construtivas utilizando o método dos avanços sucessivos	113
Figura 3.20 – Dados do Exemplo 1 (análise evolutiva da estrutura).....	115
Figura 3.21 – Deformadas da consola para o Exemplo 1 (análise evolutiva da estrutura)	116
Figura 3.22 – Distribuições de momento flector para o Exemplo 1 (análise evolutiva da estrutura).....	116
Figura 3.23 – Dados do Exemplo 2 (análise evolutiva da estrutura).....	117
Figura 3.24 – Deformada da viga do Exemplo 2 (análise evolutiva da estrutura)	118
Figura 3.25 – Distribuições de momento flector para a viga do Exemplo 2 (análise evolutiva da estrutura).....	118
Figura 3.26 – Dados do Exemplo 3 (análise evolutiva da estrutura).....	119
Figura 3.27 – Deformada da viga do Exemplo 3 (análise evolutiva da estrutura)	120
Figura 3.28 – Distribuições de momento flector para a viga do Exemplo 3 (análise evolutiva da estrutura).....	120
Figura 3.29 – Equilíbrio de um elemento de cabo.....	124
Figura 3.30 – Variação da razão E_{eq}/E em função do comprimento na direcção horizontal e do nível de tensão instalada no tirante.....	126
Figura 3.31 – Forças laterais equivalentes aos efeitos de segunda ordem	127
Figura 3.32 – Dados do Exemplo 1 (efeitos geometricamente não-lineares).....	129
Figura 3.33 – Geometria da ponte utilizada no Exemplo 2 (efeitos geometricamente não-lineares)	130
Figura 4.1 – Tipos de variáveis de decisão considerados.....	143
Figura 4.2 – Equilíbrio interno de secção de betão armado sujeita a flexão composta.....	151
Figura 4.3 – Exemplo de diagrama de interacção adimensional para um elemento de betão	152
Figura 4.4 – Identificação das variáveis de decisão para a secção rectangular cheia.....	166
Figura 4.5 – Identificação da variável de decisão de tipo 3	174
Figura 4.6 – Identificação da variável de decisão de tipo 4	176
Figura 4.7 – Identificação das variáveis de decisão para a secção rectangular oca	178
Figura 4.8 – Identificação das variáveis de decisão para a secção em laje vigada.....	182

Figura 4.9 – Identificação das variáveis de decisão para a secção em caixão unicelular	186
Figura 4.10 – Identificação das variáveis de decisão para a secção em caixão tricelular.....	191
Figura 4.11 – Identificação da variável de decisão de tipo 22.....	195
Figura 4.12 – Identificação da variável de decisão de tipo 23.....	197
Figura 4.13 – Dados do exemplo de verificação da análise de sensibilidades.....	200
Figura 4.14 – Deslocamentos verticais da consola do Exemplo 1 (análise de sensibilidades)	201
Figura 4.15 – Tensões normais na consola do Exemplo 1 (análise de sensibilidades).....	201
Figura 4.16 – Deslocamentos verticais da consola do Exemplo 2 (análise de sensibilidades)	202
Figura 4.17 – Tensões normais na consola do Exemplo 2 (análise de sensibilidades).....	203
Figura 5.1 – Geometria da ponte utilizada nos exemplos numéricos	207
Figura 5.2 – Esquema da malha de elementos finitos e da numeração dos tirantes da ponte utilizada nos exemplos numéricos	209
Figura 5.3 – Identificação das zonas das torres e do tabuleiro para definição das variáveis de decisão.....	210
Figura 5.4 – Fases construtivas	212
Figura 5.5 – Esquema das secções transversais do tabuleiro e das torres no problema de determinação das forças nos tirantes.....	215
Figura 5.6 – Evolução do custo da ponte e da redução de custo em função do número de iterações (Exemplo 1)	218
Figura 5.7 – Distribuição de forças e de tensão nos tirantes para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 1)	220
Figura 5.8 – Deformada para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 1).....	221
Figura 5.9 – Deslocamentos verticais do tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – solução inicial vs solução final (Exemplo 1).....	221
Figura 5.10 – Diagrama de momento flector para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 1).....	222
Figura 5.11 – Diagrama de esforço transversal para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 1).....	222
Figura 5.12 – Diagrama de esforço axial para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 1).....	223

Figura 5.13 – Distribuição de tensões normais no tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 1).....	223
Figura 5.14 – Distribuição de tensões normais na torre para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 1).....	224
Figura 5.15 – Deformada para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 1)	224
Figura 5.16 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 1).....	225
Figura 5.17 – Diagrama de esforço transverso para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 1).....	225
Figura 5.18 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 1).....	225
Figura 5.19 – Deformada para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 1)	226
Figura 5.20 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 1).....	226
Figura 5.21 – Diagrama de esforço transverso para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 1).....	226
Figura 5.22 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 1).....	227
Figura 5.23 – Deformada para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 1)	227
Figura 5.24 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 1).....	227
Figura 5.25 – Diagrama de esforço transverso para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 1).....	228
Figura 5.26 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 1).....	228
Figura 5.27 – Evolução do custo da ponte e da redução de custo em função do número de iterações (Exemplo 2).....	230
Figura 5.28 – Deformadas das fases 1 a 6 – estrutura otimizada (Exemplo 2)	233
Figura 5.29 – Deformadas das fases 7 a 10 – estrutura otimizada (Exemplo 2)	234
Figura 5.30 – Diagramas de momento flector das fases 1 a 6 – estrutura otimizada (Exemplo 2).....	235
Figura 5.31 – Diagramas de momento flector das fases 7 a 10 – estrutura otimizada (Exemplo 2).....	236

Figura 5.32 – Diagramas de esforço transversal das fases 1 a 6 – estrutura otimizada (Exemplo 2).....	237
Figura 5.33 – Diagramas de esforço transversal das fases 7 a 10 – estrutura otimizada (Exemplo 2).....	238
Figura 5.34 – Diagramas de esforço axial das fases 1 a 6 – estrutura otimizada (Exemplo 2)	239
Figura 5.35 – Diagramas de esforço axial das fases 7 a 10 – estrutura otimizada (Exemplo 2)	240
Figura 5.36 – Deformada para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 2).....	241
Figura 5.37 – Diagrama de momento flector para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 2).....	241
Figura 5.38 – Diagrama de esforço transversal para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 2)	242
Figura 5.39 – Diagrama de esforço axial para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 2).....	242
Figura 5.40 – Distribuição de tensões normais no tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 2)	243
Figura 5.41 – Distribuição de tensões normais na torre para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 2).....	244
Figura 5.42 – Deformada para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 2).....	244
Figura 5.43 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 2).....	245
Figura 5.44 – Diagrama de esforço transversal para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 2).....	245
Figura 5.45 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 2).....	245
Figura 5.46 – Deformada para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 2).....	246
Figura 5.47 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 2).....	246
Figura 5.48 – Diagrama de esforço transversal para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 2).....	246
Figura 5.49 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 2).....	247

Figura 5.50 – Deformada para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 2)	247
Figura 5.51 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 2).....	247
Figura 5.52 – Diagrama de esforço transversal para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 2).....	248
Figura 5.53 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 2).....	248
Figura 5.54 – Evolução do custo da ponte e da redução de custo em função do número de iterações (Exemplo 3).....	249
Figura 5.55 – Deslocamentos verticais do tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – análise com efeitos diferidos vs análise sem efeitos diferidos.....	250
Figura 5.56 – Distribuição de momento flector no tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – análise com efeitos diferidos vs análise sem efeitos diferidos	250
Figura 5.57 – Distribuição de tensões normais no tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – análise com efeitos diferidos vs análise sem efeitos diferidos	251
Figura 5.58 – Distribuição de tensões normais na torre para a ponte completa sujeita a carga permanente – análise com efeitos diferidos vs análise sem efeitos diferidos.....	251
Figura 5.59 – Forças de instalação dos tirantes – análise com efeitos diferidos vs análise sem efeitos diferidos	253
Figura 5.60 – Forças de ajustamento dos tirantes – análise com efeitos diferidos vs análise sem efeitos diferidos.....	253
Figura 5.61 – Forças nos tirantes para a ponte completa – análise com fases vs análise sem fases	255
Figura 5.62 – Deslocamentos verticais do tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – final da construção vs longo prazo.....	263
Figura 5.63 – Evolução do custo da ponte e da redução de custo em função do número de iterações (Exemplo 7).....	269
Figura 5.64 – Deformada para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 7)	273
Figura 5.65 – Diagrama de momento flector para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 7)	273
Figura 5.66 – Diagrama de esforço transversal para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 7).....	274

Figura 5.67 – Diagrama de esforço axial para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 7).....	274
Figura 5.68 – Distribuição de tensões normais no tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 7)	275
Figura 5.69 – Distribuição de tensões normais na torre para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 7)	275
Figura 5.70 – Deformada para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 7).....	276
Figura 5.71 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 7).....	276
Figura 5.72 – Diagrama de esforço transversal para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 7).....	276
Figura 5.73 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 7).....	277
Figura 5.74 – Deformada para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 7).....	277
Figura 5.75 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 7).....	277
Figura 5.76 – Diagrama de esforço transversal para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 7).....	278
Figura 5.77 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 7).....	278
Figura 5.78 – Deformada para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 7).....	278
Figura 5.79 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 7).....	279
Figura 5.80 – Diagrama de esforço transversal para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 7).....	279
Figura 5.81 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 7).....	279
Figura 5.82 – Diagrama de interacção adimensional para secção rectangular oca.....	282
Figura 5.83 – Diagrama de interacção adimensional para secção em laje vigada	282
Figura 5.84 – Evolução do custo da ponte e da redução de custo em função do número de iterações para o problema de optimização das forças nos tirantes (Exemplo 8).....	284
Figura 5.85 – Evolução do custo da ponte e da redução de custo em função do número de iterações (Exemplo 8)	285
Figura 5.86 – Deformadas das fases 1 a 6 – estrutura otimizada (Exemplo 8).....	289

Figura 5.87 – Deformadas das fases 7 a 10 – estrutura otimizada (Exemplo 8)	290
Figura 5.88 – Diagramas de momento flector das fases 1 a 6 – estrutura otimizada (Exemplo 8).....	291
Figura 5.89 – Diagramas de momento flector das fases 7 a 10 – estrutura otimizada (Exemplo 8).....	292
Figura 5.90 – Diagramas de esforço transversal das fases 1 a 6 – estrutura otimizada (Exemplo 8).....	293
Figura 5.91 – Diagramas de esforço transversal das fases 7 a 10 – estrutura otimizada (Exemplo 8).....	294
Figura 5.92 – Diagramas de esforço axial das fases 1 a 6 – estrutura otimizada (Exemplo 8)	295
Figura 5.93 – Diagramas de esforço axial das fases 7 a 10 – estrutura otimizada (Exemplo 8)	296
Figura 5.94 – Deformada para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 8)	298
Figura 5.95 – Diagrama de momento flector para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 8)	298
Figura 5.96 – Diagrama de esforço transversal para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 8).....	298
Figura 5.97 – Diagrama de esforço axial para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 8)	299
Figura 5.98 – Distribuição de tensões normais no tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 8).....	299
Figura 5.99 – Distribuição de tensões normais na torre para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 8).....	300
Figura 5.100 – Deformada para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 8)	300
Figura 5.101 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 8).....	301
Figura 5.102 – Diagrama de esforço transversal para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 8).....	301
Figura 5.103 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 8).....	301
Figura 5.104 – Deformada para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 8)	302

Figura 5.105 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 8).....	302
Figura 5.106 – Diagrama de esforço transverso para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 8).....	302
Figura 5.107 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 8).....	303
Figura 5.108 – Deformada para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 8).....	303
Figura 5.109 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 8).....	303
Figura 5.110 – Diagrama de esforço transverso para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 8).....	304
Figura 5.111 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 8).....	304
Figura 5.112 – Evolução do custo da ponte e da redução de custo em função do número de iterações (Exemplos 8, 9 e 10).....	307
Figura 5.113 – Deslocamentos verticais do tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplos 8, 9 e 10).....	310
Figura 5.114 – Momentos flectores no tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplos 8, 9 e 10).....	311
Figura 5.115 – Momentos flectores na torre para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplos 8, 9 e 10)	311
Figura 5.116 – Tensões normais no tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplos 8, 9 e 10).....	312
Figura 5.117 – Evolução do custo da ponte e da redução de custo em função do número de iterações (Exemplo 11)	313
Figura 5.118 – Deformada para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 11).....	318
Figura 5.119 – Diagrama de momento flector para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 11).....	318
Figura 5.120 – Evolução do custo da ponte e da sua variação em função do número de iterações (Exemplo 12)	321

Índice de Quadros

Quadro 3.1 – Valores do parâmetro k_h	85
Quadro 3.2 – Reacções de apoio verticais na viga do Exemplo 2 (análise evolutiva da estrutura).....	117
Quadro 3.3 – Reacções de apoio verticais na viga do Exemplo 3 (análise evolutiva da estrutura).....	119
Quadro 3.4 – Resultados do Exemplo 1 (efeitos geometricamente não-lineares).....	130
Quadro 3.5 – Dimensões gerais das secções do tabuleiro e das torres no Exemplo 2 (efeitos geometricamente não-lineares).....	131
Quadro 3.6 – Resultados do Exemplo 2 (efeitos geometricamente não-lineares).....	132
Quadro 4.1 – Descrição dos tipos de variáveis de decisão considerados	144
Quadro 4.2 – Descrição das variáveis de decisão do exemplo de verificação da análise de sensibilidades.....	200
Quadro 5.1 – Propriedades dos materiais utilizados nos modelos numéricos.....	207
Quadro 5.2 – Identificação dos exemplos resolvidos no âmbito do problema de determinação das forças nos tirantes.....	214
Quadro 5.3 – Dimensões gerais das secções do tabuleiro e das torres no problema de determinação das forças nos tirantes	215
Quadro 5.4 – Descrição das variáveis de decisão utilizadas no Exemplo 1	217
Quadro 5.5 – Valores iniciais e finais (após optimização) das variáveis de decisão (Exemplo 1).....	219
Quadro 5.6 – Descrição das variáveis de decisão utilizadas no Exemplo 2.....	229
Quadro 5.7 – Valores iniciais e finais (após optimização) das forças nos tirantes (Exemplo 2)	231
Quadro 5.8 – Valores iniciais e finais (após optimização) das áreas dos tirantes (Exemplo 2)	232
Quadro 5.9 – Valores iniciais e finais (após optimização) das forças e das áreas dos tirantes (Exemplo 3).....	252
Quadro 5.10 – Forças de instalação para diferentes valores de parâmetros dos modelos de fluência e retracção	257
Quadro 5.11 – Forças de ajustamento para diferentes valores de parâmetros dos modelos de fluência e retracção	258

Quadro 5.12 – Áreas da secção transversal dos tirantes para diferentes valores de parâmetros dos modelos de fluência e retracção	259
Quadro 5.13 – Forças de instalação e de ajustamento para a solução base, análise linear e análise de segunda ordem apenas com módulo de Ernst	261
Quadro 5.14 – Áreas da secção transversal dos tirantes para a solução base, análise linear e análise de segunda ordem apenas com módulo de Ernst	262
Quadro 5.15 – Identificação dos exemplos resolvidos no âmbito do problema de minimização do custo de uma ponte atirantada de betão	266
Quadro 5.16 – Descrição das variáveis de decisão utilizadas no Exemplo 7	268
Quadro 5.17 – Valores iniciais e finais (após optimização) dos custos do tabuleiro, torre e tirantes (Exemplo 7).....	270
Quadro 5.18 – Valores iniciais e finais (após optimização) das forças nos tirantes (Exemplo 7)	271
Quadro 5.19 – Valores mínimos, máximos, iniciais e finais das variáveis de decisão seccionais (Exemplo 7)	272
Quadro 5.20 – Descrição das variáveis de decisão utilizadas no Exemplo 8	281
Quadro 5.21 – Dimensões gerais das secções do tabuleiro e das torres na solução inicial do Exemplo 8	283
Quadro 5.22 – Valores iniciais e finais das variáveis de decisão do problema de optimização das forças nos tirantes (Exemplo 8)	284
Quadro 5.23 – Valores iniciais e finais (após optimização) dos custos do tabuleiro, torres e tirantes (Exemplo 8).....	286
Quadro 5.24 – Valores iniciais e finais (após optimização) das forças nos tirantes (Exemplo 8)	287
Quadro 5.25 – Valores mínimos, máximos, iniciais e finais das variáveis de decisão seccionais (Exemplo 8)	288
Quadro 5.26 – Descrição das variáveis de decisão utilizadas no Exemplo 9	305
Quadro 5.27 – Descrição das variáveis de decisão utilizadas no Exemplo 10	306
Quadro 5.28 – Valores finais do custo total e do custo do tabuleiro, torre e tirantes (Exemplos 8, 9 e 10).....	308
Quadro 5.29 – Valores iniciais e finais das forças nos tirantes (Exemplos 9 e 10)	308
Quadro 5.30 – Valores iniciais e finais do custo e das variáveis de decisão seccionais (Exemplos 9 e 10)	309
Quadro 5.31 – Descrição das variáveis de decisão utilizadas no Exemplo 11	314

Quadro 5.32 – Valores iniciais e finais (após otimização) dos custos do tabuleiro, do pré-esforço, das torres e dos tirantes (Exemplo 11).....	315
Quadro 5.33 – Valores iniciais e finais (após otimização) das forças nos tirantes (Exemplo 11).....	316
Quadro 5.34 – Valores iniciais e finais (após otimização) das variáveis de decisão seccionais (Exemplo 11).....	317
Quadro 5.35 – Valores ótimos das forças nos tirantes (solução contínua vs solução discreta)	322
Quadro 5.36 – Valores iniciais e finais das variáveis de decisão seccionais (solução contínua vs solução discreta).....	323
Quadro 5.37 – Valores dos custos do tabuleiro, torres e tirantes (solução contínua vs solução discreta)	324
Quadro 5.38 – Forças nos tirantes na solução ótima (análise da influência de parâmetros geométricos e topológicos).....	326
Quadro 5.39 – Valores ótimos das variáveis de decisão seccionais (análise da influência de parâmetros geométricos e topológicos)	327
Quadro 5.40 – Valores finais do custo total e do custo do tabuleiro, torres e tirantes (análise da influência de parâmetros geométricos e topológicos)	328

Abreviaturas

ACI	–	American Concrete Institute
ASCE	–	American Society of Civil Engineers
BS	–	British Standard
CAN	–	Canadian National Standard
CEB	–	Comité Euro-International du Béton
CEN	–	Comité Européen de Normalisation
DEC	–	Departamento de Engenharia Civil
EC2	–	Eurocódigo 2 – Parte 1-1
EC3-1-11	–	Eurocódigo 3 – Parte 1-11
EN	–	Norma Europeia
EUA	–	Estados Unidos da América
FCTUC	–	Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra
FIB	–	Federation International du Béton
FIP	–	Fédération Internationale de la Précontrainte
IABSE	–	International Association for Bridge and Structural Engineering
IPQ	–	Instituto Português da Qualidade
LNEC	–	Laboratório Nacional de Engenharia Civil
NP	–	Norma Portuguesa
RCGA	–	Real Coded Genetic Algorithm
SVM	–	Support Vector Machine

Simbologia

Maiúsculas latinas

A	– Área da secção transversal de um elemento
\underline{A}	– Matriz de coeficientes de influência das forças nos tirantes
$A_1, A_2,$ A_3, A_4	– Áreas parciais utilizadas para calcular as propriedades geométricas das secções em caixão unicelular e tricelular
A_c	– Área da secção transversal de betão
A_p	– Área da secção transversal da armadura de pré-esforço
A_{s1}	– Área da secção transversal de armadura inferior
A_{s2}	– Área da secção transversal de armadura superior
\underline{B}^e	– Matriz de deformação ou de derivadas das funções de forma
\underline{B}_p	– Matriz de deformação do elemento de cabo de pré-esforço
C	– Custo da estrutura
C_0	– Valor de referência do custo da estrutura
CB	– Custo unitário do betão armado
CG	– Centro geométrico
CP	– Custo unitário do aço de pré-esforço nos elementos de betão
CP	– Centro plástico
CT	– Custo unitário dos tirantes
\underline{D}	– Matriz de elasticidade ou matriz constitutiva
\underline{D}^k	– Matriz de elasticidade para o intervalo de tempo Δt_k
E	– Módulo de elasticidade
E_c	– Módulo de elasticidade tangente do betão
$E_c(t_0)$	– Módulo de elasticidade do betão na idade t_0 dias
E_c^{k*}	– Módulo de elasticidade equivalente do betão para o intervalo de tempo Δt_k
E_{cm}	– Módulo de elasticidade secante do betão
$E_{cm}(t)$	– Valor médio do módulo de elasticidade do betão na idade t dias
E_{eq}	– Módulo de elasticidade equivalente ou módulo de Ernst
E_f	– Módulo de elasticidade aparente de um cabo
E_p	– Módulo de elasticidade do aço de pré-esforço
\underline{F}	– Vector de forças nodais equivalentes global da estrutura

$F(\underline{x})$	– Função objectivo
F_c	– Força no betão
\underline{F}_g^e	– Vector elementar de forças nodais equivalentes em coordenadas globais
F_i	– Força lateral equivalente; Força num tirante
F_p	– Força de pré-esforço
F_p	– Força de pré-esforço num tirante
F_{s1}	– Força na armadura inferior
F_{s2}	– Força na armadura superior
$\underline{G}(\underline{x})$	– Vector que contém os objectivos de projecto
I_1, I_2, I_4	– Momentos de inércia parciais utilizadas para calcular as propriedades geométricas das secções em caixão unicelular e tritelular
I_{3u}, I_{3v}	– Momentos de inércia a respeito de eixos locais das almas inclinadas das secções em caixão unicelular e tritelular
I_z ou I	– Momento de inércia em torno do eixo local z
$J(t, t_0)$	– Função de fluência
\underline{K}	– Matriz de rigidez global da estrutura
\underline{K}^e	– Matriz de rigidez elementar
\underline{K}_g^e	– Matriz de rigidez elementar em coordenadas globais
\underline{K}^k	– Matriz de rigidez global da estrutura para o intervalo de tempo Δt_k
\underline{K}_p^e	– Matriz de rigidez elementar do elemento de cabo de pré-esforço
L	– Comprimento
$L_i(x)$	– Função interpoladora de Lagrange
M	– Momento flector; Número de objectivos de projecto
\underline{M}^0	– Vector que contém os valores objectivo dos momentos flectores em diversas secções da ponte
\underline{M}^d	– Vector que contém os valores dos momentos flectores em diversas secções da ponte devido às cargas permanentes no tabuleiro
M_{Ed}	– Momento flector actuante
\underline{M}^i	– Vector que contém os valores dos momentos flectores em diversas secções da ponte na iteração i
M_{Rd}	– Momento flector resistente
N	– Esforço axial; Número de variáveis de decisão
\underline{N}	– Matriz das funções de forma

N_E	– Número de restrições de igualdade
NEB	– Número de elementos de betão armado
N_{Ed}	– Esforço axial actuante
NEP	– Número de elementos de betão pré-esforçado
N_G	– Número de restrições de desigualdade
$N_i(x)$	– Função interpoladora ou função de forma
N_p	– Esforço axial num elemento de cabo de pré-esforço
N_{Rd}	– Esforço axial resistente
$N_{strands}$	– Número de cordões num cabo que constitui a secção transversal de um tirante
NT	– Número de tirantes
P_0	– Força de pré-esforço aplicada a um elemento de cabo de pré-esforço
\underline{P}_{max}	– Força máxima aplicada à armadura de pré-esforço
\underline{Q}_{vi}	– Vector das pseudo-cargas virtuais a respeito da variável de decisão i
RH	– Humidade relativa do meio ambiente (em %)
S	– Momento estático da meia-secção
\underline{T}	– Vector que contém os valores das forças nos tirantes; Matriz de transformação de coordenadas
\underline{T}^i	– Vector que contém os valores das forças nos tirantes na iteração i
V	– Esforço transversal
X, Y	– Coordenadas do referencial global
\underline{X}^e	– Vector elementar de esforços internos

Minúsculas latinas

a_j	– Coeficiente da série de Dirichlet que aproxima a função de fluência
b	– Largura
\underline{b}	– Vector de componentes das forças volúmicas
b_{fi}	– Largura da laje inferior de secções em caixão
b_{fs}	– Largura da laje superior de secções em caixão
d	– Diâmetro
du/dx	– Sensibilidades dos deslocamentos a respeito das variáveis de decisão
$d\sigma/dx$	– Sensibilidades das tensões a respeito das variáveis de decisão
e	– Excentricidade do cabo de pré-esforço a respeito do centro geométrico do elemento de viga

$e(x)$	– Traçado do elemento de cabo de pré-esforço
f	– Flecha a meio-vão de um cabo
$f_{0,2k}$	– Valor característico da tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,2% à tracção do aço das armaduras de pré-esforço
\underline{f}_b^e	– Vector elementar de forças nodais equivalentes ao peso-próprio
\underline{f}_b^e	– Vector elementar de forças nodais equivalentes às forças volúmicas
f_{cd}	– Valor de cálculo da tensão de rotura do betão à compressão
f_{ck}	– Valor característico da tensão de rotura do betão à compressão aos 28 dias de idade
f_{cm}	– Valor médio da tensão de rotura do betão à compressão
$f_{cm}(t)$	– Valor médio da tensão de rotura do betão à compressão na idade t dias
f_{ctk}	– Valor característico da tensão de rotura do betão à tracção simples
$f_{ctk,0,05}$	– Quantilho de 5% do valor característico da tensão de rotura do betão à tracção simples
$f_{ctk,0,95}$	– Quantilho de 95% do valor característico da tensão de rotura do betão à tracção simples
f_{ctm}	– Valor médio da tensão de rotura do betão à tracção simples
$f_{ctm}(t)$	– Valor médio da tensão de rotura do betão à tracção na idade t dias
$f_{p0,1k}$	– Valor característico da tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,1% à tracção do aço das armaduras de pré-esforço
\underline{f}_p^e	– Vector elementar de forças nodais equivalentes ao pré-esforço
f_{pk}	– Valor característico da tensão de rotura à tracção do aço das armaduras de pré-esforço
f_t	– Tensão de rotura à tracção do aço das armaduras de pré-esforço
\underline{f}_t^e	– Vector elementar de forças nodais equivalentes às cargas de vão
g_j	– J-ésimo objectivo de projecto; restrições de desigualdade
g_x	– Componente axial da carga devido ao peso próprio
g_y	– Componente transversal da carga devido ao peso próprio
h	– Altura
h_0	– Espessura equivalente (em mm) da secção transversal de um elemento de betão
h_{CG}	– Altura do centro geométrico da secção transversal de um elemento medida a partir da face inferior da secção

h_k	– Restrições de igualdade
i	– Número de um elemento $i = 1, \dots, n$
j	– Número de um elemento $j = 1, \dots, n$
k	– Número de um elemento $k = 1, \dots, n$; parâmetro interveniente na lei tensão-extensão do betão
k_h	– Coeficiente do modelo de retracção do EC2 e que depende da espessura equivalente, h_0
l_w	– Comprimento das almas inclinadas nas secções em caixão unicelular e tricelular
p	– Peso próprio de um cabo
$r(x)$	– Função das coordenadas curvilíneas do elemento de cabo de pré-esforço
r_1, r_2, r_3	– Valores das coordenadas curvilíneas do elemento de cabo de pré-esforço
s	– Coeficiente que depende do tipo de cimento
t	– Tempo; idade do betão em dias; tempo depois da aplicação de pré-esforço (em horas);
t_0	– Idade do betão, em dias, à data do carregamento
$t_{0,corr}$	– Idade do betão, em dias, à data do carregamento corrigida em função do tipo de cimento
$t_{0,T}$	– Idade do betão, em dias, à data do carregamento corrigida em função da temperatura
t_{eq}	– Tempo equivalente
t_f	– Espessura da parede de comprimento b numa secção rectangular oca
t_{fi}	– Espessura da laje inferior de secções em caixão
t_{fs}	– Espessura da laje superior de secções em caixão
t_s	– Idade do betão, em dias, no início da retracção por secagem (ou expansão), normalmente corresponde ao fim da cura
t_w	– Espessura da parede de comprimento h numa secção rectangular oca; largura das vigas laterais numa secção em laje vigada; espessura das almas de secções em caixão
\underline{u}	– Vector de deslocamentos nodais globais da estrutura
u	– Deslocamento segundo a direcção X (coordenadas globais); perímetro da parte da secção exposta à secagem
u'	– Deslocamento axial de um elemento de cabo de pré-esforço

u^e	– Deslocamento segundo a direcção x (coordenadas elementares)
\underline{u}^e	– Vector de deslocamentos nodais elementares
v	– Deslocamento segundo a direcção Y (coordenadas globais)
v^e	– Deslocamento segundo a direcção y (coordenadas elementares)
\underline{x}	– Vector das variáveis de decisão
x, y, z	– Coordenadas elementares)
x_i	– i -ésima variável de decisão; solução na iteração i
x_{opt}	– Solução óptima
y_c	– Distância da armadura inferior à resultante das forças no betão
y_{CP}	– Distância da armadura inferior ao centro plástico da secção
y_{fi}	– Distância do centro geométrico da secção à fibra inferior
y_{fs}	– Distância do centro geométrico da secção à fibra superior
y_{s2}	– Distância da armadura inferior à armadura superior

Maiúsculas gregas

Δe_1	– Incremento de deformação de flexão
Δe_3	– Incremento de deformação axial
Δe_{cs}^k	– Deformação incremental de retracção para o intervalo de tempo Δt_k
$\underline{\Delta F}_{cc}^k$	– Variação do vector de forças nodais equivalentes à deformação de fluência para o intervalo de tempo Δt_k
$\underline{\Delta f}_{cc}^k$	– Vector elementar de forças nodais equivalentes à deformação incremental de fluência para o intervalo de tempo Δt_k
$\underline{\Delta F}_{cs}^k$	– Variação do vector de forças nodais equivalentes à deformação de retracção para o intervalo de tempo Δt_k
$\underline{\Delta f}_{cs}^k$	– Vector elementar de forças nodais equivalentes à deformação incremental de retracção para o intervalo de tempo Δt_k
$\underline{\Delta f}_{dif}^e$	– Vector elementar de forças nodais equivalentes aos efeitos diferidos
$\underline{\Delta F}^k$	– Variação do vector de forças nodais equivalentes para o intervalo de tempo Δt_k
ΔN	– Variação do esforço axial
Δt	– Intervalo de tempo
ΔTd	– Parcela diferencial da acção térmica

$\underline{\Delta T}^i$	– Vector que contém as variações dos valores das forças nos tirantes na iteração i
ΔT_{inf}	– Variação de temperatura na face inferior da secção transversal
ΔT_{sup}	– Variação de temperatura na face superior da secção transversal
ΔTu	– Parcela uniforme da acção térmica
$\underline{\Delta u}$	– Variação do vector de deslocamentos
$\underline{\Delta u}^k$	– Variação do vector de deslocamentos para o intervalo de tempo Δt_k
$\Delta \varepsilon_{cc}^k$	– Deformação incremental de fluência para o intervalo de tempo Δt_k
$\Delta \sigma$	– Variação de tensão
$\Delta \sigma(t, t_0)$	– Variação de tensão entre a idade t_0 e t
$\underline{\Delta \sigma}^e$	– Variação do vector elementar de tensões
$\Delta \sigma_{pr}$	– Valor absoluto das perdas de pré-esforço devidas à relaxação

Minúsculas gregas

α	– Ângulo; coeficiente que intervém na fórmula de evolução com o tempo da resistência à tracção do betão; coeficiente do modelo de fluência do EC2 e que depende do tipo de cimento
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	– Coeficientes do modelo de fluência do EC2 e que dependem da resistência do betão
α_j	– Coeficiente da série de Dirichlet que aproxima a função de fluência
$\alpha_{sd1}, \alpha_{sd2}$	– Coeficientes do modelo de retracção do EC2 e que dependem do tipo de cimento
$\beta(f_{cm})$	– Factor que tem em conta a influência da resistência do betão no coeficiente de fluência convencional
$\beta(t_0)$	– Factor que tem em conta a influência da idade do betão à data do carregamento no coeficiente de fluência
$\beta_{as}(t)$	– Coeficiente do modelo de retracção do EC2 e que depende da idade t do betão em dias, traduzindo a evolução da retracção autogénea com o tempo
$\beta_c(t, t_0)$	– Coeficiente que traduz a evolução da fluência no tempo
$\beta_{cc}(t)$	– Coeficiente que depende da idade t do betão
$\beta_{ds}(t, t_s)$	– Coeficiente do modelo de retracção do EC2 e que depende de t , t_s e h_0 , traduzindo a evolução da retracção de secagem com o tempo
β_{RH}	– Coeficiente do modelo de fluência do EC2 e que depende da humidade

	relativa do ambiente e de h_0
γ	– Peso volúmico
γ_j	– Variável de estado que traduz a influência da história de tensões na deformação de fluência
γ_R	– Coeficiente parcial de segurança
δ	– Deslocamento
δ_0	– Valor admissível do deslocamento
ε	– Deformação; Valores residuais destinados a evitar a singularidade da matriz de rigidez
ε_c	– Extensão no betão
$\varepsilon_{c\sigma}(t, t_0)$	– Extensão no betão de origem mecânica aos t dias de idade devido a uma tensão aplicada na idade t_0
$\varepsilon_c(t)$	– Extensão no betão na idade t dias
ε_{c1}	– Extensão correspondente à tensão máxima
ε_{ca}	– Extensão de retracção autogénea
$\varepsilon_{ca(\infty)}$	– Extensão de retracção autogénea a tempo infinito
ε_{cc}	– Extensão de fluência
$\varepsilon_{cc}(t, t_0)$	– Extensão de fluência no betão aos t dias de idade devido a uma tensão aplicada na idade t_0
ε_{ccj}	– Contribuição do j -ésimo termo da série de Dirichlet para a deformação de fluência
ε_{cd}	– Extensão de retracção por secagem
$\varepsilon_{cd,0}$	– Valor nominal da retracção livre por secagem
$\varepsilon_{ci}(t_0)$	– Extensão instantânea no betão aos t_0 dias de idade
$\varepsilon_{cn}(t)$	– Extensão no betão independente do estado de tensão aos t dias de idade
ε_{cs}	– Extensão total de retracção
$\varepsilon_{cs}(t)$	– Extensão total de retracção no betão aos t dias de idade
$\varepsilon_{cT}(t)$	– Extensão no betão devido à acção térmica aos t dias de idade
ε_{cul}	– Valor nominal da extensão última
ε_e	– Deformação elástica de um cabo
$\underline{\varepsilon}^e$	– Vector elementar de deformações
ε_p	– Extensão axial do elemento de cabo de pré-esforço
ε_{p0}	– Deformação inicial do elemento de cabo de pré-esforço

ε_{uk}	– Extensão na carga máxima
η	– Parâmetro interveniente na lei tensão-extensão do betão
η_{cj}	– Coeficiente de viscosidade
θ	– Ângulo
θ^e	– Deslocamento de rotação
λ_j^k	– Coeficiente da série de Dirichlet que aproxima a função de fluência no intervalo de tempo Δt_k
μ_{ED}	– Valor reduzido do momento flector actuante
μ_{RD}	– Valor reduzido do momento flector resistente
ν_{ED}	– Valor reduzido do esforço axial actuante
ν_{RD}	– Valor reduzido do esforço axial resistente
ρ	– Parâmetro real interveniente na função escalar convexa
ρ_{1000}	– Perda devida à relaxação (em %) às 1000h depois da aplicação do pré-esforço, de valor igual a $0,7f_{pk}$, e a uma temperatura média de 20°C
σ	– Tensão
σ_0	– Tensão inicial
σ_{allow}	– Tensão admissível num elemento de betão estrutural
σ_c	– Tensão no betão
$\sigma_c(t_0)$	– Tensão no betão na idade t_0 dias
$\underline{\sigma}^e$	– Vector elementar de tensões
σ_{fi}	– Tensão normal na fibra inferior devido ao momento flector
σ_{fs}	– Tensão normal na fibra superior devido ao momento flector
σ_n	– Tensão normal devido ao esforço axial
$\sigma_{p,max}$	– Tensão máxima aplicada à armadura de pré-esforço
σ_{pi}	– Valor absoluto da tensão inicial de pré-esforço
τ	– Tensão tangencial máxima
$\varphi(\infty, t_0)$	– Valor final do coeficiente de fluência do betão
$\varphi(t, t_0)$	– Coeficiente de fluência do betão entre as idades t e t_0 em relação à deformação elástica aos 28 dias
φ_0	– Coeficiente de fluência nominal
φ_{RH}	– Factor que tem em conta a influência da humidade relativa no coeficiente de fluência
$\chi(t, t_0)$	– Coeficiente de envelhecimento

$\psi(t, t_0)$ – Coeficiente de relaxação do betão na idade t para uma deformação imposta na idade t_0

Capítulo 1 - Introdução

1.1. Enquadramento do tema

As pontes de tirantes têm sido construídas um pouco por todo o mundo, devendo a sua popularidade não só à sua eficiência estrutural e construtiva mas também a vantagens do ponto de vista económico, representando sempre marcos significativos na paisagem devido à inegável elegância e beleza que apresentam.

Desde o seu desenvolvimento inicial na reconstrução de pontes na Alemanha após a Segunda Guerra Mundial, passando pela internacionalização do conceito na década de 1970 e pela concepção de pontes de grande vão na década de 1990, houve um interesse crescente na construção deste tipo de estruturas. A sua construção tem-se estendido a todo o mundo com diversas soluções estruturais, desde pequenas pontes pedonais até pontes rodoviárias e ferroviárias de médio e grande vão. As soluções iniciais apresentavam estrutura totalmente metálica, com tabuleiros de elevada rigidez e poucos tirantes. Posteriormente, os desenvolvimentos científicos no domínio da análise estrutural e do conhecimento das propriedades dos materiais possibilitaram a evolução para o sistema de suspensão múltipla, com muitos tirantes pouco espaçados, e a execução de pontes de maior vão. Nos últimos vinte anos a evolução nas tecnologias construtivas e dos materiais possibilitou a entrada das pontes atirantadas no domínio dos grandes vãos até então reservado às pontes suspensas. Recentemente foram concluídas as pontes de Stonecutters e Sutong, ambas na China, respectivamente com 1018 m e 1088 m de vão central. Já em 2012 foi concluída a ponte Russky Island na Rússia que, com um vão central de 1104 m, é actualmente a ponte com o maior vão atirantado do mundo.

As pontes de tirantes executadas em betão estrutural constituem soluções estruturalmente eficientes e economicamente competitivas para vãos centrais de dimensão média (até 400 – 500 m) representando um grande número de obras. Actualmente, na generalidade das situações, as torres são executadas em betão, variando apenas a escolha do material para a execução do tabuleiro, que pode ser executado em aço, em betão ou misto aço-betão. A elevada resistência à compressão do betão torna-o ideal para resistir às elevadas forças de compressão introduzidas nas torres e no tabuleiro pelos tirantes inclinados. A compressão no tabuleiro constitui um pré-esforço natural para fazer face aos esforços de flexão devido às cargas permanentes e sobrecargas. Deste modo, e tendo em conta o custo substancialmente

superior de soluções em aço, assume especial interesse o estudo do projecto e concepção de soluções económicas e estruturalmente eficientes em betão.

O projecto de estruturas é um processo iterativo de análise e dimensionamento através do qual se procura, através da alteração de determinados parâmetros do sistema estrutural, uma solução que satisfaça um conjunto de critérios relacionados com a segurança, utilização e economia. Este processo é tradicionalmente feito por tentativa-erro, partindo de uma solução inicial definida com base em aspectos de natureza conceptual e na experiência dos projectistas. No caso particular de uma ponte de tirantes, o projecto da mesma envolve aspectos de grande complexidade relacionados com uma variedade de problemas. Estas são estruturas altamente hiperstáticas em que o seu comportamento depende da rigidez dos diversos elementos estruturais (tabuleiro, torres e tirantes), pelo que as distribuições de deslocamentos e de tensões não podem ser determinadas sem a definição das secções dos tirantes e das forças de pré-esforço neles aplicadas. Deste modo, o problema da determinação das forças nos tirantes constitui um aspecto distintivo do projecto destas estruturas. O processo construtivo deve também ser tido em conta pois influencia os valores dos deslocamentos e tensões e, conseqüentemente, das forças nos tirantes. Para além destes aspectos, a escolha do sistema estrutural, o comportamento não-linear para acções estáticas e o comportamento face a acções dinâmicas como o vento ou o sismo também devem ser tidos em conta. No caso das pontes em betão assume ainda especial relevância a consideração dos efeitos diferidos.

Dada a natureza iterativa do projecto e para tratar de forma eficiente a enorme quantidade de informação gerada aquando da análise e dimensionamento deste tipo de estruturas, a utilização de técnicas de programação matemática surge naturalmente como forma de automatizar o projecto de pontes de tirantes. A optimização estrutural é amplamente usada nas engenharias Mecânica, Aeronáutica e Aeroespacial, mas não tanto na Engenharia Civil. No entanto, no projecto de estruturas de grandes dimensões, como as pontes de tirantes, as técnicas de optimização vão ganhando maior importância devido ao seu impacto na redução dos custos associados com os materiais, possibilitando a obtenção de soluções económicas e estruturalmente eficientes. Apesar da automatização de processos conferida pela optimização, caberá sempre ao engenheiro projectista avaliar a validade das soluções obtidas e ajustá-las caso necessário.

No âmbito do projecto de pontes de tirantes, os algoritmos de optimização podem incluir como variáveis de decisão grandezas mecânicas, geométricas e seccionais. Deste modo, podem ser aplicados para o dimensionamento das secções transversais dos vários elementos

estruturais, para a determinação das forças de pré-esforço nos tirantes de forma a garantir determinadas condições para a estrutura ou para determinar grandezas geométricas como a altura da torres ou o comprimento dos vãos.

A utilização de algoritmos de optimização no âmbito do projecto de pontes de tirantes constitui uma temática que tem suscitado o interesse de diversos investigadores. Estes trabalhos desenvolveram-se, basicamente, em duas vertentes, a determinação das forças nos tirantes e o dimensionamento das secções transversais dos elementos, referindo-se a maioria deles a pontes metálicas ou mistas aço-betão. No caso das pontes de betão, os estudos são mais escassos e não contemplam alguns dos problemas particulares de análise, relacionados com as fases construtivas e os efeitos diferidos, que devem ser contabilizados na avaliação da resposta da estrutura e incluídos no problema de optimização. Para além das vantagens da optimização no projecto de estruturas, a resolução das problemáticas anteriormente referidas numa abordagem integrada de análise e optimização ainda não se encontra reportada na bibliografia consultada. Por conseguinte, considera-se relevante desenvolver um trabalho de investigação nesta temática.

O presente trabalho insere-se no âmbito do projecto de pontes de tirantes com tabuleiro executado em betão estrutural. Assim, pretende-se levar a cabo um estudo acerca da análise estrutural e optimização de pontes de tirantes com tabuleiro em betão, de modo a desenvolver uma ferramenta de apoio ao projecto deste tipo de estruturas, esperando com ele contribuir para o aumento do conhecimento nesta área.

1.2. Objectivos do trabalho

Tendo em conta o que foi referido na secção anterior, o objectivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de um modelo numérico integrado de análise e optimização como ferramenta de apoio ao projecto de pontes atirantadas de betão. Para tal, pretende-se desenvolver um programa computacional que inclua um módulo de análise estrutural e outro módulo destinado à análise de sensibilidades e optimização.

O primeiro módulo deverá contemplar todos os efeitos e acções relevantes, nomeadamente, a modelação das fases construtivas, os efeitos diferidos do comportamento do betão e os efeitos geometricamente não-lineares.

O segundo módulo deverá incluir um método eficiente de análise de sensibilidades que possibilite obter, com uma precisão adequada, a resposta da estrutura face a variações nas variáveis de decisão. Estas variáveis devem contemplar os principais parâmetros

caracterizadores do sistema estrutural. O algoritmo de optimização a implementar deverá ser eficiente e permitir resolver problemas no âmbito do projecto deste tipo de estruturas. As soluções óptimas deverão garantir a minimização do custo da estrutura e a verificação de limites nos valores dos deslocamentos e tensões.

1.3. Organização do trabalho

A presente tese é constituída por seis capítulos e um anexo, apresentando-se seguidamente uma descrição sumária do conteúdo dos mesmos.

Neste primeiro capítulo faz-se a introdução do trabalho desenvolvido, apresenta-se o enquadramento do tema, indicam-se os objectivos do trabalho e a sua organização.

No Capítulo 2 apresenta-se o estado da arte relativamente ao estudo de pontes de tirantes, em particular das pontes construídas em betão. Inicia-se com um resumo acerca da evolução histórica das pontes de tirantes. Referem-se os principais aspectos da concepção estrutural, as etapas e os problemas a resolver durante o projecto das mesmas e quais os métodos construtivos utilizados. Faz-se uma revisão dos principais trabalhos no que concerne às duas grandes temáticas deste trabalho, a análise estrutural e a optimização de pontes atirantadas de betão.

No Capítulo 3 descreve-se, detalhadamente, o módulo de análise estrutural, justificando-se as diversas opções tomadas e apresentando-se exemplos de verificação para validação dos resultados obtidos. Este módulo é baseado no Método dos Elementos Finitos, permite modelar o faseamento construtivo pelo método dos avanços sucessivos e tem em conta os efeitos diferidos da maturação, fluência e retracção do betão, assim como os efeitos geometricamente não-lineares.

O Capítulo 4 apresenta uma descrição pormenorizada do módulo de análise de sensibilidades e optimização. Referem-se algumas considerações gerais acerca dos problemas de optimização estrutural e apresentam-se as variáveis de decisão e os objectivos de projecto considerados na definição do problema de optimização de pontes atirantadas de betão. Este problema é formulado como um problema *multi-objectivo* em que se procura a minimização do custo da estrutura e a verificação de objectivos de projecto relativos a deslocamentos e tensões. Indicam-se também as metodologias habituais para efectuar a análise de sensibilidades descrevendo-se, em detalhe, o método adoptado. Apresentam-se ainda as expressões das sensibilidades a respeito dos diferentes tipos de variáveis de decisão

consideradas. Estas representam as dimensões das secções transversais dos diversos elementos e as forças de pré-esforço a aplicar nos tirantes e nos elementos de betão.

O Capítulo 5 é dedicado aos exemplos de aplicação do modelo numérico desenvolvido, de modo a ilustrar as características e capacidades do mesmo como ferramenta de apoio ao projecto de pontes atirantadas de betão. Os exemplos foram divididos em dois subcapítulos, em que se abordou a resolução de dois problemas relevantes no contexto do projecto destas estruturas, nomeadamente, o problema de determinação das forças nos tirantes e o problema da minimização do custo. No primeiro problema analisa-se a influência na solução óptima de aspectos como o faseamento construtivo, os efeitos diferidos e os efeitos geometricamente não-lineares. No segundo problema analisa-se a influência do processo construtivo e estudam-se soluções estruturais alternativas para a secção transversal do tabuleiro. O problema é resolvido incluindo variáveis de decisão relativas ao pré-esforço no tabuleiro e considerando valores discretos para as variáveis seccionais. Estuda-se ainda a influência de parâmetros geométricos e topológicos no custo da ponte.

No Capítulo 6 apresenta-se um resumo dos principais aspectos do trabalho desenvolvido, faz-se uma síntese das principais conclusões e apresentam-se recomendações para futuros trabalhos de investigação.

Apresenta-se ainda a listagem das referências bibliográficas consultadas para a realização da presente tese. Conclui-se com um Anexo onde se apresentam as expressões analíticas de derivadas intervenientes no cálculo das sensibilidades a respeito de diversos tipos de variáveis de decisão.

Capítulo 2 - Estado da Arte

2.1. Introdução

O presente capítulo apresenta uma visão geral sobre o estado do conhecimento no que respeita à temática central deste trabalho, as pontes de tirantes, em particular as pontes atirantadas de betão.

Este tipo de estruturas encontra-se profusamente descrito em diversas obras (Gimsing, 1997; Podolny e Scalzi, 1986; Troitsky, 1988; Walther *et al.*, 1999). No entanto, dada a complexidade e as particularidades das mesmas e para melhor compreensão dos conceitos referidos em capítulos subsequentes, optou-se por apresentar vários sub-capítulos onde se enfatizam aspectos específicos das pontes de tirantes e os factores condicionantes do seu comportamento estrutural. Assim, começa-se com uma breve resenha histórica sobre a construção deste tipo de pontes. De seguida apresentam-se as características gerais do seu funcionamento estrutural e as tipologias habituais para os diversos elementos estruturais que as constituem. Referem-se as principais etapas do projecto de pontes de tirantes salientando-se a importância do controlo do processo construtivo, e apresentam-se ainda os métodos construtivos que têm sido utilizados na sua execução.

Posteriormente apresenta-se uma revisão de estudos anteriores separada de acordo com os dois temas a desenvolver nesta tese, a análise estrutural e a optimização de pontes de tirantes, em particular dos aspectos relevantes para as pontes executadas em betão estrutural. Referem-se os principais estudos efectuados salientando-se os aspectos mais relevantes e as conclusões a que se chegou.

No que respeita à análise estrutural presta-se especial atenção aos trabalhos relativos à determinação das forças nos tirantes, à consideração dos efeitos diferidos, das fases construtivas e dos efeitos geometricamente não-lineares. Referem-se ainda alguns aspectos essenciais relacionados com a análise face às acções dinâmicas do vento e dos sismos.

Relativamente aos trabalhos de optimização faz-se a separação nas duas temáticas principais em que têm sido aplicados algoritmos de optimização no estudo de pontes atirantadas, ou seja, a optimização das forças nos tirantes e a optimização considerando variáveis seccionais, geométricas e topológicas. No primeiro caso o objectivo principal é a determinação das forças de pré-esforço a aplicar aos tirantes de modo a controlar as tensões e a garantir a geometria pretendida no final da construção. Para além destes objectivos, a

consideração de variáveis seccionais, geométricas e topológicas no problema de optimização tem como finalidade determinar o projecto óptimo de pontes de tirantes, visando a minimização do custo.

2.2. Evolução histórica

A ideia de suportar o tabuleiro de uma ponte por um conjunto de tirantes inclinados, possibilitando vencer maiores vãos sem a necessidade de pilares intermédios, foi introduzido no século XVII, com as primeiras propostas de aplicação atribuídas a Verantius (Itália, 1617) e Löscher (Alemanha, 1784). A primeira tentativa de construção de uma ponte atirantada é atribuída ao carpinteiro alemão I. Löscher que, em 1784, executou uma estrutura deste tipo totalmente em madeira.

No entanto, a falta de métodos de cálculo adequados e o desconhecimento inicial acerca do comportamento dos tirantes levou ao colapso das pontes sobre os rios Tweed (Inglaterra) e Saale (Alemanha) e adiou a construção deste tipo de estruturas (Podolny e Scalzi, 1986). Na segunda metade do século XIX foram construídas algumas pontes suspensas com uma solução híbrida, parte suspensa e parte atirantada, em que se recorreu a tirantes inclinados para diminuir a deformabilidade do tabuleiro. A ponte de Brooklyn em Nova Iorque, construída em 1883 e projectada por J.A. Roebling é um exemplo deste tipo de solução.

As primeiras pontes de tirantes modernas foram construídas em betão. Em 1926 foi construído o aqueduto de Tempul sobre o rio Guadalete em Espanha, projectado por Eduardo Torroja e executado em betão armado com os tirantes em aço de alta resistência e revestidos em betão para protecção contra a corrosão. Em 1952, foi construída a ponte sobre o canal de Donzère-Mondragon em França projectada por Albert Caquot. Esta ponte tem um vão principal de 81 m, suportado em seis secções por cabos inclinados desviados no topo das torres e amarrados nos vãos laterais de 39,5 m. O tabuleiro, executado em betão armado, tem apenas 6,70 m de largura e é composto por duas vigas laterais invertidas de 2,0 m de altura e carlingas espaçadas de 5,7 m, suportando uma laje de 0,18 m de espessura. No entanto, o impulso definitivo para a construção de pontes de tirantes foi dado pelos estudos do engenheiro alemão F. Dischinger que, em 1938, propôs o uso de tirantes de aço de alta resistência sujeitos a pré-esforços iniciais, por forma a aumentar a sua rigidez efectiva, melhorando-se assim o seu efeito de suspensão (Billington e Nazmy, 1990; Virlogeux, 1999).

A ponte de Strömsund na Suécia, projectada por Dischinger, representada na Figura 2.1 e aberta ao tráfego em 1955 é geralmente considerada como a primeira ponte atirantada

metálica da era moderna. Esta ponte é constituída por três vãos e apresenta um comprimento total de 332 m, tendo o vão central 182,6 m. O tabuleiro, executado em betão e aço, é suportado por quatro pares de tirantes ligados a cada uma das torres.



Figura 2.1 – Ponte de Strömsund (Structurae, 2013)

As ideias propostas por Dischinger apresentavam as pontes de tirantes como uma solução caracterizada por um uso eficiente dos materiais e pela rapidez de construção. Com vantagens claras do ponto de vista económico, foram rapidamente adoptadas e desempenharam um papel fundamental na reconstrução de pontes na Alemanha após a Segunda Guerra Mundial (Billington e Nazmy, 1990).

Neste âmbito é de referir a famosa série de pontes de tirantes metálicas atravessando o rio Reno. Em 1957 foi concluída a ponte Theodor Heuss em Düsseldorf a qual, com um vão principal de 260 m e um tabuleiro totalmente metálico constitui a primeira aplicação do sistema de atirantamento em harpa, apresentando cada torre 2 planos de 6 tirantes. As torres com 40 m acima do tabuleiro são de betão armado e encontram-se em consola a partir do nível deste. O tabuleiro é constituído por 2 longarinas rectangulares ocas com 3,2 m de altura e 1,6 m de largura, ligadas por uma laje metálica ortotrópica e por carlingas espaçadas 1,83 m.

Na ponte Severin, concluída em 1961 na cidade de Colónia, utilizaram-se, pela primeira vez, dois planos de tirantes inclinados e ancorados numa torre em forma de A para suportar um vão central de 301 m. Na cidade de Düsseldorf foram ainda construídas a ponte Knie e a ponte Oberkassel, concluídas em 1969 e 1976 respectivamente e ambas com atirantamento em harpa e com configuração longitudinal assimétrica, sendo o vão principal suportado por apenas uma torre esbelta. Para garantir o equilíbrio, no vão lateral, utilizaram-se pilares

intermédios nos pontos de ancoragem dos tirantes de retenção. A ponte Knie, com um vão principal de 320 m, possui tabuleiro metálico em laje vigada e sistema de suspensão lateral. A ponte Oberkassel apresenta um vão principal de 258 m com tabuleiro metálico em caixão tricelular de 35 m de largura e suportado por um sistema de suspensão central. O sistema de suspensão central foi utilizado pela primeira vez na ponte Norderelbe, da autoria de H. Homberg, construída em Hamburgo e concluída em 1962.

A popularidade crescente deste tipo de estruturas estendeu-se a outros países. O engenheiro italiano Riccardo Morandi projectou novas pontes de tirantes com tabuleiros em betão armado pré-esforçado. A sua obra mais significativa é a ponte do Lago Maracaibo na Venezuela concluída em 1962 (Figura 2.2). Com cinco vãos múltiplos atirantados de 235 m, trata-se de uma estrutura com uma concepção muito original. Apresenta pilares em A no sentido longitudinal que asseguram a rigidez e resistência para uma ponte atirantada de vãos múltiplos. Os vãos do tabuleiro são encastrados nas torres através de um conjunto de montantes inclinados em forma de X e são suspensos apenas por um par de tirantes de cada lado das torres. A parte restante dos vãos do tabuleiro, entre pontos de suspensão, é constituída por tramos simplesmente apoiados que permitem acomodar as deformações longitudinais do tabuleiro.



Figura 2.2 – Ponte do Lago Maracaibo (Structurae, 2013)

Do mesmo projectista, é de referir também a ponte de Wadi Kuf na Líbia (Figura 2.3), concluída em 1972 e que, com um vão central de 282 m durante alguns anos constituiu o maior vão atirantado de betão do mundo.



Figura 2.3 – Ponte de Wadi Kuf (Structurae, 2013)

Os desenvolvimentos científicos no domínio da análise estrutural e do conhecimento das propriedades dos materiais possibilitaram a evolução do sistema de suspensão das pontes de tirantes. Em 1967 foi concluída a ponte Friedrich Ebert em Bona, projectada por H. Homberg e que foi a primeira ponte com sistema de suspensão múltipla (Figura 2.4). Com um vão central de 280 m e dois vão laterais de 120 m, possui 2 torres com um plano central de tirantes cada uma suportando 2×20 tirantes. O espaçamento destes é de 1 m nas torres e 4,5 m no tabuleiro. A utilização do sistema de suspensão múltipla facilitou a construção do vão central pelo método dos avanços sucessivos, na medida em que os segmentos do tabuleiro eram mais curtos e, por conseguinte, mais leves e por isso mais fáceis de içar e fixar ao tabuleiro.



Figura 2.4 – Ponte Friedrich Ebert (Wikimedia, 2013)

A construção de pontes de tirantes foi dominada até aos anos 70 do século XX pelas pontes metálicas. Em 1975 foi concluída a ponte de Saint Nazaire (França) a qual, com um

vão central de 404 m, deteve, até aos anos 80 do século XX, o recorde mundial da ponte atirantada com maior vão principal.

O verdadeiro progresso no campo das pontes atirantadas com tabuleiro em betão ocorreu com o projecto e construção, em 1977, da ponte de *Brotonne* em França (Figura 2.5). Nesta, aplicou-se pela primeira vez, a uma ponte com tabuleiro em betão, o princípio de suspensão múltipla utilizado na construção da ponte Friedrich Ebert. Com um vão central de 320 m, demonstrou que a solução com tabuleiro de betão era competitiva para vãos entre os 300 m e os 400 m. O tabuleiro é em betão pré-esforçado, com secção transversal em caixão unicelular de 3,80 m de altura, sendo suportado por 2×21 tirantes por torre. As torres em betão armado são esbeltas e têm 70 m de altura, sendo encastradas no tabuleiro, que por sua vez se apoia nos pilares.



Figura 2.5 – Ponte de Brotonne (Structurae, 2013)

Na construção da ponte Pasco-Kennewick com 299 m de vão principal, concluída em 1978 nos EUA, foram utilizadas pela primeira vez aduelas totalmente pré-fabricadas num tabuleiro atirantado. Esta ponte introduziu também a suspensão total do tabuleiro, muito útil nos casos de tabuleiros esbeltos.

Em 1983 foi concluída a ponte Barrios de Luna, em Espanha pelo engenheiro Carlos Fernández Casado. Com 440 m de vão central passou a deter o recorde de maior vão atirantado do mundo. Mais tarde, em 1986, o novo recorde foi estabelecido com a construção da ponte Annacis em Vancouver (Canadá) com 465 m de vão principal e com um tabuleiro misto aço-betão de apenas 2,215 m de altura.

Nos anos 90 do século XX assistiu-se a um progresso notável das pontes de tirantes tendo-se ultrapassado a barreira dos 500 m de vão principal com a ponte de Skarnsund e posteriormente com a ponte de Yangpu (Virlogeux, 1999). A ponte de Skarnsund (Figura 2.6), com 530 de vão central, ainda é actualmente a ponte de tirantes com tabuleiro em betão com o maior vão central.



Figura 2.6 – Ponte de Skarnsund (Structurae, 2013)

Com a construção das pontes da Normandia (França, 1995 com 856 m de vão central) e de Tataru (Japão, 1998 com 890 m de vão central), representada na Figura 2.7, as pontes de tirantes entraram definitivamente no domínio dos grandes vãos até então reservado apenas às pontes suspensas.



Figura 2.7 – Ponte de Tataru Island (Structurae, 2013)

No século XXI, com a construção das pontes de Stonecutters (Hong-Kong, 2009) e Sutong (Xangai, 2008), respectivamente com 1018 m e 1088 m de vão central, foram batidos os recordes anteriores. Em 2012 concluiu-se a construção da ponte Russky Island em Vladivostok (Rússia) que, com um vão central de 1104 m, é actualmente a maior ponte de tirantes do mundo.



Figura 2.8 – Ponte Russky Island (Rusbridge, 2015)

2.3. Conceção estrutural

Uma ponte de tirantes de suspensão múltipla é uma estrutura com elevado grau de hiperstaticidade. A resposta da estrutura depende da rigidez relativa dos elementos resistentes (tirantes, torres e tabuleiro) e do seu arranjo. Assim, apresentam-se de seguida os aspectos mais relevantes da concepção estrutural deste tipo de estruturas e a forma como influenciam o comportamento das mesmas.

2.3.1. Configuração longitudinal

As pontes de tirantes são estruturas constituídas por um tabuleiro suportado directamente por tirantes ancorados a uma ou mais torres, podendo o tabuleiro também estar ligado às torres. Este sistema estrutural é assim constituído por três elementos estruturais principais: o tabuleiro; as torres e pilares; e os tirantes. O tabuleiro comporta-se como uma viga contínua sobre apoios elásticos nos pontos de ancoragem dos tirantes, suportando as cargas permanentes e as sobrecargas e transferindo-as para os tirantes e para os pilares, funcionando simultaneamente à flexão e à compressão. Os tirantes suportam o tabuleiro e por sua vez

introduzem neste forças de compressão. As forças de suporte do tabuleiro são transmitidas pelos tirantes às torres que, por sua vez, as encaminham por compressão até às fundações. Na Figura 2.9. apresenta-se um esquema do funcionamento estrutural de uma ponte de tirantes.

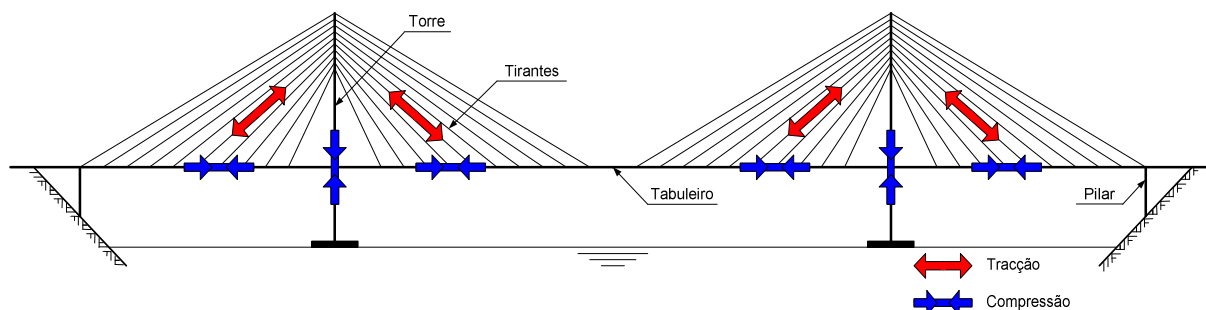


Figura 2.9 – Esquema de funcionamento estrutural de uma ponte de tirantes (adaptado de (Pedro, 2007))

Tal como já foi apresentado, as soluções estruturais para as primeiras pontes de tirantes eram constituídas por um pequeno número de tirantes que permitiam vencer vãos maiores sem a utilização de pilares intermédios. Desta forma, o tabuleiro possuía poucos pontos de apoio, pelo que era necessário utilizar tabuleiros rígidos e com grandes secções transversais levando a que, conseqüentemente, também se utilizassem tirantes com grandes secções transversais.

A utilização de tirantes com grandes secções transversais colocava dificuldades na forma de os ancorar ou aquando da sua eventual substituição. Desta forma, evoluiu-se para o sistema de suspensão múltipla em que se utiliza um grande número de tirantes com pequenos espaçamentos (entre 7 e 15 m) o que garante um apoio praticamente contínuo do tabuleiro. Tendo em conta que os momentos flectores no tabuleiro dependem do espaçamento entre tirantes, a utilização de pequenos espaçamentos conduz a menores momentos flectores sendo por isso possível utilizar tabuleiros com secções transversais de menor altura.

Nesta solução, as forças transmitidas pelos tirantes são menores, pelo que é possível utilizar ancoragens de menores dimensões e tirantes com menores secções transversais facilitando, deste modo, a sua instalação, ancoragem e eventual substituição. Na solução de suspensão múltipla é possível utilizar tabuleiros mais esbeltos, por conseguinte mais leves, mais fáceis de construir e permitindo a execução de maiores vãos. Esta solução tornou ainda mais vantajosa do ponto de vista económica a ponte de tirantes pois, como é referido em (Walther *et al.*, 1999), o aumento do custo por m^2 do tabuleiro em função do vão é menor do que em qualquer outro tipo de ponte.

Existe uma grande diversidade de soluções estruturais adoptadas na construção das pontes de tirantes, em particular para pequenos e médios vãos. No entanto, no que respeita à configuração longitudinal, e para pontes com médios e grandes vãos, uma tipologia tem sido

quase sempre adoptada. Esta tipologia caracteriza-se por uma ponte com configuração longitudinal simétrica, com três vãos e duas torres, em que o tabuleiro é totalmente de aço, de betão armado pré-esforçado, ou misto aço-betão (Pedro, 2010).

A relação entre o vão central e os vãos laterais influencia significativamente a variação de tensão nos últimos tirantes de retenção durante a circulação de sobrecargas. Quando as sobrecargas actuam nos vãos laterais originam reduções de tensão e quando actuam no vão central produzem aumentos de tensão. Vãos laterais mais longos originam maiores amplitudes de variação das tensões. Para manter estas variações dentro dos limites de fadiga definidos para os cabos e para as ancoragens é usual, como regra de pré-dimensionamento, definir o comprimento dos vãos laterais entre os 40% e 45% do comprimento do vão central, podendo no limite ser 50%. Para tabuleiros de betão, como são mais pesados, as variações de tensão devido às sobrecargas são menores e é possível adoptar vão laterais com maior comprimento (Leonhardt, 1987).

Esta solução pode caracterizar-se ainda por apresentar (Figura 2.10) ou não (Figura 2.11) pilares de transição nos vãos laterais. A utilização de dois ou três pilares intermédios nos vãos laterais permite atenuar as variações de tensão referidas. Em pontes de grande vão e para fazer face às forças de tracção geradas nos apoios do vão lateral quando as sobrecargas actuam no vão central é usual utilizar secções transversais do tabuleiro mais pesadas nos vãos laterais.



Figura 2.10 – Ponte Vasco da Gama (Structurae, 2013)



Figura 2.11 – Ponte Sunshine Skyway (Structurae, 2013)

Uma variante, pouco comum, desta solução caracteriza-se pela adopção de vãos laterais muito curtos, com comprimento entre 20% a 30% do comprimento do vão central. Para fazer face às elevadas forças de tracção transmitidas pelos tirantes de retenção utilizam-se, nas extremidades do tabuleiro, grandes contrapesos apoiados no terreno. Este facto faz com que as extremidades do tabuleiro estejam fixas, pelo que é necessário adoptar uma junta de dilatação a meio-vão da ponte para acomodar as deformações axiais e as rotações em virtude das variações de temperatura e dos efeitos diferidos do betão. Um exemplo desta concepção é patente na ponte Barrios de Luna, com 440 m de vão central, na qual foi necessário utilizar vãos laterais muito curtos, com apenas 66,74 m e contrapesos de 32 m, para as torres ficarem fora dos limites da albufeira (Figura 2.12).



Figura 2.12 – Ponte Barrios de Luna (Structurae, 2013)

Outra concepção estrutural adoptada no arranjo longitudinal de pontes de tirantes caracteriza-se por ter apenas uma torre. Esta solução é mais utilizada em pontes de pequeno e médio vão. Dentro desta solução pode ter-se um vão principal compensado por um vão lateral com pilares intermédios, no qual são ancorados os tirantes (Figura 2.13) ou um vão principal atirantado com os tirantes de retenção ligados a blocos de ancoragem exteriores (Figura 2.14).



Figura 2.13 – Ponte Knie (Structurae, 2013)



Figura 2.14 – Ponte Rainha Santa Isabel (Panoramio, 2013)

As pontes de tirantes de vãos múltiplos podem considerar-se como um terceiro tipo de configuração longitudinal. São exemplos desta solução o Viaduto de Millau em França (Figura 2.15) e a ponte de Rion-Antirion na Grécia (Figura 2.16).



Figura 2.15 – Viaduto de Millau (Structurae, 2013)



Figura 2.16 – Ponte de Rion-Antirion (Structurae, 2013)

2.3.2. Sistemas de atirantamento

A escolha do sistema de atirantamento é um dos aspectos fundamentais no projecto de pontes de tirantes, na medida em que influencia não só o comportamento da estrutura como também condiciona o processo construtivo e os custos da obra, dado que os tirantes representam tipicamente entre 20% a 30% do custo total de uma ponte atirantada. No que respeita ao arranjo dos tirantes na direcção longitudinal podem referir-se as configurações em leque, harpa e semi-harpa, representadas esquematicamente na Figura 2.17.

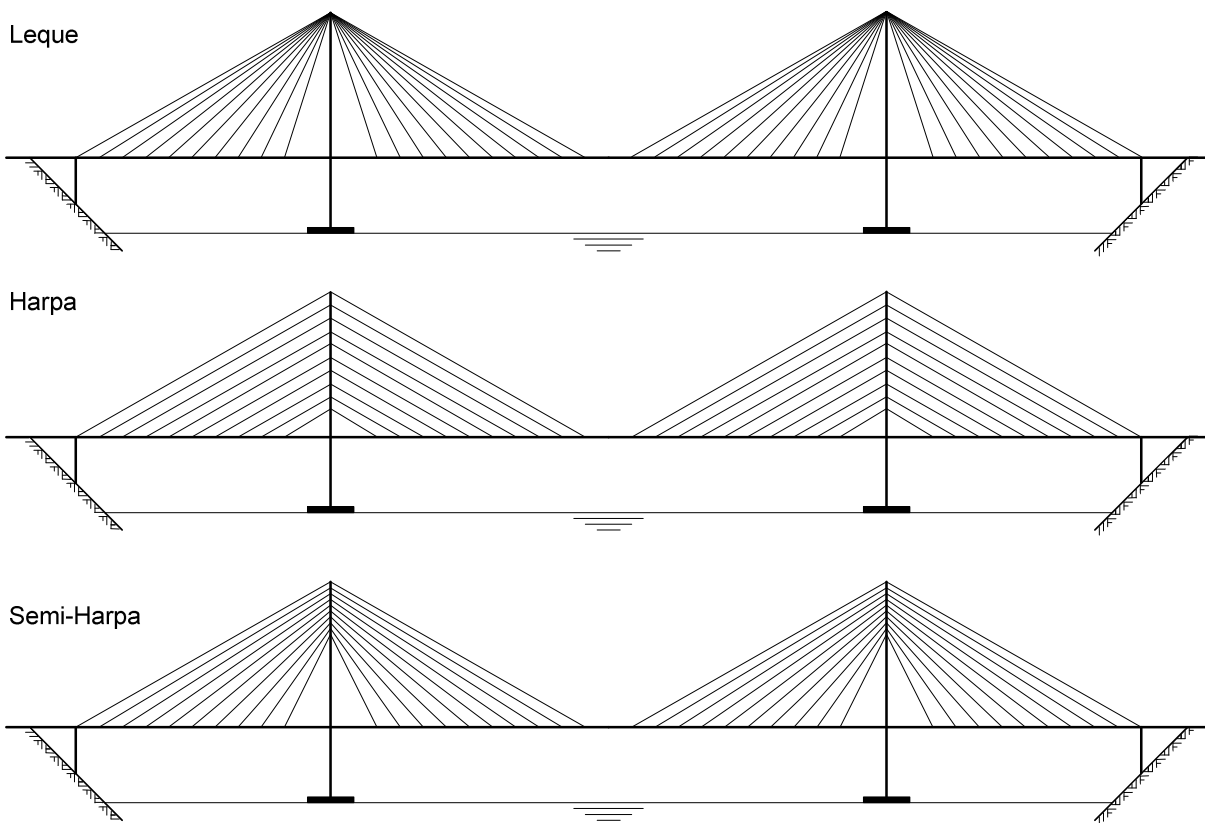


Figura 2.17 – Configuração longitudinal do sistema de atirantamento

Nas primeiras pontes de tirantes e em pontes de pequeno e médio vão foi utilizado o sistema de atirantamento em leque. Este sistema caracteriza-se pelo facto dos tirantes serem concorrentes no topo das torres. Esta solução é estruturalmente eficiente pois quanto maior for o ângulo formado pelos tirantes com a horizontal menor a força instalada e, em princípio, menor a quantidade total de aço em tirantes. No entanto, esta configuração levanta problemas construtivos na ancoragem dos tirantes no topo da torre. Para além disso, apresenta ainda a desvantagem de solicitar a torre apenas no seu topo, e sem qualquer apoio adicional ao longo da altura. Em condições de serviço, um eventual desequilíbrio de forças transmitidas pelos tirantes ao topo da torre conduzirá a elevados momentos flectores na base, de primeira e de

segunda ordem. Assim, embora a configuração em leque seja geralmente considerada como a mais económica em termos da quantidade de aço dos tirantes (Podolny e Scalzi, 1986; Troitsky, 1988) não tem sido frequentemente utilizada nas grandes pontes de tirantes. Para além disso, esta solução é geralmente considerada menos atractiva do ponto de vista estético devido ao efeito óptico de cruzamento dos tirantes, dependendo deste aspecto, contudo, da localização do observador (Walther *et al.*, 1999).

Nas primeiras pontes de tirantes, o sistema de atirantamento em harpa foi utilizado como alternativa ao sistema em leque. Aquele caracteriza-se pelo facto dos tirantes serem todos paralelos entre si. A distribuição dos tirantes ao longo da altura da torre facilita a pormenorização construtiva das ancoragens e fornece mais apoios ao longo da altura da torre. No entanto, quando as torres não têm grande altura é uma solução pouco económica pois requer maior quantidade de aço nos tirantes devido à menor inclinação destes. Esta solução é considerada esteticamente superior pois confere grande regularidade à estrutura. Ao observar a ponte obliquamente os cabos cruzam-se sempre num ângulo constante (Walther *et al.*, 1999).

Com a evolução para os sistemas de suspensão múltipla surgiu uma solução intermédia entre as duas anteriores, a configuração em semi-harpa ou semi-leque. Nesta configuração as ancoragens dos tirantes são distribuídas numa certa altura a partir do topo da torre. Deste modo, facilita-se a construção das ancoragens relativamente à solução em leque e utilizam-se tirantes com maior inclinação do que na solução em harpa. Este arranjo dos tirantes tem vindo a ser progressivamente o mais adoptado na construção das modernas pontes de tirantes pois estabelece um balanço equilibrado entre os requisitos de funcionamento estrutural, económicos e estéticos.

No que respeita ao arranjo dos tirantes na direcção transversal, têm sido adoptados um ou dois planos de tirantes, sendo rara a solução com três planos de tirantes. A escolha do número de planos de tirantes está intimamente relacionada com a forma da secção transversal do tabuleiro e também com a geometria das torres. A adopção de apenas um plano de tirantes (suspensão central) apresenta vantagens do ponto de vista estético pois ao observar a ponte nunca haverá cruzamento de tirantes o que em conjunto com torres esbeltas garante uma elegância superior à estrutura do que se forem usados dois planos de suspensão. No entanto, esta opção requer uma largura adicional do tabuleiro para permitir a ancoragem dos tirantes e o atravessamento da torre. Para além disso, como os tirantes apenas equilibram as cargas verticais do tabuleiro, a resistência à torção tem que ser necessariamente garantida pelo

tabuleiro, pelo que deve ser utilizada uma secção transversal em caixão, uni ou multicelular, apoiado ou monolítico com os pilares.

Em obras com vãos superiores a 400 m têm sido habitualmente utilizados dois planos de suspensão (suspensão lateral), podendo estes ser verticais ou oblíquos. A suspensão lateral permite equilibrar as cargas verticais simétricas e através do binário formado pelos tirantes equilibrar as sobrecargas assimétricas. Esta solução possibilita uma maior versatilidade na escolha da geometria do tabuleiro podendo utilizar-se um tabuleiro mais esbelto e menos resistente à torção. A utilização de um tabuleiro em laje vigada mais leve do que um equivalente com secção em caixão torna esta solução mais atractiva do ponto de vista económico. De referir ainda que o sistema de suspensão lateral pode ainda ser classificado como parcial ou total. No sistema de suspensão parcial o tabuleiro é suspenso pelos tirantes e apoia-se também nas torres. No caso da suspensão total, o tabuleiro encontra-se apenas suspenso nos tirantes, apresentando esta solução diversas vantagens do ponto de vista estrutural. O apoio proporcionado pelas torres ao tabuleiro é muito mais rígido do que o garantido pelos tirantes, pelo que não apoiando o tabuleiro nas torres elimina-se a ocorrência de momentos flectores negativos muito superiores aos verificados nas secções de ancoragem dos tirantes no tabuleiro. Quando sujeito à acção sísmica um tabuleiro com suspensão total comporta-se aproximadamente como um pêndulo suspenso nos tirantes não havendo transmissão de esforços significativos às torres e às fundações.

Esta solução apresenta como desvantagem a existência de maiores deslocamentos do tabuleiro, o que não é importante em pontes rodoviárias mas pode ser impeditivo da utilização desta solução em pontes ferroviárias, devido às elevadas forças longitudinais introduzidas pela frenagem e arranque das composições. Para além disso, para garantir a estabilidade do tabuleiro durante a fase construtiva, a utilização da suspensão total requer cuidados especiais de fixação do tabuleiro às torres (Pedro, 2010).

2.3.3. Geometria das torres

As torres são os elementos estruturais com desenvolvimento vertical onde estão ancorados os tirantes que suspendem o tabuleiro, podendo também servir de apoio a este. Sendo elementos submetidos predominantemente a esforços de compressão e tendo em conta razões económicas, não só de construção mas também de manutenção, actualmente a escolha recai em torres de betão em detrimento de torres em aço. A altura da torre acima do tabuleiro é normalmente entre 20% a 25% do comprimento do vão central, quando se usam duas torres,

e entre 40% a 50% do vão principal quando se adopta apenas uma torre (Leonhardt, 1987; Hewson, 2003).

As torres das pontes de tirantes podem ter geometrias diversas, como por exemplo: torres com fuste único vertical (Figura 2.18a) ou inclinado (Figura 2.14); torres com dois fustes (Figura 2.18b); torres em pórtico transversal (Figura 2.10) e/ou longitudinal (Figura 2.19); torres em “pirâmide” (Figura 2.16); torres em forma de A (Figura 2.20) e Y invertido (Figura 2.21); torres em diamante (Figura 2.7) e duplo diamante.

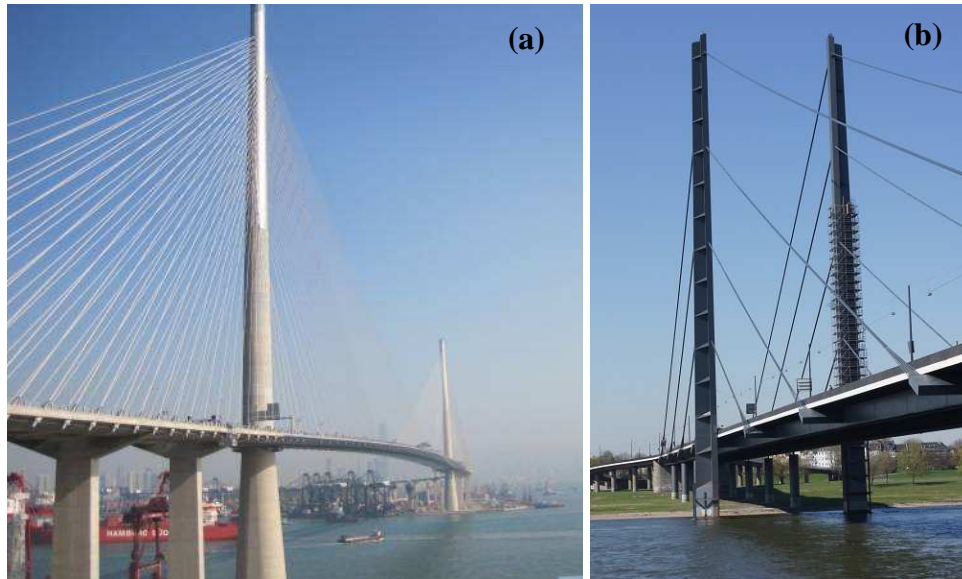


Figura 2.18 – Ponte de Stonecutters (a) e ponte Knie (b) (Structurae, 2015)



Figura 2.19 – Viaduto da Praça das Flores (Grid, 2015)



Figura 2.20 – Ponte Severin (Structurae, 2015)



Figura 2.21 – Ponte Internacional do Guadiana (Wikimedia, 2015)

A definição da geometria das torres depende dos sistemas de atirantamento (leque, harpa ou semi-harpa) e de suspensão (lateral ou central; parcial ou total) adotados. É ainda necessário ter também em atenção a configuração longitudinal (ponte com três vãos e duas torres; ponte assimétrica apenas com uma torre e um vão principal; ponte de vãos múltiplos) e garantir o espaço para ancoragem e tensionamento dos tirantes no interior da torre. Para além destes aspectos, e devido à enorme influência da geometria das torres na estética de uma

ponte de tirantes, normalmente a configuração final das torres é desenvolvida com base em considerações estéticas.

2.3.4. Geometria e materiais do tabuleiro

A escolha da secção transversal do tabuleiro assume também grande importância no processo de concepção estrutural. Esta escolha condicionará o peso próprio do tabuleiro, o que tem implicações no dimensionamento dos restantes elementos estruturais. Da forma da secção transversal do tabuleiro depende o comportamento aerodinâmico deste elemento.

Nas primeiras pontes de tirantes utilizaram-se tabuleiros pouco esbeltos constituídos na generalidade por duas vigas longitudinais metálicas laterais que suportavam uma laje de betão ou uma laje metálica ortotrópica. No entanto, e tal como já foi referido, a evolução para sistemas de suspensão múltipla permitiu a utilização de tabuleiros mais esbeltos dado que a diminuição do espaçamento entre os pontos de ancoragem dos tirantes no tabuleiro permite ter menores momentos flectores no tabuleiro.

Os tabuleiros das pontes de tirantes podem ser em aço, em betão armado pré-esforçado ou mistos aço-betão, permitindo a classificação da ponte consoante o material utilizado. Walther *et al.* (1999) indicam os seguintes intervalos para os valores do peso próprio do tabuleiro em função do material utilizado na sua construção:

- Tabuleiros em aço 2,5 a 3,5 kN/m²;
- Tabuleiros mistos aço-betão 6,5 a 9,0 kN/m²;
- Tabuleiros em betão armado pré-esforçado 10 a 15 kN/m².

O peso do tabuleiro, que condicionará não só a quantidade de aço dos tirantes mas também as dimensões das torres e das fundações, os custos do material e da execução, deve ser ponderado para avaliar qual a solução mais económica para a escolha do material do tabuleiro. Assim, os tabuleiros de betão são utilizados na construção de pontes de tirantes com vão principal até aos 400 m. Entre os 400 m e os 600-700 m os tabuleiros mistos são preferíveis. Acima destes valores têm sido utilizados tabuleiros metálicos.

Os momentos flectores longitudinais do tabuleiro dependem do seu peso e do espaçamento entre tirantes, pelo que este parâmetro está também relacionado com o material a adoptar na sua execução. Deste modo, para tabuleiros em betão o espaçamento entre tirantes está geralmente compreendido entre 6 m e 9 m. Para tabuleiros mistos é possível aumentar o espaçamento para valores entre 9 m e 16 m e, no caso de tabuleiros em aço, podem usar-se espaçamentos entre 15 m e 20 m (Pedro, 2010).

A geometria da secção transversal do tabuleiro depende do número de planos de suspensão ou, mais concretamente, de se a suspensão é lateral ou central. A escolha da suspensão central implica a utilização de uma secção em caixão. A adopção da suspensão lateral permite utilizar secções em laje vigada ou mesmo em laje esbelta, podendo continuar a ser utilizadas secções em caixão.

No caso particular dos tabuleiros executados em betão, as soluções em laje vigada apresentam normalmente alturas entre 1,4 e 3,0 m e os tabuleiros em caixão entre 2,5 e 4,5 m, dependendo estes valores do espaçamento entre tirantes, da largura do tabuleiro e dos valores das sobrecargas (Hewson, 2003).

Apresentam-se de seguida alguns exemplos das soluções adoptadas para a secção transversal de tabuleiros em betão em pontes de tirantes. Os tabuleiros em caixão têm sido utilizados não unicamente em pontes com sistema de suspensão central mas também com suspensão lateral. No caso da suspensão central pode referir-se a ponte de Brotonne, cuja secção transversal do tabuleiro se encontra representada na Figura 2.22. Para um vão central de 320 m, utilizou-se uma secção transversal em betão armado pré-esforçado com geometria em caixão unicelular com 19,20 m de largura, 3,80 m de altura (o que corresponde a uma esbelteza¹ de 84) e escoras inclinadas para auxiliar na transmissão da força dos tirantes.

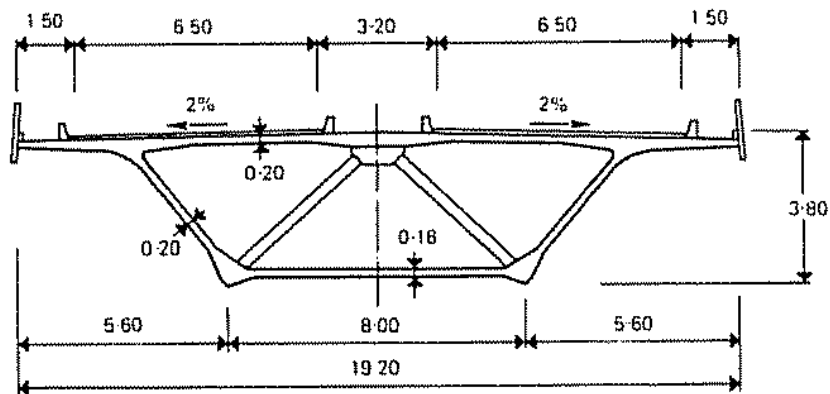


Figura 2.22 – Esquema da secção transversal do tabuleiro da ponte de Brotonne (Walther *et al.*, 1999)

Na ponte de Pasco-Kennewick, com sistema de suspensão lateral, foi utilizada uma secção transversal com caixões triangulares laterais ligados por uma laje de betão e vigas transversais nas secções de ancoragem dos tirantes (Figura 2.23). Na construção utilizaram-se aduelas totalmente pré-fabricadas para facilitar o processo construtivo e eliminar parte dos efeitos diferidos da fluência e retracção do betão.

¹ A esbelteza do tabuleiro é definida como a razão entre o comprimento do vão principal e a altura da secção transversal do tabuleiro.

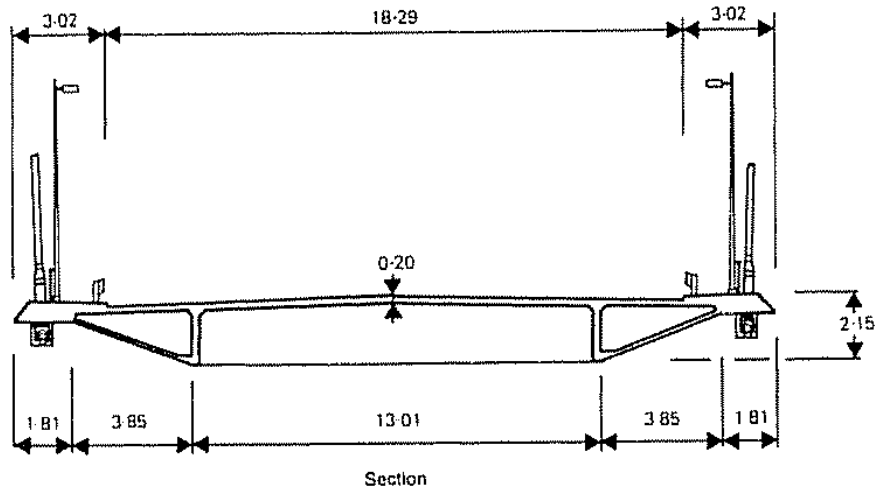


Figura 2.23 – Esquema da secção transversal do tabuleiro da ponte de Pasco-Kennewick (Walther *et al.*, 1999)

Na ponte Barrios de Luna, também com suspensão lateral, foi utilizado um tabuleiro em caixão, neste caso tricelular com 22,5 m de largura e apenas 2,5 m de altura para um vão principal de 440 m (Figura 2.24), o que representa uma esbelteza de 176.

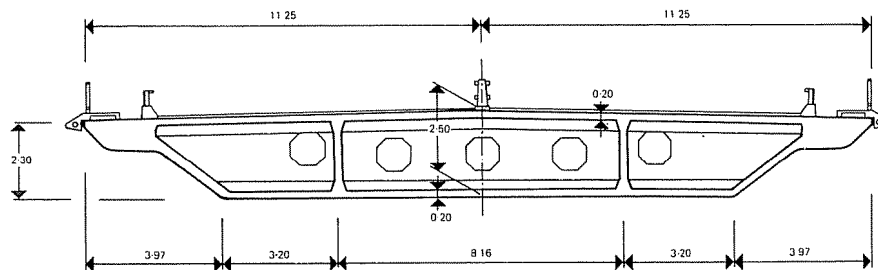


Figura 2.24 – Esquema da secção transversal do tabuleiro da ponte Barrios de Luna (Walther *et al.*, 1999)

Na ponte de Skarnsund, que apresenta o maior vão atirantado em betão, utilizou-se também uma secção transversal em caixão num sistema de suspensão lateral. Neste caso a secção é em caixão triangular bicelular (Figura 2.25) com altura máxima de 2,15 m para um vão central de 530 m, o que corresponde a uma esbelteza de 247.

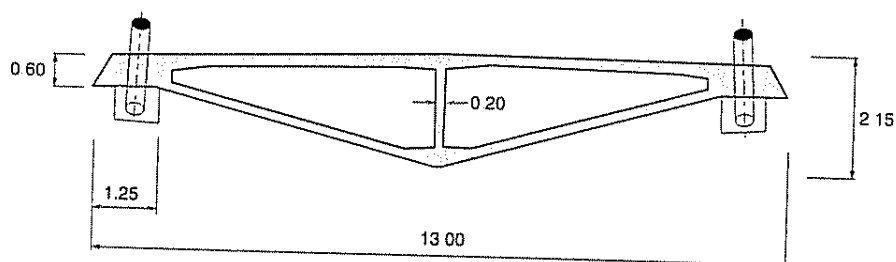


Figura 2.25 – Esquema da secção transversal do tabuleiro da ponte de Skarnsund (Walther *et al.*, 1999)

A utilização de secções transversais em laje vigada tem sido outra das soluções adoptadas nos tabuleiros de pontes atirantadas de betão. Esta solução permite conceber soluções leves e esbeltas, combinando desta forma a economia e a estética. Na Figura 2.26 apresenta-se, como exemplo, um esquema da secção transversal do tabuleiro da ponte Vasco da Gama em Lisboa. Este tabuleiro tem 30,90 m de largura e é constituído por uma laje de betão com 0,25 m de espessura que apoia em duas vigas longitudinais em betão armado pré-esforçado com 2,6 m de altura e 1,7 m de largura e em vigas transversais espaçadas 4,425 m. Para reduzir o peso do tabuleiro utilizaram-se vigas transversais metálicas. Com 420 m de vão central, este tabuleiro tem uma esbelteza de 162.

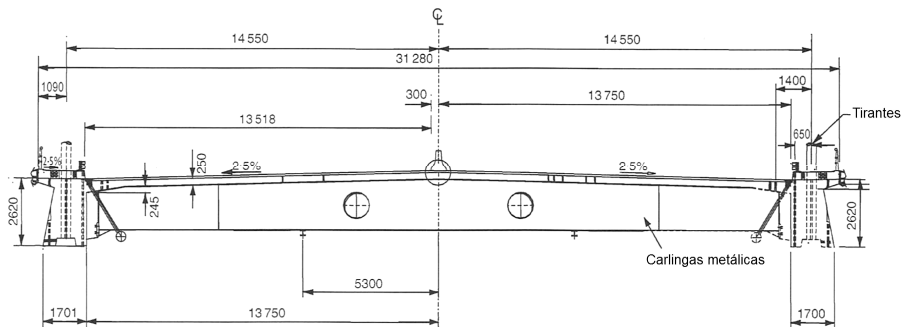


Figura 2.26 Esquema da secção transversal do tabuleiro da ponte Vasco da Gama (adaptado de (Hewson, 2003))

Tirando o máximo partido do sistema de suspensão múltipla foi possível conceber soluções com tabuleiro ainda mais esbelto evoluindo para secções transversais em laje esbelta. Como exemplo pode referir-se a solução adoptada para o tabuleiro da ponte de Diepoldsau na Suíça, concluída em 1985. Esta obra possui 97 m de vão central e um tabuleiro de 14,5 m de largura com uma laje de apenas 0,45 m de espessura média suspenso por tirantes com espaçamento de 6 m (Figura 2.27).

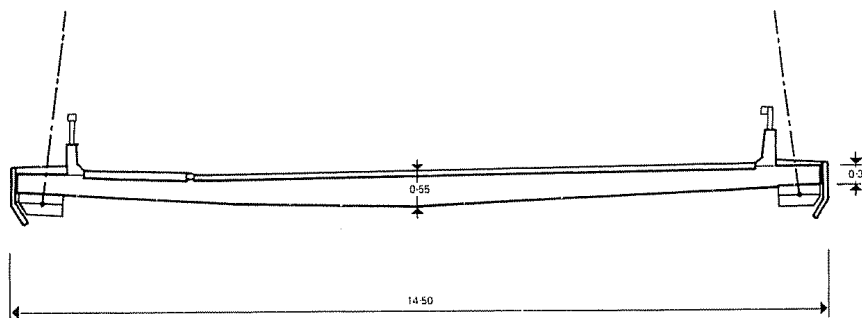


Figura 2.27 – Esquema da secção transversal do tabuleiro da ponte Diepoldsau (Walther *et al.*, 1999)

2.4. Projecto de pontes de tirantes

Segundo Marcus Vitruvius, um engenheiro militar e arquitecto que viveu no tempo do imperador romano Júlio César, a arte de construir caracteriza-se por três princípios fundamentais: *firmitas* (resistência e segurança), *utilitas* (funcionalidade) e *venustas* (elegância/beleza). Mais de vinte séculos depois estes princípios continuam válidos, embora os condicionamentos económicos assumam actualmente uma maior importância. Assim, para um projecto de sucesso é necessário garantir não só a segurança, a funcionalidade e a economia mas também atingir uma boa expressão estética (Câncio Martins, 1996).

O projecto de uma ponte de tirantes é um processo iterativo que envolve múltiplas tarefas e em que se procura, através da alteração de determinados parâmetros do sistema estrutural, a solução que melhor satisfaça um conjunto de critérios relacionados com a segurança, utilização e economia. Segundo Walther *et al.* (1999) este projecto desenvolve-se em duas fases, iniciando-se com a concepção estrutural através do estabelecimento da configuração longitudinal, do sistema de atirantamento e suspensão, das secções transversais das torres e do tabuleiro e procedendo ao pré-dimensionamento dos tirantes. Numa segunda fase procede-se a uma análise mais detalhada, considerando as acções permanentes e as sobrecargas, tendo em vista o dimensionamento dos diversos elementos para garantir a verificação dos estados-limite últimos e de utilização.

No âmbito do projecto de pontes de tirantes deve prestar-se especial atenção a determinados aspectos, nomeadamente o estudo do seu comportamento não-linear para acções estáticas resultante da consideração de grandes vãos e de tabuleiros muito flexíveis, devido à não-linearidade geométrica dos tirantes, do tabuleiro e das torres e o estudo da resposta face a acções dinâmicas como o vento ou os sismos. Para além destes aspectos, a análise estrutural deve permitir também simular o faseamento construtivo, pois o mesmo condiciona a geometria e as distribuições de esforços internos na estrutura, devendo ser cuidadosamente estudado para se atingirem as condições estáticas e geométricas pretendidas para a estrutura no final da construção. No caso particular das pontes executadas em betão devem ainda ser considerados os efeitos diferidos. Por conseguinte, os modelos de análise estrutural devem ter em conta todas as acções e efeitos relevantes de modo a representar-se convenientemente o comportamento da estrutura.

As pontes de tirantes apresentam elevado grau de hiperstaticidade, sendo a rigidez da estrutura condicionada pelas forças nos tirantes, pelo que os deslocamentos e os esforços internos não podem ser calculados sem a definição das secções dos tirantes e das forças de

pré-esforço neles instaladas. Desta forma, a determinação das forças nos tirantes é um aspecto distintivo do projecto de pontes de tirantes, quando comparado com o de outros tipos de pontes. Normalmente procura-se que estas forças conduzam a uma distribuição uniforme de momentos flectores para as cargas permanentes similar à que se obteria se o tabuleiro fosse uma viga contínua rigidamente apoiada nos pontos de ancoragem dos tirantes no tabuleiro (Walther *et al.*, 1999; Hewson, 2003), como se ilustra na Figura 2.28.

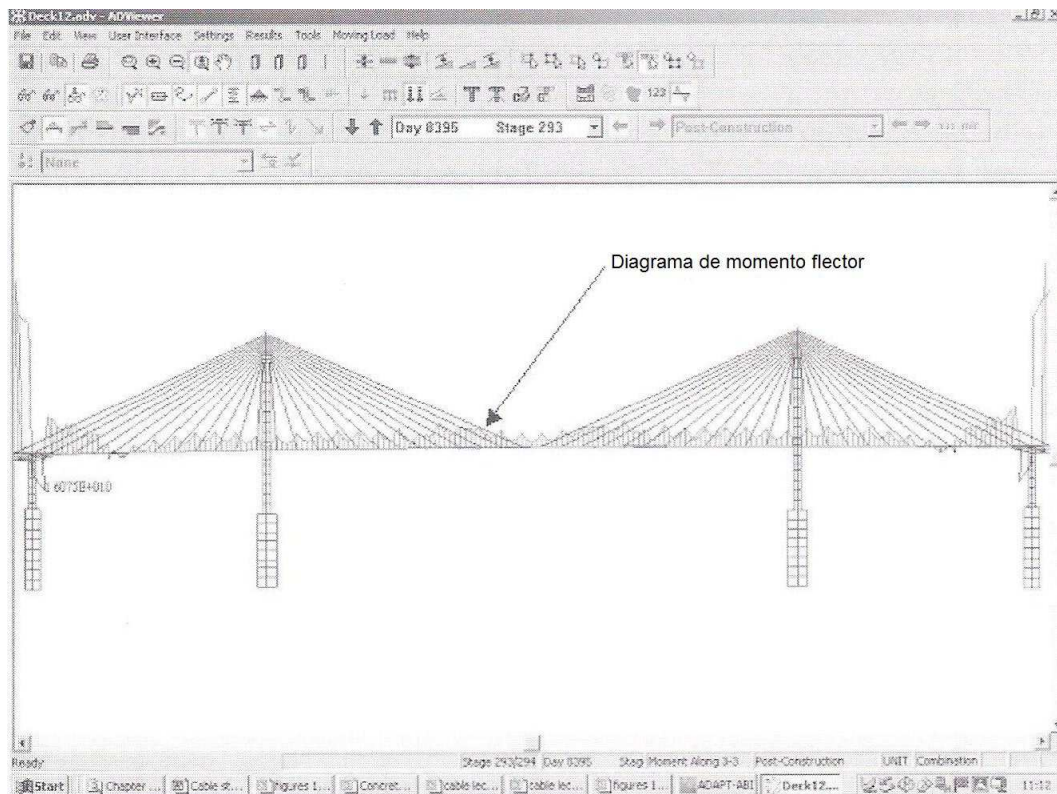


Figura 2.28 – Diagrama de momento flector para as cargas permanentes (adaptado de (Hewson, 2003))

Para além da determinação das forças de pré-esforço para a condição de ponte completa sujeita a carga permanente, no projecto destas estruturas, assume também especial importância o estudo das forças de instalação dos tirantes. Estas permitem controlar a geometria e os esforços internos no decorrer do processo construtivo, a fim de se garantir as condições pretendidas no final da construção.

De salientar ainda que no decorrer do processo construtivo deve prestar-se atenção à monitorização e correcção de eventuais desvios que possam ocorrer durante o mesmo. Estes desvios podem dever-se a erros na modelação e análise estrutural e/ou erros na fabricação e montagem da estrutura. Assim, deve proceder-se à monitorização contínua das fases construtivas para detectar eventuais erros e dispor de dados para ajustar os modelos numéricos, de modo a minimizar os desvios entre os valores previstos pelos modelos e os

observados em obra. Os desvios observados poderão ser corrigidos através do ajustamento das forças nos tirantes e/ou da introdução de contraflechas na execução dos segmentos do tabuleiro.

Como refere Santos (2002) a observação e monitorização do comportamento da estrutura de uma ponte envolve a medição de diversas grandezas. Neste âmbito são levados a cabo ensaios laboratoriais para caracterização mecânica do betão, determinando a tensão de rotura à compressão e o módulo de elasticidade. É efectuada a determinação da retracção e fluência do betão “*in situ*”, constituindo a melhor forma de ajustar os modelos numéricos ao efectivo desenvolvimento destes fenómenos. Para este efeito utilizam-se pares de provetes betonados em simultâneo com a estrutura, e com o mesmo betão, que permanecem na obra de forma a ficarem sujeitos a idênticas condições ambientais. Procedem-se também à medição de deslocamentos (verticais, horizontais e rotações), de extensões, de temperaturas e das forças nos tirantes.

No que respeita à instrumentação utilizada, a medição de deslocamentos verticais é efectuada com recurso a meios ópticos e a sistemas de nivelamento hidrostático. Os deslocamentos horizontais, relevantes no caso das torres, podem ser avaliados através de prumo óptico, fio-de-prumo associado a coordenómetro ou distanciómetro acoplado a um teodolito. As rotações são medidas com clinómetros mecânicos de bolha-de-ar, de cordas vibrantes ou eléctricos. A medição de extensões é efectuada através de extensómetros eléctricos de resistência e extensómetros de corda vibrante e as temperaturas são medidas com pares termoeléctricos e termómetros de resistência eléctrica. A medição das forças nos tirantes pode ser efectuada através do método da vibração, da utilização de anel dinamométrico e da instrumentação de alguns cordões do tirante com células de carga equipadas com extensómetros eléctricos de resistência.

A área da observação de estruturas de Engenharia Civil tem experimentado recentemente diversos desenvolvimentos, quer na automatização da aquisição de dados, quer no desenvolvimento e no aperfeiçoamento dos instrumentos de medida. Neste sentido, para além da instrumentação mais clássica anteriormente referida, dispõe-se actualmente de sensores de fibra óptica, nomeadamente os sensores de Bragg e os sensores de Fabry-Perot para a medição da temperatura e da extensão (Félix, 2004).

A monitorização e observação do comportamento da estrutura devem estender-se à fase de serviço podendo, mais tarde, recorrer-se ao ajustamento das forças nos tirantes para correcções de deslocamentos que possam surgir em virtude dos efeitos diferidos do betão.

2.5. Métodos construtivos

As pontes de tirantes têm sido construídas utilizando diversos métodos. A escolha do método construtivo a utilizar é condicionada por diversos factores como as dimensões da estrutura, as condições no local da obra e o custo das diversas soluções possíveis.

O método dos avanços sucessivos é o método preferencial para a construção de pontes de tirantes de grande vão, dado que é rápido, seguro e relativamente económico. Para pontes de pequeno e médio vão têm sido utilizados outros métodos, nomeadamente, a construção com apoios provisórios, a construção por rotação e a construção por lançamento incremental (Cruz, 1997; Grabow, 2004; Mueller-Haagen, 2005; Pedro, 2007).

Ao contrário do método dos avanços sucessivos, os restantes métodos caracterizam-se pelo facto dos tirantes serem instalados numa única operação. Assim, é possível reduzir o número de fases construtivas, o material e o pessoal envolvido na construção e as tarefas de controlo da geometria durante a construção. Por conseguinte, a adopção destes métodos permite tornar mais competitiva, em termos económicos, a solução atirantada para pontes de pequeno e médio vão comparativamente com outros tipos de pontes.

Apresentam-se, de seguida, os métodos construtivos utilizados na execução de pontes de tirantes e referem-se as suas características principais.

2.5.1. Construção com apoios provisórios

Na construção com apoios provisórios o tabuleiro é executado sendo suportado por um cimbreiro. Os tirantes podem ser todos tensionados numa única operação no final da construção do tabuleiro. Após o tensionamento dos tirantes garante-se o apoio necessário para o tabuleiro e o cimbreiro pode ser retirado. Este método não exige uma análise especial pois as forças nos tirantes são determinadas, a menos da consideração do comportamento não-linear dos tirantes, pelas componentes das reacções de apoio segundo a direcção dos tirantes considerando o tabuleiro como uma viga contínua em que os apoios se localizam nos pontos de ancoragem dos tirantes. As grandes vantagens deste método são o facto de permitir a construção contínua do tabuleiro de uma extremidade à outra e de a geometria do tabuleiro e as forças nos tirantes serem controlados facilmente. A principal desvantagem está relacionada com as condições do local da construção. Assim, não pode ser utilizado quando o espaço sob o tabuleiro não pode ser obstruído. Também na construção de grandes vãos, no atravessamento de vales profundos ou grandes linhas de água este método não é economicamente viável.

A construção com apoios provisórios tem sido por vezes utilizada em conjunto com o método dos avanços sucessivos, sendo os vãos laterais executados através de apoios provisórios e o vão central através do método dos avanços sucessivos, como por exemplo na ponte de Stonecutters (Figura 2.29).



Figura 2.29 – Ponte de Stonecutters – construção do vão lateral com apoios provisórios (Structurae, 2015)

2.5.2. Construção por rotação

A construção por rotação é uma alternativa à construção com apoios provisórios se esta for inviável, como por exemplo para o atravessamento de um rio. Deste modo, é possível construir uma ou duas consolas nas margens, paralelamente ao rio e sobre apoios provisórios. Estas são atirantadas e o tensionamento dos tirantes origina o levantamento do tabuleiro dos apoios provisórios e permite rodá-las em torno das respectivas torres para a posição final. Este método foi aplicado na construção da ponte de Ben Ahin (Bélgica) executada em betão armado pré-esforçado (Figura 2.30).



Figura 2.30 – Ponte de Ben Ahin – construção por rotação (Cremer, 1990)

2.5.3. Construção por lançamento incremental

A técnica construtiva de lançamento incremental também tem sido usada na construção de algumas pontes de tirantes. Neste método a superestrutura ou parte dela é construída “*in-situ*” atrás de um dos encontros. Posteriormente, a estrutura completa ou parcialmente completa é empurrada horizontalmente para a posição pré-estabelecida. É habitual utilizar uma estrutura metálica auxiliar na extremidade livre do tabuleiro para, através de apoios provisórios, reduzir o vão livre do tabuleiro em consola. Tal como nos métodos anteriores, os tirantes podem ser tensionados numa única operação após a construção do tabuleiro. Em relação aos métodos anteriores, este método apresenta a vantagem de, apesar de necessitar de apoios provisórios, não necessitar de cimbra para a execução do tabuleiro. Contudo, e tal como eles, está geralmente limitado à construção de pontes de pequeno e médio vão.

Como exemplo da construção por lançamento incremental pode referir-se o viaduto de Millau em França, concluído em 2005. Trata-se de uma ponte atirantada com vãos múltiplos de 342 m, totalizando 2460 m de comprimento. Na sua execução o tabuleiro foi lançado a partir de ambos os encontros utilizando como apoios os pilares e apoios provisórios a meio dos vãos, como se ilustra na Figura 2.31. Para conseguir vencer vãos de lançamento de 171 m, nos troços centrais do tabuleiro procedeu-se à montagem das torres, à instalação de seis tirantes de cada lado e à utilização de um nariz de lançamento com 50 m de comprimento (Pedro, 2010).



Figura 2.31 – Viaduto de Millau – construção por lançamento incremental (Structurae, 2015)

2.5.4. Método dos avanços sucessivos

A construção pelo método dos avanços sucessivos consiste no avanço do tabuleiro em consola, a partir das torres para os vãos adjacentes. Esta progressão deve fazer-se de forma tão simétrica quanto possível, por forma a reduzir ao mínimo o desequilíbrio de cargas e consequentemente os momentos flectores resultantes nas torres. Para garantir a estabilidade da estrutura durante o processo construtivo pode ser necessário conceber ligações adicionais.

Na construção de pontes atirantadas de betão, cada segmento do tabuleiro pode ser executado através de betonagem “*in situ*”, com as cofragens suportadas por carros de avanço (Figura 2.32), ou com a colocação de aduelas pré-fabricadas elevadas através de guias (Figura 2.33). Após a construção de cada segmento do tabuleiro são instalados e tensionados os tirantes, servindo o segmento de tabuleiro recém-executado como plataforma à execução do segmento seguinte. O comprimento de cada segmento do tabuleiro corresponde geralmente ao espaçamento entre tirantes.

O método dos avanços sucessivos é o método construtivo por excelência para as pontes de tirantes, permitindo a construção de pontes para vencer grandes vãos e em situações em que não é possível usar apoios provisórios. Este método permite tirar partido das vantagens das pontes de tirantes durante o processo construtivo evitando a ocupação do espaço nos vãos. No entanto, durante a fase de projecto exige uma atenção particular e uma análise detalhada do processo construtivo, devido às não-linearidades na resposta da estrutura e ao facto de os esforços internos e os deslocamentos se alterarem durante o mesmo. Para além disso, durante

a construção requer um cuidado especial de controlo e monitorização do comportamento da estrutura.



Figura 2.32 – Ponte Vasco da Gama – construção por avanços sucessivos com betonagem “in situ”
(GATTEL, 1999)



Figura 2.33 – Ponte Sunshine Skyway – elevação de aduela pré-fabricada (Pedro, 2010)

2.6. Análise estrutural de pontes de tirantes

No projecto de pontes de tirantes, e para uma adequada avaliação da resposta da estrutura, é necessário que a análise estrutural contemple todas as acções consideradas relevantes para o comportamento da mesma. Por conseguinte, e em virtude da revisão

bibliográfica efectuada, apresentam-se de seguida alguns trabalhos relativos à análise estrutural de pontes de tirantes. Começa-se por fazer referência a várias metodologias para a determinação das forças nos tirantes. Posteriormente apresentam-se alguns trabalhos em que, na análise de pontes atirantadas, foram considerados os efeitos diferidos do comportamento do betão e referem-se também metodologias para a análise das fases construtivas. Indicam-se quais os efeitos geometricamente não-lineares mais relevantes e como considerá-los. Faz-se também referência à análise materialmente não-linear, assim como à análise considerando acções dinâmicas.

2.6.1. Determinação das forças nos tirantes

Como se referiu anteriormente a determinação das forças de pré-esforço a aplicar nos tirantes é um aspecto distintivo do projecto de pontes de tirantes quando comparadas com outros tipos de pontes. Na revisão bibliográfica efectuada, e dada a importância desta temática, foi possível identificar um conjunto de trabalhos cujo objectivo principal é a determinação das forças nos tirantes. No entanto, é possível fazer uma distinção entre os trabalhos que recorrem a algoritmos de optimização e os que não utilizam esta via. Deste modo, referem-se de seguida vários métodos de determinação das forças nos tirantes em que não se recorre a algoritmos de optimização. Posteriormente, na secção 2.7.1 apresentam-se os trabalhos de optimização relativos a esta temática.

É prática comum no projecto de pontes de tirantes considerar que, para as acções permanentes, os momentos flectores no tabuleiro devem aproximar-se dos que ocorrem numa viga contínua com vãos correspondentes ao espaçamento entre tirantes (Figura 2.28). Desta forma, garante-se que o tabuleiro e as torres não tenham elevados momentos flectores para as cargas permanentes o que é favorável para minimizar as redistribuições de esforços resultantes dos efeitos diferidos da fluência e retracção do betão (Walther *et al.*, 1999; Chen e Duan, 2000).

Assim, os esforços instalados nos tirantes que equilibram as acções permanentes no tabuleiro de uma ponte de tirantes podem ser obtidos de forma aproximada pelo denominado *método da viga contínua* (Walther *et al.*, 1999). Neste método o tabuleiro é considerado como uma viga contínua com apoios verticais rígidos nos pontos de ancoragem dos tirantes no tabuleiro. Deste modo, a componente vertical do esforço axial instalado em cada tirante deve ser igual à reacção em cada apoio da viga contínua. Para além disso, a escolha adequada das forças nos últimos tirantes de retenção permite garantir que as torres não tenham momentos flectores elevados para as acções permanentes (Walther *et al.*, 1999).

Wang *et al.* (1993a e 1993b) desenvolveram o “*zero displacement method*” em que as forças de pré-esforço nos tirantes são determinadas por um processo iterativo de determinação da configuração deformada da estrutura procurando anular os deslocamentos verticais dos pontos de ancoragem dos tirantes no tabuleiro. Para uma ponte com tabuleiro horizontal, as componentes horizontais das forças nos tirantes têm pequena influência nos momentos flectores no tabuleiro, sendo estes condicionados apenas pelas componentes verticais dessas forças. Neste caso os momentos flectores e os deslocamentos resultantes no tabuleiro são os correspondentes a uma viga contínua equivalente com apoios rígidos em todos os pontos de apoio do tabuleiro nos tirantes e nas torres. O método parte de uma estimativa inicial com valores reduzidos das forças nos tirantes e um ciclo iterativo, utilizando o método de Newton-Raphson, determina o equilíbrio da ponte sujeita às cargas permanentes. A solução assim obtida satisfaz as condições de equilíbrio e de fronteira, contudo, devido aos valores reduzidos das forças nos tirantes, apresenta grandes deslocamentos verticais e momentos flectores elevados. De modo a reduzir os valores dos deslocamentos e a obter uma distribuição de momentos flectores próxima da correspondente à viga contínua equivalente, os valores das forças nos tirantes são actualizados. O processo é repetido até o critério de convergência ser verificado, ou seja, quando os deslocamentos verticais dos pontos de ancoragem do tabuleiro forem suficientemente pequenos.

Neste método as não-linearidades geométricas devidas aos grandes deslocamentos, efeitos de viga-coluna e efeito de catenária dos tirantes são tidas em conta, mas não os efeitos diferidos e as fases construtivas. Para situações em que o tabuleiro não é horizontal, as componentes horizontais das forças nos tirantes provocam momentos flectores adicionais no tabuleiro e mesmo que os deslocamentos dos pontos de ancoragem dos tirantes sejam muito pequenos estes momentos adicionais vão influenciar o comportamento a longo prazo da ponte.

Mais tarde, Wang *et al.* (2004) apresentaram uma evolução do referido método incluindo a análise das fases construtivas pelo método dos avanços sucessivos. A análise das fases construtivas foi implementada considerando quer o método da desmontagem quer o método da montagem.

Virlogeux (1994) desenvolveu o “*método do pêndulo*” baseado em considerações de equilíbrio local da estrutura de modo a obter a geometria final pretendida e em que as compressões nas torres e no tabuleiro estão em equilíbrio com as tracções nos tirantes. Considerando o sistema estático de uma ponte atirantada podem estabelecer-se as equações recursivas de equilíbrio nos pontos de ancoragem dos tirantes no tabuleiro e nas torres, a fim

de determinar os valores das forças nos tirantes que minimizam os esforços de flexão no tabuleiro e nas torres. As equações de equilíbrio de forças nos pontos de ancoragem dos tirantes no vão central permitem determinar as forças instaladas nos tirantes desse vão. Os valores destas forças dependem de parâmetros como os ângulos de inclinação dos tirantes e dos segmentos do tabuleiro com a horizontal, a carga permanente do tabuleiro e o esforço axial de compressão em cada segmento do tabuleiro. A força em cada tirante é dependente do esforço axial no segmento do tabuleiro imediatamente a seguir o que torna estas expressões recursivas. Assim, é necessário admitir uma compressão no segmento de fecho central e a partir daí efectuar o cálculo das forças nos tirantes, do último ao primeiro no vão central e, posteriormente, dos tirantes dos vãos laterais. As forças de instalação dos tirantes dos vãos laterais são obtidas por intermédio das expressões decorrentes do equilíbrio de forças nos pontos de ancoragem dos tirantes nas torres. As forças nos tirantes dos vãos laterais devem ser as necessárias para anular a flexão na secção da torre junto ao tabuleiro. Tal pode ser facilmente conseguido com uma distribuição de cargas no tabuleiro simétrica em relação às torres ou então com a existência de apoios intermédios nos vãos laterais.

Chen *et al.* (2000) apresentaram um método denominado “*force equilibrium method*”. Neste método as forças nos tirantes são determinadas para uma dada geometria do tabuleiro sujeito às acções permanentes. As variáveis a controlar são os momentos flectores em determinadas secções através do ajustamento das forças de pré-esforço nos tirantes. Os valores alvo para os momentos flectores são os correspondentes a considerar o tabuleiro como uma viga contínua com apoios rígidos nos pontos de ancoragem do tabuleiro nos tirantes.

Sabendo que a distribuição de momentos flectores no tabuleiro depende das acções permanentes e das forças nos tirantes, pode escrever-se a seguinte equação de equilíbrio

$$\underline{M}^0 = \underline{A} \cdot \underline{T} + \underline{M}^d \quad (2.1)$$

em que M^0 é um vector de dimensão n que contém os valores alvo dos momentos flectores, A é uma matriz de dimensão $n \times n$ denominada matriz de coeficientes de influência A_{ij} que representam os momentos flectores na secção de controlo i devido a um pré-esforço unitário aplicado no tirante j , T é um vector de dimensão n que contém os valores das forças nos tirantes e M^d é um vector de dimensão n que contém os valores dos momentos flectores nas secções de controlo devido às acções permanentes.

Se as secções de controlo forem bem escolhidas de modo que A seja não singular pode obter-se uma estimativa inicial das forças nos tirantes através da resolução do seguinte sistema de equações lineares

$$\underline{T}^0 = \underline{A}^{-1} \cdot (\underline{M}^0 - \underline{M}^d) \quad (2.2)$$

Os momentos flectores obtidos são apenas estimativas pois não foi tida em conta a interacção entre torres, tirantes e tabuleiro. Estes valores podem ser corrigidos resolvendo a equação

$$\underline{\Delta T}^1 = \underline{A}^{-1} \cdot (\underline{M}^1 - \underline{M}^0) \quad (2.3)$$

e actualizando os valores das forças nos tirantes

$$\underline{T}^1 = \underline{T}^0 + \underline{\Delta T}^1 \quad (2.4)$$

Este processo é repetido até que os valores calculados dos momentos flectores convirjam para os valores alvo definidos inicialmente.

Os autores salientam como vantagens a simplicidade do método e a possibilidade de controlar a distribuição de momentos flectores de modo a minimizar a redistribuição de esforços a longo prazo devido aos efeitos diferidos.

Cruz (1997) na sua tese de doutoramento desenvolveu uma metodologia para a análise e controlo da fase construtiva de pontes de atirantadas de betão tendo em vista a determinação das forças nos tirantes. O modelo de análise simula a fase construtiva e considera os efeitos diferidos do betão e o comportamento geometricamente não-linear. Através do ajustamento das forças nos tirantes, o método possibilita a análise e correcção de desvios, durante o processo construtivo ou após a conclusão da obra. De forma similar ao apresentado no “*force equilibrium method*”, este método também recorre ao conceito de matriz de coeficientes de influência das forças nos tirantes. Os objectivos a controlar podem ser, não apenas os momentos flectores no tabuleiro, mas também os deslocamentos em vários pontos da estrutura e as forças nos tirantes. Partindo de uma primeira aproximação para os valores das forças nos tirantes, o método simula a montagem da ponte e determina os desvios entre os valores obtidos para os parâmetros de controlo e os valores objectivo. Tendo em conta estes desvios e a matriz de coeficientes de influência calculam-se as correcções a efectuar nas forças dos tirantes. Este processo de ajustamento das forças nos tirantes repete-se até se atingir a tolerância para os desvios definida no critério de convergência.

Janjic *et al.* (2003) também propuseram uma metodologia, designada “*unit force method*”, para a determinação das forças nos tirantes. Segundo os autores o método tem em conta todos os efeitos relevantes para o projecto de pontes atirantadas incluindo a sequência construtiva, os efeitos de segunda ordem, o efeito de catenária dos tirantes e os efeitos diferidos da fluência e retracção do betão e a relaxação do aço de pré-esforço. Através do método proposto as forças nos tirantes são determinadas de modo a atingir uma distribuição pré-definida de momentos flectores, no tabuleiro e nas torres, para a estrutura completa na

condição de carga permanente. Tal como em outros trabalhos, este método também recorre ao conceito de matriz de coeficientes de influência das forças nos tirantes, para avaliar a resposta da estrutura face a modificações nos valores das forças nos tirantes. O método proposto foi implementado no programa de computador RM2000 destinado à análise estrutural e desenvolvido na empresa TDV Consulting GmbH (Áustria). Os autores referem ainda que o método foi aplicado no projecto de várias pontes de tirantes e apresentam como exemplo a ponte Udevalla (Suécia).

2.6.2. Efeitos diferidos do betão

Khalil *et al.* (1983) apresentaram um modelo numérico destinado à análise de pontes de tirantes executadas com betão pré-esforçado tendo em conta os efeitos diferidos da maturação, fluência e retracção do betão e a relaxação do aço de pré-esforço. O comportamento geometricamente não-linear devido ao efeito de catenária dos tirantes, aos grandes deslocamentos e à interacção entre esforço axial e momento flector foi também considerado. O método foi aplicado à análise estrutural, incluindo as fases construtivas, de uma ponte de tirantes com características geométricas similares à ponte Pasco-Kennewick no estado de Washington (EUA). Os valores das forças de instalação dos tirantes foram determinados através do método da viga contínua e não foram ajustados durante ou no final da construção.

A fim de avaliar a influência dos efeitos diferidos no comportamento da ponte de tirantes, os autores compararam os resultados da análise estrutural, até aos 800 dias, considerando os efeitos diferidos com os resultados de uma análise elástica linear. Tendo em conta os resultados obtidos, os efeitos diferidos traduziram-se em:

- aumento dos deslocamentos verticais do tabuleiro, mais significativo no vão central;
- redistribuições de tensões no tabuleiro (aumento dos valores de tensão em determinadas secções e noutras mudança do sinal das tensões passando de compressão para tracção);
- perda de pré-esforço máxima de 19% e média de 11% nos elementos do tabuleiro;
- alteração dos valores das tensões nos tirantes, tendo-se verificado uma diminuição máxima de 26,2% e um aumento máximo de 7,9% relativamente aos valores da análise linear.

Estes resultados salientam a importância dos efeitos diferidos no comportamento de uma estrutura construída por fases, em que é estabelecida a ligação entre elementos de betão com idades diferentes. Deste modo, a análise estrutural de uma ponte de tirantes executada em betão deve considerar os efeitos diferidos quer durante as fases construtivas quer após a sua

conclusão. Isto possibilitará a adequada previsão do comportamento da mesma para fazer ajustes, caso seja necessário e para que se consigam garantir as condições pretendidas no final da construção.

Cluley e Sheperd (1996) desenvolveram um modelo tridimensional de elementos finitos para análise dos efeitos diferidos em pontes atirantadas de betão. Foram tidos em conta os efeitos da maturação, fluência e retracção do betão e a relaxação do aço de pré-esforço e foi avaliada a sua influência nas tensões e deslocamentos em pontes atirantadas construídas por avanços sucessivos.

Para além dos efeitos diferidos o modelo desenvolvido contemplou as perdas de pré-esforço por escorregamento dos cabos nas ancoragens e também os efeitos geometricamente não-lineares devido aos grandes deslocamentos no tabuleiro e torres e o efeito de catenária dos tirantes. Foram utilizados elementos de viga tridimensionais de Euler-Bernoulli para modelar os pilares, elementos de barra tridimensionais com módulo de elasticidade equivalente para modelar os tirantes, sendo o tabuleiro em caixão modelado com elementos triangulares formulados a partir de um elemento triangular de deformação constante e do elemento DKT de flexão de lajes.

Na modelação da fluência e retracção foram utilizados os modelos propostos num relatório do ACI de 1982, sendo a função de fluência aproximada por uma série de Dirichlet, tal como proposto em (Bazant, 1988). Os efeitos diferidos foram considerados através de forças nodais equivalentes às deformações de fluência e de retracção.

Através da resolução de um exemplo simples de uma ponte atirantada, os autores observaram que a consideração dos efeitos diferidos conduziu a um aumento significativo (de 7,65 mm para 12,75 mm), cerca de 66%, do deslocamento vertical máximo do tabuleiro, perdas de pré-esforço no tabuleiro com valores entre 15 e 29% para o pré-esforço longitudinal e entre 17 e 38% da força de pré-esforço instalada inicialmente para o pré-esforço transversal. Os efeitos diferidos levaram também a redistribuições das tensões normais nas secções transversais do tabuleiro. Na direcção longitudinal os valores máximos das tensões foram reduzidos entre 16 e 25% e os valores mínimos sofreram um aumento pouco significativo, entre 2 e 5%. Na direcção transversal os efeitos diferidos mostraram ter um efeito positivo nas tensões normais reduzindo-as entre 12 e 19%. Deste modo, tal como no estudo anterior, os autores salientam a importância da consideração dos efeitos diferidos do betão para uma adequada análise do comportamento de uma ponte de tirantes executada em betão.

Somja e de Ville de Goyet (2008) desenvolveram uma metodologia para a análise de estruturas de betão considerando a sequência construtiva e incluindo os efeitos diferidos

devidos à história de cargas, maturação, fluência e retracção do betão. O modelo desenvolvido foi implementado num programa de computador pré-existente, o programa FINELG, desenvolvido na Universidade de Liège e destinado à análise material e geometricamente não-linear de estruturas.

A metodologia proposta para o cálculo da deformação de fluência é baseada no “*fictitious loading age method*” tendo sido aperfeiçoada para ter em conta a recuperação das tensões e conduzir aos mesmos valores finais de deformação que os obtidos através da sobreposição de efeitos. Esta metodologia foi desenvolvida para elementos de viga bidimensionais de Euler-Bernoulli com 3 nós e 7 graus de liberdade. Os autores referem que a metodologia proposta pode ser utilizada com outros tipos de elementos finitos e pode ser facilmente implementada num programa comum de elementos finitos, possibilitando a resolução de problemas de análise das fases construtivas. Através da resolução de um exemplo simples, referente à construção de uma ponte de tirantes, obtiveram-se resultados próximos dos teóricos determinados com base no princípio da sobreposição de efeitos.

A mesma metodologia para contabilizar os efeitos diferidos do betão, e implementada no programa FINELG, foi usada por Pedro (2007) na sua tese de doutoramento, na qual levou a cabo um estudo acerca do comportamento estrutural de pontes de tirantes mistas. Num artigo publicado posteriormente (Pedro e Reis, 2010) os autores observaram que os efeitos diferidos levaram a uma maior deformação do tabuleiro, reduzindo as cargas suportadas pelos tirantes dos vãos laterais e, por conseguinte, aumentando consideravelmente os momentos flectores na base das torres e levando a uma provável fissuração da laje do tabuleiro nas secções de meio-vão. Verificaram também uma redistribuição dos esforços axiais da laje de betão para as vigas longitudinais metálicas do tabuleiro. Contudo, este facto não afectou a resistência última do tabuleiro.

2.6.3. Fases construtivas

No âmbito do projecto de pontes de tirantes é necessário verificar a segurança, não apenas para a ponte completa, mas também durante o processo construtivo. Para além disso, é fundamental garantir a geometria e a distribuição de esforços pretendidas para a ponte completa no final da construção. Estes aspectos são controlados em grande medida pelas forças nos tirantes e, como facilmente se percebe, são condicionados pela sequência construtiva utilizada.

Quando se utiliza a construção com apoios provisórios ou por lançamento incremental, o tabuleiro é geralmente executado na totalidade antes de se proceder à montagem dos tirantes.

Estes são tensionados numa única fase, pelo que a determinação das respectivas forças de instalação é relativamente fácil. Desta forma, os valores dessas forças podem ser obtidos considerando a análise da ponte completa de modo a equilibrarem as reacções verticais nos apoios provisórios.

Por outro lado, durante o processo construtivo pelo método dos avanços sucessivos, a estrutura vai sendo modificada, alterando-se a geometria, o sistema estático e as cargas aplicadas. Os tirantes não são todos montados na mesma etapa, sendo instalados à medida que se executam os segmentos do tabuleiro até ao fecho do mesmo. Por conseguinte, a força de instalação de cada novo tirante altera as forças nos tirantes previamente instalados e condiciona os deslocamentos e esforços internos da estrutura, não apenas nessa fase, mas também em fases subsequentes. Assim, as forças de instalação de cada tirante serão necessariamente diferentes das que se pretende que fiquem instaladas para a ponte completa em serviço.

As forças de instalação são definidas de modo a garantir os limites de tensão durante a construção e para que no final da mesma se possa efectuar o fecho das consolas do tabuleiro. Posteriormente, para a ponte completa faz-se um ajustamento das forças através do retensionamento dos tirantes de modo a garantir a geometria e distribuição de esforços finais pretendidos (Hewson, 2003).

Na medida em que, as distribuições de esforços internos e os deslocamentos dos pontos da estrutura variam continuamente ao longo do processo construtivo, influenciando o estado da estrutura no final da construção (Cruz, 1997; Vasconcelos, 1999; Ferraz, 2001; Chen e Duan, 2000; Grabow, 2004; Mueller-Haagen, 2005; Pedro, 2007; Ferraz, 2010), torna-se fundamental, na análise estrutural, proceder à simulação do processo construtivo. Desta forma, será possível determinar os valores adequados das forças de instalação e das forças de ajustamento nos tirantes que garantem a segurança durante a construção e em serviço e que permitem atingir a configuração geométrica e a distribuição de esforços pretendidas para a ponte completa no final da construção. De salientar ainda que, no caso particular das pontes atirantadas de betão, a história de cargas condiciona os efeitos diferidos do betão, que por sua vez alteram as tensões e deformações da estrutura.

Tendo em conta o exposto anteriormente, a análise estrutural no âmbito do projecto de uma ponte atirantada de betão deve contemplar a modelação de cada etapa do processo construtivo para permitir:

- Controlo da geometria da estrutura durante o processo construtivo;
- Determinação das forças de instalação dos tirantes;

- Verificação da segurança durante o processo construtivo pois, para alguns elementos, a condição de dimensionamento poderá verificar-se durante o processo construtivo e não para a estrutura completa;
- Determinação da geometria da estrutura e dos esforços internos no final da construção;
- Determinação do ajustamento das forças nos tirantes para garantir a geometria pretendida no final da construção.

Para além dos trabalhos indicados em sub-capítulos anteriores em que se consideraram as fases construtivas na análise estrutural de pontes de tirantes (Khalil *et al.*, 1983; Cluley e Sheperd, 1996; Cruz, 1997; Janjic, 2003; Somja e de Ville de Goyet, 2008), podem ainda referir-se os trabalhos de Behin e Murray (1992) e Reddy *et al.* (1999) que desenvolveram trabalhos específicos sobre a análise do processo construtivo de pontes de tirantes.

De um modo geral, na bibliografia têm sido propostas duas metodologias para efectuar a análise estrutural das fases construtivas em pontes de tirantes, o *método da montagem* e *método da desmontagem* (Chen e Duan, 2000).

No *método da montagem* a análise segue a sequência das fases construtivas até se atingir a configuração final da estrutura. Este método simula directamente a fase construtiva de montagem da estrutura por sobreposição das etapas estabelecidas para a construção. Este método apresenta como vantagens o facto de permitir contabilizar directamente os efeitos diferidos do betão assim como os efeitos geometricamente não-lineares do tabuleiro, das torres e dos tirantes. Possibilita ainda o estudo de eventuais correcções face a desvios, na geometria da estrutura e nas forças nos tirantes, que se tenham observado durante a construção. A principal desvantagem prende-se com o facto de as forças nos tirantes obtidas com este método poderem não ser as adequadas para atingir a rasante ou a distribuição de momentos flectores no tabuleiro no final da construção.

No *método da desmontagem* a análise desenvolve-se no sentido inverso ao da sequência construtiva da ponte. Partindo da configuração pretendida para a estrutura no final da construção, vão removendo-se elementos na sequência inversa à utilizada na construção da estrutura. Por equilíbrio determinam-se as configurações geométricas e os esforços internos nas várias etapas de execução da estrutura. As forças nos tirantes assim determinadas são aquelas que garantem a geometria da estrutura e a distribuição de esforços pretendidas no final da construção. Na análise da desmontagem da estrutura admite-se o seu comportamento elástico e linear, não sendo contabilizados os efeitos física e geometricamente não-lineares, em particular os efeitos diferidos do betão. A fluência depende do estado de tensão no início de cada fase construtiva e que através do método da desmontagem não é conhecido *a priori*.

Para fazer face a estas desvantagens é habitual recorrer a um processo iterativo de desmontagem e montagem até se atingirem desvios na geometria e forças nos tirantes, obtidos com os dois processos, suficientemente pequenos. Trata-se de uma abordagem laboriosa e de complexidade crescente com a dimensão da ponte e com o número de fases construtivas que é necessário considerar.

2.6.4. Análise não-linear material e geométrica

A concepção estrutural das pontes de tirantes evoluiu no sentido da utilização de sistemas de suspensão múltipla, o que possibilitou vencer maiores vãos com tabuleiros mais esbeltos e, por conseguinte, também mais flexíveis. Estes aspectos, associados aos elevados esforços de compressão introduzidos no tabuleiro e nas torres pelos tirantes inclinados, podem produzir efeitos de segunda ordem significativos nestes elementos da estrutura, quando o tabuleiro se deforma por acção das sobrecargas. De referir também que cada tirante se deforma, devido à acção do seu peso próprio, segundo uma relação não-linear em função do seu comprimento, inclinação e tensão instalada.

Na bibliografia (Fleming, 1979; Stipanic, 1987; Nazmy e Abdel-Ghaffar, 1990; Kanok-Nukulchai *et al.*, 1992; Kanok-Nukulchai e Hong, 1993; Wang e Yang, 1996; Karoumi, 1999; Freire, 2002; Wang *et al.*, 2002; Freire *et al.*, 2006) são referidas três fontes principais de não-linearidade geométrica neste tipo de estruturas, relacionadas com a não-linearidade dos tirantes e a não-linearidade do tabuleiro e das torres: o efeito de catenária dos tirantes, o efeito de viga-coluna (efeito $P-\delta$) e o efeito dos grandes deslocamentos (efeito $P-\Delta$) no tabuleiro e nas torres.

A deformada de um tirante apoiado nas suas extremidades, sujeito ao seu peso próprio e a uma força axial, assume a forma de uma catenária. A rigidez axial do tirante depende não só da deformação devido à tensão de tracção instalada, mas também da deformação devido ao peso próprio do tirante (efeito de catenária). Esta parcela, por sua vez, depende de factores como o comprimento, o peso próprio e a inclinação do tirante e a tensão instalada, em relação aos quais apresenta uma variação não-linear. Por conseguinte, os deslocamentos das extremidades do tirante variam de forma não-linear com a tensão instalada no mesmo.

Por outro lado, tanto as torres como o tabuleiro estão submetidos à acção conjunta do esforço axial e do momento flector. A existência de deslocamentos transversais nos elementos comprimidos origina o aparecimento de momentos flectores adicionais, o que resulta numa perda da rigidez de flexão. Do mesmo modo, a existência de momentos flectores afecta a rigidez axial do elemento devido a um encurtamento aparente provocado pela deformação de

flexão. Esta interacção entre esforço axial e momento flector designa-se por efeito de viga-coluna (ou efeito $P-\delta$) e, em virtude dos elevados esforços de compressão e dos deslocamentos significativos que podem ocorrer em pontes de tirantes, pode condicionar a resposta deste tipo de estruturas.

Tal como já foi referido, em virtude dos grandes vãos e das secções esbeltas as pontes de tirantes geralmente constituem estruturas flexíveis, em especial durante as fases construtivas. Desta forma, as cargas aplicadas podem provocar grandes deslocamentos e alterações significativas na geometria que produzem esforços adicionais os quais, por sua vez, alteram os valores dos deslocamentos iniciais (efeito $P-\Delta$).

Diversos autores (Fleming, 1979; Stipanic, 1987; Nazmy e Abdel-Ghaffar, 1990; Kanok-Nukulchai *et al.*, 1992; Kanok-Nukulchai e Hong, 1993; Adeli e Zhang, 1995; Wang e Yang, 1996; Karoumi, 1999; Freire, 2002; Wang *et al.*, 2002; Freire *et al.*, 2006) apresentaram trabalhos referentes à análise geometricamente não-linear de pontes de tirantes. Nestes trabalhos recorreu-se, quer a modelações bidimensionais, quer tridimensionais da estrutura pelo Método dos Elementos Finitos, sendo realizadas análises de segunda ordem com maior ou menor grau de sofisticação e utilizando diferentes tipos de elementos finitos. Neste sentido, a modelação dos tirantes pode ser efectuada usando elementos biela, bielas múltiplas, elementos biela com módulo de elasticidade equivalente, elementos de cabo-parábola ou elementos de cabo-catenária. Contudo, a metodologia mais utilizada tem sido modelar cada tirante como um único elemento biela com módulo de elasticidade equivalente, de modo a representar o comportamento geometricamente não-linear de um tirante curvo através do comportamento fisicamente não-linear de um tirante recto. A modelação do tabuleiro e das torres tem sido efectuada utilizando elementos de viga convencionais ou elementos de viga-coluna em que a respectiva matriz de rigidez contém as parcelas elástica e geométrica (exacta ou aproximada). No caso de tabuleiros em caixão têm sido utilizadas também modelações com elementos de placa-membrana de paredes finas (Kanok-Nukulchai e Hong, 1993). A análise tem sido efectuada com ou sem actualização de geometria da estrutura e para a resolução do sistema de equações não-lineares de equilíbrio normalmente recorre-se ao método iterativo e incremental de Newton-Raphson.

Tendo em conta os trabalhos anteriormente indicados podem referir-se alguns resultados. Stipanic (1987), analisando a resposta não-linear da ponte atirantada de Novi Sad sobre o Danúbio, com 351 m de vão central, verificou um acréscimo, no máximo de 10%, nos valores dos momentos flectores no tabuleiro obtidos com uma análise de segunda ordem, quando comparados com os valores obtidos com recurso a uma análise linear. Valores semelhantes

foram obtidos por Walther *et al.* (1999), que num estudo paramétrico avaliaram a influência dos efeitos de segunda ordem numa ponte atirantada com 205 m de vão central, em função da inércia do tabuleiro. Os autores observaram um acréscimo, no máximo de 10%, tanto para os deslocamentos verticais como para os momentos flectores no tabuleiro, relativamente à solução obtida com uma análise linear.

Estas diferenças pouco significativas entre análise linear e não-linear podem dever-se ao comprimento dos vãos das pontes analisadas, pois acima dos 700-800 m de vão central, Kanok-Nukulchai e Hong (1993) referem que a análise linear se torna inadequada.

Adeli e Zhang (1995) levaram a cabo um estudo acerca da influência dos efeitos material e geometricamente não-lineares em pontes atirantadas mistas, utilizando como exemplo a ponte Quincy Bayview Bridge, com 274 m de vão central. Para a ponte sujeita à carga permanente e à sobrecarga de utilização, e realizando uma análise material e geometricamente não-linear, verificaram uma variação máxima de 12% a respeito da solução linear. Os autores referem ainda que a não-linearidade material é mais significativa pois os efeitos geometricamente não-lineares traduzem-se numa variação máxima de apenas 5%. Numa análise até à rotura a solução obtida apresenta uma variação máxima de 40% a respeito da solução linear.

No que respeita à análise não-linear material e geométrica podem também referir-se os trabalhos de Pedro (2007) e de Pedro e Reis (2010) em que se estudou o comportamento de uma ponte atirantada de 420 m de vão central com tabuleiro misto aço-betão. Considerou-se o comportamento materialmente não-linear do aço e do betão, assim como o efeito de catenária dos tirantes e os efeitos diferidos devido à história de cargas, à maturação, fluência e retracção do betão. Os autores avaliam as principais fontes de não-linearidade para condições de serviço e analisam a carga de rotura e o respectivo mecanismo para o final da construção e a longo prazo. Analisam ainda a influência de factores como o padrão de carga no tabuleiro, os efeitos diferidos, a plastificação dos tirantes, a existência de pilares intermédios nos vãos laterais, a largura efectiva da laje do tabuleiro e a flexibilidade da ligação entre esta laje e as vigas metálicas que a suportam. Dos resultados obtidos salienta-se o facto de o modo de rotura depender do padrão de carga no tabuleiro, verificando-se o limite inferior para a carga de rotura na situação de sobrecarga aplicada apenas no vão central. A existência de pilares intermédios no vão lateral desempenha um papel relevante, não apenas na redução dos deslocamentos no vão central, como também no aumento da carga de rotura. De referir ainda que o efeito de catenária dos tirantes apresenta pequena influência nos deslocamentos

verticais do tabuleiro, em virtude de os tirantes serem instalados em duas fases, o que evita que os mesmos se encontrem pouco tensionados.

Wang e Yang (1996) realizaram um estudo paramétrico para avaliar a influência das diferentes fontes de não-linearidade geométrica em pontes de tirantes, quer na determinação das forças nos tirantes quer na análise para cargas permanentes. Analisando exemplos de pontes com 330 m de vão central observaram que a não consideração do efeito de catenária origina desvios de 10% na determinação das forças nos tirantes, sendo os outros efeitos pouco significativos. Na análise para cargas permanentes verificaram que o efeito $P-\Delta$ é o mais significativo, seguido do efeito $P-\delta$. Dados os elevados valores de tensão existentes nos tirantes neste caso de carga, o efeito de catenária mostrou ser o menos significativo.

Em resumo, e tendo em conta os resultados obtidos nos trabalhos referidos anteriormente há a reter os seguintes aspectos:

- Devido à sua flexibilidade, as pontes de tirantes exibem comportamento não-linear mesmo sob a acção de cargas permanentes, especialmente para pontes de grande vão.
- O efeito de catenária é a fonte de não-linearidade geométrica mais significativa no comportamento de pontes de tirantes em especial quando, para determinadas condições de carregamento, ocorrem grandes deslocamentos que conduzem a tirantes pouco traccionados, como por exemplo durante as fases construtivas ou para a análise da alternância de sobrecargas no tabuleiro.
- À medida que aumentam os deslocamentos do tabuleiro, a contribuição do efeito de catenária para o comportamento não-linear global da estrutura é menor quando comparada com o efeito dos grandes deslocamentos, pelo que existe uma interacção entre estas duas fontes de não-linearidade geométrica e devem ser consideradas em conjunto na análise de pontes de tirantes. O efeito de viga-coluna parece ser o menos significativo.
- A influência dos efeitos geometricamente não-lineares na resposta da estrutura cresce com o aumento do vão, tendo-se observado uma maior rigidez da estrutura com o aumento da carga aplicada.
- Os efeitos geometricamente não-lineares podem ser mais ou menos significativos consoante a flexibilidade da estrutura e traduzem-se em maiores deslocamentos e maiores esforços internos que os obtidos com uma análise linear da estrutura, devendo ser considerados na análise da estrutura.

2.6.5. Análise dinâmica

As acções dinâmicas desempenham um papel importante no comportamento das pontes de tirantes, podendo condicionar o dimensionamento de alguns elementos estruturais e assumindo importância crescente com o aumento do vão (Walther *et al.*, 1999). Os sismos, o vento e as vibrações induzidas pelo tráfego constituem as principais acções dinâmicas a considerar no projecto de pontes de tirantes. Desta forma, deve garantir-se a estabilidade aerodinâmica, a segurança face aos sismos e o controlo das vibrações para evitar efeitos negativos a nível psicológico e fisiológico para os utilizadores.

Para avaliar a resposta da estrutura considerando as acções dinâmicas é necessário uma adequada determinação das frequências próprias e dos correspondentes modos de vibração. Neste sentido, vários autores propõem a modelação dos tirantes com bielas múltiplas (Abdel-Ghaffar e Khaliffa, 1991; Au *et al.*, 2001), múltiplos elementos de cabo-catenária (Karoumi, 1999), ou com elementos isoparamétricos para captar o movimento transversal dos tirantes (Ali e Abdel-Ghaffar, 1995b).

Esta modelação possibilita captar modos de vibração transversais dos tirantes e a interacção entre os tirantes, tabuleiro e torres nos modos de vibração. Verificou-se serem significativos os correspondentes factores de participação modal na avaliação da resposta da estrutura face à acção sísmica (Abdel-Ghaffar e Khaliffa, 1991).

Para a determinação das frequências e modos de vibração deve partir-se da configuração da estrutura para as cargas permanentes considerando os efeitos geometricamente não-lineares (Abdel-Ghaffar e Nazmy, 1991). Posteriormente, a análise considerando as acções dinâmicas pode ser efectuada com recurso a análise por sobreposição modal ou a integração passo-a-passo do sistema de equações de equilíbrio dinâmico (Abdel-Ghaffar e Nazmy, 1991; Negrão, 1997; Ferreira, 2004; Casado, 2011).

As pontes de tirantes, devido aos grandes vãos e à sua flexibilidade, normalmente exibem longos períodos de vibração, o que as diferencia de outras estruturas e, por conseguinte, afecta o seu comportamento dinâmico. No entanto, a flexibilidade e as características dinâmicas dependem de vários parâmetros como o comprimento do vão, o sistema de atirantamento, as condições de apoio e a rigidez dos apoios (Morgenthal, 1999; Chen e Duan, 2000).

O acoplamento dos modos de vibração é uma característica das pontes de tirantes, em especial entre os modos de flexão transversal e de torção do tabuleiro. Este acoplamento é governado pela distribuição de massa na secção transversal do tabuleiro e pelo arranjo do sistema de atirantamento. Devido a esta interacção é difícil distinguir entre modos puramente

verticais, transversais e de torção, requerendo por isso uma modelação tridimensional para avaliar adequadamente a resposta da estrutura (Abdel-Ghaffar e Nazmy, 1991; Casado, 2011). O acoplamento dos modos de vibração é tanto mais relevante quanto maior a flexibilidade da estrutura. Caetano *et al.* (2000a, 2000b, 2008) recorrendo a modelos físicos e numéricos investigaram também a interacção entre os tirantes e o tabuleiro na resposta da estrutura face a acções dinâmicas.

Os primeiros modos de vibração apresentam elevados períodos, na ordem de vários segundos, e são fundamentalmente modos associados ao tabuleiro. Seguem-se os modos de vibração dos tirantes acoplados com o tabuleiro. Os modos das torres são habitualmente os de ordem mais elevada e podem estar acoplados com o tabuleiro, dependendo das condições de apoio (Morgenthal, 1999). Devido à complexidade dos modos e ao seu acoplamento, a resposta dinâmica da estrutura depende da contribuição de um grande número de modos de vibração (Casado, 2011).

Devido aos grandes vãos e, conseqüentemente, aos longos períodos de vibração com baixas acelerações associadas, as pontes de tirantes apresentam um bom comportamento face à acção dos sismos. Para além disso o número limitado de pontos de apoio (encontros, torres e eventualmente pilares de transição) permitem acomodar grandes deslocamentos sem originar forças elevadas (Casado, 2011). No entanto, em virtude do grande desenvolvimento em planta deste tipo de obras deve ter-se em conta a variabilidade espacial da acção sísmica, podendo ter um efeito significativo na resposta da estrutura (Ferreira, 2004).

A componente horizontal da acção sísmica afecta mais o tabuleiro, enquanto a componente vertical afecta mais as torres e os tirantes, comportando-se o tabuleiro como uma viga em fundação elástica.

Apesar de as pontes de tirantes, em especial as executadas em betão, apresentarem elevada estabilidade aerodinâmica (Chen e Duan, 2000), a acção dinâmica do vento deve também ser tida em conta no projecto destas estruturas. A acção do vento depende da pressão do vento, da forma da secção transversal e do ângulo de incidência do vento no tabuleiro. Neste âmbito merecem destaque os fenómenos de *flutter* e *vortex-shedding*. O fenómeno de flutter caracteriza-se por, acima de uma determinada velocidade do vento o tabuleiro receber mais energia do que aquela que pode ser dissipada por amortecimento. Conseqüentemente, devido às forças aerodinâmicas, originam-se movimentos combinados de flexão e torção de amplitude crescente que conduzem à destruição da ponte (Walther *et al.*, 1999). Assim, a estrutura deverá ser dimensionada para resistir a uma determinada velocidade crítica do vento para evitar a ocorrência do fenómeno de *flutter*. É aconselhável o recurso a secções

transversais do tabuleiro com elevada rigidez de torção e a sistemas de suspensão lateral. (Walther *et al.*, 1999). De referir ainda que tabuleiros mais largos apresentam melhor desempenho face ao fenómeno de *flutter*.

A forma da secção transversal do tabuleiro também deverá ser concebida para que o escoamento do vento em torno desta se processe sem originar vórtices, para assim evitar as vibrações devidas ao fenómeno de *vortex-shedding*.

O dimensionamento para fazer face às acções dos sismos e do vento requer características opostas da estrutura. Assim, para garantir a estabilidade aerodinâmica é preferível uma estrutura de elevada rigidez. No entanto, para fazer face à acção sísmica, excepto se o solo de fundação for pouco rígido, é preferível uma estrutura mais flexível (Chen e Duan, 2000). O maior peso e maior amortecimento dos tabuleiros de betão quando comparados com os tabuleiros metálicos tornam-nos menos susceptíveis a vibrações e aos efeitos das acções dinâmicas (Hewson, 2003).

Para além dos sismos e do vento, o tráfego também origina vibrações nas pontes de tirantes devendo procurar-se que as frequências de vibração da estrutura sejam diferentes das frequências do tráfego para evitar potenciais problemas e desconforto dos utilizadores (Hewson, 2003).

Para mitigar os efeitos negativos das acções dinâmicas é usual recorrer a dispositivos de isolamento e dissipação de energia, podendo ser usados dispositivos passivos ou activos (Casado, 2011). Desta forma, pretende-se diminuir as vibrações e as forças induzidas pelas acções dinâmicas.

Para além dos aspectos já referidos, e no âmbito do estudo do comportamento de pontes de tirantes face a acções dinâmicas, diversos autores têm desenvolvido trabalhos abordando temáticas tais como: a variabilidade espacial da acção sísmica (Nazmy e Abdel-Ghaffar, 1992; Allam e Datta, 1999; Soyuluk e Dumanoglu, 2004; Ferreira, 2004), a rotura ou destensionamento de um tirante (Wu *et al.*, 2003; Mozos e Aparicio, 2010a e 2010b), as vibrações nos tirantes induzidas pelo tráfego e pela acção conjunta do vento e da chuva (Caetano, 2007), a interacção solo-estrutura (Zheng e Takeda, 1995; Soneji e Jangid, 2008), a concepção de dispositivos de isolamento e dissipação de energia (Ali e Abdel-Ghaffar, 1995a e 1995b; Morgenthal, 1999; Casado, 2011) e a influência dos efeitos diferidos do betão e do aço de pré-esforço nas propriedades dinâmicas da estrutura (frequências e modos de vibração) a longo prazo (Au e Si, 2012).

2.7. Optimização de pontes de tirantes

A utilização de algoritmos de optimização para resolução de problemas no âmbito do projecto de pontes atirantadas tem sido feita em duas grandes áreas, a determinação das forças de pré-esforço a aplicar aos tirantes e a optimização considerando variáveis seccionais, geométricas e topológicas tendo em vista o projecto óptimo, na perspectiva da minimização do custo. Neste sentido, os valores óptimos das variáveis de decisão (forças nos tirantes, dimensões das secções transversais, variáveis geométricas ou topológicas) do problema de optimização são determinados a partir da minimização de determinadas funções objectivo. Estas funções são formuladas com base em critérios de eficiência estrutural e/ou economia de modo a minimizar o custo total da estrutura, a energia de deformação elástica ou os esforços de flexão no tabuleiro ou nas torres. Na formulação habitual dos problemas de optimização a minimização da função objectivo é sujeita à verificação de um conjunto de restrições relacionadas, por exemplo, com as tensões admissíveis nos materiais, com valores limite dos deslocamentos para controlo da geometria da estrutura e com valores mínimos ou máximos das dimensões da estrutura ou das secções transversais dos elementos.

2.7.1. Optimização das forças nos tirantes

Para além dos métodos referidos em 2.6.1., a determinação das forças de pré-esforço a aplicar nos tirantes pode também ser levada a cabo através da utilização de algoritmos de optimização. Diversos autores desenvolveram trabalhos nesta temática. Referem-se de seguida alguns desses trabalhos.

Furukawa *et al.* (1987a) apresentaram um trabalho referente a pontes atirantadas de betão armado pré-esforçado, salientando que estas apresentam dois sistemas de ajustamento das tensões interagindo entre si, respectivamente os pré-esforços no tabuleiro e nos tirantes. Neste trabalho os autores formulam e resolvem o problema de determinação das forças de pré-esforço nos tirantes tendo em conta os efeitos do pré-esforço e da fluência nos elementos do tabuleiro. Recorre-se ao cálculo de coeficientes de influência das forças nos tirantes sobre os esforços provocados pelas cargas permanentes e pelo pré-esforço, obtendo-se uma relação linear entre os dois sistemas de ajustamento. O problema de determinação das forças nos tirantes é resolvido através da minimização da energia de deformação elástica do tabuleiro e das torres.

O mesmo autor e outros (Furukawa *et al.*, 1987b) referem ainda que o problema da optimização de pontes de tirantes é um problema multiobjectivo em que se devem considerar

como variáveis de decisão não apenas as forças de pré-esforço nos tirantes mas também as dimensões das secções transversais dos elementos. Dada a complexidade da formulação deste problema, sugerem resolvê-lo em duas fases, determinando as secções através de um critério de minimização do custo, e determinando as forças nos tirantes através de um critério mecânico como a minimização da energia de deformação. No entanto, nesta abordagem perde-se a interacção entre os dois tipos de variáveis na obtenção da solução óptima.

Osuo *et al.* (1987) propuseram um método de optimização para a determinação das forças de ajustamento dos tirantes no caso particular de pontes em que matriz de coeficientes de influência das forças nos tirantes é singular.

Qin (1992) desenvolveu um método para a determinação do planeamento óptimo do processo de esticamento dos tirantes. Estabelecendo a configuração final pretendida, com base num plano de esticamento pré-definido e recorrendo ao conceito de padrão de influência, semelhante ao de matriz de influência usado por outros autores mas tendo em conta as etapas de construção, é possível escrever o estado final da estrutura como sobreposição de efeitos das sucessivas etapas de esticamento. O problema de optimização foi formulado como um problema de programação linear podendo ser resolvido pelo método Simplex.

Kasuga *et al.* (1995) apresentaram um método para a determinação dos valores óptimos das forças de ajustamento dos tirantes para fazer face aos erros que podem ocorrer durante a construção de pontes atirantadas de betão. Os autores referem que o controlo das forças nos tirantes é fundamental para o controlo das distribuições de esforços internos e da geometria durante a construção e podem afectar substancialmente a estrutura construída. Salientam ainda a importância da deformação de fluência no comportamento destas estruturas alterando as forças nos tirantes e os deslocamentos. Assim, a fluência do betão foi tida em conta de modo a obter forças de ajustamento dos tirantes que causem erros menores a longo prazo. Os valores de ajustamento das forças nos tirantes foram determinados através da minimização de uma função objectivo definida como o trabalho das forças nos tirantes nos pontos de ancoragem no tabuleiro e nas torres e recorrendo a uma matriz de coeficientes de influência do trabalho.

No âmbito da sua tese de doutoramento (Negrão, 1996) referente à análise, análise de sensibilidades e optimização de pontes atirantadas metálicas, o autor também levou a cabo a resolução do problema de determinação das forças de pré-esforço nos tirantes (Negrão e Simões, 1997). A determinação das forças nos tirantes foi formulada como um problema de optimização *multi-objectivo* em que a solução foi obtida minimizando uma função escalar convexa obtida com base no *Princípio da Máxima Entropia*. Na formulação do problema

consideraram-se variáveis de decisão associadas ao pré-esforço nos tirantes e variáveis de decisão seccionais e geométricas tendo em vista a minimização do custo da estrutura e observando as tensões admissíveis nos materiais e limites nos deslocamentos. As fases construtivas e o efeito de catenária dos tirantes foram tidos em conta na análise estrutural e a análise de sensibilidades foi efectuada através do método directo com derivadas analíticas. Neste trabalho os autores resolveram também o problema da correcção de desvios nos deslocamentos durante a construção através do ajustamento das forças nos tirantes, mediante uma formulação semelhante à anteriormente mencionada mas apenas com recurso às variáveis de decisão associadas ao pré-esforço.

Sung *et al.* (2000) descreveram a metodologia adoptada na determinação das forças nos tirantes para o caso particular da ponte Mau-Lo Hsi, construída em Taiwan. Trata-se de uma ponte assimétrica com uma torre em aço em forma de arco parabólico, suportando os tirantes um tabuleiro com desenvolvimento em curva clotóide em planta. Devido a restrições práticas, a função objectivo a minimizar foi definida com base na minimização da energia de deformação elástica em vez da minimização do custo da estrutura. A energia de deformação elástica da ponte foi expressa como função quadrática das forças de pré-esforço a aplicar nos tirantes. Foram consideradas restrições de igualdade nos deslocamentos da torre e restrições de desigualdade na limitação das envolventes das forças nos tirantes. Nesta formulação foram também consideradas matrizes de coeficientes de influência dos deslocamentos e das forças nos tirantes.

Lee *et al.* (2008) apresentaram um trabalho propondo melhoramentos ao “*unit force method*” (Janjic *et al.*, 2003) de modo a resolver problemas específicos da determinação das forças nos tirantes na ponte Wando, uma ponte de tirantes assimétrica construída na Coreia do Sul. Assim, para além do ciclo iterativo utilizado para determinar as forças nos tirantes considerando restrições nos deslocamentos do tabuleiro e das torres, propuseram adicionar um novo ciclo iterativo de modo a verificar limites superiores e inferiores impostos nas forças de determinados tirantes. Com a metodologia proposta melhorou-se a distribuição de forças nos tirantes e de momentos flectores no tabuleiro, tornando-as mais uniformes.

Mais recentemente, Hassan *et al.* (2012) apresentaram uma metodologia para a determinação das forças de pré-esforço nos tirantes considerando uma ponte atirantada com tabuleiro misto na sua configuração final e sujeita às cargas permanentes. Esta metodologia baseou-se na observação de que a distribuição das forças de pré-esforço nos tirantes ao longo do tabuleiro segue uma função polinomial arbitrária. Assim, os autores usaram funções “*B-spline*” para modelar a distribuição de forças nos tirantes ao longo do tabuleiro. Foram

utilizados algoritmos genéticos para obter a solução óptima referente à distribuição de forças nos tirantes que minimizam os deslocamentos verticais do tabuleiro e os horizontais no topo das torres. Deste modo, conseguiu-se também minimizar a distribuição de momentos flectores no tabuleiro e nas torres.

No seguimento do estudo anterior, Hassan (2013) apresentou um trabalho de optimização visando a minimização das áreas das secções transversais dos tirantes na perspectiva de minimização do custo dos mesmos. A metodologia proposta envolve a utilização do Método dos Elementos Finitos para a análise estrutural, funções “*B-spline*” para representar a distribuição de secções dos tirantes ao longo do tabuleiro e um “*Real Coded Genetic Algorithm*” (RCGA) para resolução do problema de optimização. São apresentados exemplos de aplicação relativos a uma ponte atirantada com tabuleiro misto aço-betão. A análise é efectuada para a ponte completa sujeita a carga permanente e a diversos casos de carga em que se considera a sobrecarga rodoviária. O peso do aço dos tirantes é definido como a função objectivo a minimizar e são impostas restrições nos valores das tensões nos tirantes e nos deslocamentos verticais do tabuleiro e horizontais no topo das torres. O autor refere que a consideração das funções “*B-spline*” permite reduzir o número de variáveis de decisão do problema de optimização o que melhora a eficiência do algoritmo genético utilizado.

2.7.2. Optimização com variáveis seccionais, geométricas e topológicas

A aplicação de algoritmos de optimização para determinar o projecto óptimo de pontes de tirantes, visando a minimização do custo, foi também estudada por vários autores. Neste âmbito podem ser consideradas, para além das variáveis relativas às forças nos tirantes, também variáveis de decisão geométricas, topológicas e variáveis de decisão associadas às dimensões das secções transversais dos diversos elementos estruturais.

Bhatti *et al.* (1985) formularam e resolveram o problema do projecto óptimo de uma ponte atirantada metálica. Consideraram apenas variáveis de decisão seccionais e estabeleceram como função objectivo o peso da estrutura da ponte, impondo restrições nos deslocamentos e nas tensões, tendo em conta as tensões admissíveis dos materiais e o risco de instabilidade por encurvadura. A solução foi obtida através da minimização da função objectivo recorrendo a um algoritmo de programação quadrática.

Torii e Ikeda (1987) apresentaram um método de optimização de pontes atirantadas metálicas considerando como variáveis de decisão as forças nos tirantes. As propriedades seccionais dos elementos não são tidas em conta pelo que se obtêm soluções que apresentam incompatibilidades geométricas, mas que podem ser corrigidas com pré-esforços adicionais

nos tirantes de modo a introduzir contra-flechas. O dimensionamento das secções transversais dos elementos é efectuado posteriormente de modo a verificar as tensões admissíveis nos materiais. Apesar de ligeiro e expedito este método não permite tratar as forças de pré-esforço em conjunto com variáveis de decisão seccionais, o que porventura conduz às soluções mais económicas.

Ohkubo e Taniwaki (1991) apresentaram um método de optimização para minimização do custo de pontes atirantadas metálicas considerando variáveis de decisão associadas às dimensões das secções transversais dos elementos e variáveis geométricas correspondendo à posição das ancoragens dos tirantes no tabuleiro e nas torres. Consideraram-se restrições nas tensões nos elementos de modo a garantir as tensões admissíveis nos materiais. Tendo em conta os resultados obtidos, os autores salientam a importância de considerar os dois tipos de variáveis de decisão para obter uma solução mais económica.

Negrão (1996) na sua tese de doutoramento estudou a análise, análise de sensibilidades e optimização de pontes atirantadas metálicas. Para além do trabalho já referido em 2.7.1 acerca da determinação as forças de pré-esforço nos tirantes foram consideradas também variáveis de decisão seccionais e geométricas, tendo recorrido a modelação bidimensional (Simões e Negrão, 1994) e tridimensional da estrutura (Negrão e Simões, 1997). Foi considerado o comportamento materialmente linear do aço da estrutura mas foi tido em conta efeito de catenária dos tirantes através da modelação dos tirantes com elementos biela com módulo de elasticidade equivalente. A influência das fases construtivas também foi tida em conta na análise, através de uma discretização cronológica da estrutura efectuada com uma separação física das subestruturas correspondentes às várias etapas do processo construtivo. À semelhança do que foi referido para a determinação das forças nos tirantes, utilizando o *Princípio da Máxima Entropia* a resolução do problema de optimização *multi-objectivo* foi efectuada através da minimização de uma função escalar convexa. Esta função inclui os diversos objectivos de projecto, nomeadamente, o custo da ponte, as tensões nos elementos e os deslocamentos dos nós da estrutura. Foram também levados a cabo estudos considerando a acção dinâmica dos sismos (Simões e Negrão, 1999), tabuleiros com secção em caixão (Negrão e Simões, 2000) e fiabilidade estrutural (Negrão e Simões, 2004).

Long *et al.* (1999) desenvolveram um modelo numérico para a minimização do custo dos materiais de pontes atirantadas com tabuleiro misto aço-betão e torres em betão. O modelo inclui um módulo de análise não-linear baseado no Método dos Elementos Finitos e um módulo de optimização que utiliza o método da função de penalidade interior para efectuar a minimização da função objectivo que representa o custo da ponte. Foram definidas restrições

para os deslocamentos, momentos flectores, esforços transversos, tensões de fadiga e de encurvadura. As restrições foram estabelecidas de acordo com o Canadian National Standard CAN/CSA-S6-88. Parâmetros como a altura da torre, o comprimento do vão central e o número de tirantes foram considerados fixos durante o processo de optimização, tendo sido consideradas apenas variáveis de decisão seccionais relativas aos elementos das torres e do tabuleiro. O facto de não se considerarem variáveis de decisão associadas às forças de pré-esforço nos tirantes representa uma grande desvantagem deste modelo, na medida em que como já se referiu, destas depende em grande medida o comportamento das pontes atirantadas.

Lute *et al.* (2009) apresentaram um trabalho acerca da minimização do custo de uma ponte atirantada de betão. Foram consideradas variáveis de decisão seccionais e geométricas e restrições nos deslocamentos verticais do tabuleiro e horizontais no topo das torres e ainda nas tensões, tendo em conta as tensões admissíveis e a instabilidade por encurvadura. A solução foi obtida através de um problema de optimização resolvido com uma abordagem conjunta baseada em algoritmos genéticos e em “*support vector machine*” (SVM). O recurso a SVM permitiu reduzir o tempo necessário para convergência da solução usando algoritmos genéticos. As soluções obtidas foram reanalisadas para verificar a sua validade. Para além do elevado tempo de cálculo associado aos métodos baseados em algoritmos genéticos, podem referir-se como principais desvantagens a não consideração dos efeitos diferidos nem das fases construtivas. Tal como no trabalho anterior, o número de tirantes e em especial as forças de pré-esforço nestes elementos não foram consideradas como variáveis de decisão.

Baldomir *et al.* (2010) apresentaram uma metodologia, aplicando um algoritmo de optimização, para minimizar a quantidade de aço de pré-esforço nos tirantes de uma ponte atirantada metálica. A metodologia proposta envolve a utilização conjunta dos programas *ABAQUS* e *MATLAB*, destinando-se o primeiro à análise estrutural e o segundo à optimização. Considerando a estrutura sujeita às cargas permanentes, as forças de pré-esforço são determinadas de modo a garantir deslocamentos verticais nulos no tabuleiro e também deslocamentos horizontais nulos no topo das torres. Posteriormente procede-se à optimização das secções transversais dos tirantes que constituem as variáveis de decisão do problema de optimização. A função objectivo que se pretende minimizar é o volume total de aço dos tirantes, estando sujeita a restrições nas tensões nos tirantes, nos deslocamentos verticais nos seus pontos de ancoragem no tabuleiro e nos deslocamentos horizontais no topo das torres. A solução foi obtida através de um algoritmo que minimiza funções de várias variáveis sujeita a restrições de desigualdade usando uma sequência de programas quadráticos.

Recentemente, Ferreira e Simões (2011) desenvolveram um trabalho relativo à optimização do comportamento dinâmico de uma ponte atirantada metálica utilizando uma estratégia de controlo para fazer face à acção sísmica. A análise dinâmica utilizou uma solução analítica e teve em conta a variabilidade espacial da acção sísmica, a localização dos sensores e o atraso dos actuadores. No algoritmo de optimização consideraram-se como variáveis de decisão, parâmetros geométricos da estrutura (altura das torres e posição das ancoragens dos tirantes no tabuleiro e nas torres), dimensões das secções transversais (dos tirantes, do tabuleiro e das torres) e o algoritmo de controlo. A estratégia de optimização integrada da estrutura e dos dispositivos de controlo permitiu minimizar o custo e melhorar as propriedades dinâmicas da estrutura e a dissipação de energia.

No seguimento do trabalho anterior, os mesmos autores (Ferreira e Simões, 2012) desenvolveram uma abordagem integrada do projecto da estrutura e dos dispositivos de controlo, tendo em vista a minimização do custo de pontes atirantadas pedonais, dotadas de dispositivos de controlo passivos e activos. Formulou-se um problema de optimização multi-objectivo com objectivos de minimização do custo, das tensões, das acelerações e dos deslocamentos. A solução de Pareto foi obtida minimizando uma função escalar convexa obtida com base no *Princípio da Máxima Entropia*. Obtiveram-se soluções óptimas eficientes, quer com dispositivos passivos, quer activos, apresentando diferentes geometrias, distribuições de massa e custo. Os resultados obtidos mostraram que a utilização de uma abordagem integrada permite tirar maior partido dos dispositivos de controlo, reduzindo o peso e consequentemente o custo da estrutura e melhorando a eficiência do controlo.

Na sequência de trabalhos acerca da determinação das forças e das secções dos tirantes, Hassan *et al.* (2013) apresentaram um trabalho relativo ao projecto óptimo de pontes atirantadas mistas com sistema de atirantamento em semi-harpa. A ferramenta computacional desenvolvida integra um modelo de elementos finitos, funções polinomiais simples para avaliar as forças de pré-esforço nos tirantes e a resolução do problema de optimização utilizando um “*Real Coded Genetic Algorithm*” (RCGA). Consideraram-se como variáveis de decisão o número de tirantes, as dimensões das secções transversais dos diversos elementos e parâmetros geométricos, como por exemplo, a altura das torres e os comprimentos dos vãos laterais e central. Definiu-se o custo total da ponte como a função objectivo a minimizar e consideraram-se restrições nos valores dos deslocamentos e dos esforços internos de acordo com o estabelecido no Canadian Highway Bridge Design Code CAN/CSA-S6-06. A análise foi efectuada considerando a ponte completa sujeita a carga permanente e a vários casos de alternância de sobrecargas. Os autores apresentam alguns exemplos de aplicação a uma ponte

atirantada de dimensões reais. Para além do elevado tempo de cálculo associado à utilização de algoritmos genéticos, podem ainda referir-se como desvantagens o facto de se analisar apenas a configuração final, não sendo tidos em conta os efeitos diferidos do betão nem as fases construtivas.

Com base no modelo numérico desenvolvido em estudos anteriores Hassan *et al.* (2015) elaboraram, recentemente, uma base de dados para o projecto óptimo de pontes de tirantes com tabuleiro misto e com sistema de atirantamento em semi-harpa. Esta base de dados contém os valores óptimos de parâmetros definidores das dimensões das secções transversais dos elementos e da geometria global da ponte, sendo apresentados em função do comprimento total da mesma. O estudo foi levado a cabo para pontes com comprimento total entre os 250 m e os 700 m. Os autores referem ainda a utilidade prática desta base de dados no pré-dimensionamento e na estimativa de custo deste tipo de estruturas.

Capítulo 3 - Modelação e Análise Estrutural

3.1. Introdução

No capítulo que agora se inicia descrevem-se detalhadamente os vários aspectos relacionados com a modelação numérica e a análise estrutural de pontes atirantadas de betão, que foram considerados no desenvolvimento do presente trabalho.

No projecto de qualquer estrutura a análise é fundamental para a determinação dos deslocamentos e dos esforços internos a fim de se proceder, posteriormente, à verificação das condições de segurança estipuladas na regulamentação. Deste modo, a análise estrutural deve possibilitar a adequada modelação da estrutura e dos materiais que a constituem, assim como a consideração de todos os efeitos relevantes para a determinação do seu comportamento. No caso particular das pontes atirantadas de betão, e tal como foi referido no capítulo anterior, deve prestar-se especial atenção à modelação e análise do faseamento construtivo, à contabilização dos efeitos diferidos do comportamento do betão e ainda aos efeitos geometricamente não-lineares.

Deste modo, começa-se por descrever os aspectos gerais da análise estrutural, justificando-se as opções tomadas no desenvolvimento do modelo numérico, assim como a organização do programa de computador desenvolvido e os elementos finitos utilizados. Apresentam-se também os tipos de secções transversais consideradas para a modelação de pontes atirantadas de betão e as expressões programadas para o cálculo das suas propriedades geométricas.

De seguida faz-se a descrição da modelação numérica do betão estrutural, apresentando-se as propriedades do betão, do aço das armaduras passivas e do aço de pré-esforço a utilizar nos tirantes e nas armaduras activas dos elementos de betão.

O betão, quando submetido a um estado de tensão, para além de sofrer uma deformação instantânea caracteriza-se por apresentar também um comportamento viscoso exibindo deformação ao longo do tempo. Por conseguinte, apresenta-se a lei constitutiva do betão e presta-se especial atenção à descrição das propriedades dependentes do tempo (maturação, fluência e retracção) e que se traduzem nos efeitos diferidos. Tendo em vista a consideração dos mesmos no modelo de análise desenvolvido, apresentam-se os modelos numéricos respectivos propostos no EC2 (EN 1992-1-1, 2010).

Estes efeitos devidos ao comportamento reológico do betão assumem uma importância reconhecida no comportamento de estruturas de betão, manifestando-se através do aumento das deformações ao longo do tempo e da redistribuição de tensões e de esforços internos, incluindo perdas diferidas de pré-esforço. Tal como já foi salientado no Capítulo 2, tendo em conta resultados de estudos anteriores, estes efeitos devem ser contabilizados na análise de pontes atirantadas de betão pois condicionam a sua resposta, representando um aspecto distintivo na análise estrutural de pontes de tirantes executadas em betão quando comparadas com as metálicas (Hewson, 2002).

No âmbito do presente trabalho admitiu-se o comportamento do betão baseado na viscoelasticidade linear. De acordo com as indicações do EC2 (EN 1992-1-1, 2010), esta hipótese é válida admitindo que as tensões que se verificam no betão são inferiores a $0,45f_{ck}(t_0)$.

Os factores condicionantes e os processos envolvidos na evolução das propriedades do betão são complexos, pelo que, aquando da construção de uma ponte de tirantes, deverá dispor-se de dados experimentais referentes ao betão que está a ser utilizado, de modo a minimizar os desvios entre os valores previstos pelos modelos numéricos e os observados em obra. Deste modo, para além de ensaios laboratoriais para determinação das propriedades mecânicas do betão são também realizadas observações *in situ*. Neste sentido, é habitual a utilização de prismas compensadores, colocados em obra, para caracterizar de modo mais rigoroso os fenómenos de fluência e retracção, permitindo consequentemente uma modelação numérica mais realista (Santos, 2002; Félix, 2004; Santos, 2007; Ferraz, 2010). Com os valores medidos é possível, por exemplo, como proposto por Félix (2004) proceder ao ajuste das leis de fluência e retracção do EC2 (EN 1992-1-1, 2010) de modo a melhorar o comportamento do modelo numérico na previsão da resposta estrutural.

Fruto de vasta investigação existem diversos modelos para simular o comportamento diferido do betão, como por exemplo, Bazant e Panula, CEB-FIP Model Code 90, ACI Comitee 209, British Standard BS8110-1997 e EC2 (Póvoas, 1991; Ghali *et al.*, 2002). No âmbito do presente trabalho optou-se por utilizar o modelo proposto no EC2 (EN 1992-1-1, 2010), pois este documento contém as recomendações actuais a nível europeu para o projecto de estruturas de betão.

No presente capítulo presta-se ainda especial atenção à modelação numérica da deformação de fluência para a situação mais geral de tensão variável ao longo do tempo, tal como ocorre durante o processo construtivo. Assim, referem-se os diversos métodos para a

modelação dos efeitos viscoelásticos do betão sob tensão variável, e apresenta-se em detalhe a metodologia baseada na aproximação da função de fluência por uma série de Dirichlet que é adoptada neste trabalho.

Posteriormente descrevem-se ainda os vários aspectos e opções tomadas no modelo desenvolvido no que concerne à análise evolutiva da estrutura, durante a construção pelo método dos avanços sucessivos, e à consideração dos efeitos geometricamente não-lineares. Para cada um dos aspectos considerados na análise estrutural, nomeadamente, os efeitos diferidos, o faseamento construtivo e os efeitos geometricamente não-lineares, apresentam-se exemplos de verificação para validação dos resultados obtidos com o modelo numérico desenvolvido.

3.2. Análise estrutural

3.2.1. Considerações gerais

As pontes de tirantes caracterizam-se por apresentarem um sistema estrutural de natureza discreta constituído por três subsistemas principais: os tirantes, o tabuleiro e as torres. Na análise estrutural são geralmente modeladas como estruturas reticuladas, utilizando-se quer modelos planos quer tridimensionais. Na modelação do tabuleiro podem utilizar-se ainda elementos finitos laminares.

Apesar dos potentes meios de cálculo actualmente existentes possibilitarem o recurso a modelos tridimensionais e modelações cada vez mais sofisticadas, os modelos planos continuam a ser utilizados e a desempenhar um papel importante não só na investigação como também no projecto de pontes de tirantes (Walther *et al.*, 1999; Chen e Duan, 2000; Hewson, 2003; Pedro, 2007).

No âmbito do projecto de pontes de tirantes reconhece-se a importância da consideração das acções dinâmicas como o vento ou sismo e a consequente resposta tridimensional da estrutura face às mesmas. No entanto, considera-se fora do âmbito do presente trabalho o tratamento destas acções. A análise detalhada de cada uma delas justificava por si só um trabalho de Doutoramento.

Deste modo, o estudo levado a cabo centrou-se na análise face a acções estáticas, quer no decorrer da fase construtiva quer em condições de serviço, prestando-se especial atenção ao aspecto distintivo deste tipo de estruturas, ou seja, a determinação das forças nos tirantes. Nestas condições as pontes de tirantes exibem um comportamento distinto nas direcções longitudinal e transversal, podendo em muitas situações a verificação da segurança dos seus

elementos ser feita considerando modelos planos em cada uma das direcções indicadas (Almeida, 1989; Walther *et al.*, 1999; Chen e Duan, 2000; Hewson, 2003; Pedro, 2007).

Para além deste aspecto, considera-se ser importante dispor-se, na fase de estudo prévio, de uma ferramenta de auxílio ao projecto de pontes de tirantes que contemple a generalidade das acções e dos efeitos relevantes durante a construção e em serviço. Por conseguinte, a adopção de um modelo plano permitiu alguma economia de tempo no desenvolvimento do modelo numérico possibilitando a abordagem de um leque mais vasto de problemas. Procurou-se assim, desenvolver um modelo de análise estrutural, análise de sensibilidades e optimização que permitisse a obtenção de soluções base para servirem de ponto de partida para a análise e dimensionamento detalhados, sendo necessariamente verificadas e podendo vir a ser ajustadas em fases subsequentes do projecto de pontes atirantadas de betão.

De referir ainda que a adopção de um modelo plano não implica perda de generalidade, pois a formulação seguida no desenvolvimento do modelo numérico pode ser facilmente adoptada na criação de um modelo tridimensional. Este aspecto será naturalmente um dos avanços futuros do presente trabalho.

Para levar a cabo o objectivo principal de conceber uma ferramenta de auxílio ao projecto de pontes atirantadas de betão utilizando um algoritmo de optimização torna-se necessário implementar um procedimento de análise de sensibilidades. Tendo em vista o cálculo das sensibilidades através do método directo, que é usado neste trabalho tal como se justifica na secção 4.3.1, é necessário ter acesso ao código-fonte do programa de análise. Por conseguinte, desenvolveu-se um programa de computador para a análise de pontes atirantadas de betão baseado no Método dos Elementos Finitos.

Como qualquer método numérico, a aplicação do Método dos Elementos Finitos é feita através da sua implementação a nível de cálculo computacional. Neste sentido, a primeira linguagem usada na programação do Método dos Elementos Finitos foi o *FORTRAN* (Oñate, 2009). Com o desenvolvimento dos computadores surgiram novas linguagens com capacidades e ferramentas específicas para diversos campos de aplicação, sempre com o objectivo de simplificar a codificação dos algoritmos e otimizar os recursos do computador.

Não obstante o *FORTRAN* continuar a ser uma linguagem de referência na aplicação do Método dos Elementos Finitos, as novas linguagens e ferramentas de programação permitem simplificar a escrita dos algoritmos e recorrem a bibliotecas de recursos específicos que optimizam a memória do computador e, conseqüentemente, o tempo de cálculo. Este é o caso concreto do *MATLAB* que, para além de ser uma ferramenta de investigação, permite escrever códigos que são interpretados aquando da sua execução. Ainda que do ponto de vista de uma

programação óptima, as linguagens interpretadas sejam muito lentas, o *MATLAB* permite fazer uso de toda a biblioteca matricial implementada, otimizando deste modo os cálculos, competindo eficazmente com linguagens compiladas. Trata-se de uma ferramenta computacional, amplamente utilizada em diversos campos da Engenharia, concebida para trabalhar com matrizes, facilitando todas as operações de álgebra matricial, do ponto de vista numérico, de armazenamento de dados e de gestão de memória, tornando totalmente transparente o uso de rotinas e algoritmos que, em linguagens como o FORTRAN, seriam complexos de implementar (Kwon e Bang, 1997; Oñate, 2009).

Deste modo, procurando fazer uso das suas potencialidades, desenvolveu-se de raiz, em ambiente *MATLAB*, um programa de computador que inclui um módulo de análise estrutural através do Método dos Elementos Finitos. Para tal, implementaram-se no programa dois elementos finitos lineares com formulação explícita, o elemento de barra e o elemento de viga de Euler-Bernoulli, de modo a permitirem a modelação e análise de pontes atirantadas. De seguida, nas secções 3.2.2 e 3.2.3, descreve-se a formulação das matrizes de rigidez e dos vectores de forças nodais equivalentes elementares de cada um dos elementos finitos considerados.

O Método dos Elementos Finitos baseia-se na subdivisão, de um domínio contínuo, numa malha de elementos finitos, que não se sobrepõem e que se ligam entre si em pontos designados por nós. Em problemas de análise estrutural as incógnitas são os deslocamentos nodais, sendo o campo de deslocamentos em cada elemento aproximado usando funções contínuas. Para cada elemento calcula-se a matriz de rigidez e o vector de forças nodais equivalentes, sendo estes posteriormente agrupados para formarem, respectivamente, a matriz de rigidez e o vector de forças nodais equivalentes globais da estrutura. Deste modo, o sistema de equações de equilíbrio a respeito das forças nodais da estrutura pode ser escrito como

$$\underline{K} \cdot \underline{u} = \underline{F} \quad (3.1)$$

A partir dos valores dos deslocamentos dos nós da malha de elementos finitos calculam-se as deformações e tensões a nível elementar através das seguintes expressões

$$\underline{\varepsilon}^e = \underline{B}^e \cdot \underline{u}^e \quad (3.2)$$

$$\underline{\sigma}^e = \underline{D} \cdot \underline{B}^e \cdot \underline{u}^e \quad (3.3)$$

No que concerne à organização geral do programa de computador desenvolvido pode referir-se que o mesmo é constituído por um módulo de análise estrutural e outro módulo destinado à análise de sensibilidades e optimização. Para ilustrar o funcionamento e os vários

módulos do programa de computador desenvolvido apresenta-se, na Figura 3.1, um diagrama de blocos do mesmo.

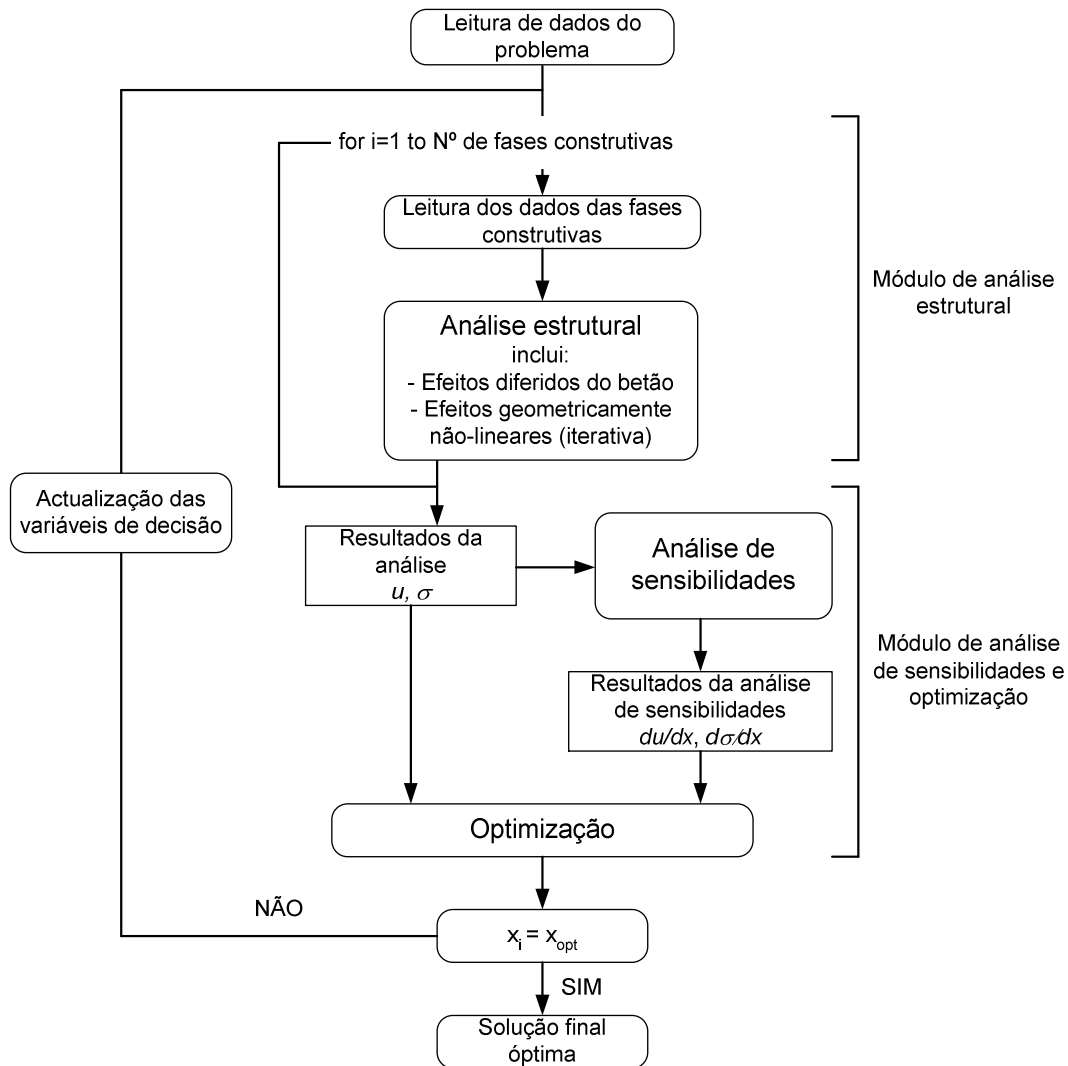


Figura 3.1 – Diagrama de blocos do programa de computador desenvolvido

Como se pode observar na Figura 3.1 o modelo numérico desenvolvido inclui a análise estrutural, a análise de sensibilidades e a optimização. No presente capítulo descrevem-se os vários aspectos relacionados com o módulo de análise estrutural. O módulo de análise de sensibilidades e de optimização estrutural será descrito detalhadamente no Capítulo 4.

Como complemento ao programa de análise, análise de sensibilidades e optimização procedeu-se também ao desenvolvimento de rotinas para representação gráfica dos dados e resultados dos exemplos numéricos. Deste modo, o programa de computador desenvolvido possibilita a representação da malha de elementos finitos, da deformada e dos diagramas de esforços internos (momento flector, esforço transversal e esforço axial).

3.2.2. Elemento finito de barra

O elemento de barra é um elemento linear com dois nós, sendo os graus de liberdade as translações axiais e transversais nesses nós. A fim de permitir a conectividade de elementos de barra e de viga (que possui 3 graus de liberdade por nó) foram considerados dois graus de liberdade adicionais passivos, que correspondem às rotações nos nós. Considera-se ainda que o módulo de elasticidade (E) e a área da secção transversal do elemento (A) são constantes ao longo do seu comprimento. Na Figura 3.2 representa-se o elemento de barra e os respectivos graus de liberdade considerados na formulação do mesmo.

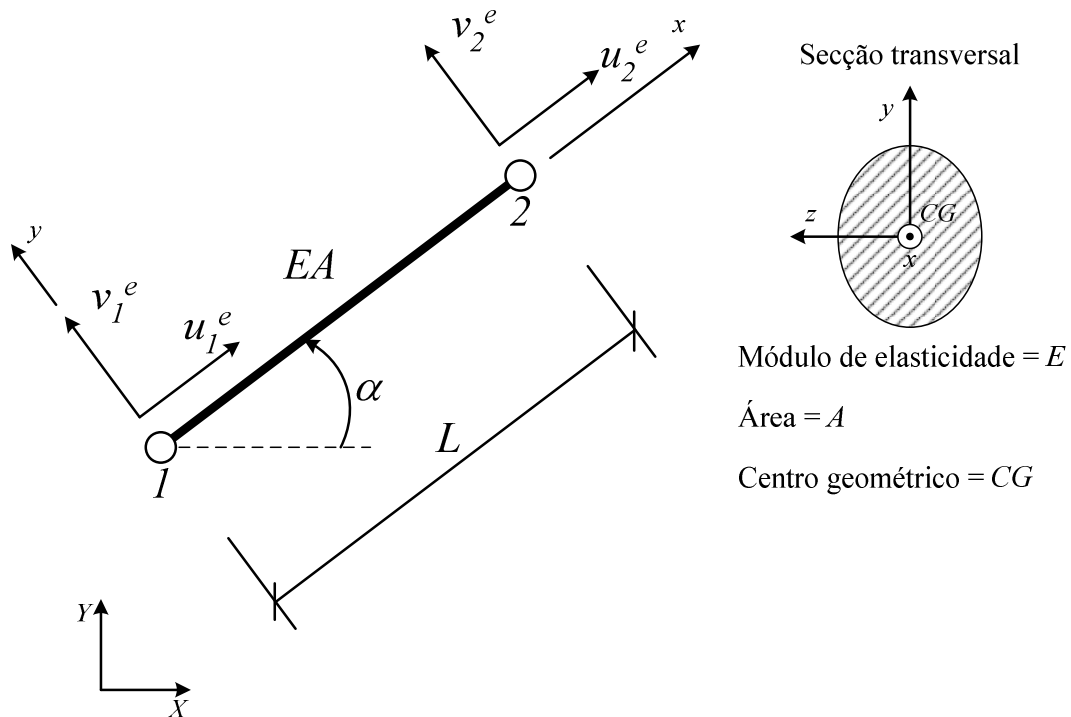


Figura 3.2 – Elemento finito de barra

Tendo em conta os graus de liberdade indicados é possível escrever o campo de deslocamentos num ponto qualquer do elemento a partir das funções de forma e do vector de deslocamentos nodais

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & N_2(x) & 0 \\ 0 & N_1(x) & 0 & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \end{Bmatrix} = \underline{N} \cdot \underline{u}^e \quad (3.4)$$

Considerando as funções de forma lineares que aproximam o campo de deslocamentos no elemento, têm-se as seguintes expressões:

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \qquad N_2(x) = \frac{x}{L} \qquad (3.5)$$

Estabelecendo o equilíbrio do elemento através da aplicação do *Princípio dos Trabalhos Virtuais* ou o *Princípio da Energia Potencial Total Mínima* é possível obter as expressões da matriz de rigidez e dos vectores de forças nodais equivalentes elementares. Desta forma, a matriz de rigidez é dada pela conhecida expressão geral (Cheung e Yeo, 1979; Oñate, 1995; Zienkiewicz e Taylor, 2000)

$$\underline{K}^e = \int_V \underline{B}^{eT} \cdot \underline{D} \cdot \underline{B}^e dV \qquad (3.6)$$

que no caso do elemento de barra se pode escrever na forma

$$\underline{K}^e = A \cdot \int_0^L \underline{B}^{eT} \cdot \underline{D} \cdot \underline{B}^e dx \qquad (3.7)$$

obtendo-se, por conseguinte, a matriz de rigidez elementar para este elemento

$$\underline{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.8)$$

ou, incluindo os coeficientes relativos aos graus de liberdade passivos

$$\underline{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \qquad (3.9)$$

onde ε são valores residuais destinados a evitar a singularidade da matriz de rigidez global quando o grau de liberdade é partilhado apenas por elementos de barra.

Relativamente ao vector de forças nodais equivalentes à acção do peso próprio do elemento tem-se a seguinte expressão

$$\underline{f}_b^e = \int_V \underline{N}^T \cdot \underline{b} dV = \left\{ -\frac{g_x \cdot L}{2} \quad -\frac{g_y \cdot L}{2} \quad 0 \quad -\frac{g_x \cdot L}{2} \quad -\frac{g_y \cdot L}{2} \quad 0 \right\}^T \qquad (3.10)$$

onde g_x e g_y representam as componentes axial e transversal da carga devido ao peso próprio. Estas são obtidas através do produto do peso volúmico (γ) do material do elemento pela respectiva área da secção transversal (A) e com base no ângulo (α) entre o eixo do elemento e a direcção horizontal.

Para efectuar o posterior agrupamento da matriz de rigidez e do vector de forças nodais equivalentes da estrutura é necessário efectuar a passagem das grandezas elementares, do respectivo referencial local, para o referencial cartesiano global através das expressões

$$\underline{K}_g^e = \underline{T}^{eT} \cdot \underline{K}^e \cdot \underline{T}^e \quad (3.11)$$

$$\underline{F}_g^e = \underline{T}^{eT} \cdot \underline{f}_b^e \quad (3.12)$$

onde \underline{K}_g^e e \underline{F}_g^e representam, respectivamente, a matriz de rigidez e o vector de forças nodais equivalentes elementares em coordenadas globais. \underline{T}^e representa a matriz de transformação de coordenadas do elemento, compatível com a matriz de rigidez indicada na Equação (3.8), dada por

$$\underline{T}^e = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Após a resolução do sistema de equações de equilíbrio da estrutura, que permite obter os valores dos deslocamentos nodais, calculam-se as tensões a nível elementar utilizando a Equação (3.3). Em termos de tensões estritas, e no caso do elemento de barra, tem-se apenas a tensão axial σ_x , que se considera constante ao longo do elemento e é dada pela expressão

$$\underline{\sigma}^e = \underline{D} \cdot \underline{B}^e \cdot \underline{u}^e = E \cdot \left\{ -\frac{1}{L} \quad 0 \quad \frac{1}{L} \quad 0 \right\} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Em termos de tensões generalizadas, ou seja, em termos de esforços internos, tem-se apenas o esforço axial no elemento dado por

$$\underline{X}^e = \begin{Bmatrix} N_1 \\ 0 \\ N_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

3.2.3. Elemento finito de viga

O elemento finito de viga utilizado é o da formulação de Euler-Bernoulli, com 2 nós e 6 graus de liberdade. Os graus de liberdade em cada nó são as translações axial e transversal ao eixo do elemento e a rotação segundo o eixo perpendicular ao plano, como se representa na Figura 3.3. Considera-se ainda que o módulo de elasticidade (E), a área da secção transversal

do elemento (A) e a inércia em torno do eixo z (I_z) são constantes ao longo do seu comprimento.

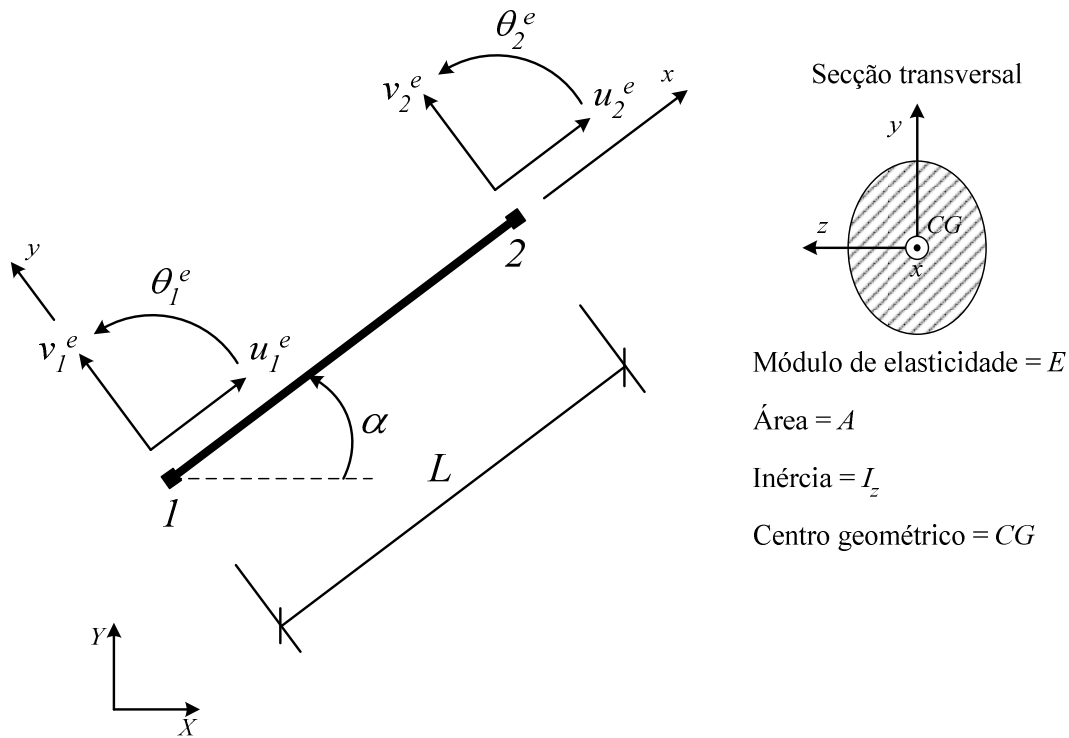


Figura 3.3 – Elemento finito de viga

Na formulação deste elemento assumem-se as hipóteses da teoria clássica de flexão de vigas, daí a designação de elemento de viga de Euler-Bernoulli. Deste modo, as hipóteses consideradas são as seguintes (Oñate, 1995):

- 1) Os deslocamentos transversais (v) de todos os pontos contidos numa secção transversal são pequenos e iguais aos do eixo longitudinal do elemento;
- 2) O deslocamento perpendicular ao plano que contém o eixo do elemento (deslocamento segundo z) é nulo;
- 3) As secções transversais normais ao eixo da viga antes da deformação permanecem planas e ortogonais a esse eixo após a deformação.

Tendo em conta as hipóteses enunciadas e os graus de liberdade nodais indicados, pode exprimir-se o campo de deslocamentos no elemento em função dos deslocamentos nodais e das funções de forma

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0 & | & N_4(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(x) & N_3(x) & | & 0 & N_5(x) & N_6(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ \theta_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ \theta_2^e \end{Bmatrix} = \underline{N} \cdot \underline{u}^e \quad (3.16)$$

Utilizando as funções de forma lineares, já apresentadas na Equação (3.5), para aproximar o deslocamento axial (u) e fazendo uso das funções de forma polinomiais de Hermite, para aproximar o deslocamento transversal (v) pode escrever-se

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - \frac{x}{L} & N_4(x) &= \frac{x}{L} \\ N_2(x) &= 1 - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + \frac{2 \cdot x^3}{L^3} & N_5(x) &= \frac{3 \cdot x^2}{L^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3} \\ N_3(x) &= x - \frac{2 \cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & N_6(x) &= \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Deste modo, e tal como foi referido na secção anterior, a matriz de rigidez elementar pode ser obtida através da aplicação do *Princípio dos Trabalhos Virtuais* ou do *Princípio da Energia Potencial Total Mínima*, obtendo-se a expressão geral dada pela Equação (3.6). Resolvendo essa equação para o caso particular do elemento de viga chega-se à conhecida matriz de rigidez deste elemento

$$\underline{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Relativamente ao vector de forças nodais equivalentes à acção do peso próprio, obtém-se

$$\underline{f}_b^e = \int_v \underline{N}^T \cdot \underline{b} dV = \left\{ -\frac{g_x \cdot L}{2} \quad -\frac{g_y \cdot L}{2} \quad -\frac{g_y \cdot L^2}{12} \quad -\frac{g_x \cdot L}{2} \quad -\frac{g_y \cdot L}{2} \quad \frac{g_y \cdot L^2}{12} \right\}^T \quad (3.19)$$

em que g_x e g_y têm o mesmo significado que na Equação (3.10).

No que respeita ao vector de forças nodais equivalentes às acções de vão, tem-se a expressão geral

$$\underline{f}_t^e = \int_0^L \underline{N}^T \cdot \underline{q} \, dx \quad (3.20)$$

que, para o caso de cargas uniformemente distribuídas ao longo do comprimento do elemento se obtém

$$\underline{f}_t^e = \left\{ \frac{q_x \cdot L}{2} \quad \frac{q_y \cdot L}{2} \quad \frac{q_y \cdot L^2}{12} \quad \frac{q_x \cdot L}{2} \quad \frac{q_y \cdot L}{2} \quad -\frac{q_y \cdot L^2}{12} \right\}^T \quad (3.21)$$

em que q_x e q_y representam, respectivamente, os valores das cargas segundo as direcções locais x e y .

Tal como foi referido para o elemento de barra é necessário efectuar a passagem destas grandezas elementares do respectivo referencial local para o referencial cartesiano global. A transformação da matriz de rigidez elementar é feita utilizando a expressão indicada na Equação (3.11). No que respeita ao vector de forças nodais equivalentes elementar, aplica-se a expressão

$$\underline{F}_g^e = \underline{T}^{eT} \cdot \underline{F}^e = \underline{T}^{eT} \cdot (\underline{f}_b^e + \underline{f}_t^e) \quad (3.22)$$

De referir ainda que no caso do elemento de viga a matriz de transformação de coordenadas é dada por

$$\underline{T}^e = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Novamente, após a resolução do sistema de equações de equilíbrio da estrutura e consequente determinação dos valores dos deslocamentos nodais, determinam-se, a nível elementar, as tensões estritas e generalizadas.

No que respeita aos esforços internos, têm-se agora o esforço axial, o esforço transversal e o momento flector nos nós inicial e final do elemento. Estes são determinados segundo a convenção de Resistência de Materiais e aplicando a expressão

$$\underline{X}^e = \begin{Bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ \theta_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ \theta_2^e \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

Para o caso do ponto central do elemento pode ainda escrever-se

$$\underline{X}^e = \begin{Bmatrix} N \\ V \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{EI}{L} & 0 & 0 & \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ \theta_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ \theta_2^e \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

Em termos de tensões estritas tem-se, não apenas a tensão axial (σ_n) devido à deformação axial, mas também a tensão axial nas fibras superior (σ_{fs}) e inferior (σ_{fi}) da secção devido à deformação de flexão e ainda a tensão tangencial máxima (τ). A formulação em termos de tensões estritas baseia-se nas hipóteses de variação linear das tensões normais e da distribuição parabólica de tensões tangenciais ao longo da altura da secção transversal. Considerando a relação entre esforços internos e tensões tem-se, para o ponto central do elemento, o seguinte vector de tensões

$$\underline{\sigma}^e = \begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_{fs} \\ \sigma_{fi} \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{N}{A} \\ \frac{M \cdot y_{fs}}{I_z} \\ \frac{M \cdot y_{fi}}{I_z} \\ \frac{V \cdot S}{I_z \cdot b} \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

onde y_{fs} e y_{fi} , representam, respectivamente, as posições da fibra superior e da fibra inferior da secção medidas a partir do centro geométrico da mesma. S e b representam, respectivamente, o momento estático da meia-secção e a largura desta.

O cálculo das tensões poderia ser efectuado em outros pontos, contudo, optou-se pelo cálculo no ponto central do elemento por facilitar a posterior definição dos objectivos de tensão a utilizar no algoritmo de optimização, como se descreverá em detalhe no Capítulo 4. Assim, ter-se-ão dois objectivos de tensão por elemento finito, as tensões na fibra superior e fibra inferior no ponto central do elemento. Apesar das tensões serem calculadas apenas num ponto de cada elemento finito, adoptando uma discretização adequada, esta abordagem permite contabilizar os valores relevantes da distribuição de tensões na estrutura.

3.2.4. Propriedades das secções transversais dos elementos

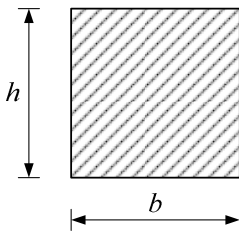
Como já foi referido anteriormente, as pontes de tirantes são constituídas por três subsistemas estruturais principais: tirantes, torres e tabuleiro. Cada um destes elementos apresenta diferentes secções transversais. Se no caso dos tirantes a secção transversal é um cabo constituído pelo agrupamento de cordões de aço de pré-esforço, no caso do tabuleiro a escolha das secções transversais é mais diversa. No caso das pontes executadas em betão, e tal como já foi referido na secção 2.3.4, as secções transversais habituais são em laje vigada, em laje esbelta e em caixão uni ou tricelular. No que respeita às torres, apesar de a geometria poder ser diversa, como se apresentou na secção 2.3.3, as secções transversais são geralmente rectangulares ocas com dimensão variável ao longo da altura.

Para uma conveniente modelação das pontes atirantadas de betão e para dotar o programa de uma maior generalidade foi criada uma biblioteca de secções transversais para utilizar na modelação dos vários elementos estruturais. Deste modo, foram programadas as propriedades geométricas dos seguintes tipos de secções transversais:

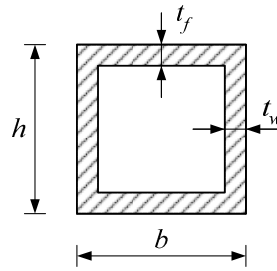
- Secção rectangular cheia;
- Secção rectangular oca;
- Secção circular;
- Secção em laje vigada;
- Secção em caixão unicelular;
- Secção em caixão tricelular;
- Secção de tirante constituído por cordões de aço de pré-esforço.

Na Figura 3.4 faz-se a representação geométrica de cada um destes tipos de secções transversais e indicam-se os parâmetros definidores das diversas dimensões das mesmas. Para cada um destes tipos de secções transversais apresentam-se, de seguida, as correspondentes propriedades geométricas, área (A), inércia em torno do eixo local z (I_z) e altura do centro geométrico medida a partir da face inferior da secção (h_{CG}).

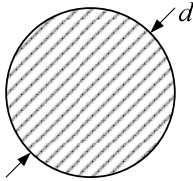
a) Secção rectangular cheia



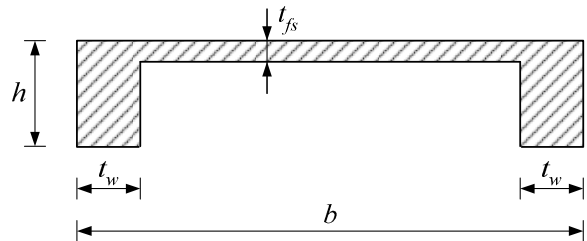
b) Secção rectangular oca



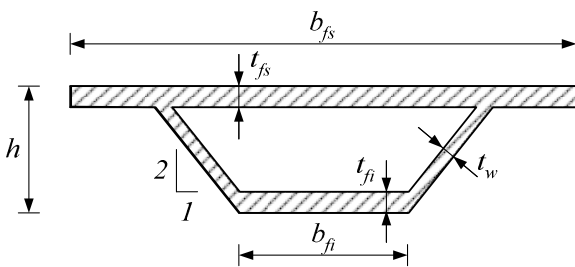
c) Secção circular



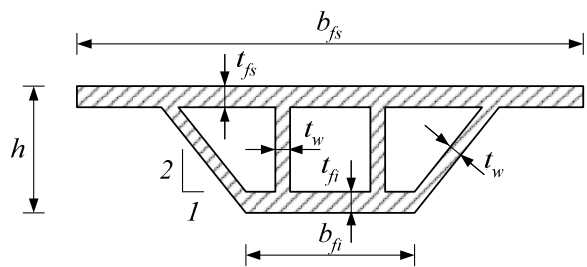
d) Secção em laje vigada



e) Secção em caixão unicelular



f) Secção em caixão tricelular



g) Secção de tirante

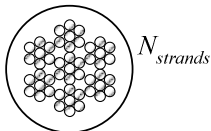


Figura 3.4 – Tipos de secções transversais disponíveis no programa

a) Secção rectangular cheia

A secção rectangular cheia pode ser considerada como aquela a que correspondem as expressões mais simples. Esta secção caracteriza-se, como se observa na Figura 3.4, por uma altura h e uma largura b . Deste modo, podem escrever-se as seguintes expressões para a área, segundo momento de área (que doravante se designará por momento de inércia ou simplesmente inércia, por simplicidade de exposição) e altura do centro geométrico, respectivamente

$$A = h \cdot b \tag{3.27}$$

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} \tag{3.28}$$

$$h_{CG} = \frac{h}{2} \quad (3.29)$$

b) Secção rectangular oca

A secção rectangular oca é utilizada, fundamentalmente, na secção transversal das torres. Tal como a secção rectangular cheia, é caracterizada por uma altura h e uma largura b mas, para além destas dimensões, é necessário considerar as respectivas espessuras das paredes. Considerou-se o parâmetro t_w para representar a espessura das paredes de comprimento h e o parâmetro t_f para representar a espessura das paredes de comprimento b . Assim, pode escrever-se a área da secção transversal através da expressão

$$A = b \cdot h - ((b - 2 \cdot t_w) \cdot (h - 2 \cdot t_f)) \quad (3.30)$$

sendo a inércia dada por

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{(b - 2 \cdot t_w) \cdot (h - 2 \cdot t_f)^3}{12} \quad (3.31)$$

e a altura do centro geométrico por

$$h_{CG} = \frac{(b \cdot t_f) \cdot (h - 0,5 \cdot t_f) + (b \cdot t_f) \cdot (0,5 \cdot t_f)}{2 \cdot b \cdot t_f} \quad (3.32)$$

c) Secção circular

No caso da secção circular, conhecendo o seu diâmetro, d , é possível determinar a área, a inércia e altura do centro geométrico da secção transversal, através das expressões

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad (3.33)$$

$$I_z = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \quad (3.34)$$

$$h_{CG} = \frac{d}{2} \quad (3.35)$$

d) Secção em laje vigada

Considerando os parâmetros apresentados na Figura 3.4, pode escrever-se a área da secção transversal em laje vigada através da expressão

$$A = h \cdot b - ((h - t_{fs}) \cdot (b - 2 \cdot t_w)) \quad (3.36)$$

Para simplificar a definição das expressões relativas à inércia e à altura do centro geométrico definiram-se duas áreas e duas inércias parciais, dadas pelas seguintes expressões:

$$A_1 = h \cdot t_w \quad (3.37)$$

$$A_2 = (b - 2 \cdot t_w) \cdot t_{fs} \quad (3.38)$$

$$I_1 = \frac{t_w \cdot h^3}{12} \quad (3.39)$$

$$I_2 = \frac{(b - 2 \cdot t_w) \cdot t_{fs}^3}{12} \quad (3.40)$$

Por conseguinte, pode escrever-se a inércia da secção total através da expressão

$$I_z = 2 \cdot (I_1 + (0,5 \cdot h - h_{CG})^2 \cdot A_1) + I_2 + (h - 0,5 \cdot t_{fs} - h_{CG})^2 \cdot A_2 \quad (3.41)$$

sendo a altura do centro geométrico dada por

$$h_{CG} = \frac{\left(2 \cdot A_1 \cdot \frac{h}{2}\right) + (A_2 \cdot (h - 0,5 \cdot t_{fs}))}{2 \cdot A_1 + A_2} \quad (3.42)$$

e) Secção em caixão unicelular

Esta secção transversal caracteriza-se através da altura h e das larguras das lajes superior e inferior, b_{fs} e b_{fi} , respectivamente. Para além destas dimensões é necessário conhecer ainda as espessuras das almas, t_w , da laje superior, t_{fs} , e da laje inferior, t_{fi} . Tal como para o tipo de secção transversal apresentado anteriormente, e para simplificar as expressões da área, inércia e altura do centro geométrico, definem-se as seguintes áreas parciais

$$A_1 = b_{fs} \cdot t_{fs} \quad (3.43)$$

$$A_2 = b_{fi} \cdot t_{fi} \quad (3.44)$$

$$A_3 = l_w \cdot t_w \quad (3.45)$$

em que l_w representa o comprimento das almas inclinadas, e é dado por

$$l_w = \frac{h - t_{fs} - t_{fi}}{\sin(\arctan(2))} \quad (3.46)$$

A partir das áreas A_1 , A_2 e A_3 é possível escrever a área total da secção transversal através da expressão

$$A = A_1 + A_2 + 2 \cdot A_3 \quad (3.47)$$

Definiram-se também as seguintes inércias parciais

$$I_1 = \frac{b_{fs} \cdot t_{fs}^3}{12} \quad (3.48)$$

$$I_2 = \frac{b_{fi} \cdot t_{fi}^3}{12} \quad (3.49)$$

$$I_{3u} = \frac{t_w \cdot l_w^3}{12} \quad (3.50)$$

$$I_{3v} = \frac{l_w \cdot t_w^3}{12} \quad (3.51)$$

$$I_3 = 0,5 \cdot (I_{3u} + I_{3v}) + 0,5 \cdot (I_{3u} - I_{3v}) \cos(2 \cdot (-\arctan(0,5))) \quad (3.52)$$

Desta forma, a inércia da secção transversal total é dada por

$$I = I_1 + (h - 0,5 \cdot t_{fs} - h_{CG})^2 \cdot A_1 + I_2 + (h_{CG} - 0,5 \cdot t_{fi})^2 \cdot A_2 + 2 \cdot \left(I_3 + \left(h_{CG} - \frac{h - t_{fs} - t_{fi}}{2} - t_{fi} \right)^2 \cdot A_3 \right) \quad (3.53)$$

A posição do centro geométrico da secção, referida à face inferior do caixão, pode ser expressa por

$$h_{CG} = \frac{(h - 0,5 \cdot t_{fs}) \cdot A_1 + 0,5 \cdot t_{fi} \cdot A_2 + 2 \cdot \left(\frac{h - t_{fs} - t_{fi}}{2} + t_{fi} \right) \cdot A_3}{A} \quad (3.54)$$

f) Secção em caixão tricelular

Para este tipo de secção transversal também se segue o procedimento anterior com a definição de áreas e inércias parciais, a fim de simplificar as expressões das propriedades geométricas. Deste modo, definem-se as seguintes áreas parciais

$$A_1 = b_{fs} \cdot t_{fs} \quad (3.55)$$

$$A_2 = b_{fi} \cdot t_{fi} \quad (3.56)$$

$$A_3 = l_w \cdot t_w \quad (3.57)$$

$$A_4 = l_w \cdot \sin(\arctan(2)) \cdot t_w \quad (3.58)$$

em função das quais se pode escrever a expressão para cálculo da área total da secção

$$A = A_1 + A_2 + 2 \cdot A_3 + 2 \cdot A_4 \quad (3.59)$$

Definiram-se também as seguintes inércias parciais

$$I_1 = \frac{b_{fs} \cdot t_{fs}^3}{12} \quad (3.60)$$

$$I_2 = \frac{b_{fi} \cdot t_{fi}^3}{12} \quad (3.61)$$

$$I_{3u} = \frac{t_w \cdot l_w^3}{12} \quad (3.62)$$

$$I_{3v} = \frac{l_w \cdot t_w^3}{12} \quad (3.63)$$

$$I_3 = 0,5 \cdot (I_{3u} + I_{3v}) + 0,5 \cdot (I_{3u} - I_{3v}) \cos(2 \cdot (-\arctan(0.5))) \quad (3.64)$$

$$I_4 = \frac{t_w \cdot (h - t_{fs} - t_{fi})^3}{12} \quad (3.65)$$

Desta forma, a inércia da secção transversal total é dada por

$$I = I_1 + (h - 0,5 \cdot t_{fs} - h_{CG})^2 \cdot A_1 + I_2 + (h_{CG} - 0,5 \cdot t_{fi})^2 \cdot A_2 + 2 \cdot \left(I_3 + \left(h_{CG} - \frac{h - t_{fs} - t_{fi}}{2} - t_{fi} \right)^2 \cdot A_3 \right) + 2 \cdot \left(I_4 + \left(h_{CG} - \frac{h - t_{fs} - t_{fi}}{2} - t_{fi} \right)^2 \cdot A_4 \right) \quad (3.66)$$

No que respeita à altura do centro geométrico da secção, esta pode ser expressa por

$$h_{CG} = \left(\begin{array}{l} (h - 0,5 \cdot t_{fs}) \cdot A_1 + 0,5 \cdot t_{fi} \cdot A_2 + 2 \cdot \left(\frac{h - t_{fs} - t_{fi}}{2} + t_{fi} \right) \cdot A_3 \\ + 2 \cdot \left(\frac{h - t_{fs} - t_{fi}}{2} + t_{fi} \right) \cdot A_4 \end{array} \right) / A \quad (3.67)$$

g) Secção de tirante constituído por cordões de aço de pré-esforço

Considerou-se que a secção transversal de um tirante é constituída por um cabo formado por um número, $N_{strands}$, de cordões de 7 fios de aço de pré-esforço 0.6''S (VSL, 2014). Sabendo que cada cordão tem uma área nominal de $1,5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ a área da secção transversal do tirante, em m^2 , é dada por

$$A = 1,5 \times 10^{-4} \cdot N_{strands} \quad (3.68)$$

Na medida em que este tipo de secção transversal é utilizado apenas em elementos de barra não se considerou necessária a definição da correspondente inércia nem da altura do centro geométrico da secção.

3.3. Modelação do betão estrutural

3.3.1. Lei constitutiva do betão

A caracterização do comportamento do betão no que respeita à relação tensão-extensão implica a distinção entre o comportamento aquando da aplicação do carregamento, ou seja, o

comportamento instantâneo, e o comportamento diferido, que ocorre ao longo do tempo. Nesta secção presta-se atenção ao comportamento instantâneo do betão.

Assim, de acordo com o EC2 (EN 1992-1-1, 2010), a relação tensão-extensão em compressão para carregamento uniaxial de curta duração, representa-se na Figura 3.5, e pode ser obtida pela expressão

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2) \cdot \eta} \quad (3.69)$$

em que:

- $\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$;
- ε_{c1} é a extensão correspondente à tensão máxima;
- $k = 1,05 \cdot E_{cm} \cdot \frac{|\varepsilon_{c1}|}{f_{cm}}$;

sendo válida para $0 < |\varepsilon_c| < |\varepsilon_{cu1}|$ em que ε_{cu1} é o valor nominal da extensão última.

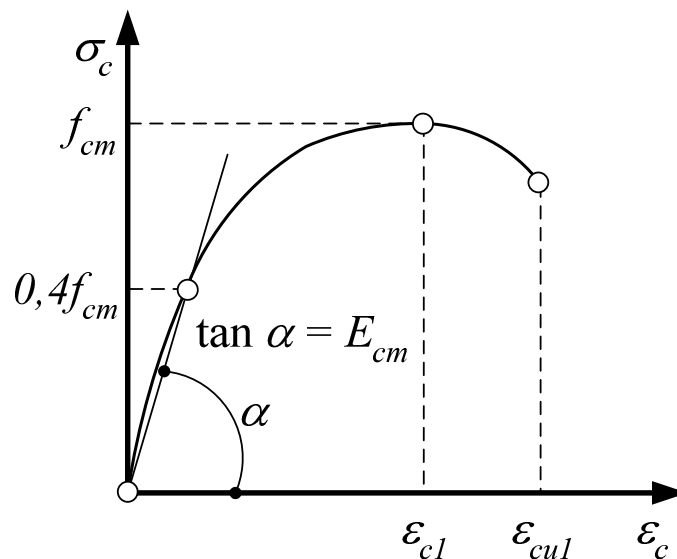


Figura 3.5 – Representação esquemática da relação tensão-extensão instantânea do betão em compressão (adaptado de (EN 1992-1-1, 2010))

Para níveis de tensão moderados, até cerca de $0,4f_{cm}$, pode considerar-se que a relação tensão-extensão é aproximadamente linear podendo, deste modo, definir-se o módulo de elasticidade secante do betão, E_{cm} .

Habitualmente, as propriedades do betão são definidas a partir do valor característico da tensão de rotura à compressão aos 28 dias de idade, f_{ck} . Assim, segundo o EC2 (EN 1992-1-1, 2010), o valor médio da tensão de rotura à compressão pode ser obtido pela expressão

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ [MPa]} \quad (3.70)$$

Do mesmo modo, pode definir-se o valor do módulo de elasticidade secante do betão (em GPa) a partir do valor médio da sua tensão de rotura à compressão (em MPa), aplicando a expressão

$$E_{cm} = 22 \cdot \left[\frac{f_{cm}}{10} \right]^{0,3} \quad (3.71)$$

O betão caracteriza-se ainda por apresentar um comportamento distinto à compressão e à tracção. Novamente, seguindo as indicações do EC2 (EN 1992-1-1, 2010), o valor médio da tensão de rotura do betão à tracção simples, f_{ctm} , pode obter-se através de

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad \text{para } \leq C50/60$$

$$f_{ctm} = 2,12 \cdot \ln \left(1 + \frac{f_{cm}}{10} \right) \quad \text{para } > C50/60 \quad (3.72)$$

definindo-se ainda os quantilhos de 5% e 95% do valor característico da tensão de rotura do betão à tracção simples pelas expressões

$$f_{ctk,0,05} = 0,7 \cdot f_{ctm} \quad (3.73)$$

$$f_{ctk,0,95} = 1,3 \cdot f_{ctm} \quad (3.74)$$

A análise materialmente não-linear considera-se fora do âmbito do presente trabalho. Deste modo, a análise estrutural foi efectuada considerando um comportamento material linear, sendo o comportamento materialmente não-linear tido em conta apenas na verificação da resistência dos elementos, como é prática comum no projecto de estruturas de betão. Durante a construção e em serviço, em que se verificam níveis de tensão moderados, o betão pode considerar-se como um material de comportamento elástico e linear. Por conseguinte, para dimensionamento dos diversos elementos de betão em construção e em serviço limitaram-se, no algoritmo de optimização, as tensões de compressão a $0,45f_{ck}$. Este limite garante também que a análise é realizada dentro do domínio da fluência linear, tal como se referirá na secção 3.3.4.

O comportamento materialmente não-linear do betão foi considerado na formulação do algoritmo de optimização, apenas no que respeita à verificação da resistência dos elementos. Estes aspectos que dizem respeito à formulação do problema de optimização serão abordados detalhadamente no Capítulo 4, mais concretamente na secção 4.2.2 referente à definição dos objectivos de projecto.

3.3.2. Maturação do betão

Como se referiu na secção anterior, para além do comportamento instantâneo, o betão caracteriza-se por apresentar um comportamento dependente do tempo. No âmbito deste trabalho utilizou-se a designação maturação para traduzir o termo “ageing” usado na língua inglesa. Esta designação tem sido adoptada pelo LNEC embora alguns autores utilizem o termo envelhecimento (Santos, 2002).

A maturação do betão caracteriza-se por um aumento progressivo da resistência e da rigidez ao longo do tempo, o que faz com que haja uma progressiva diminuição da deformação de origem mecânica.

De acordo com o que é referido no EC2 (EN 1992-1-1, 2010), o valor médio da tensão de rotura do betão à compressão numa idade t depende do tipo de cimento, da temperatura e das condições de cura, podendo ser estimado através da seguinte expressão

$$f_{cm}(t) = \beta_{cc}(t) \cdot f_{cm} \quad (3.75)$$

em que t representa a idade do betão expressa em dias, f_{cm} o valor médio da tensão de rotura à compressão aos 28 dias de idade e a função $\beta_{cc}(t)$ é definida por:

$$\beta_{cc}(t) = \exp \left\{ s \left[1 - \left(\frac{28}{t} \right)^{1/2} \right] \right\} \quad (3.76)$$

O coeficiente s depende do tipo de cimento e pode ter os seguintes valores:

- $s = 0,20$ para cimento da Classe R;
- $s = 0,25$ para cimento da Classe N;
- $s = 0,38$ para cimento da Classe S.

O EC2 (EN 1992-1-1, 2010) refere ainda que a evolução com o tempo da resistência à tracção é fortemente influenciada pelas condições de cura e de secagem e também pelas dimensões dos elementos estruturais. A evolução do valor médio da resistência à tracção com o tempo pode ser estimada através da expressão:

$$f_{ctm}(t) = (\beta_{cc}(t))^\alpha \cdot f_{ctm} \quad (3.77)$$

em que f_{ctm} é o valor médio da tensão de rotura do betão à tracção simples aos 28 dias de idade e $\alpha = 1$ para $t < 28$ dias e $\alpha = 2/3$ para $t \geq 28$ dias.

No que respeita à variação do valor do módulo de elasticidade com o tempo, o EC2 (EN 1992-1-1, 2010) indica que pode ser estimado por:

$$E_{cm}(t) = (f_{cm}(t)/f_{cm})^{0,3} \cdot E_{cm} \quad (3.78)$$

em que E_{cm} é o valor do módulo de elasticidade secante do betão correspondendo ao valor médio do módulo de elasticidade aos 28 dias de idade.

3.3.3. Retracção do betão

A retracção é definida como a variação de volume que ocorre numa peça de betão desde o final da compactação até se atingir o estado limite de equilíbrio higrométrico com o ambiente, a temperatura constante e na ausência de qualquer tensão aplicada. Nesta definição inclui-se também a expansão que se observa no betão quando este é conservado em meio húmido (Coutinho e Gonçalves, 1994).

A variação de volume que ocorre antes da presa designa-se por retracção plástica e resulta do efeito conjunto do assentamento dos materiais que compõem o betão e da evaporação da água à superfície. A retracção que ocorre após a presa deve-se fundamentalmente à variação de teor em água do betão e inclui três parcelas: a retracção autogénea, a retracção por secagem e a retracção de carbonatação (Coutinho e Gonçalves, 1994).

A retracção autogénea é independente das trocas de humidade com o exterior e resulta do fenómeno de hidratação do cimento. Deste fenómeno resultam produtos cujo volume final é inferior à soma do volume dos componentes anidros com o da água com a qual reagem. A hidratação contínua do cimento origina ainda a passagem da água livre do interior das pastas de cimento, argamassas e betões a água combinada, adsorvida e zeolítica.

A retracção por secagem resulta de trocas de água com o exterior que em geral ocorrem por evaporação, mas que podem ocorrer em sentido inverso por capilaridade, permeabilidade ou por condensação capilar.

A retracção de carbonatação é originada pela combinação do dióxido de carbono da atmosfera com os componentes hidratados do cimento, originando produtos sólidos com volume inferior à soma dos volumes dos reagentes. Esta parcela da retracção é, de um modo geral, a menos significativa.

No presente trabalho considera-se apenas a retracção que ocorre após o início da presa do betão pois só a partir desse momento este adquire as características necessárias para funcionar como material estrutural. Seguindo o modelo de retracção do EC2 (EN 1992-1-1, 2010) consideram-se apenas as parcelas de retracção autogénea e por secagem.

A retracção do betão é condicionada por vários factores que podem ser classificados como intrínsecos e extrínsecos. Os factores intrínsecos, tais como as propriedades dos seus constituintes, as propriedades da mistura e as condições de fabrico, estão associados ao

próprio material. Neste sentido podem referir-se as propriedades do cimento, dos agregados e da água, a dosagem de cimento, o teor em água de amassadura e o período de cura. Os factores extrínsecos estão relacionados com as condições a que o betão está sujeito, nomeadamente a geometria da peça e condições ambientais como a humidade relativa e a temperatura.

A geometria da peça é bastante importante na velocidade com que a retracção por secagem se desenvolve, pois quanto maior for a relação entre a superfície exposta da peça de betão e o seu volume, maior será esta parcela de retracção, por se encontrar facilitada a evaporação da água do betão. Também a temperatura e, principalmente, a humidade relativa do ar influenciam a deformação de retracção, podendo referir-se que, de um modo geral, quanto maior a humidade relativa do ar, menor será a deformação de retracção.

O modelo de retracção proposto no EC2 (EN 1992-1-1, 2010) considera que a extensão total de retracção é constituída por duas componentes, respectivamente a extensão de retracção por secagem e a extensão de retracção autogénea. A primeira evolui lentamente, uma vez que é função da migração da água através do betão endurecido. A extensão de retracção autogénea desenvolve-se durante o endurecimento do betão ocorrendo, na sua maior parte, nos primeiros dias após a betonagem, e é uma função linear da resistência do betão. Deverá ser considerada de modo específico quando se coloca betão novo sobre betão endurecido. Assim, o valor da extensão total de retracção, ϵ_{cs} , é igual a:

$$\epsilon_{cs} = \epsilon_{cd} + \epsilon_{ca} \quad (3.79)$$

em que:

ϵ_{cs} – extensão total de retracção;

ϵ_{cd} – extensão de retracção por secagem;

ϵ_{ca} – extensão de retracção autogénea.

A evolução com o tempo da extensão de retracção por secagem é obtida por:

$$\epsilon_{cd}(t) = \beta_{ds}(t, t_s) \cdot k_h \cdot \epsilon_{cd,0} \quad (3.80)$$

em que:

k_h é um coeficiente que depende da espessura equivalente, h_0 , de acordo com o Quadro 3.1.

Quadro 3.1 – Valores do parâmetro k_h

h_0	k_h
100	1,00
200	0,85
300	0,75
≥ 500	0,70

$$\beta_{ds}(t, t_s) = \frac{(t - t_s)}{(t - t_s) + 0,04\sqrt{h_0^3}} \quad (3.81)$$

em que:

t idade do betão (em dias) na data considerada;

t_s idade do betão (em dias) no início da retracção por secagem (ou expansão), normalmente corresponde ao fim da cura;

h_0 espessura equivalente (em mm) da secção transversal, obtida através da expressão:

$$h_0 = \frac{2A_c}{u} \quad (3.82)$$

onde:

A_c – área da secção transversal de betão;

u – perímetro da parte da secção exposta à secagem.

O valor nominal da extensão de retracção livre por secagem, $\varepsilon_{cd,0}$, é calculado através de:

$$\varepsilon_{cd,0} = 0,85 \left[(220 + 110 \cdot \alpha_{ds1}) \cdot \exp\left(-\alpha_{ds2} \cdot \frac{f_{cm}}{f_{cmo}}\right) \right] \times 10^{-6} \times \beta_{RH} \quad (3.83)$$

com

$$\beta_{RH} = 1,55 \left[1 - \left(\frac{RH}{RH_0} \right)^3 \right] \quad (3.84)$$

onde:

f_{cm} – valor médio da tensão de rotura do betão à compressão (em MPa);

$f_{cmo} = 10$ MPa;

α_{sd1} – coeficiente que depende do tipo de cimento:

= 3 para cimento da Classe S;

= 4 para cimento da Classe N;

= 6 para cimento da Classe R;

α_{sd2} – coeficiente que depende do tipo de cimento:

= 0,13 para cimento da Classe S;

= 0,12 para cimento da Classe N;

= 0,11 para cimento da Classe R;

RH – humidade relativa do ambiente (em %);

$RH_0 = 100\%$.

A extensão de retracção autógena é obtida por:

$$\varepsilon_{ca}(t) = \beta_{as}(t) \cdot \varepsilon_{ca}(\infty) \quad (3.85)$$

em que:

$$\varepsilon_{ca}(\infty) = 2,5 \cdot (f_{ck} - 10) \times 10^{-6} \quad (3.86)$$

$$\beta_{as}(t) = 1 - \exp(-0,2 \cdot t^{0,5}) \quad (3.87)$$

sendo t expresso em dias.

3.3.4. Fluência do betão

A fluência do betão é definida como o aumento da deformação que se verifica ao longo do tempo numa peça de betão devido a uma tensão constante com carácter de permanência (Coutinho e Gonçalves, 1994).

A fluência do betão é um fenómeno de grande complexidade e ainda não totalmente conhecido. Pode referir-se que esta resulta de alterações na estrutura interna do betão provocadas por fenómenos físicos e químicos que ocorrem em virtude da tensão aplicada. Podem referir-se os seguintes fenómenos: o escorregamento cristalino, principalmente ao longo dos planos naturais de movimento da estrutura cristalina do cimento hidratado; o movimento da água adsorvida pelos produtos de hidratação do cimento; a deformação viscosa devida a um escorregamento muito lento entre as partículas, com um coeficiente de viscosidade crescente no tempo; e um aumento da solubilidade dos componentes do cimento (Coutinho e Gonçalves, 1994).

A fluência é condicionada por diversos factores (Coutinho e Gonçalves, 1994; Neville, 1983) que, tal como no caso da retracção, se podem dividir em intrínsecos e extrínsecos. Os factores intrínsecos que condicionam a fluência do betão são os mesmos que influenciam a retracção: propriedades da mistura, dos constituintes e condições de fabrico. Os factores extrínsecos são o nível de tensão aplicada, a idade do betão quando é carregado e a duração do carregamento. Para além destes factores, podem referir-se ainda a geometria da peça, a temperatura e a humidade relativa.

No que respeita à humidade relativa, pode dizer-se que quanto maior for o seu valor menor será a deformação de fluência do betão. Contudo, variações da humidade relativa do ar parecem provocar deformações de fluência superiores às que se observariam caso a humidade relativa fosse constante e igual ao valor médio (Santos, 2002).

O aumento da idade de carregamento origina uma menor deformação de fluência e, tal como a retracção, a fluência aumenta com o aumento da superfície específica da peça. Para níveis moderados de tensão a deformação de fluência é proporcional à tensão aplicada, mas para níveis elevados deixa de se observar essa proporcionalidade, podendo mesmo atingir-se a rotura da peça, como se pode observar na Figura 3.6 (Póvoas, 1991; Santos, 2002).

Para a gama de temperaturas a que a maioria das estruturas, e em particular as pontes, estão normalmente sujeitas, o efeito da temperatura na fluência é considerado pouco importante. O efeito das variações de temperatura é diferente consoante seja anterior ou posterior à aplicação da carga. Assim, um aumento de temperatura antes do carregamento leva a uma aceleração da hidratação do cimento, que se traduz numa redução da fluência relativamente a um betão com a mesma idade mantido a uma temperatura inferior. Por outro lado, um aumento de temperatura após a aplicação da carga conduz a valores mais elevados da fluência (Santos, 2002).

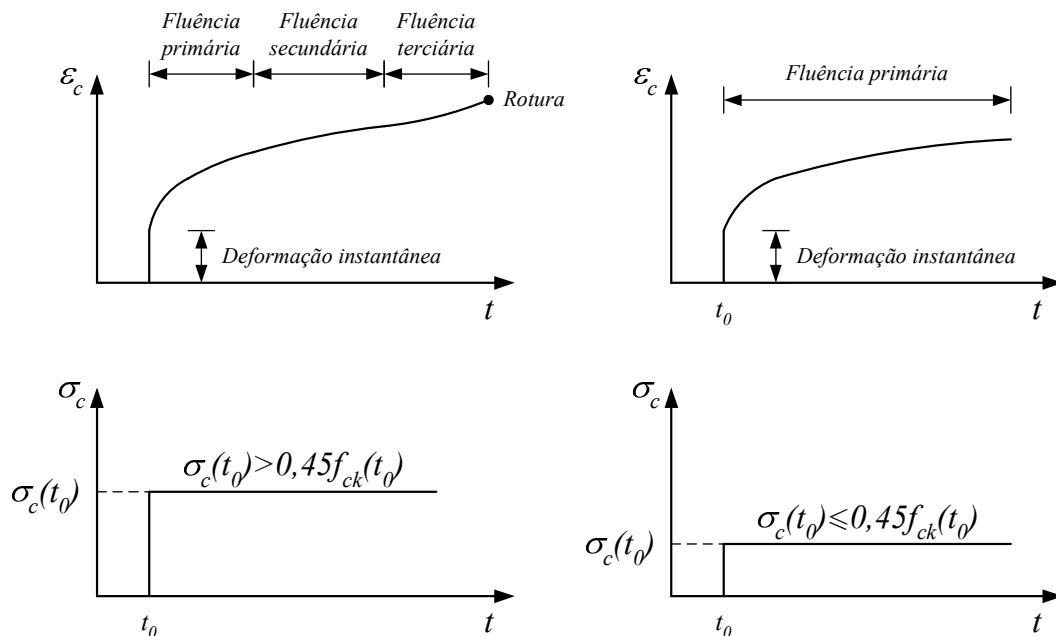


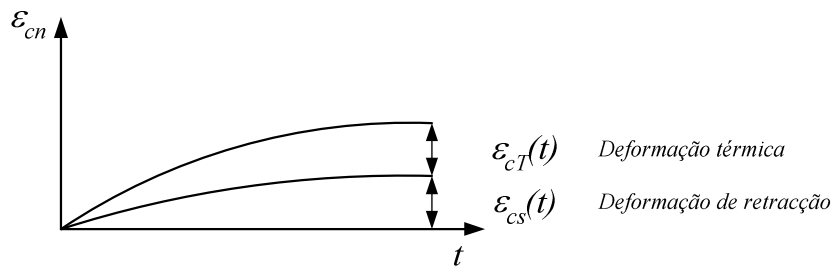
Figura 3.6 – Representação esquemática da evolução ao longo do tempo da deformação do betão sujeito a uma tensão constante (adaptado de (Santos, 2002))

Numa peça de betão armado submetida a uma tensão constante aplicada no instante t_0 a deformação total no instante t é dada por:

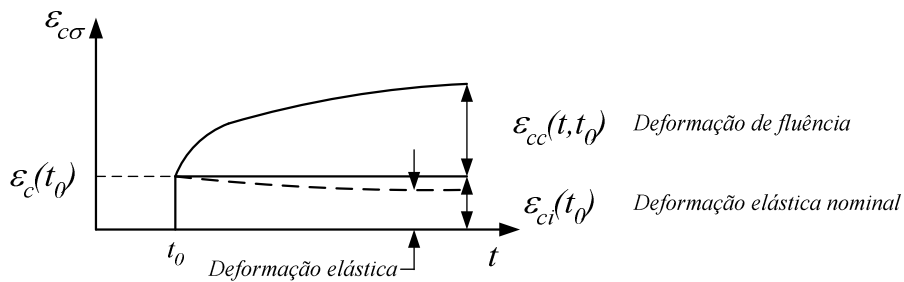
$$\varepsilon_c(t) = [\varepsilon_{ci}(t_0) + \varepsilon_{cc}(t, t_0)] + [\varepsilon_{cs}(t) + \varepsilon_{cT}(t)] = \varepsilon_{c\sigma}(t, t_0) + \varepsilon_{cn}(t) \quad (3.88)$$

em que $\varepsilon_{ci}(t_0)$ representa a deformação instantânea e $\varepsilon_{cc}(t, t_0)$ representa a deformação de fluência, constituindo a sua soma a parcela da deformação dependente da tensão, $\varepsilon_{c\sigma}(t, t_0)$. $\varepsilon_{cs}(t)$ representa a deformação de retracção e $\varepsilon_{cT}(t)$ representa a deformação devido às variações de temperatura, constituindo a sua soma a parcela da deformação independente do estado de tensão, $\varepsilon_{cn}(t)$. Na Figura 3.7 representam-se as diversas parcelas de deformação referidas.

a) Deformação independente da tensão



b) Deformação dependente da tensão



c) Tensão

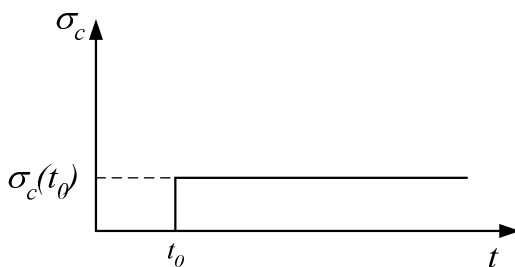


Figura 3.7 – Representação esquemática da evolução das diversas parcelas da deformação do betão (adaptado de (Virtuoso, 1991))

Nas estruturas de betão em condições de serviço verificam-se níveis de tensão moderados que correspondem ao domínio da fluência linear. Assim, pode definir-se um coeficiente de fluência, $\varphi(t, t_0)$, no instante t como a relação entre a deformação devida à fluência nesse instante, causada por um carregamento aplicado no instante t_0 , e a deformação elástica:

$$\varphi(t, t_0) = \frac{\varepsilon_c(t) - \varepsilon_c(t_0)}{\varepsilon_c(t_0)} \quad (3.89)$$

É um coeficiente adimensional, função da idade de início do carregamento, t_0 , e da idade para a qual se pretende calcular a deformação, t . Este coeficiente representa a taxa de fluência relativamente à deformação instantânea (deformação elástica). O seu valor aumenta com a diminuição da idade de carregamento e aumenta com o aumento do período $(t - t_0)$ em que é mantido o carregamento.

A deformação elástica do betão relaciona-se com a tensão aplicada, $\sigma_c(t_0)$, através da expressão:

$$\varepsilon_{ci}(t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \quad (3.90)$$

Desta forma, a deformação dependente do estado de tensão, $\varepsilon_{c\sigma}(t, t_0)$, que resulta das deformações, instantânea e de fluência, pode ser escrita em função da tensão aplicada através da expressão:

$$\varepsilon_{c\sigma}(t, t_0) = \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{cm}} \right] \sigma_c(t_0) \quad (3.91)$$

Introduzindo o conceito de função de fluência, $J(t, t_0)$, que representa a deformação do betão ao longo do tempo produzida por uma tensão unitária aplicada no instante t_0 , pode definir-se a seguinte expressão:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{cm}} \quad (3.92)$$

Assim, a parcela da deformação dependente da tensão pode ser escrita através da seguinte expressão que é válida para o caso de tensão constante no intervalo de tempo $(t - t_0)$:

$$\varepsilon_{c\sigma}(t, t_0) = J(t, t_0) \cdot \sigma_c(t_0) \quad (3.93)$$

Quando a tensão é variável e admitindo válido o princípio da sobreposição de efeitos, a relação constitutiva do betão pode escrever-se da seguinte forma:

$$\varepsilon_c(t) = J(t, t_0) \cdot \sigma_c(t_0) + \int_{t_0}^t J(t, \tau) \frac{\partial \sigma_c(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \varepsilon_{cn}(t) \quad (3.94)$$

Considerando o betão com comportamento viscoelástico linear, o integral em (3.94) pode ser resolvido por sobreposição de efeitos. Para a resolução deste integral existem diversos métodos que são descritos na secção 3.4.1.

O EC2 (EN 1992-1-1, 2010) indica que a deformação do betão por fluência na idade $t = \infty$, $\varepsilon_{cc}(\infty, t_0)$, para uma tensão de compressão constante, σ_c , aplicada ao betão na idade t_0 , é dada por:

$$\varepsilon_{cc}(\infty, t_0) = \varphi(\infty, t_0) \cdot \frac{\sigma_c}{E_c} \quad (3.95)$$

Esta expressão é válida para uma tensão de compressão do betão na idade t_0 que não exceda $0,45f_{ck}(t_0)$. Quando o valor da tensão de compressão do betão excede este valor deverá considerar-se a não-linearidade da fluência. Nesta situação, o coeficiente teórico de fluência não linear deverá ser obtido por:

$$\varphi_{nl}(t, t_0) = \varphi(\infty, t_0) \cdot \exp(1,5 \cdot (k_\sigma - 0,45)) \quad (3.96)$$

em que:

$\varphi_{nl}(t, t_0)$ – coeficiente teórico de fluência não-linear, que substitui $\varphi(t, t_0)$;

k_σ – razão tensões-resistências $\sigma_c/f_{ck}(t_0)$, em que σ_c é a tensão de compressão e $f_{ck}(t_0)$ é a resistência característica à compressão do betão na data do carregamento.

O coeficiente de fluência, $\varphi(t, t_0)$, pode ser calculado através de:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t, t_0) \quad (3.97)$$

em que φ_0 é um coeficiente de fluência nominal que poderá ser calculado a partir de

$$\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \quad (3.98)$$

com

φ_{RH} – factor que tem em conta a influência da humidade relativa no coeficiente de fluência:

$$\varphi_{RH} = 1 + \frac{1 - RH / 100}{0,1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} \quad \text{para } f_{cm} \leq 35 \text{ MPa} \quad (3.99)$$

$$\varphi_{RH} = \left[1 + \frac{1 - RH / 100}{0,1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} \cdot \alpha_1 \right] \cdot \alpha_2 \quad \text{para } f_{cm} > 35 \text{ MPa} \quad (3.100)$$

RH – humidade relativa do meio ambiente (em %);

$\beta(f_{cm})$ – factor que tem em conta a influência da resistência do betão no coeficiente de fluência nominal:

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16,8}{\sqrt{f_{cm}}} \quad (3.101)$$

f_{cm} – valor médio da tensão de rotura do betão à compressão aos 28 dias de idade (em MPa);

$\beta(t_0)$ – factor que tem em conta a influência da idade do betão à data do carregamento no coeficiente de fluência

$$\beta(t_0) = \frac{1}{(0,1 + t_0^{0,20})} \quad (3.102)$$

h_0 – espessura equivalente (em mm) do elemento, já definida em (3.84).

O coeficiente $\beta_c(t, t_0)$ traduz a evolução da fluência no tempo, após o carregamento, e pode ser estimado pela seguinte expressão:

$$\beta_c(t, t_0) = \left[\frac{(t - t_0)}{(\beta_H + t - t_0)} \right]^{0,3} \quad (3.103)$$

onde:

t – idade do betão (em dias) na data considerada;

t_0 – idade do betão (em dias) à data do carregamento;

$t - t_0$ – duração não corrigida do carregamento (em dias);

β_H – coeficiente que depende da humidade relativa (RH em %) e da espessura equivalente do elemento (h_0 em mm). Poderá ser estimado a partir de:

$$\beta_H = 1,5 \left[1 + (0,012RH)^{18} \right] h_0 + 250 \leq 1500 \text{ para } f_{cm} \leq 35 \text{ MPa} \quad (3.104)$$

$$\beta_H = 1,5 \left[1 + (0,012RH)^{18} \right] h_0 + 250\alpha_3 \leq 1500\alpha_3 \text{ para } f_{cm} > 35 \text{ MPa}$$

Os coeficientes α_1 , α_2 , α_3 têm em conta a influência da resistência do betão:

$$\alpha_1 = \left[\frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,7} \quad \alpha_2 = \left[\frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,2} \quad \alpha_3 = \left[\frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,5} \quad (3.105)$$

A influência do tipo de cimento no coeficiente de fluência poderá ainda ser tida em conta corrigindo na expressão (3.103) a idade à data do carregamento, t_0 , de acordo com a expressão

$$t_{0,corr} = t_{0,T} \left(\frac{9}{2 + t_{0,T}^{1,2}} + 1 \right)^\alpha \geq 0,5 \quad (3.106)$$

em que $t_{0,T}$ representa a idade do betão, em dias, à data do carregamento corrigida em função da temperatura de acordo com a Equação (3.107) e α é um coeficiente que depende do tipo de cimento, assumindo os seguintes valores:

- $\alpha = -1$ para cimento da Classe S;
- $\alpha = 0$ para cimento da Classe N;
- $\alpha = 1$ para cimento da Classe R.

$$t_{0,T} = \sum_{i=1}^n e^{-(4000/[273+T(\Delta t_i)]-13,65)} \cdot \Delta t_i \quad (3.107)$$

onde $T(\Delta t_i)$ é a temperatura, em graus Celsius, durante o intervalo de tempo Δt_i que é o número de dias em que se mantém a temperatura T .

No âmbito da modelação da fluência, de referir ainda que a mesma está sempre associada a outra propriedade, a relaxação, que se define como sendo a variação, com o tempo, da tensão num sólido sujeito a deformação constante. Trata-se de uma propriedade desejável no betão, pois tem por consequência aliviar as tensões provocadas pelas variações de volume, como as originadas pelas variações de temperatura ou as devidas à retracção por secagem (Coutinho e Gonçalves, 1994).

Um elemento de betão sujeito à acção da retracção vai sofrer uma diminuição de volume. Se esta deformação se encontrar restringida geram-se tensões de tracção. Estas, por sua vez, vão originar deformação de fluência, com sinal contrário à deformação de retracção. Desta forma, o betão exhibe um comportamento de relaxação, ou seja, uma diminuição da tensão originada pela restrição à deformação de retracção.

De modo análogo ao coeficiente de fluência, para o caso de tensão constante, a relaxação do betão pode ser descrita pelo coeficiente de relaxação (FIB, 1999)

$$\psi(t, t_0) = \frac{\Delta \sigma(t, t_0)}{\sigma_0} \quad (3.108)$$

onde $\Delta \sigma(t, t_0)$ é a diminuição de tensão no tempo t para uma idade de carga t_0 e σ_0 é a tensão inicial. O coeficiente de relaxação e o coeficiente de fluência estão relacionados pela seguinte expressão

$$\psi(t, t_0) = \frac{\varphi(t, t_0)}{1 + \chi(t, t_0) \cdot \varphi(t, t_0)} \quad (3.109)$$

onde $\chi(t, t_0)$ representa o coeficiente de envelhecimento. Este coeficiente é determinado a partir do cálculo da função de relaxação obtida através da inversão numérica da equação integral de Volterra (Equação (3.110))

$$\varepsilon_{c\sigma}(t) = J(t, t_0) \cdot \sigma_c(t_0) + \int_{t_0}^t J(t, \tau) \frac{\partial \sigma_c(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (3.110)$$

Contudo, para simplificar a determinação deste coeficiente e para facilitar o processo de análise dos efeitos diferidos do betão, propõe-se em (CEB, 1993) a seguinte formulação simplificada

$$\chi(t, t_0) = \frac{t_0^{0,5}}{1 + t_0^{0,5}} \quad (3.111)$$

Assim, para cada intervalo de tempo, conhecendo o valor da deformação de retracção, o valor da deformação considerando o efeito conjunto da retracção e da fluência pode ser obtido multiplicando a deformação de retracção pelo valor da função de relaxação para esse intervalo.

3.3.5. Modelação das armaduras passivas e activas

A designação betão estrutural pressupõe a utilização conjunta de betão e armaduras (passivas e/ou activas). Por conseguinte, e após ter sido descrita a modelação do betão, faz-se nesta secção referência à modelação das armaduras adoptada no desenvolvimento deste trabalho.

As armaduras passivas são, habitualmente, constituídas por varões redondos de aço laminado a quente ou endurecido a frio, simples ou formando redes electrosoldadas, com diâmetros entre os 6 e os 40 mm e apresentando superfícies lisas ou nervuradas. No que respeita ao seu comportamento mecânico, o EC2 (EN 1992-1-1, 2010) apresenta os diagramas tensão-extensão que se representam na Figura 3.8. Como se observa, o comportamento do aço das armaduras passivas caracteriza-se pelos valores característicos da tensão de cedência à tracção (f_{yk}) ou tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,2% ($f_{0,2k}$), tensão de rotura à tracção (f_t) e a correspondente extensão na carga máxima (ϵ_{uk}).

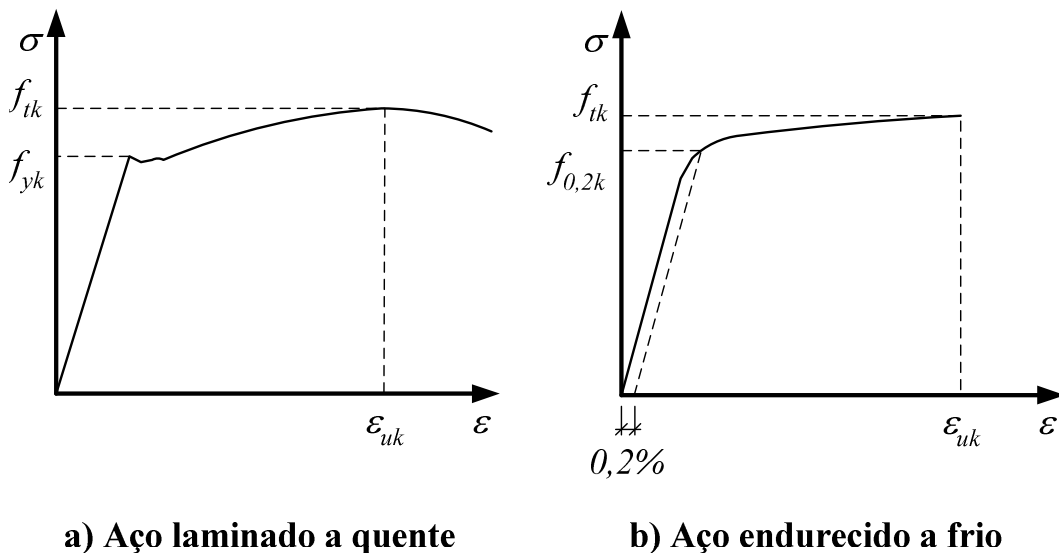


Figura 3.8 – Representação esquemática das relações tensão-extensão dos aços típicos das armaduras passivas (adaptado de (EN 1992-1-1, 2010))

No modelo desenvolvido, e como simplificação, desprezou-se a contribuição das armaduras passivas na análise da estrutura. Deste modo, não foi tida em conta a contribuição destas para a matriz de rigidez elementar dos elementos de betão, assumindo-se que as secções transversais dos mesmos são secções homogéneas de betão, como é prática comum no projecto de estruturas de betão.

Na medida em que a análise é efectuada assumindo um comportamento instantâneo elástico e linear e um comportamento diferido viscoelástico linear, limitando-se as tensões nos elementos de betão estrutural a $0,45f_{ck}(t_0)$ e, por conseguinte, considerando-se as respectivas secções transversais não fissuradas, pensa-se ser uma simplificação adequada. Esta simplificação justifica-se também pelo facto de se ter desenvolvido um modelo de análise integrado com um módulo de análise de sensibilidades e optimização visando a formulação e resolução de problemas no âmbito do projecto de pontes de tirantes utilizando um algoritmo de optimização. De facto, este procedimento leva a que, nos ciclos de análise e optimização, as secções transversais dos elementos sejam sucessivamente alteradas o que implicaria, necessariamente, a alteração da área de armadura e da respectiva pormenorização. Este processo laborioso, em termos de implementação computacional e penalizador em termos de tempo de cálculo, considera-se fora do âmbito deste trabalho dadas as hipóteses assumidas e que já foram mencionadas. Para além disso, este procedimento resultaria em soluções irrealistas na medida que se obteriam por exemplo, para um mesmo segmento de tabuleiro, áreas de armadura variando de um elemento finito para outro consoante a discretização adoptada.

De salientar, no entanto, o facto de a contribuição das armaduras passivas ter sido considerada na verificação da resistência dos elementos de betão, em particular na definição dos objectivos de projecto intervenientes na função objectivo do algoritmo de optimização. Este aspecto é descrito detalhadamente no Capítulo 4, mais concretamente na secção 4.2.2.

No que respeita às armaduras activas, ou seja, às armaduras de pré-esforço utiliza-se aço de alta resistência em fios, cordões ou varões, sendo classificado de acordo com as respectivas características de resistência, classe de relaxação, secção transversal e características da superfície. No caso particular de uma ponte atirantada de betão, o aço de pré-esforço é utilizado nos tirantes e poderá também ser utilizado como armadura activa para pré-esforçar os elementos do tabuleiro e das torres.

Relativamente ao comportamento mecânico do aço de pré-esforço, o EC2 (EN 1992-1-1, 2010) apresenta o diagrama tensão-extensão que se representa na Figura 3.9. Neste diagrama

são indicados os parâmetros relacionados com as características de resistência do aço de pré-esforço, ou seja, os valores característicos da tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,1% ($f_{p0,1k}$), da resistência à tracção (f_{pk}) e da extensão na carga máxima (ϵ_{uk});

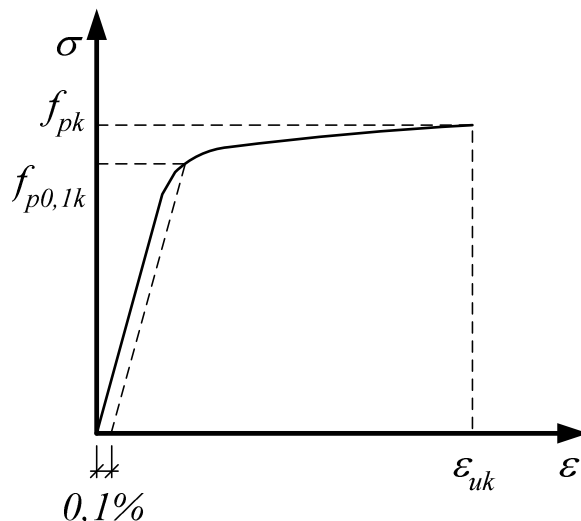


Figura 3.9 – Representação esquemática da relação tensão-extensão do aço típico das armaduras activas (adaptado de (EN 1992-1-1, 2010))

A relaxação do aço de pré-esforço define-se como uma diminuição da tensão instalada ao longo do tempo que se verifica num elemento sujeito a deformação constante. Esta perda de tensão exprime-se habitualmente em percentagem da tensão inicial e é obtida a partir de ensaios com duração e temperatura determinadas. Além de depender das características do próprio aço, a relaxação aumenta de forma significativa com o valor da tensão inicial aplicada e com a temperatura (Póvoas, 1991; Cruz, 1997; Santos, 2002). A caracterização do aço de pré-esforço no que respeita à relaxação é efectuada através de ensaios normalizados às 1000 horas, a uma temperatura de 20°C e para valores da tensão aplicada iguais a 60%, 70% e 80% da tensão característica de rotura (f_{pk}). Habitualmente admite-se que para valores da tensão instalada inferiores a 50% de f_{pk} a ocorrência do fenómeno de relaxação não é significativa (FIB, 1999).

O EC2 (EN 1992-1-1, 2010) divide os aços de pré-esforço em três classes, de acordo com as respectivas características de relaxação. A Classe 1 diz respeito aos fios e cordões de relaxação normal, a Classe 2 inclui os fios e cordões de baixa relaxação e a Classe 3 engloba as barras laminadas a quente com tratamento complementar. Os cálculos das perdas devidas à relaxação deverão basear-se no valor de ρ_{1000} . Este valor representa a perda devida à relaxação (em %) às 1000h depois da aplicação do pré-esforço, de valor igual a $0,7f_{pk}$, e a uma

temperatura média de 20°C. Os valores deste parâmetro podem considerar-se iguais a 8%, 2,5% e 4%, respectivamente, para os aços de Classe 1, Classe 2 e Classe 3.

Para o cálculo das perdas devido à relaxação o EC2 (EN 1992-1-1, 2010) propõe as seguintes expressões

$$\frac{\Delta\sigma_{pr}}{\sigma_{pi}} = 5,39 \cdot \rho_{1000} \cdot e^{6,7\mu} \cdot \left(\frac{t}{1000}\right)^{0,75(1-\mu)} \cdot 10^{-5}, \text{ para Classe 1} \quad (3.112)$$

$$\frac{\Delta\sigma_{pr}}{\sigma_{pi}} = 0,66 \cdot \rho_{1000} \cdot e^{9,1\mu} \cdot \left(\frac{t}{1000}\right)^{0,75(1-\mu)} \cdot 10^{-5}, \text{ para Classe 2} \quad (3.113)$$

$$\frac{\Delta\sigma_{pr}}{\sigma_{pi}} = 1,98 \cdot \rho_{1000} \cdot e^{8\mu} \cdot \left(\frac{t}{1000}\right)^{0,75(1-\mu)} \cdot 10^{-5}, \text{ para Classe 3} \quad (3.114)$$

onde:

$\Delta\sigma_{pr}$ – valor absoluto das perdas de pré-esforço devidas à relaxação;

σ_{pi} – valor absoluto da tensão inicial de pré-esforço;

t – tempo depois da aplicação de pré-esforço (em horas);

$$\mu = \sigma_{pi} / f_{pk}$$

O EC2 (EN 1992-1-1, 2010) refere ainda que a força máxima (P_{max}) a aplicar a uma armadura de pré-esforço não deve exceder o valor

$$P_{max} = A_p \cdot \sigma_{p,max} \quad (3.115)$$

em que:

A_p é a área da secção transversal da armadura de pré-esforço;

$\sigma_{p,max}$ é a tensão máxima aplicada à armadura de pré-esforço, dada por:

$$\sigma_{p,max} = \min\{0,80 \cdot f_{pk}; 0,90 \cdot f_{p0,1k}\} \quad (3.116)$$

Relativamente aos tirantes é habitual, no projecto de pontes atirantadas, limitar a tensão máxima instalada nos mesmos, em condições de serviço, a 45% da tensão de rotura (f_{pk}) do aço de pré-esforço dos cordões que os compõem (Walther *et al.*, 1999; Hewson, 2003; Pedro, 2007). A utilização deste limite prende-se com a necessidade de prevenir as consequências negativas das tensões de fadiga e das tensões locais de flexão nas ancoragens. Tendo em conta a evolução da tecnologia dos tirantes, alguns autores têm proposto a elevação deste limite para 55% f_{pk} (Pedro, 2007).

O EC3-1-11 (CEN, 2006) relativo ao projecto de estruturas metálicas com elementos traccionados indica o limite de 55% durante o processo construtivo, podendo considerar-se 60% para os primeiros cordões instalados e apenas durante algumas horas. Em condições de serviço deve considerar-se o limite de 45%, podendo ser aumentado para 50% caso sejam utilizadas medidas para reduzir as tensões de flexão na zona das ancoragens. Para verificação da resistência em estado limite último os limites a impor à tensão instalada nos tirantes variam entre os 67% f_{pk} e os 74% f_{pk} , respectivamente, caso não sejam ou sejam utilizadas medidas para reduzir as tensões de flexão na zona das ancoragens.

Tendo em conta os limites de tensão que têm de ser impostos quer aos tirantes quer às armaduras activas nos elementos de betão, admitiu-se, no modelo desenvolvido, uma relação tensão-deformação linear para o aço de pré-esforço.

De referir ainda que no caso dos tirantes e face aos limites que devem ser impostos à tensão instalada nestes elementos em condições de serviço, o fenómeno de relaxação do aço de pré-esforço é desprezável, pelo que o mesmo não foi considerado no modelo desenvolvido. Na modelação dos tirantes adoptaram-se elementos de barra com módulo de elasticidade equivalente dado pela formulação de Ernst, tal como se descreverá na secção 3.6.1. A aplicação do pré-esforço nos cabos que constituem estes elementos foi modelada através das respectivas forças nodais equivalentes aplicadas nos nós da malha de elementos finitos correspondentes às ancoragens do tirante. Deste modo, o vector elementar de forças nodais equivalentes ao pré-esforço nos tirantes é dado por

$$\underline{f}_p^e = \{ F_p \quad 0 \quad 0 \quad -F_p \quad 0 \quad 0 \}^T \quad (3.117)$$

em que F_p representa a força de pré-esforço total no tirante.

Relativamente às armaduras activas, ou seja, à utilização de cabos de pré-esforço no interior do tabuleiro procedeu-se à sua modelação implementando um elemento de viga contendo um elemento de cabo de pré-esforço. O efeito do pré-esforço nos elementos de viga poderia ser modelado como acção ou como elemento. Adoptou-se a segunda opção, na medida em que, a simulação dos cabos de pré-esforço através da consideração da sua rigidez na matriz de rigidez da estrutura permite contabilizar de forma automática as variações de tensão nos cabos devido à deformação instantânea e diferida do betão. A formulação adoptada é semelhante à utilizada por outros autores (Henriques, 1991; Póvoas, 1991; Ferraz, 2001).

O traçado do elemento de cabo de pré-esforço $e(x)$ é definido recorrendo às funções interpoladoras de Lagrange $L_i(x)$ e com base nos valores das excentricidades e_i do cabo relativamente ao eixo da viga, utilizando a expressão

$$e(x) = \sum_{i=1}^3 L_i(x) \cdot e_i \quad (3.118)$$

Na Figura 3.10 representa-se o elemento de viga contendo o elemento de cabo de pré-esforço e ilustra-se a definição das coordenadas curvilíneas do elemento de cabo e o campo de deslocamentos do mesmo.

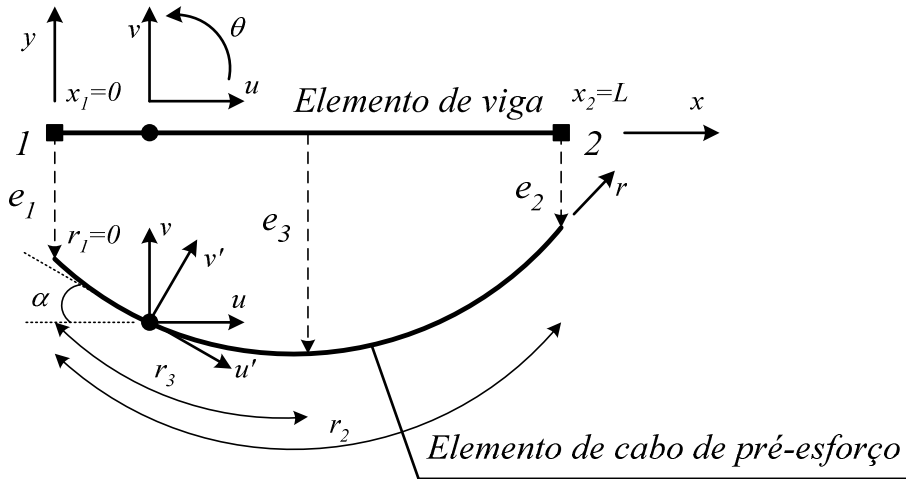


Figura 3.10 – Elemento finito de viga com elemento de cabo de pré-esforço

A coordenada curvilínea $r(x)$ de um ponto do elemento de cabo representa o comprimento de arco entre a origem do elemento e esse ponto, podendo ser definida com base nas coordenadas curvilíneas, r_i , dos nós do elemento e com auxílio das funções de forma utilizadas para o elemento de barra através de

$$r(x) = N_1(x) \cdot r_1 + N_2(x) \cdot r_2 = \sum_{i=1}^2 N_i(x) \cdot r_i \quad (3.119)$$

A caracterização do comportamento da armadura de pré-esforço é efectuada considerando apenas a sua rigidez axial, pelo que, o seu campo de deslocamentos é definido pela componente axial dos deslocamentos $u'(x)$. Esta componente pode ser obtida a partir do campo de deslocamentos do elemento de viga através da expressão

$$u'(x) = u(x) \cdot \cos \alpha(x) + v(x) \cdot \sin \alpha(x) \quad (3.120)$$

em que α é a inclinação do cabo relativamente ao eixo do elemento de viga definida por

$$\alpha(x) = \arctan\left(\frac{de(x)}{dx}\right) \quad (3.121)$$

Usando novamente as funções de forma utilizadas para o elemento de barra pode escrever-se a seguinte expressão para a aproximação do campo de deslocamentos no elemento de cabo

$$u'(x) = [N_i(x) \cdot \cos \alpha_i(x) \quad N_i(x) \cdot \sin \alpha_i(x) \quad -e(x) \cdot N_i(x) \cdot \cos \alpha_i(x)] \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{bmatrix}_{i=1,2} \quad (3.122)$$

O estado de deformação do elemento de cabo é definido pela sua extensão axial pelo que pode escrever-se

$$\varepsilon_p = \frac{du'}{dr} = \frac{du'}{dx} \cdot \frac{dx}{dr} = \underline{B}_p \cdot \underline{u}^e \quad (3.123)$$

onde \underline{B}_p representa a matriz de deformação do elemento de cabo.

Nos traçados habituais dos cabos de pré-esforço as derivadas das funções de forma são muito superiores às curvaturas, $d\alpha(x)/dx$, pelo que estas podem ser desprezadas. Deste modo, a matriz de deformação do elemento de cabo é dada por

$$\underline{B}_p = \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{dN_i(x)}{dx} \cdot \cos \alpha(x) & \frac{dN_i(x)}{dx} \cdot \sin \alpha(x) & -\frac{de(x)}{dx} \cdot \cos \alpha(x) \cdot N_i(x) \\ \hline & & e(x) \cdot \frac{dN_i(x)}{dx} \cdot \cos \alpha(x) \\ \hline & & \end{array} \right] \cdot \frac{dx}{dr}_{i=1,2} \quad (3.124)$$

A partir da matriz de deformação é possível obter a matriz de rigidez do elemento de cabo de pré-esforço utilizando a expressão habitual do Método dos Elementos Finitos dada por

$$\underline{K}_p^e = \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} dV = \int_0^L \underline{B}^T \cdot E_p \cdot \underline{B} \cdot A_p dx \quad (3.125)$$

A Equação (3.125) define a contribuição do elemento de cabo para a matriz de rigidez do elemento de viga com cabo de pré-esforço.

A aplicação de uma força de pré-esforço, P_0 , produz uma deformação inicial, ε_{p0} , na armadura activa. As forças nodais equivalentes aplicadas nos nós do elemento de viga que representam o efeito do pré-esforço são obtidas a partir da deformação axial no elemento de cabo, sendo dadas por

$$\underline{f}_p^e = \int_V \underline{B}^T \cdot E_p \cdot \varepsilon_{p0} dV = \int_L \underline{B}^T \cdot E_p \cdot \frac{P_0}{E_p \cdot A_p} \cdot A_p dL \quad (3.126)$$

$$\underline{f}_p^e = P_0 \cdot \{\cos \alpha_1 \quad \sin \alpha_1 \quad -e_1 \cdot \cos \alpha_1 \quad -\cos \alpha_2 \quad -\sin \alpha_2 \quad e_2 \cdot \cos \alpha_2\}^T \quad (3.127)$$

A deformação, ε_p , do elemento de cabo origina um esforço axial, N_p , que produz os seguintes esforços a respeito do eixo do elemento de viga

$$\begin{Bmatrix} N \\ V \\ M \end{Bmatrix} = N_p \cdot \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ e \cdot \cos \alpha \end{Bmatrix} = (E_p \cdot A_p \cdot \varepsilon_p) \cdot \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ e \cdot \cos \alpha \end{Bmatrix} \quad (3.128)$$

Como simplificação considerou-se que a força de pré-esforço aplicada no modelo corresponde à força de pré-esforço útil, ou seja, o respectivo valor já inclui todas as perdas instantâneas (perdas devido à deformação elástica do betão, à reentrada dos cabos nas ancoragens e ao atrito entre os cabos e as bainhas). No que respeita às perdas diferidas, como já foi referido, a modelação do pré-esforço através de um elemento de cabo permite contabilizar directamente as perdas devido à retracção e fluência do betão.

Relativamente à relaxação do aço de pré-esforço, as Equações (3.112), (3.113) e (3.114) permitem calcular a respectiva perda quando não existem incrementos de tensão no mesmo. Numa análise por fases, em que a tensão nas armaduras activas não é constante, a determinação das perdas de pré-esforço devido ao fenómeno de relaxação foi efectuada recorrendo ao método do tempo equivalente de acordo com o estabelecido no Anexo D do EC2 (EN 1992-1-1, 2010). Este método consiste em determinar, utilizando as referidas equações, o tempo equivalente (em horas) necessário para obter a soma de todas as perdas devidas à relaxação das fases precedentes. Esta deve verificar as expressões das perdas devidas à relaxação em função do tempo com uma tensão inicial igual ao somatório dos incrementos de tensão aplicados ao aço de pré-esforço. Após a determinação de t_{eq} o cálculo das perdas por relaxação para a fase correspondente ao intervalo de tempo Δt_i é efectuado substituindo o valor de t por $t_{eq} + \Delta t_i$ numa das Equações (3.112), (3.113) e (3.114), consoante a classe do aço.

De referir ainda que o elemento de viga com cabo de pré-esforço permite a modelação de cabos com traçado linear ou parabólico, requerendo uma discretização em diferentes elementos consoante ocorra mudança da equação que define o traçado do cabo.

3.4. Análise dos efeitos diferidos do betão

3.4.1. Modelo desenvolvido

Na modelação dos efeitos diferidos do betão, a maior dificuldade surge no cálculo da deformação de fluência quando a tensão não é constante, o que corresponde à generalidade das situações de projecto.

Como já foi referido anteriormente, a deformação do betão devido a uma evolução da tensão no tempo pode ser escrita como:

$$\varepsilon_{c\sigma}(t) = J(t, t_0) \cdot \sigma_c(t_0) + \int_{t_0}^t J(t, \tau) \frac{\partial \sigma_c(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (3.129)$$

Admitindo que a tensão de compressão no betão na idade t_0 não excede $0,45 f_{ck}(t_0)$, o integral da Equação (3.129) pode ser resolvido por sobreposição de efeitos.

Através da Equação (3.129) e conhecendo a função de fluência, $J(t, t_0)$, é possível resolver dois tipos de problemas:

- a) Conhecendo a história de tensão é possível calcular a deformação do betão (problema de fluência);
- b) Conhecendo a evolução da deformação é possível calcular a tensão através da resolução da equação integral de Volterra (problema de relaxação).

Nas situações usuais não se conhecem à partida nem as tensões nem as deformações dos elementos da estrutura, dependendo das cargas aplicadas e da resolução das equações de equilíbrio, compatibilidade e constitutivas. Assim, existem diversos métodos numéricos para efectuar a modelação dos efeitos viscoelásticos do betão, podendo ser divididos em três:

- *Métodos algébricos;*
- *Métodos de integração passo-a-passo;*
- *Métodos de aproximação da função de fluência.*

Os *métodos algébricos* baseiam-se num cálculo aproximado do integral de sobreposição de efeitos transformando a Equação (3.129) numa equação algébrica. Esta transformação é efectuada assumindo diferentes hipóteses quanto à variação do estado de tensão. Neste âmbito podem referir-se o *método do módulo efectivo*, o *método da tensão média* e o *método do módulo efectivo com idade ajustada*. Nestes métodos não é necessário armazenar toda a história de tensão da estrutura mas, devido às hipóteses simplificativas adoptadas na sua formulação, são relativamente grosseiros para modelar o efeito da fluência durante a construção de uma estrutura. Uma vez que se admite uma variação de tensão contínua ao longo do tempo, estes métodos não são adequados para aplicação directa a problemas em que existem incrementos finitos de tensão. Podem, contudo, ser aplicados a estes problemas desde que se considerem separadamente cada um daqueles efeitos e se aplique o princípio da sobreposição de efeitos (Virtuoso, 1991).

Nos *métodos de integração passo-a-passo* o integral de sobreposição de efeitos é calculado numericamente a partir de uma divisão do tempo em intervalos. Este cálculo consiste na sobreposição de efeitos das sucessivas análises elásticas da estrutura realizadas para cada intervalo de tempo considerado. Desta forma, torna-se necessário conhecer a história de tensão de todos os pontos de integração da malha de elementos finitos da estrutura, o que requer o armazenamento de grande quantidade de informação e leva a um aumento do tempo de cálculo, que pode ser significativo numa estrutura complexa como é o caso de uma ponte de tirantes (Virtuoso, 1991; Cruz, 1997).

Os *métodos de aproximação da função de fluência* correspondem a uma diferente abordagem na aproximação da Equação (3.129). Mantém-se o princípio da sobreposição de efeitos e considera-se que, durante as fases construtivas, os carregamentos são aplicados de forma instantânea e que, durante os intervalos de tempo, não são aplicadas cargas. Estes métodos permitem considerar as sucessivas variações de tensão que ocorrem durante a construção de pontes de tirantes com a vantagem de não requerem o armazenamento de toda a história de tensões na estrutura. Fazem parte deste grupo de métodos, o *método dos tempos equivalentes* (Somja e de Ville de Goyet, 2008; Pedro, 2007) e a *aproximação do coeficiente de fluência por uma série de Dirichlet* (Bazant, 1988).

No presente trabalho optou-se por utilizar a *aproximação do coeficiente de fluência por uma série de Dirichlet* (Bazant, 1988) tal como foi feito por (Khalil *et al.*, 1983; Póvoas, 1991; Virtuoso, 1991; Cluley e Shepherd, 1996; Cruz, 1997; Vasconcelos, 1999; Ferraz, 2001) e que se descreve de seguida.

Neste método a lei constitutiva viscoelástica expressa na Equação (3.129) é transformada numa relação diferencial aproximando o coeficiente de fluência através de um número finito de termos de uma série de Dirichlet de funções exponenciais. Desta forma, a função de fluência pode ser escrita como

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{cm}} \cong \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{1}{E_{cm}} \sum_{i=1}^n a_j(t_0) (1 - e^{-\alpha_j(t-t_0)}) \quad (3.130)$$

Assim, a deformação do betão ao longo do tempo é resultante da deformação instantânea e da deformação devido ao efeito da fluência e pode ser expressa como

$$\varepsilon_{c\sigma}(t) = \varepsilon_{ci}(t) + \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ccj}(t) \quad (3.131)$$

em que $\varepsilon_{ci}(t)$ representa a parcela de deformação instantânea definida pela expressão

$$\varepsilon_{ci}(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{E_c(\tau)} d\sigma_c(\tau) \quad (3.132)$$

e $\varepsilon_{ccj}(t)$ representa a contribuição do j -ésimo termo da série de Dirichlet para a deformação de fluência, calculado a partir de

$$\varepsilon_{ccj}(t) = \frac{1}{E_{cm}} \int_{t_0}^t a_j(\tau) d\sigma_c(\tau) - \gamma_j(t) \quad (3.133)$$

onde $\gamma_j(t)$ é dado por

$$\gamma_j(t) = \frac{1}{E_{cm}} \int_{t_0}^t a_j(\tau) e^{-\alpha_j(t-\tau)} d\sigma_c(\tau) \quad (3.134)$$

correspondendo a uma variável de estado que caracteriza toda a história das deformações até ao início do intervalo em análise.

Derivando em ordem ao tempo as Equações (3.133) e (3.134) obtém-se

$$\ddot{\varepsilon}_{ccj}(t) + \alpha_j \dot{\varepsilon}_{ccj}(t) = \alpha_j \frac{a_j(t)}{E_{cm}} \dot{\sigma}_c(t) \quad (3.135)$$

$$\dot{\gamma}_j(t) + \alpha_j \gamma_j(t) = \frac{a_j(t)}{E_{cm}} \dot{\sigma}_c(t) \quad (3.136)$$

A relação constitutiva obtida através da aproximação da função de fluência por uma série de Dirichlet corresponde a um modelo reológico constituído pela associação em série de um modelo de Hooke e de uma cadeia com n modelos de Kelvin, como se representa na Figura 3.11.

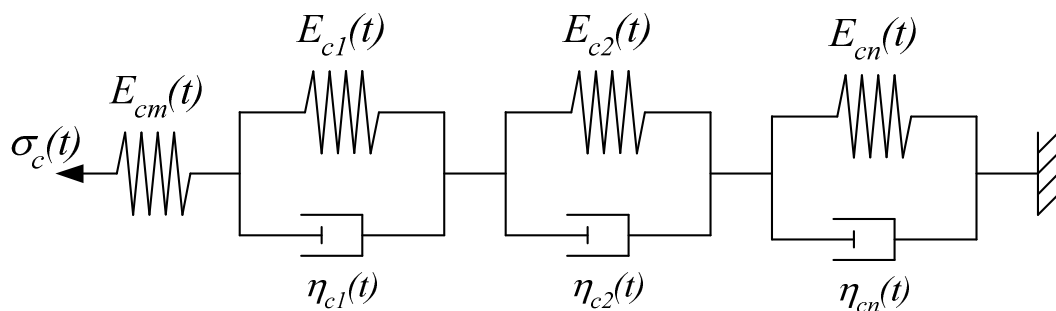


Figura 3.11 – Modelo reológico de aproximação da função de fluência por uma série de Dirichlet

Neste modelo reológico os módulos de elasticidade, $E_{cj}(t)$, e os coeficientes de viscosidade, $\eta_{cj}(t)$, são funções do tempo definidas através das seguintes expressões

$$E_{cj}(t) = E_{cm} \left[\frac{1}{a_j(t)} + \frac{1}{\alpha_j a_j^2(t)} \frac{da_j(t)}{dt} \right] \quad (3.137)$$

$$\eta_{cj}(t) = \frac{E_{cm}}{\alpha_j a_j(t)} \quad (3.138)$$

A resolução numérica da equação constitutiva diferencial requer a discretização do tempo em sucessivos instantes $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_n$. Definindo os intervalos $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, a integração numérica pode ser efectuada desde que se admita que em cada intervalo, são constantes, a derivada da tensão em ordem ao tempo, os coeficientes $a_j(t)$ e os módulos de elasticidade:

- $\frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{\Delta\sigma^k}{\Delta t^k} = cte.$
- $a_j^k = a_j(\bar{t}_k) = cte.$
- $E_c^k = E_c(\bar{t}_k) = cte.$

em que $t_{i-1} < \bar{t}_k < t_i$.

Tendo em conta as hipóteses admitidas, a Equação (3.136) pode ser resolvida para cada intervalo de tempo, obtendo-se:

$$\gamma_j(t_k) = e^{-\alpha_j \Delta t_k} \gamma_j(t_{k-1}) + \lambda_j^k \frac{a_j^k}{E_{cm}} \Delta\sigma_c^k \quad (3.139)$$

onde

$$\lambda_j^k(t) = \frac{1 - e^{-\alpha_j \Delta t_k}}{\alpha_j \Delta t_k} \quad (3.140)$$

A variação da deformação de fluência para cada intervalo de tempo, Δt_k , pode ser obtida pela diferença entre os respectivos valores calculados para os instantes t_k e t_{k-1} :

$$\Delta\epsilon_{ccj}^k = \epsilon_{cc}(t_k) - \epsilon_{cc}(t_{k-1}) = \left(1 - e^{-\alpha_j \Delta t_k}\right) \gamma_j(t_{k-1}) + \left(1 - \lambda_j^k\right) \frac{a_j^k}{E_{cm}} \Delta\sigma_c^k \quad (3.141)$$

Por conseguinte, a relação constitutiva incremental para o intervalo de tempo Δt_k pode ser escrita da seguinte forma

$$\Delta\sigma_c^k = E_c^{k*} \left(\Delta\epsilon_c^k - \Delta\epsilon_{cc}^k - \Delta\epsilon_{cn}^k \right) \quad (3.142)$$

onde E_c^{k*} e $\Delta\epsilon_{cc}^k$ representam, respectivamente, o módulo de elasticidade equivalente do betão e a deformação incremental de fluência no intervalo de tempo Δt_k , sendo expressos através de

$$\frac{1}{E_c^{k*}} = \frac{1}{E_c^k} + \frac{1}{E_{cm}} \sum_{j=1}^n (1 - \lambda_j^k) \cdot a_j^k \quad (3.143)$$

$$\Delta \varepsilon_{cc}^k = \sum_{j=1}^n (1 - e^{-\alpha_j(t-t_0)}) \cdot \gamma(t_{k-1}) \quad (3.144)$$

onde n é o número de termos da série de Dirichlet e os coeficientes a_j são obtidos através de um ajuste da curva de fluência pelo método dos mínimos quadrados. Os coeficientes $1/\alpha_j$ designam-se tempos de retardação e devem ser escolhidos de modo a ser coberta toda a gama de valores de tempo para a qual é necessário calcular os coeficientes de fluência, normalmente entre 0 e 20000 dias (≈ 50 anos).

À semelhança de trabalhos de outros autores (Virtuoso, 1991; Cruz, 1997; Santos, 2002), no presente trabalho consideraram-se os cinco primeiros termos da série de Dirichlet como suficientes para caracterizar adequadamente a evolução da deformação de fluência. No modelo desenvolvido, consideram-se os valores dos tempos de retardação dados pela expressão

$$\begin{cases} 1/\alpha_1 = 1 \\ 1/\alpha_j = (1/\alpha_1) \cdot 10^{j-1}, \text{ para } j = 2, \dots, n \end{cases} \quad (3.145)$$

Na Figura 3.12 representa-se a evolução das funções, $f_j(t-t_0) = 1 - e^{-\alpha_j(t-t_0)}$, para os valores dos tempos de retardação considerados.

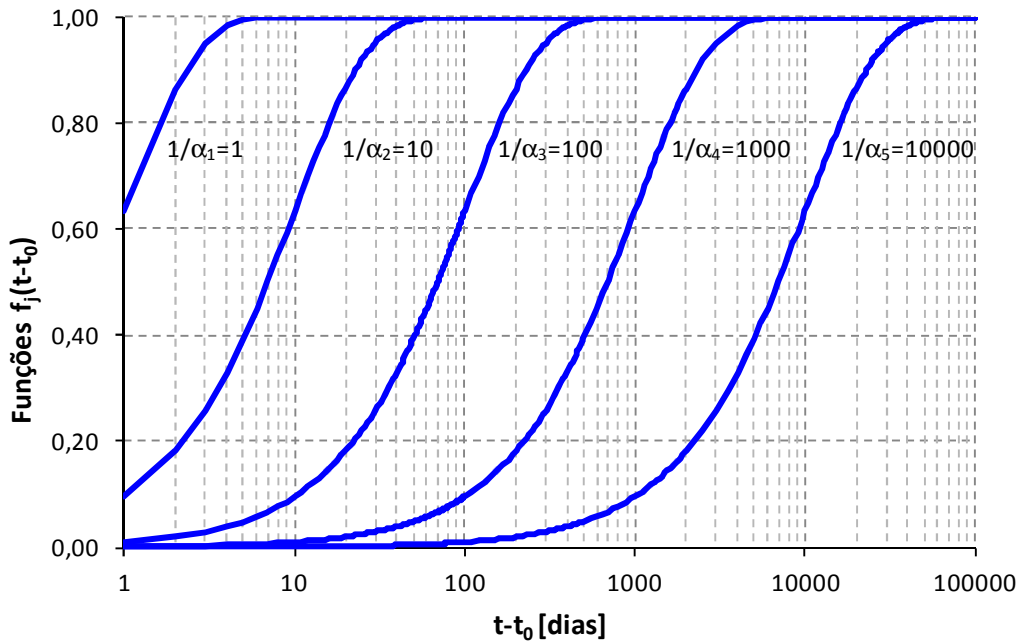


Figura 3.12 – Evolução das funções f_j para os valores dos tempos de retardação considerados

De referir ainda que, e tal como foi mencionado na secção 3.1., no presente trabalho optou-se por utilizar os modelos presentes no EC2 (EN 1992-1-1, 2010) para modelar o comportamento diferido do betão. No entanto, a metodologia descrita para calcular a deformação de fluência é aplicável a outros modelos, bastando para isso a programação das respectivas leis de comportamento.

Conhecendo os valores das deformações produzidas pelos efeitos diferidos, estes podem ser simulados, na análise da estrutura pelo Método dos Elementos Finitos, utilizando forças nodais equivalentes. Estas forças, correspondentes aos efeitos diferidos da fluência e retracção do betão e da relaxação do aço de pré-esforço, impõem à estrutura um campo de deslocamentos a partir do qual é calculado o estado de deformação real da estrutura. O correspondente estado de tensão é determinado com base apenas na relação constitutiva elástica entre tensões e deformações de origem mecânica.

De acordo com a formulação apresentada anteriormente é possível calcular as deformações produzidas pelos efeitos diferidos. Conhecendo estas deformações, as correspondentes forças nodais equivalentes são calculadas como deformações iniciais para cada intervalo de tempo, Δt_k , usando a formulação do Método dos Elementos Finitos. As forças nodais equivalentes devidas à fluência no intervalo de tempo Δt_k , são dadas por

$$\underline{\Delta f}_{cc}^k = \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{D}^k \cdot \Delta \underline{\varepsilon}_{cc}^k dV \quad (3.146)$$

e devidas à retracção por

$$\underline{\Delta f}_{cs}^k = \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{D}^k \cdot \Delta \underline{\varepsilon}_{cs}^k dV \quad (3.147)$$

onde $\Delta \underline{\varepsilon}_{cc}^k$ and $\Delta \underline{\varepsilon}_{cs}^k$ são, respectivamente, os incrementos de deformação devido à fluência e retracção para o intervalo de tempo Δt_k , \underline{B} é a matriz de deformação e \underline{D}^k é a matriz de elasticidade para o intervalo de tempo considerado, actualizada de acordo com o valor do módulo de elasticidade do betão. Deste modo, para um intervalo de tempo Δt_k o vector elementar de forças nodais equivalentes aos efeitos diferidos é dado por

$$\underline{\Delta f}_{dif}^e = \begin{Bmatrix} -E_c^{k*} \cdot A_c \cdot \Delta e_3 \\ 0 \\ -E_c^{k*} \cdot I_z \cdot \Delta e_1 \\ E_c^{k*} \cdot A_c \cdot \Delta e_3 \\ 0 \\ E_c^{k*} \cdot I_z \cdot \Delta e_1 \end{Bmatrix} \quad (3.148)$$

em que Δe_3 e Δe_1 representam, respectivamente os incrementos de deformação axial e de curvatura produzidos pelos efeitos diferidos.

Conhecendo as forças nodais equivalentes aos efeitos diferidos para cada elemento é possível fazer o agrupamento das diversas contribuições elementares e formar os correspondentes vectores de forças globais relativos à deformação de fluência e de retracção, respectivamente, $\underline{\Delta F}_{cc}^k$ e $\underline{\Delta F}_{cs}^k$. Deste modo, é possível escrever o sistema de equações de equilíbrio incremental para um dado Δt_k através da expressão

$$\underline{K}^k \cdot \underline{\Delta u}^k = \underline{\Delta F}^k + \underline{\Delta F}_{cc}^k + \underline{\Delta F}_{cs}^k \quad (3.149)$$

onde \underline{K}^k e $\underline{\Delta u}^k$ são, respectivamente, a matriz de rigidez da estrutura e o vector incremental de deslocamentos nodais e $\underline{\Delta F}^k$ representa o vector de forças nodais equivalentes da estrutura, actualizado devido a alterações no carregamento externo aplicado.

3.4.2. Exemplos de verificação

Na presente secção apresentam-se dois exemplos de verificação do modelo numérico desenvolvido no que respeita à modelação dos efeitos diferidos do betão. No primeiro exemplo analisa-se a modelação da fluência num elemento de betão sujeito a uma tensão variável ao longo do tempo. No segundo exemplo analisa-se o fenómeno da relaxação das tensões no betão devido à acção conjunta dos efeitos da fluência e da retracção.

Exemplo 1 – Fluência com tensão variável

Este exemplo consiste numa viga em consola de betão simples, sujeita a uma tensão de compressão e a uma carga transversal uniformemente distribuída, variáveis ao longo do tempo. Considerou-se um betão da classe C35/45 ($E_{cm} = 34$ GPa; $f_{cm} = 43$ MPa e $f_{ck} = 35$ MPa) em que se utilizou um cimento da Classe N. A secção transversal da consola é tal que a espessura equivalente, h_0 , é de 300 mm e considerou-se uma humidade relativa do ambiente constante e igual a 80%. Assumiu-se que o betão está sujeito apenas aos efeitos diferidos da fluência e maturação, desprezando-se o efeito da retracção. No modelo numérico considerou-se uma discretização da consola em 8 elementos de viga de 1,25 m de comprimento. Na Figura 3.13 apresentam-se os dados deste exemplo.

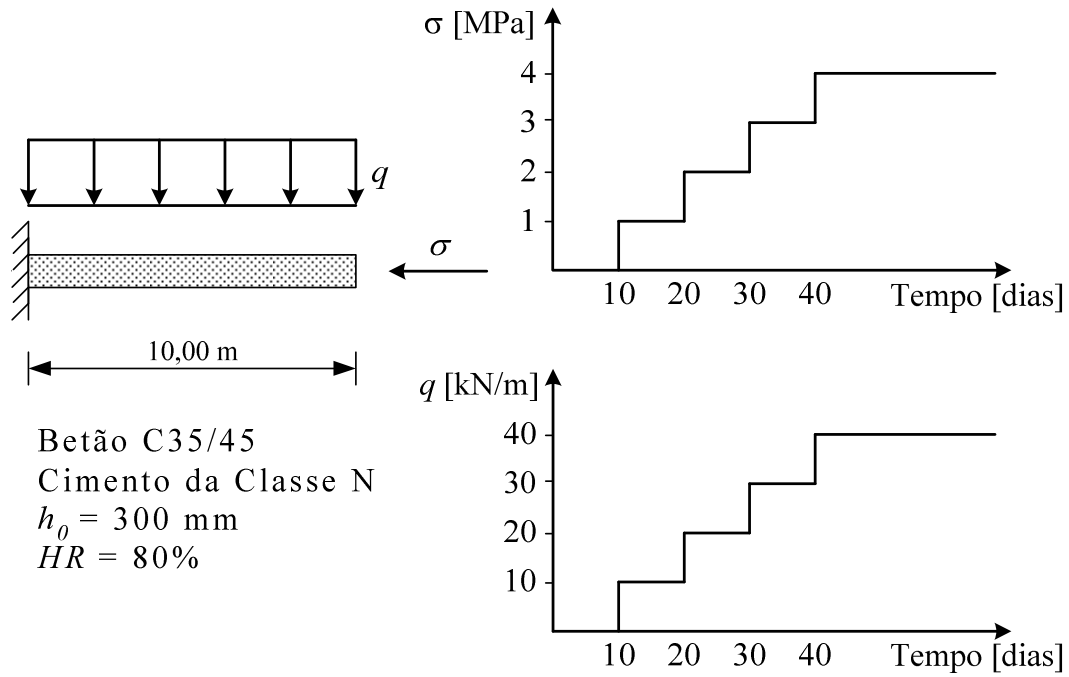


Figura 3.13 – Viga em consola sujeita a fluência com tensão variável

Nas Figuras 3.14, 3.15 e 3.16 apresentam-se os resultados obtidos com o modelo numérico, no que respeita aos deslocamentos da extremidade livre da consola, e comparam-se com a solução teórica obtida aplicando o princípio da sobreposição de efeitos ao modelo de fluência do EC2 (EN 1992-1-1, 2010).

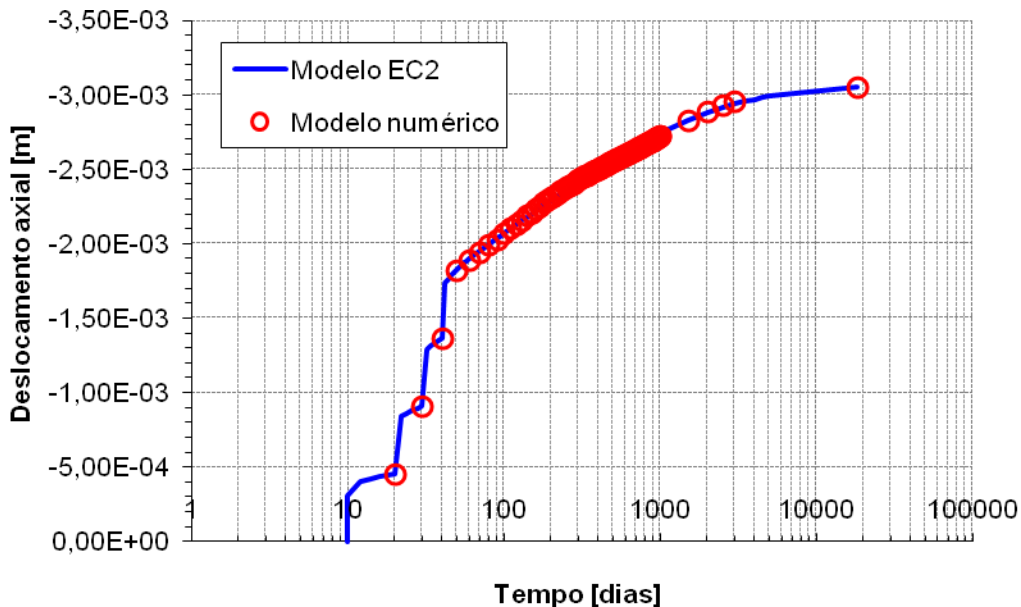


Figura 3.14 – Deslocamento axial da extremidade livre da consola

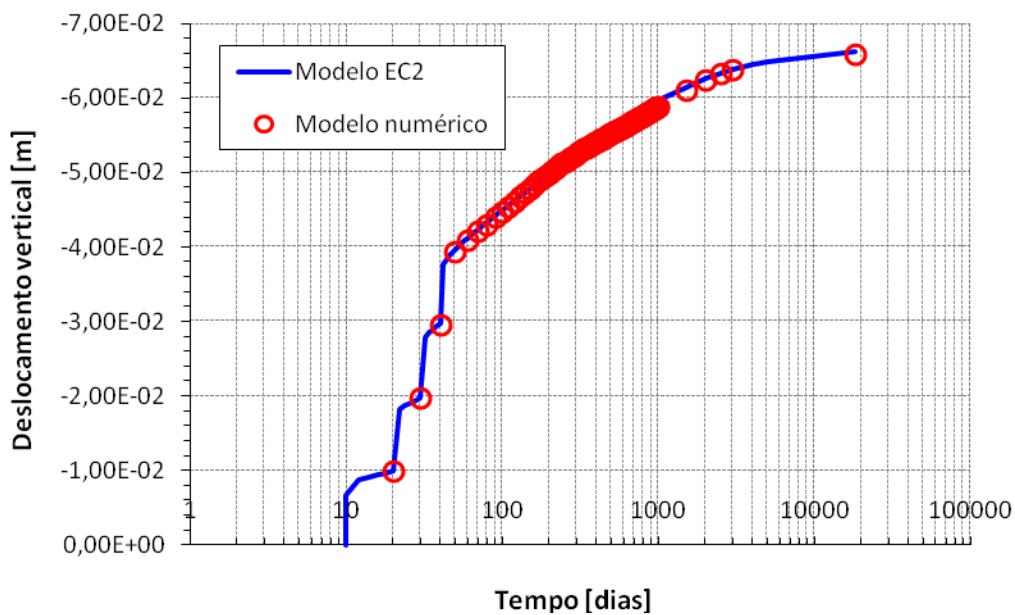


Figura 3.15 – Deslocamento vertical da extremidade livre da consola

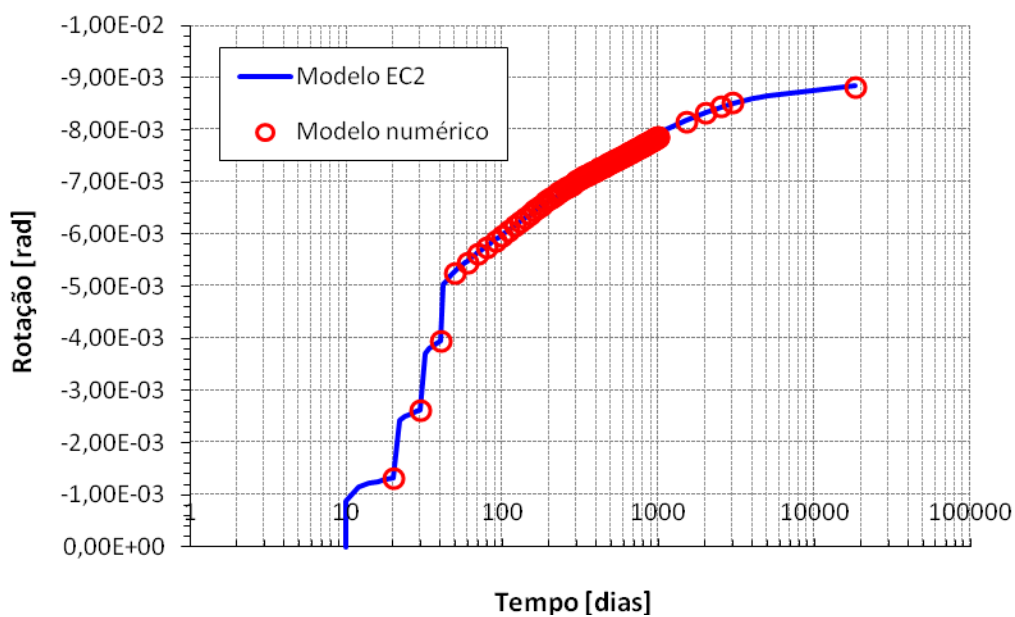


Figura 3.16 – Rotação da extremidade livre da consola

Pela observação dos resultados apresentados nas Figuras 3.14, 3.15 e 3.16 verifica-se que o modelo numérico desenvolvido prevê adequadamente a resposta estrutural ao longo do tempo devido ao efeito da fluência sob tensão variável.

Exemplo 2 – Relaxação do betão

Para ilustrar o fenómeno de relaxação do betão considera-se, neste segundo exemplo, uma viga em betão simples bi-encastada e sujeita aos efeitos diferidos da retracção, associada ou não à fluência, e à maturação do betão. A análise foi efectuada até uma idade do betão igual a 50 anos (aproximadamente 18250 dias). Novamente considerou-se um betão da classe C35/45 em que se utilizou um cimento da Classe N, uma espessura equivalente de 300 mm e uma humidade relativa do ambiente constante e igual a 80%, como se representa na Figura 3.17. Tal como no exemplo anterior, a viga foi discretizada em 8 elementos de viga de 1,25 m de comprimento. Na Figura 3.18 apresentam-se os resultados obtidos com o modelo numérico representando-se a evolução ao longo do tempo da tensão axial devido à deformação de retracção impedida, associada ou não à fluência.

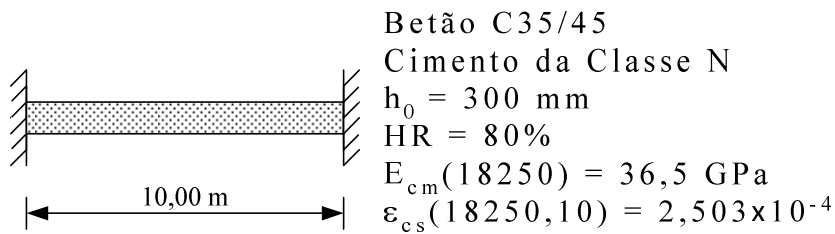


Figura 3.17 – Viga de betão bi-encastada sujeita à retracção com ou sem fluência

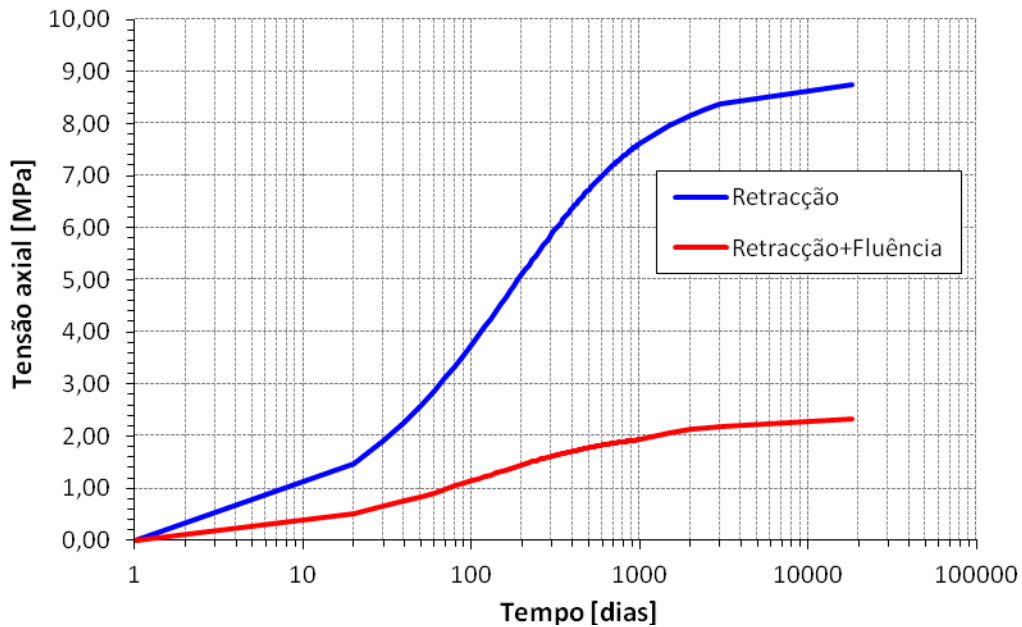


Figura 3.18 – Tensão axial em viga bi-encastada sujeita à retracção com ou sem fluência

Devido à retracção e, em virtude do impedimento da deformação da viga proporcionado pelas condições de apoio, vão surgir tensões de tracção no betão que aumentam ao longo do tempo à medida que a deformação de retracção aumenta.

Os resultados apresentados na Figura 3.18 ilustram o fenómeno de relaxação das tensões no betão. Quando se considera a acção conjunta da retracção e da fluência, as tensões de tracção não aumentam tão significativamente como quando se considera apenas a retracção. Nesta última situação, as tensões aumentam desde zero até 8,7 MPa, correspondendo aproximadamente, ao produto da deformação de retracção pelo módulo de elasticidade do betão considerando a sua evolução no tempo (maturação). Quando se considera a acção conjunta da fluência e da retracção, a tensão de tracção no betão aumenta de zero até um valor máximo de 2,3 MPa, que corresponde a 26,7% do valor de tensão quando não se considera acção da fluência.

3.5. Análise evolutiva da estrutura

3.5.1. Modelo desenvolvido

No Capítulo 2 foi salientada a importância da análise do processo construtivo no âmbito do projecto de pontes de tirantes, em particular quando se utiliza o método dos avanços sucessivos. O carácter evolutivo da estrutura durante o processo construtivo, com alterações de geometria, de condições de ligação e de acções, traduz-se em alterações dos campos de deformações e de tensões. No caso particular das pontes de betão a história de cargas influencia também os efeitos diferidos. Assim, no projecto de pontes de tirantes deve proceder-se a uma análise detalhada da fase construtiva que permita o cálculo das forças de instalação e de ajustamento dos tirantes para se atingir, no final da construção, a rasante e a distribuição de esforços pretendidas. Esta análise deve ainda possibilitar a determinação das deformadas da estrutura em cada etapa da construção e também a verificação da segurança para os vários elementos da estrutura, quer durante o processo construtivo, quer para a ponte completa.

Tal como foi referido no Capítulo 2, na bibliografia têm sido propostos dois métodos para proceder à análise estrutural das fases construtivas em pontes de tirantes, o *método da montagem* e o *método da desmontagem* (Chen e Duan, 2000).

No âmbito do presente trabalho, o modelo numérico foi desenvolvido considerando o método da montagem para efectuar a análise das fases construtivas. Neste procedimento segue-se a sequência das fases construtivas, o que permite conhecer as tensões e os

deslocamentos em toda a estrutura ao longo da construção, possibilitando a consideração directa dos efeitos diferidos. Para além disso, e tendo em conta a necessidade de integração dos módulos de análise estrutural, análise de sensibilidades e optimização, esta abordagem é a mais adequada para tal. Com este método toda a informação relativa às tensões e aos deslocamentos e suas respectivas sensibilidades está simultaneamente disponível no final de cada fase de análise e previamente à chamada do módulo de optimização.

O modelo numérico foi desenvolvido considerando a construção através do método dos avanços sucessivos por ser o mais geral e amplamente utilizado na construção de pontes de tirantes e mesmo noutros tipos de pontes de médio e grande vão. Neste método a construção inicia-se com a execução das torres e prossegue com o início das consolas do tabuleiro de cada lado das torres. Em fases seguintes os outros segmentos do tabuleiro são executados e os tirantes instalados, até o tabuleiro se encontrar totalmente construído. Por conseguinte, no modelo numérico, a análise é feita por fases de modo a descrever as várias etapas do processo construtivo em que existem alterações da geometria da estrutura e das acções aplicadas.

Em cada fase de análise um segmento de tabuleiro e um par de tirantes são instalados. Para garantir a compatibilidade dos deslocamentos nodais, considera-se que cada segmento de tabuleiro é instalado tangencialmente ao existente ao qual se liga.

Os tirantes são definidos através das conectividades dos nós das respectivas ancoragens no tabuleiro e nas torres. Aquando da sua instalação os tirantes contribuem apenas com a respectiva força de pré-esforço nas ancoragens. Em fases subsequentes, o tirante previamente instalado, é considerado como um novo elemento da estrutura contribuindo para a matriz de rigidez global da mesma.

No que respeita às forças de instalação dos tirantes são inicialmente fornecidos valores nos ficheiros de dados do modelo numérico. Os valores finais das forças de instalação são determinados através de um processo iterativo de análise e optimização, utilizando o algoritmo que será descrito em pormenor no Capítulo 4. Essas forças são calculadas de modo a garantir que, durante as fases construtivas as tensões em toda a estrutura permanecem dentro dos limites admissíveis e que o tabuleiro apresenta deslocamentos compatíveis com a ligação aos encontros e com o fecho das consolas a meio-vão da ponte.

Após o fecho, e utilizando o mesmo algoritmo de optimização, são determinadas as forças de ajustamento nos tirantes. Estas forças são calculadas de modo a garantir que, para a condição de carga permanente, as tensões em toda a estrutura permanecem dentro dos limites admissíveis e que o tabuleiro apresenta a rasante requerida no projecto.

Tendo em conta as hipóteses admitidas, os resultados no final de cada fase podem ser continuamente acumulados usando o princípio da sobreposição de efeitos. Para a fase j o sistema de equações de equilíbrio da estrutura pode ser escrito como

$$\underline{K}_j \cdot \underline{\Delta u}_j = \underline{\Delta F}_j \quad (3.150)$$

onde K_j representa a matriz de rigidez da estrutura na fase j e $\underline{\Delta F}_j$ representa o vector com os valores das variações nas forças nodais equivalentes da fase $j-1$ para a fase j , resultando numa variação dos valores dos deslocamentos nodais $\underline{\Delta u}_j$. Os deslocamentos nodais no final da fase j são

$$\underline{u}_j = \underline{u}_{j-1} + \underline{\Delta u}_j \quad (3.151)$$

Do mesmo modo, a variação de deslocamentos provoca um incremento das tensões na fase j dado por

$$\underline{\Delta \sigma}_j^e = \underline{D} \cdot \underline{B}^e \cdot \underline{\Delta u}_j^e \quad (3.152)$$

Assim, os valores totais das tensões no final da fase j são a soma das tensões no final da fase j com o incremento de tensões da fase i para a fase j

$$\underline{\sigma}_j^e = \underline{\sigma}_{j-1}^e + \underline{\Delta \sigma}_j^e \quad (3.153)$$

Na Figura 3.19 apresenta-se um esquema ilustrativo da análise das fases construtivas utilizando o método dos avanços sucessivos.

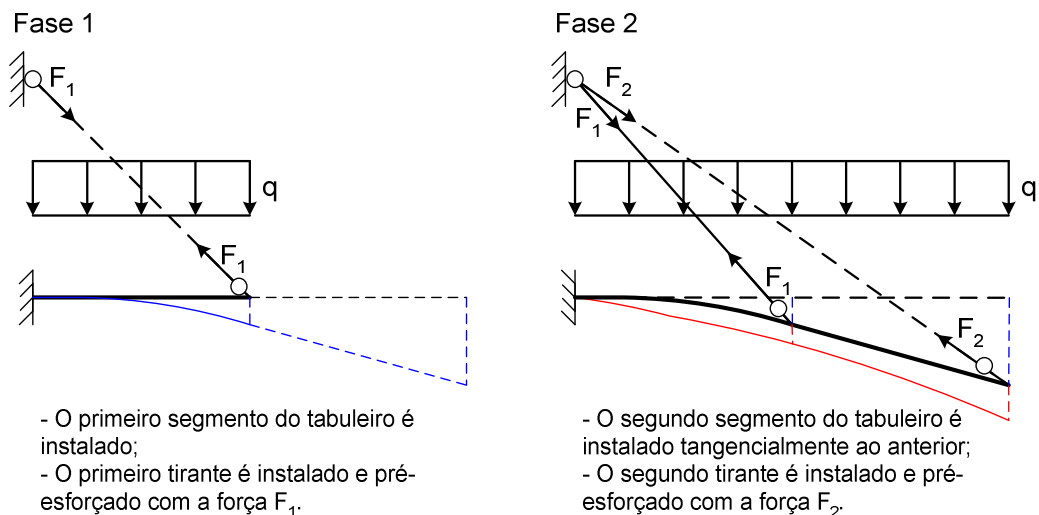


Figura 3.19 – Esquema da análise das fases construtivas utilizando o método dos avanços sucessivos

Para além da adição de elementos e da alteração das condições de carregamento, o modelo desenvolvido possibilita também a adição e remoção de ligações internas ou externas, pois estes aspectos assumem igualmente relevância durante o processo construtivo de pontes de tirantes pelo método dos avanços sucessivos. Aquando da ligação do tabuleiro aos encontros é

necessário adicionar as respectivas condições de apoio. Também a ligação entre o tabuleiro e as torres, que para a ponte completa pode ser apenas vertical ou até inexistente (no caso de tabuleiros com suspensão total), deve poder ser alterada durante o processo construtivo. Este facto justifica-se pela necessidade de, nas fases iniciais, dotar a estrutura de ligações adicionais que garantam a estabilidade da mesma.

3.5.2. Exemplos de verificação

Na presente secção apresentam-se três exemplos de verificação do modelo numérico desenvolvido no que respeita à análise evolutiva da estrutura. Os exemplos que se apresentam permitem verificar a validade do modelo no que respeita à alteração das condições de ligação e à evolução das cargas e da geometria da estrutura. No primeiro exemplo analisa-se a introdução de elementos e a alteração das condições de carregamento. No segundo e terceiro exemplos ilustra-se a alteração das condições de ligação, no segundo com a introdução de ligações e no terceiro com a remoção de ligações.

Exemplo 1 – Introdução de elementos e alteração de cargas

Este exemplo consiste na construção de uma viga de betão em consola suportada por tirantes. A viga é sujeita a uma carga transversal uniformemente distribuída e os tirantes são pré-esforçados aquando da sua instalação. Considerou-se um betão da classe C35/45 ($E_{cm} = 34$ GPa), um aço de pré-esforço Y1860 ($E_p = 195$ GPa) e não se consideraram os efeitos diferidos nem os efeitos geometricamente não-lineares. Cada tramo da consola foi discretizado em 8 elementos de viga de 1,25 m de comprimento e cada tirante foi modelado com um elemento de barra. A análise foi efectuada em três fases. Na primeira fase foi construído o primeiro tramo da viga, estando sujeito ao seu peso próprio e a uma carga de 20 kN/m, e foi instalado o primeiro tirante com uma força de pré-esforço de 100 kN. Na segunda fase adicionou-se o segundo tramo da viga e na terceira fase este tramo foi carregado com a carga transversal uniformemente distribuída de 20 kN/m e foi instalado o segundo tirante com uma força de pré-esforço de 150 kN. Na Figura 3.20 apresentam-se os dados deste exemplo.

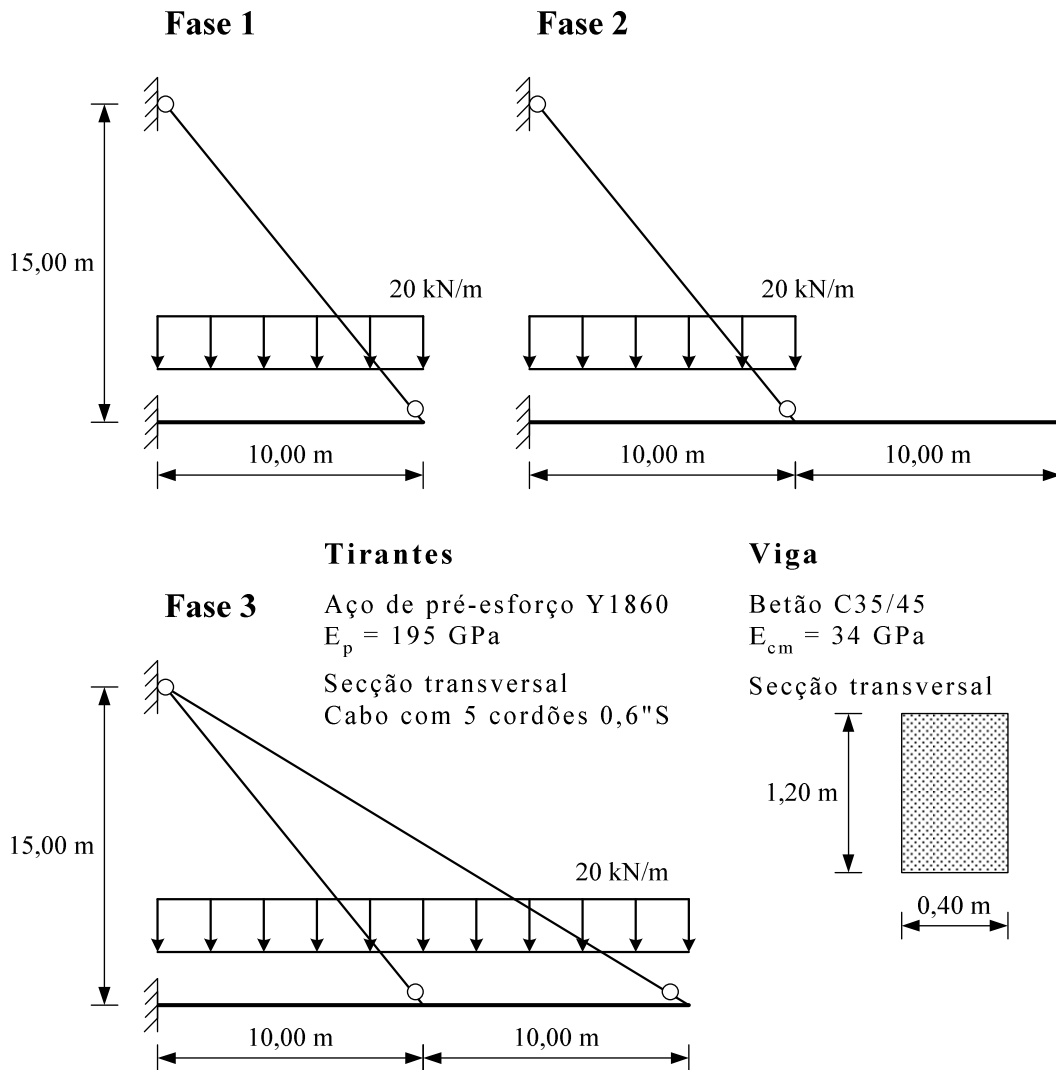


Figura 3.20 – Dados do Exemplo 1 (análise evolutiva da estrutura)

Nas Figuras 3.21 e 3.22 apresentam-se, respectivamente, as configurações deformadas da viga e as distribuições de momentos flectores para as três fases de análise. De referir que na Figura 3.21 representa-se também a posição do segundo segmento caso não se considerasse o seu peso próprio. Este facto permite evidenciar que o segundo tramo é adicionado à estrutura na sua configuração deformada obtida no final da Fase 1. Observa-se também que ao adicionar o segundo tramo há um aumento dos deslocamentos verticais da viga em virtude não só do peso próprio desse tramo, como também, na Fase 3, da carga transversal a ele aplicada.

No que respeita aos valores do momento flector obtidos para as várias fases verifica-se uma redistribuição dos mesmos, resultante do aumento da carga aplicada e da alteração das condições de ligação com a adição do segundo tirante.

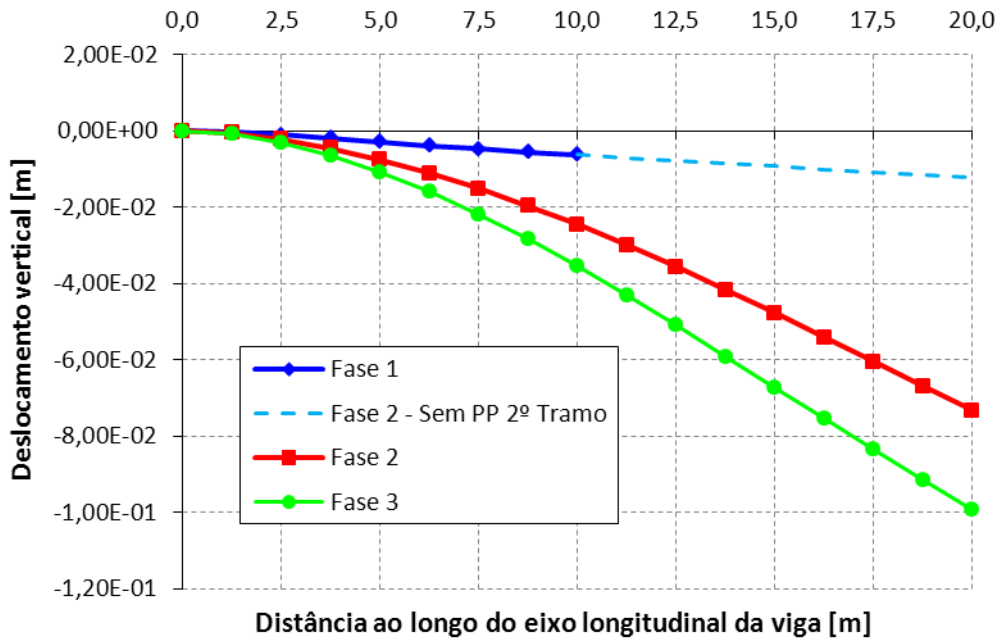


Figura 3.21 – Deformadas da consola para o Exemplo 1 (análise evolutiva da estrutura)

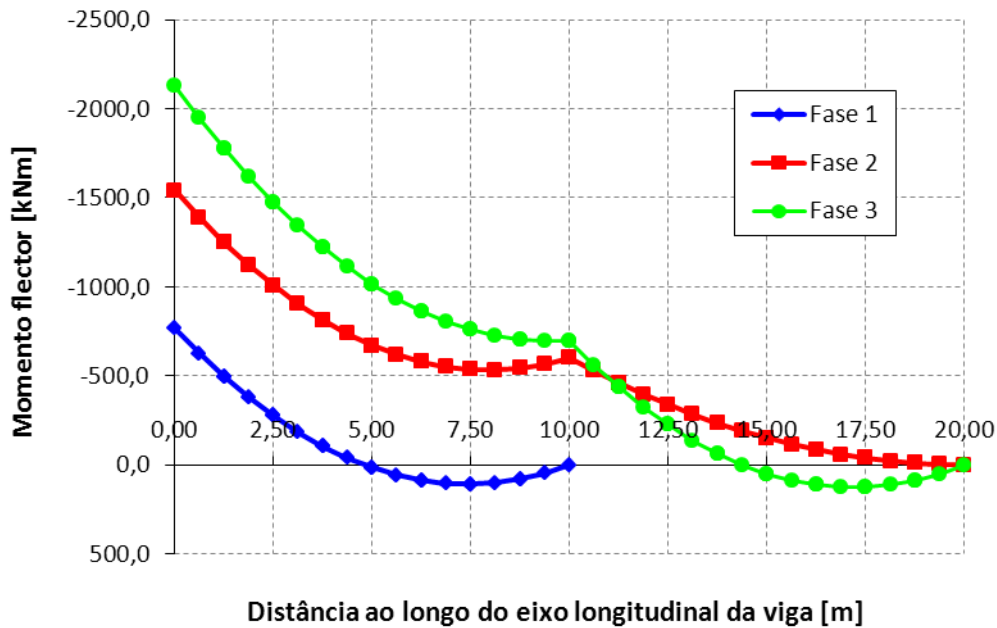


Figura 3.22 – Distribuições de momento flector para o Exemplo 1 (análise evolutiva da estrutura)

Exemplo 2 – Introdução de ligações

Neste segundo exemplo considera-se uma viga de betão com 10,0 m de vão e sujeita a uma carga uniformemente distribuída. Considerou-se um betão da classe C35/45 ($E_{cm} = 34$ GPa) e não se consideraram os efeitos diferidos. A estrutura foi analisada em duas fases. Na primeira fase considerou-se a viga simplesmente apoiada com um valor de carga de

10 kN/m. Na segunda fase adicionou-se um apoio simples a meio-vão da viga e a carga foi aumentada para 40 kN/m. Considerou-se uma discretização em 8 elementos de viga de 1,25 m de comprimento. Na Figura 3.23 apresentam-se os dados deste exemplo.

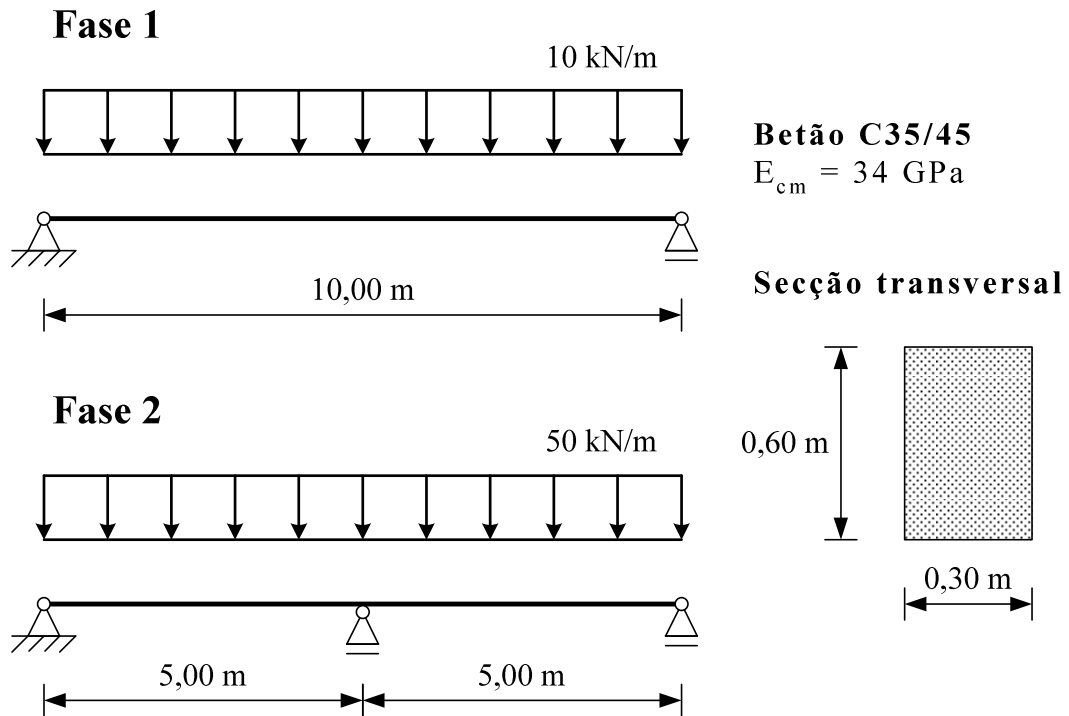


Figura 3.23 – Dados do Exemplo 2 (análise evolutiva da estrutura)

No Quadro 3.2 apresentam-se os resultados obtidos para as reacções de apoio e nas Figuras 3.24 e 3.25 representam-se, respectivamente, a deformada da viga e a distribuição de momento flector, para as duas fases de análise consideradas.

Quadro 3.2 – Reacções de apoio verticais na viga do Exemplo 2 (análise evolutiva da estrutura)

Localização	Reacções de apoio [kN]	
	Fase 1	Fase 2
Apoio lateral esquerdo	50,00	106,25
Apoio central	–	187,50
Apoio lateral direito	50,00	106,25

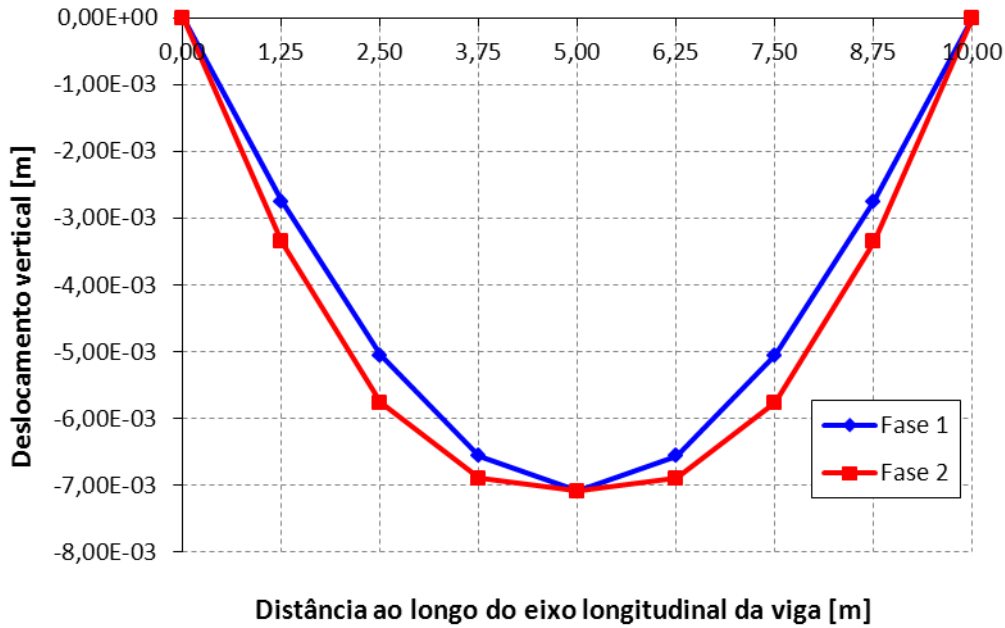


Figura 3.24 – Deformada da viga do Exemplo 2 (análise evolutiva da estrutura)

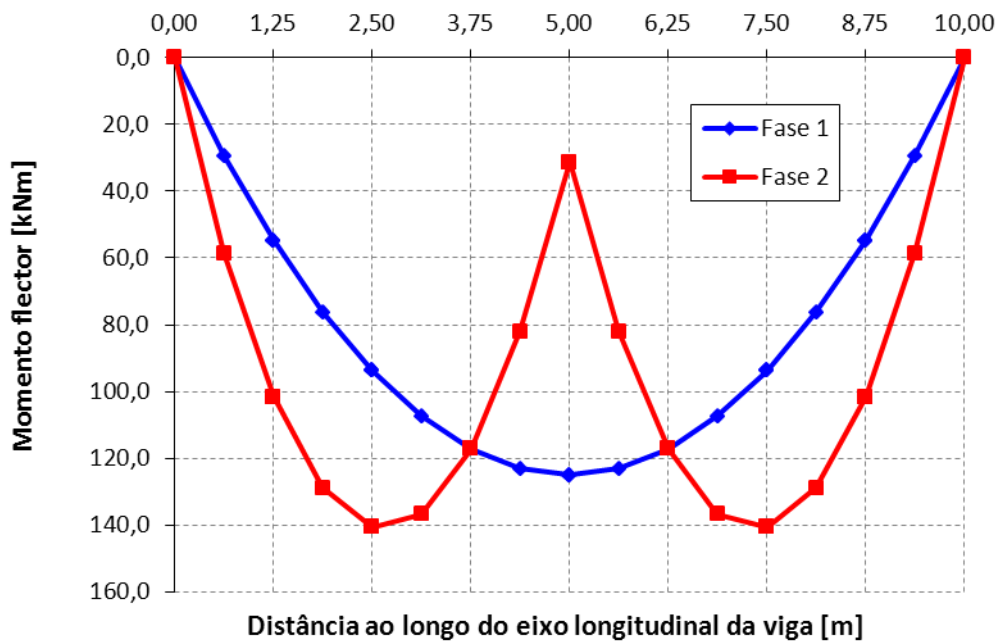


Figura 3.25 – Distribuições de momento flector para a viga do Exemplo 2 (análise evolutiva da estrutura)

Pela observação dos resultados apresentados para este exemplo verifica-se que na Fase 2, após a introdução do apoio a meio-vão da viga, esta comporta-se como uma viga contínua. Deste modo, em virtude do aumento de carga da primeira para a segunda fase, passa a existir reacção no apoio central e as reacções nos apoios laterais são também incrementadas. Como se observa na Figura 3.24, o apoio central é introduzido na configuração deformada da estrutura, deformando-se esta, na segunda fase, a partir das novas condições de apoio. Estas

novas condições de apoio, por sua vez conduzem a uma redistribuição do momento flector da primeira para a segunda fase.

Exemplo 3 – Remoção de ligações

Neste terceiro exemplo utiliza-se a mesma viga do exemplo anterior mas neste caso começa-se, na Fase 1, por analisar a condição de viga contínua sujeita a uma carga uniformemente distribuída de 10 kN/m. Na Fase 2 o valor de carga é mantido e é removido o apoio central. Na Figura 3.26 apresentam-se os dados deste exemplo.

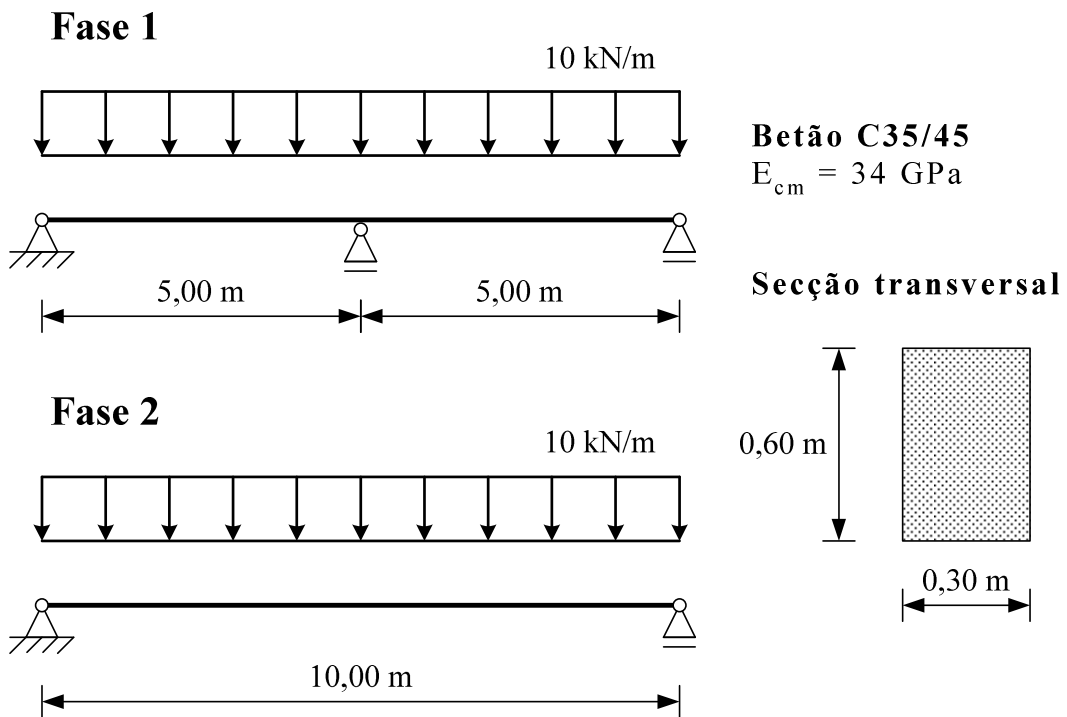


Figura 3.26 – Dados do Exemplo 3 (análise evolutiva da estrutura)

Para as duas fases de análise consideradas apresentam-se, no Quadro 3.3 os resultados obtidos para as reacções de apoio, na Figura 3.27 a deformada da viga e na Figura 3.28 a distribuição de momento flector.

Quadro 3.3 – Reacções de apoio verticais na viga do Exemplo 3 (análise evolutiva da estrutura)

Localização	Reacções de apoio [kN]	
	Fase 1	Fase 2
Apoio lateral esquerdo	18,75	50,00
Apoio central	62,50	–
Apoio lateral direito	18,75	50,00

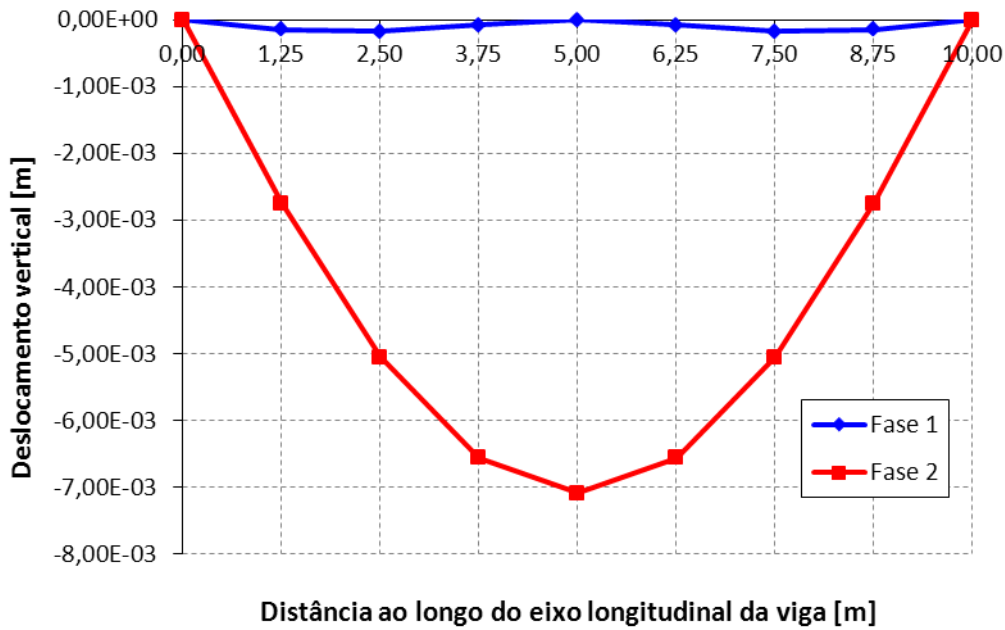


Figura 3.27 – Deformada da viga do Exemplo 3 (análise evolutiva da estrutura)

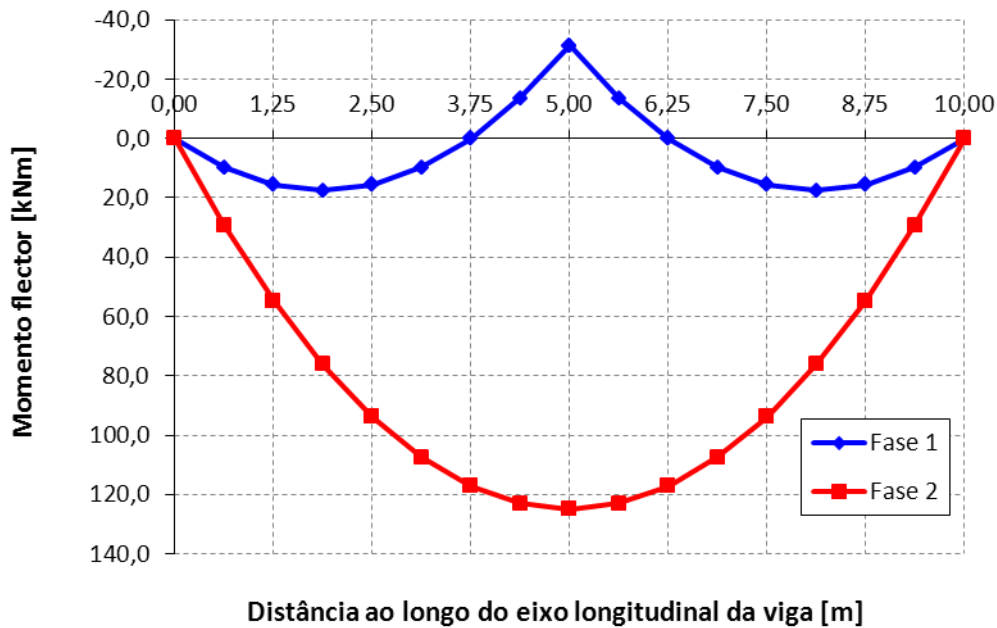


Figura 3.28 – Distribuições de momento flector para a viga do Exemplo 3 (análise evolutiva da estrutura)

Tendo em conta os resultados apresentados verifica-se que a remoção do apoio a meio-vão da viga provoca, maiores valores de deslocamento transversal e uma redistribuição das reacções de apoio e dos momentos flectores, passando esta a comportar-se como uma viga simplesmente apoiada. Isto ocorre sem alteração da carga aplicada.

Na Fase 2, em virtude da remoção da ligação proporcionada pelo apoio central, a força de ligação correspondente é aplicada à estrutura e o deslocamento anteriormente impedido pela

ligação passa a ser possível. Deste modo, a força de ligação removida é redistribuída pelos dois apoios laterais e há um aumento significativo dos valores de deslocamento transversal e de momento flector com uma distribuição igual à que se obtém para uma viga simplesmente apoiada.

3.6. Análise dos efeitos geometricamente não-lineares

3.6.1. Modelo desenvolvido

Tal como já foi referido na secção 2.6.4, existem três fontes principais de não-linearidade geométrica em pontes de tirantes em virtude do comportamento não-linear dos tirantes, do tabuleiro e das torres. Deste modo, podem referir-se o efeito de catenária dos tirantes, o efeito de viga-coluna ($P-\delta$) e o efeito dos grandes deslocamentos ($P-\Delta$) no tabuleiro e nas torres. Na referida secção salientou-se também a importância da consideração dos efeitos de segunda ordem na análise deste tipo de estruturas, pelo que os mesmos foram tidos em conta no modelo numérico desenvolvido.

Segundo Reis e Camotim (2001) existem diversos métodos de análise de segunda ordem, diferindo entre si pelo tipo de formulação empregue, pelos efeitos que tomam em consideração e pela precisão dos resultados que fornecem. Segundo os mesmos autores, as análises de segunda ordem podem classificar-se em três grandes categorias:

- i) *Análises de segunda ordem rigorosas* (ou “exactas”), em que as equações de equilíbrio são escritas na configuração deformada “instantânea” da estrutura, a qual vai variando em função do carregamento aplicado. Para tal é necessário recorrer a procedimentos iterativos e a métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos. Existem na literatura diversos elementos finitos não-lineares, aos quais correspondem diferentes graus de complexidade e sofisticação. A obtenção de resultados com uma precisão elevada requer que na análise iterativa se tenha em conta a variação do esforço axial nos elementos à medida que o carregamento aumenta. Desde que as imperfeições iniciais sejam incluídas na análise, estes métodos permitem compatibilizar adequadamente tanto os efeitos $P-\Delta$ como os efeitos $P-\delta$.
- ii) *Análises de segunda ordem aproximadas* (ou “simplificadas”), em que as equações de equilíbrio são, em geral, escritas na configuração indeformada da estrutura, sendo os efeitos geometricamente não-lineares incorporados de uma forma indirecta e iterativa, através de forças adicionais, reduções de rigidez, etc.. Assim, este tipo de

análises substitui a resolução do problema não-linear pela resolução de sucessivos problemas lineares, o que se traduz em menores exigências a nível de métodos de cálculo. Tendo em conta que a natureza dos efeitos de segunda ordem considerados depende da formulação específica de cada método pode dizer-se, de um modo geral, que os efeitos $P-\Delta$ são sempre razoavelmente estimados e que os efeitos $P-\delta$ são muitas vezes parcialmente estimados ou totalmente ignorados.

- iii) *Análises de primeira ordem modificadas*, em que os efeitos de segunda ordem são tidos em conta através da modificação dos resultados obtidos por meio de uma análise linear da estrutura. Essa modificação é feita usando factores de amplificação (de deslocamentos, de momentos flectores, etc.) que variam de problema para problema e consoante se trate dos efeitos $P-\Delta$ ou $P-\delta$.

No âmbito do presente trabalho optou-se por desenvolver o modelo numérico considerando uma *análise de segunda ordem aproximada*. Esta opção justifica-se pelo facto dos objectivos deste trabalho não se centrarem no estudo pormenorizado dos efeitos geometricamente não-lineares. No entanto, dado que estes devem ser considerados na análise de pontes atirantadas escolheu-se uma metodologia que permite a consideração dos mesmos sem penalizar em demasia o custo computacional do modelo. Além disso, pensa-se que o grau de precisão obtido com este tipo de análise seja o adequado tendo em vista os objectivos do trabalho. O custo computacional é um aspecto relevante pois este modelo já apresenta alguma exigência pela consideração da modelação e análise das fases construtivas. A somar a este facto, deve ter-se ainda em atenção que, o modelo numérico global é iterativo pois compreende ciclos de análise e optimização até se atingirem os objectivos de projecto definidos no algoritmo de optimização. Tendo sempre presente, no desenvolvimento do modelo, a necessidade de integração dos módulos de análise, análise de sensibilidades e optimização pode referir-se que a abordagem de análise linear iterativa adoptada se integra adequadamente com a metodologia de análise de sensibilidades linear utilizada e que será apresentada e descrita em pormenor no Capítulo 4.

De salientar ainda que, conciliar uma *análise de segunda ordem exacta* com a análise de sensibilidades necessária para o algoritmo de optimização requer a diferenciação das expressões envolvidas na formulação não-linear elementar para o cálculo das sensibilidades. Trata-se de uma tarefa extremamente trabalhosa e não há garantia de obtenção de resultados satisfatórios. Como já apontado por Negrão (1996), uma abordagem a adoptar poderia ser a utilização de uma *análise de segunda ordem exacta* com uma análise de sensibilidades linear. Esta abordagem requereria também um cuidado especial no cálculo das sensibilidades para

evitar a instabilidade numérica do modelo. Tal deve-se à dificuldade das sensibilidades preverem adequadamente a resposta da estrutura face a variações nas variáveis de decisão. Contudo, considera-se que esta está fora do âmbito deste trabalho, podendo no entanto, vir a ser adoptada num desenvolvimento futuro.

Desta forma, e considerando uma *análise de segunda ordem aproximada*, o modelo numérico foi desenvolvido utilizando uma análise iterativa em que os tirantes foram modelados como elementos de barra com módulo de elasticidade equivalente ou módulo de Ernst e os efeitos de segunda ordem devido ao efeito de viga-coluna e a alterações na geometria da estrutura foram considerados utilizando o *método das forças laterais equivalentes*.

Um método amplamente utilizado (Fleming, 1979; Stipanic, 1987; Nazmy e Abdel-Ghaffar, 1990; Kanok-Nukulchai *et al.*, 1992; Kanok-Nukulchai e Hong, 1993; Adeli e Zhang, 1995; Wang e Yang, 1996; Walther *et al.*, 1999; Freire, 2002; Wang *et al.*, 2002; Freire *et al.*, 2006) na análise do comportamento não-linear dos tirantes inclinados de uma ponte atirantada consiste na modelação de cada tirante como um elemento de barra com o comprimento da corda do tirante e com um módulo de elasticidade equivalente. Este método permite descrever o comportamento de catenária do tirante, simulando o comportamento geometricamente não-linear de um cabo curvo através do comportamento fisicamente não-linear de um cabo recto, com um módulo de elasticidade dependente da tensão instalada. Segundo Walther *et al.* (1999) o conceito de módulo de elasticidade equivalente foi primeiramente introduzido por Ernst (1965).

A reduzida rigidez de flexão de um cabo impossibilita-o de equilibrar por esta via qualquer carregamento transversal, como o peso próprio, a que seja sujeito. Desta forma, o equilíbrio é realizado por esforço axial e o cabo deforma-se segundo uma curva catenária, de flecha tanto mais pronunciada quanto menores as forças de ancoragem nas extremidades. Assim, considere-se um cabo inclinado inextensível representado na Figura 3.29, com área da secção transversal A , simplesmente apoiado e em equilíbrio com o seu peso próprio (p). Aplicando um acréscimo de força de ancoragem (ΔN), diminui-se a flecha a meio-vão e o cabo alonga-se sofrendo uma extensão aparente ε_f dada por:

$$\varepsilon_f = \frac{\Delta L}{L} \quad (3.154)$$

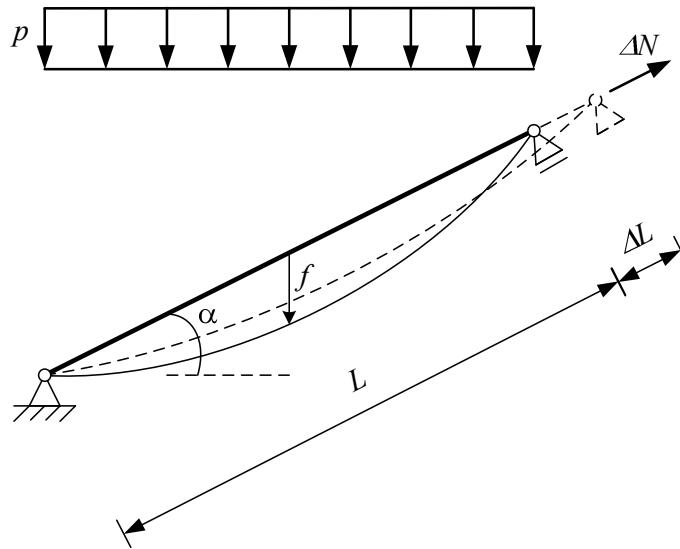


Figura 3.29 – Equilíbrio de um elemento de cabo

Por conseguinte, o módulo de elasticidade aparente do cabo associado ao efeito de catenária pode ser escrito como:

$$E_f = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon_f} = \frac{\Delta\sigma}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{\Delta N}{A \frac{\Delta L}{L}} \quad (3.155)$$

No entanto, em condições reais o cabo sujeito à tensão σ apresenta também uma deformação elástica ε_e :

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} \quad (3.156)$$

O módulo de elasticidade equivalente, E_{eq} , obtém-se aplicando a lei de Hooke à deformação total:

$$E_{eq} = \frac{\sigma}{\varepsilon_f + \varepsilon_e} = \frac{E_f \cdot E}{E_f + E} = \frac{E}{1 + \frac{E}{E_f}} \quad (3.157)$$

Para determinar E_f , Ernst aproximou a deformada do cabo por uma curva parabólica obtida a partir do desenvolvimento em série de Taylor da expressão exacta da catenária, truncada além do termo quadrático. O erro desta aproximação é pequeno quando a relação entre a flecha e o vão do cabo é inferior a 1/12, o que se verifica neste tipo de estruturas dado o elevado nível de tensão instalado nos tirantes. Deste modo, obtém-se:

$$E_f = \frac{12\sigma^3}{(\gamma \cdot L \cos \alpha)^2} \quad (3.158)$$

Por conseguinte, o valor do módulo de elasticidade equivalente de um cabo é dado por

$$E_{eq} = \frac{E}{1 + \frac{(\gamma \cdot L \cos \alpha)^2 E}{12\sigma^3}} \quad (3.159)$$

onde E_{eq} é o módulo de elasticidade equivalente, E é o módulo de elasticidade efectivo do material, γ é o peso específico do material que constitui o cabo, L é o comprimento da corda, α é o ângulo entre a corda e a direcção horizontal e σ é a tensão de tracção no cabo.

O módulo de elasticidade equivalente combina os efeitos da deformação material e geométrica e o seu valor depende do peso, do comprimento e da tensão de tracção no cabo. Utilizando o conceito de módulo de elasticidade equivalente a matriz de rigidez do elemento de tirante, no sistema de coordenadas locais (Figura 3.2), pode ser escrita a partir da matriz de rigidez do elemento de barra (Equação (3.9)):

$$\underline{K}^e = \frac{E_{eq} \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \quad (3.160)$$

Como o módulo de elasticidade equivalente depende da tensão de tracção no tirante é necessário proceder a uma análise iterativa. Numa primeira iteração considera-se o módulo de elasticidade do material para a determinação da rigidez do tirante e, do equilíbrio global da estrutura, obtém-se uma primeira estimativa para a tensão instalada no tirante. Na iteração seguinte a rigidez elementar do tirante é actualizada com o módulo de elasticidade equivalente calculado usando o valor de tensão de tracção determinado na primeira iteração, sendo a estrutura reanalisada. O processo é repetido até se obterem diferenças pequenas nos valores do módulo de elasticidade equivalente. Este processo converge em poucas iterações.

Na Figura 3.30 apresenta-se um gráfico com a variação da razão entre o módulo de elasticidade equivalente e o módulo de elasticidade do material em função do comprimento na direcção horizontal e do nível de tensão instalada no tirante. Assumiram-se os seguintes dados: $E=195$ GPa, $\gamma=77$ kN/m³ e $f_{pk}=1860$ MPa.

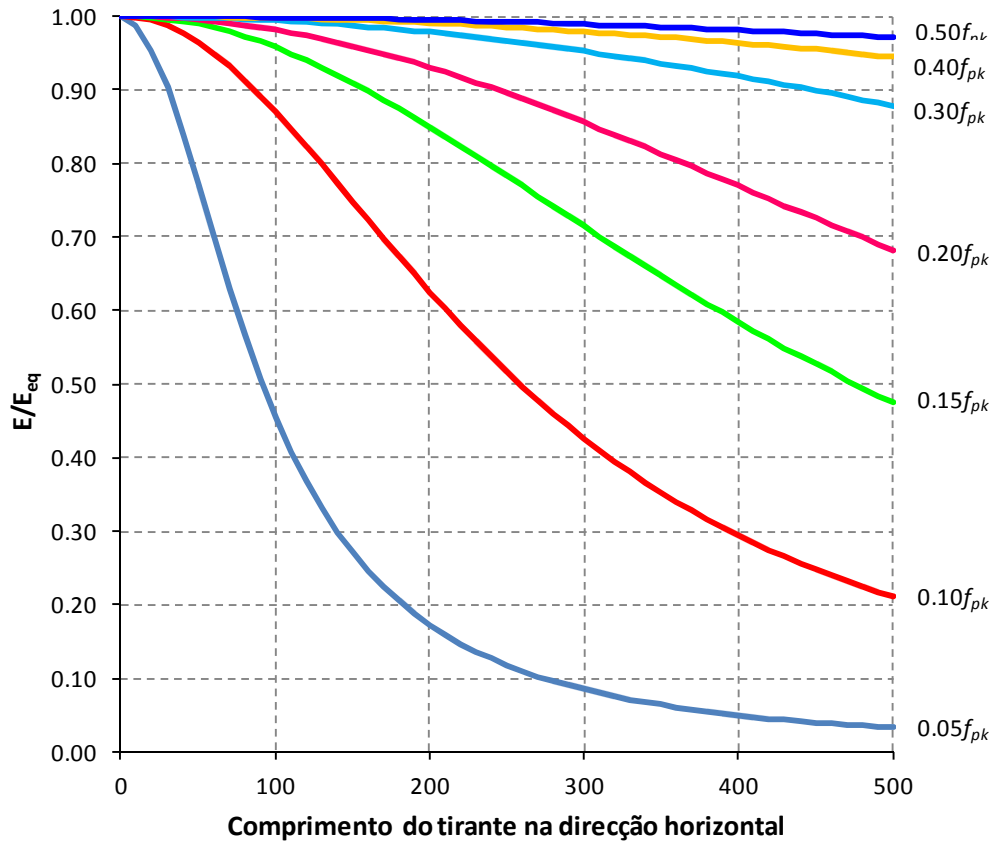


Figura 3.30 – Variação da razão E_{eq}/E em função do comprimento na direcção horizontal e do nível de tensão instalada no tirante

Da observação da Figura 3.30 verifica-se que, para um mesmo nível de tensão instalada no tirante, o módulo de elasticidade equivalente diminui substancialmente com o aumento do comprimento do tirante. Por outro lado, para um mesmo comprimento, o aumento do nível de tensão conduz a um aumento substancial do valor do módulo de elasticidade equivalente. Observa-se também que, apenas para os tirantes mais longos e pouco tensionados ($\sigma \leq 0.15f_{pk}$) em pontes de muito grande vão (tirantes com 400 – 500 m de comprimento em projecção horizontal), se registam reduções significativas do módulo de elasticidade equivalente. Para pontes de médio vão não se observam reduções tão notórias. Sendo expectável que, em serviço, os níveis de tensão nos tirantes sejam mais elevados ($0.30f_{pk}$ a $0.40f_{pk}$), mesmo para tirantes de grande comprimento, a redução no módulo de elasticidade equivalente não é tão significativa.

Os efeitos de segunda ordem devido aos grandes deslocamentos e ao efeito de vigacoluna foram considerados utilizando o *método das forças laterais equivalentes*, também designado por *método das forças fictícias* ou *método iterativo P-Δ*, habitualmente utilizado na análise de segunda ordem de edifícios (Chen e Lui, 1991; Reis e Camotim, 2001). Este é um

método iterativo que se baseia na substituição da resolução do problema original (geometricamente não-linear) pela resolução de sucessivos problemas lineares requerendo, por conseguinte, apenas cálculos de análise linear de estruturas. Recorre-se a um conjunto de forças transversais para simular a perda de rigidez do elemento comprimido e, deste modo, os efeitos de segunda ordem. As forças laterais equivalentes representadas na Figura 3.31 introduzem momentos flectores na configuração indeformada dos elementos comprimidos, semelhantes aos gerados pelo esforço de compressão actuando na corda da configuração deformada dos elementos quando ocorre um deslocamento transversal relativo das extremidades.

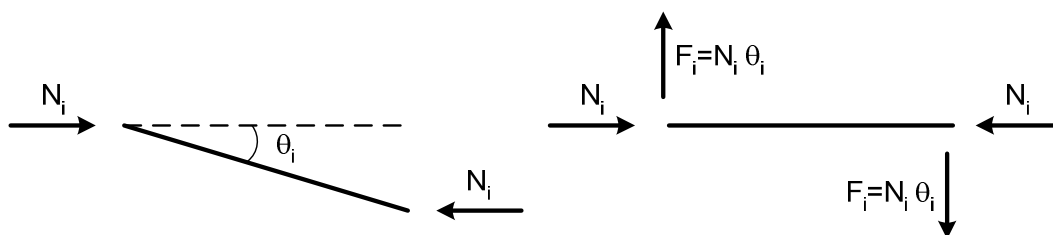


Figura 3.31 – Forças laterais equivalentes aos efeitos de segunda ordem

A aproximação do método consiste em não considerar os efeitos $P-\delta$, pelo que, ao nível do elemento, as forças laterais correspondem apenas aos efeitos $P-\Delta$. Contudo, uma maior discretização dos elementos comprimidos reduz a importância de se desprezarem os efeitos $P-\delta$ e conduz a resultados mais precisos. Deste modo, desde que o número de nós ou elementos considerados nas barras comprimidas seja adequado, obtêm-se resultados que incorporam, com uma precisão bastante aceitável, ambos os efeitos $P-\Delta$ e $P-\delta$ (Reis e Camotim, 2001).

A metodologia adoptada para a contabilização dos efeitos geometricamente não-lineares justifica-se por não penalizar em demasia o custo computacional e por se adaptar adequadamente ao processo integrado e iterativo de análise, análise de sensibilidades e optimização. De referir ainda que, dada a não-linearidade moderada do tipo de estruturas em análise, é expectável que uma análise de segunda ordem aproximada forneça resultados com uma precisão satisfatória. Os métodos utilizados permitem ainda contabilizar as duas fontes de não-linearidade geométrica mais significativas em pontes atirantadas: o efeito de catenária dos tirantes e o efeito $P-\Delta$. Adoptando uma discretização adequada o método das forças laterais equivalentes permite também contabilizar com uma precisão aceitável o efeito $P-\delta$.

Em resumo e como já foi referido, no âmbito deste trabalho optou-se pela modelação da ponte de tirantes como uma estrutura reticulada. Assim, consideraram-se para a torre e para o tabuleiro elementos de viga de Euler-Bernoulli com 2 nós e 6 graus de liberdade, sendo os tirantes modelados com elementos de barra de dois nós com módulo de elasticidade equivalente, de acordo com a formulação proposta por Ernst. Para ter em conta os efeitos geometricamente não-lineares recorreu-se a uma *análise de segunda ordem aproximada*. Trata-se de processo iterativo em que se recorre a sucessivas análises lineares da estrutura. O processo inicia-se com a análise linear da estrutura sujeita ao conjunto de acções externas. Do equilíbrio global da estrutura obtêm-se os deslocamentos nodais e os esforços internos nos elementos. Com base nestes valores são calculadas as forças laterais equivalentes nos elementos de viga, actualizando-se o vector de forças nodais equivalentes da estrutura. A matriz de rigidez elementar de cada tirante é actualizada de acordo com o valor do módulo de Ernst calculado com o esforço axial no tirante. Deste modo, a estrutura é analisada novamente e são obtidos novos valores para os deslocamentos nodais e para os esforços internos. O processo é repetido até os resultados de duas iterações consecutivas não apresentarem variação significativa.

3.6.2. Exemplos de verificação

Nesta secção apresentam-se dois exemplos de teste relativos à formulação adoptada para a consideração dos efeitos geometricamente não-lineares na análise de pontes atirantadas de betão. Para verificação dos resultados obtidos com o modelo numérico desenvolvido, os mesmos são comparados com os obtidos utilizando um programa comercial de elementos finitos, neste caso o *SAP 2000 v14*.

Exemplo 1 – Pórtico

Neste primeiro exemplo analisa-se um pórtico de betão sujeito a uma força horizontal no topo de um dos pilares e a uma carga transversal uniformemente distribuída na viga. Considerou-se um betão da classe C35/45 ($E_{cm} = 34$ GPa) e não se consideraram os efeitos diferidos. Os pilares e as vigas foram discretizados num total de 12 elementos de viga de 1,00 m de comprimento cada. Realizaram-se dois tipos de análise, linear e de segunda ordem, sendo os resultados obtidos com o programa de computador desenvolvido comparados com os obtidos com o programa *SAP 2000*. De acordo com o que foi referido na secção 3.6.1 a análise de segunda ordem efectuada com o programa comercial pode ser classificada como *rigorosa*. Na Figura 3.32 apresentam-se os dados deste exemplo.

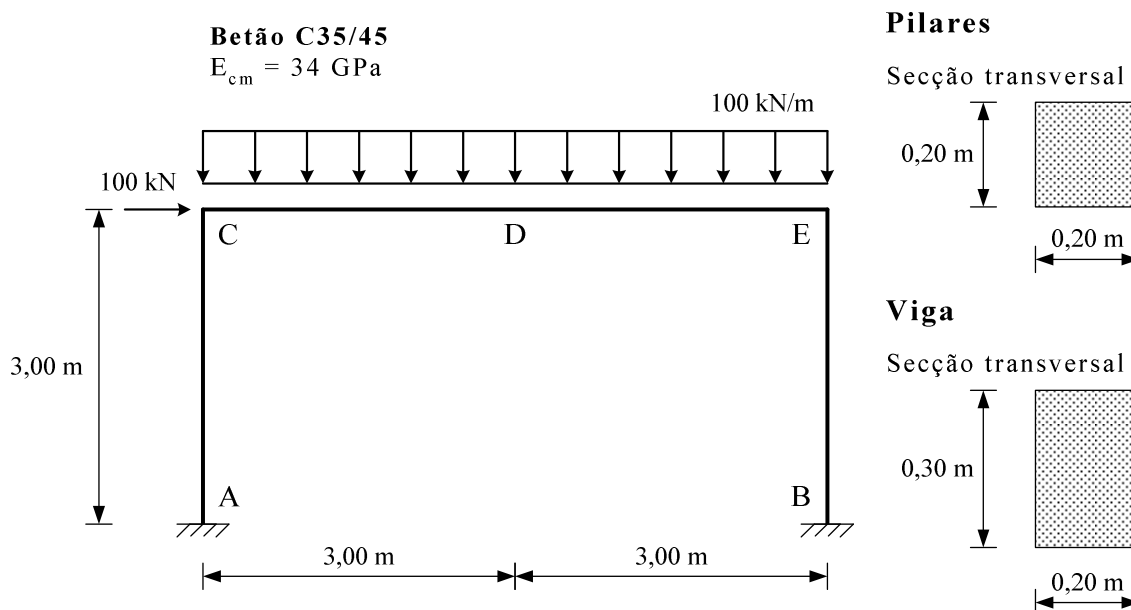


Figura 3.32 – Dados do Exemplo 1 (efeitos geometricamente não-lineares)

No Quadro 3.4 apresentam-se os resultados das análises efectuadas no que respeita aos deslocamentos e aos esforços internos em algumas secções da estrutura. Como se pode observar, no que respeita à análise linear obtêm-se os mesmos resultados com o programa desenvolvido e com o programa comercial. Comparando os resultados das duas análises verifica-se, para a análise de segunda ordem, um aumento do deslocamento horizontal ao nível da viga do pórtico. Este aumento é de 14,68% para o modelo numérico desenvolvido e de 10,35% para o *SAP 2000*. A análise de segunda ordem também conduz a um aumento do deslocamento vertical a meio-vão da viga, tendo-se obtido acréscimos de 4,62% e 3,52% para o programa desenvolvido e para o programa comercial, respectivamente. O aumento dos valores dos deslocamentos com a análise de segunda ordem traduz-se também em alterações nas distribuições de esforços internos.

Comparando os resultados da análise de segunda ordem obtidos com os dois programas verifica-se que os mesmos diferem pouco, apresentando um desvio relativo máximo de 3,93% nos deslocamentos e de 6,27% nos esforços internos. Por conseguinte, a formulação adoptada para contabilização dos efeitos de segunda ordem pode considerar-se adequada. De referir ainda que o programa desenvolvido conduz, em geral, a resultados mais elevados em valor absoluto.

Quadro 3.4 – Resultados do Exemplo 1 (efeitos geometricamente não-lineares)

	Análise linear			Análise segunda ordem		
	Programa	SAP 2000	Desvio relativo	Programa	SAP 2000	Desvio relativo
Deslocamentos						
Horizontal em C [m]	$3,172 \times 10^{-2}$	$3,172 \times 10^{-2}$	0,00%	$3,638 \times 10^{-2}$	$3,501 \times 10^{-2}$	3,93%
Vertical em D [m]	$-6,318 \times 10^{-2}$	$-6,318 \times 10^{-2}$	0,00%	$-6,610 \times 10^{-2}$	$-6,540 \times 10^{-2}$	1,06%
Esforços internos						
Momento flector em A [kNm]	-0,83	-0,83	0,00%	-5,14	-4,91	4,62%
Esforço axial no pilar AC [kN]	-277,25	-277,25	0,00%	-274,09	-275,72	-0,59%
Momento flector em D [kNm]	287,55	287,55	0,00%	301,20	295,74	1,85%
Momento flector em B [kNm]	162,70	162,70	0,00%	180,02	169,41	6,27%
Esforço axial no pilar BE [kN]	-322,75	-322,75	0,00%	-325,91	-322,50	1,06%

Exemplo 2 – Ponte de tirantes

Neste exemplo considera-se uma ponte atirantada com tabuleiro e torres executados em betão. Para tal, utiliza-se a mesma ponte atirantada que é usada nos exemplos de aplicação apresentados no Capítulo 5. Na Figura 3.33 apresenta-se a geometria da ponte sendo as características gerais desta estrutura descritas em detalhe na secção 5.2.

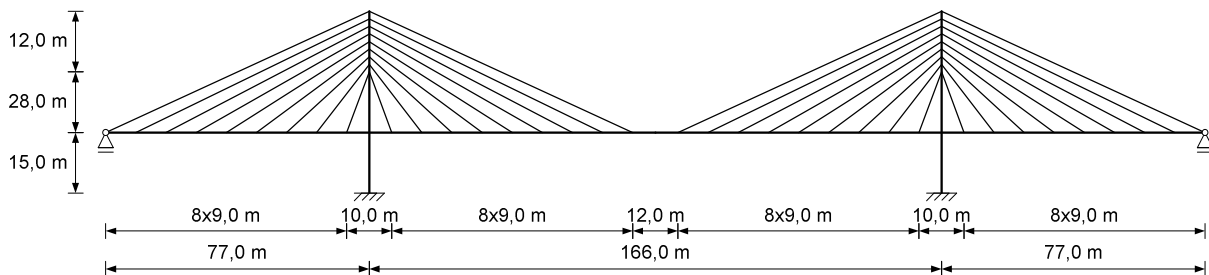


Figura 3.33 – Geometria da ponte utilizada no Exemplo 2 (efeitos geometricamente não-lineares)

No que respeita aos materiais considerou-se um betão da classe C35/45 ($E_{cm} = 34$ GPa) para o tabuleiro e as torres e um aço de pré-esforço Y1860 ($E_p = 195$ GPa) para os tirantes. Para as torres e tabuleiro consideraram-se, respectivamente, secções rectangulares ocas e secções em laje vigada, variáveis ao longo do comprimento destes elementos. No Quadro 3.5 resumem-se as dimensões caracterizadoras das secções transversais do tabuleiro e das torres adoptadas na resolução deste exemplo.

Quadro 3.5 – Dimensões gerais das secções do tabuleiro e das torres no Exemplo 2 (efeitos geometricamente não-lineares)

	Zona	Dimensões
Torres	Abaixo do tabuleiro	$h = 5,00$ m; $b = 5,00$ m; $t_w = 0,50$ m; $t_{fs} = t_{fi} = 0,50$ m
	Acima do tabuleiro	$h = 4,00$ m; $b = 4,00$ m; $t_w = 0,50$ m; $t_{fs} = t_{fi} = 0,50$ m
Tabuleiro	Entre a torre e o primeiro par de tirantes	$h = 2,00$ m; $b = 19,00$ m; $t_w = 1,20$ m; $t_{fs} = 0,20$ m
	Tramo entre tirantes	$h = 2,00$ m; $b = 19,00$ m; $t_w = 0,80$ m; $t_{fs} = 0,20$ m
	Tramo central de fecho da ponte a meio-vão	$h = 2,00$ m; $b = 19,00$ m; $t_w = 0,50$ m; $t_{fs} = 0,20$ m

Tendo em conta a simetria procedeu-se à modelação de apenas metade da estrutura. O correspondente modelo de elementos finitos é constituído por um total de 90 nós e 107 elementos. A torre foi discretizada em 32 elementos e o tabuleiro em 57 elementos, correspondendo os restantes 18 elementos a um elemento de barra por cada tirante. Não se consideraram os efeitos diferidos e analisou-se a estrutura para duas condições de carregamento. Na primeira considerou-se a estrutura sujeita ao peso próprio mais restante carga permanente ($2,5 \text{ kN/m}^2$) e na segunda considerou-se, para além disso, uma sobrecarga de utilização de 4 kN/m^2 representando o tráfego rodoviário aplicada em todo o vão. De referir ainda que as forças de pré-esforço aplicadas nos tirantes e as correspondentes secções transversais foram determinadas utilizando o algoritmo de optimização que será descrito em detalhe no Capítulo 4.

No Quadro 3.6 apresentam-se os resultados das análises efectuadas. Tal como no exemplo anterior verifica-se uma concordância entre os resultados da análise linear obtidos com os dois programas. Têm-se desvios relativos reduzidos apresentando um valor máximo de 3,66% no caso do deslocamento vertical a meio-vão do tabuleiro para a condição de carga permanente. Os resultados obtidos caracterizam-se ainda por alterações nos valores dos esforços internos e pelo aumento dos deslocamentos na análise de segunda ordem face à análise linear.

No que respeita aos resultados da análise de segunda ordem, para a condição de carga permanente, obtidos com os dois programas observam-se desvios relativos máximos de 11,04% nos deslocamentos e 10,68% nos esforços internos, verificando-se uma tendência do programa desenvolvido em sobrestimar os efeitos geometricamente não-lineares. Para a condição de carga permanente mais sobrecarga os desvios relativos máximos reduzem-se substancialmente para 0,77% nos deslocamentos e 1,37% nos esforços internos. Para esta condição de carregamento as diferenças entre os dois tipos de análise são também mais

reduzidas. Estes resultados poderão justificar-se pelo facto de o aumento do nível de carregamento se traduzir numa maior tensão nos tirantes, o que conduz a valores do módulo de Ernst mais próximos do valor do módulo de elasticidade do material, com o consequente aumento da rigidez da estrutura.

Quadro 3.6 – Resultados do Exemplo 2 (efeitos geometricamente não-lineares)

Carga permanente						
	Análise linear			Análise segunda ordem		
	Programa	SAP 2000	Desvio relativo	Programa	SAP 2000	Desvio relativo
Deslocamentos						
Horizontal no topo da torre [m]	-3,649×10 ⁻³	-3,771×10 ⁻³	-3,23%	-4,173×10 ⁻³	-3,796×10 ⁻³	9,92%
Vertical a meio-vão do tabuleiro [m]	6,842×10 ⁻³	7,102×10 ⁻³	-3,66%	8,046E-03	7,246×10 ⁻³	11,04%
Esforços internos						
Momento flector a meio-vão do tabuleiro [kNm]	1764,01	1760,55	0,20%	1738,17	1760,24	-1,25%
Momento flector na base da torre [kNm]	2666,51	2766,44	-3,61%	3035,94	2742,90	10,68%
Esforço axial na base da torre [kN]	-46336,37	-46321,04	0,03%	-46332,08	-46323,28	0,02%
Carga permanente + sobrecarga						
	Análise linear			Análise segunda ordem		
	Programa	SAP 2000	Desvio relativo	Programa	SAP 2000	Desvio relativo
Deslocamentos						
Horizontal no topo da torre [m]	8,872×10 ⁻²	8,914×10 ⁻²	-0,47%	9,048×10 ⁻²	8,997×10 ⁻²	0,56%
Vertical a meio-vão do tabuleiro [m]	-4,012×10 ⁻¹	-4,024×10 ⁻¹	-0,30%	-4,062×10 ⁻¹	-4,031×10 ⁻¹	0,77%
Esforços internos						
Momento flector a meio-vão do tabuleiro [kNm]	20192,09	20167,63	0,12%	20308,56	20078,91	1,14%
Momento flector na base da torre [kNm]	-67879,56	-68513,85	-0,93%	-69019,85	-68089,58	1,37%
Esforço axial na base da torre [kN]	-58083,66	-58061,48	0,04%	-58105,82	-58053,39	0,09%

Na medida em que os efeitos geometricamente não-lineares são influenciados em grande medida pela flexibilidade da estrutura e também pelo nível de carregamento, as tendências observadas nestes exemplos poderão sofrer algumas alterações quando se analisarem outros exemplos. No entanto, dadas as reduzidas diferenças observadas entre uma análise de segunda ordem *rigorosa* e o modelo numérico desenvolvido, a formulação adoptada no mesmo pode considerar-se adequada para contabilização dos efeitos geometricamente não-lineares em pontes atirantadas de betão com vão total na ordem dos 320 m.

Capítulo 4 - Optimização e Análise de Sensibilidades

4.1. Introdução

No presente capítulo descrevem-se a optimização estrutural e a análise de sensibilidades que constituem, em conjunto com a análise estrutural descrita no Capítulo 3, os três pontos essenciais do modelo numérico desenvolvido no âmbito deste trabalho.

Os conceitos gerais, os aspectos particulares e os diversos métodos existentes para levar a cabo a formulação e resolução de um problema de optimização estrutural são detalhadamente apresentados em diversas obras, das quais se podem indicar, Kirsch (1981), Vanderplaats (1984), Haftka e Gürdal (1992) e Arora (2004). No presente capítulo procede-se à apresentação dos conceitos gerais e dos parâmetros envolvidos na definição do problema de optimização estrutural no caso específico do projecto de pontes atirantadas de betão.

O projecto de estruturas é um processo iterativo de análise e dimensionamento através do qual se procura uma solução que satisfaça requisitos de segurança, funcionalidade e exequibilidade construtiva. Este processo é tradicionalmente efectuado por tentativa-erro, partindo de uma solução inicial definida com base em aspectos de natureza conceptual e na experiência do projectista, procedendo-se à alteração de parâmetros caracterizadores do sistema estrutural de modo a obter uma melhoria do seu desempenho.

Para estruturas de grande dimensão e complexidade o projectista tem de lidar com uma enorme quantidade de informação, pelo que o recurso à optimização estrutural surge como uma forma eficiente de lidar com essa informação de modo a obter soluções económicas e estruturalmente eficientes. Por conseguinte, a optimização estrutural pode ser interpretada como um processo de dimensionamento automatizado que permite obter valores óptimos de variáveis de decisão que satisfazem um determinado conjunto de critérios e condicionantes do projecto (Simões, 2008).

Apesar de amplamente utilizada noutras áreas da engenharia, como a Aeroespacial, Aeronáutica ou Mecânica, a optimização não é muito usada no âmbito do projecto de estruturas de Engenharia Civil. No entanto, no caso particular das pontes de tirantes e tal como foi apresentado no Capítulo 2, existem na literatura diversos trabalhos em que foram aplicados algoritmos de optimização como auxílio ao projecto destas estruturas.

Tendo em conta os objectivos deste trabalho desenvolveu-se um modelo numérico integrado de análise e optimização para utilização no âmbito do projecto de pontes atirantadas

de betão. No presente capítulo descreve-se detalhadamente a formulação adoptada para a resolução do problema de optimização.

Na secção 4.2. começa-se por apresentar algumas considerações gerais sobre os problemas de optimização estrutural. De seguida, apresentam-se os vários elementos intervenientes na formulação de um problema de optimização, nomeadamente, as variáveis de decisão, os objectivos de projecto e a função objectivo a minimizar. Justificam-se as opções tomadas e descrevem-se, detalhadamente, cada um destes elementos para o caso particular da optimização de pontes atirantadas de betão tratada neste trabalho.

A secção 4.3 é dedicada à análise de sensibilidades. Este é um aspecto fundamental na resolução de um problema de optimização estrutural, na medida em que, é com base na informação gerada pela análise de sensibilidades que é possível prever a resposta da estrutura, ou seja, a evolução dos objectivos de projecto, face a variações nas variáveis de decisão. A evolução da solução do problema de optimização depende da precisão com que as sensibilidades das diversas grandezas são calculadas.

Nessa secção faz-se referência aos vários métodos disponíveis para efectuar a análise de sensibilidades e descreve-se detalhadamente a metodologia adoptada neste trabalho. Posteriormente apresentam-se, separadas por tipo de variável de decisão, as expressões intervenientes no cálculo das sensibilidades e que foram implementadas no modelo numérico desenvolvido. No final apresentam-se ainda alguns exemplos de verificação da análise de sensibilidades na previsão da resposta estrutural face a variações nas variáveis de decisão.

4.2. Optimização estrutural

4.2.1. Considerações gerais

A optimização estrutural é um processo iterativo em que, através da aplicação de algoritmos de programação matemática, se procura melhorar o projecto inicial. A melhoria do projecto é conseguida através da alteração dos valores das *variáveis de decisão*, das quais depende a resposta do sistema estrutural, de modo a minimizar uma *função objectivo* definida com base em critérios de eficiência estrutural e/ou economia. A pesquisa da solução é condicionada pela verificação de um conjunto de *restrições* de modo a garantir a admissibilidade da mesma. A formulação geral de um problema de optimização pode ser expressa através de

$$\begin{aligned}
 \min \quad & F(\underline{x}) \\
 \text{s.a.} \quad & g_j(\underline{x}) \geq 0 \quad \text{com } j = 1; \dots; N_G \\
 & h_k(\underline{x}) = 0 \quad \text{com } k = 1; \dots; N_E
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $F(\underline{x})$ representa a função objectivo a minimizar, \underline{x} representa o vector das variáveis de decisão, $g_j(\underline{x})$ representa as restrições de desigualdade e $h_k(\underline{x})$ representa as restrições de igualdade.

A minimização da função objectivo e a obtenção da correspondente solução do problema de optimização é efectuada com recurso a algoritmos de programação matemática. Estes podem distinguir-se consoante o tipo de função objectivo, linear ou não-linear, a existência ou não de restrições, se se destinam a funções com uma ou várias variáveis de decisão e se estas são de natureza contínua ou discreta.

Grande parte destes algoritmos visam a resolução de problemas com uma única função objectivo podendo ser aplicados a alguns problemas de optimização estrutural. No entanto, numa perspectiva mais geral, para a maioria das situações reais de projecto e no caso particular das pontes de tirantes pretende-se a verificação simultânea de diversos objectivos, como por exemplo, a redução do custo e a verificação conjunta da admissibilidade das tensões e dos deslocamentos dos pontos da estrutura. Neste caso tem-se um problema *multi-objectivo* ou *multi-critério* cuja resolução se reveste de alguma complexidade.

Num problema de minimização com variáveis de decisão contínuas e em que a função objectivo e o domínio são convexos existe uma única solução, ou seja, tem-se um óptimo global (Arora, 2004; Simões, 2008), contudo, nos problemas de optimização estrutural esta situação não é habitual podendo existir mínimos locais. O elevado número de variáveis de decisão conduz a funções objectivo altamente não-lineares o que, em conjunto com a existência de objectivos múltiplos e por vezes em conflito, origina problemas não-convexos. A respeito destes problemas pode referir-se a existência de não-convexidades associadas a diferentes topologias, como ocorre na optimização do volume de material numa treliça de 2 ou 3 barras com diferentes condições de carregamento (Sved e Ginos, 1968), a existência de domínios não-convexos, como por exemplo na minimização do peso de grelhas (Moses e Onoda, 1969) e a existência de domínios disjuntos ou desconexos que podem ocorrer em problemas com restrições associadas a grandezas dinâmicas (Cassis e Schmit, 1976). Na resolução de problemas de minimização do volume de material em treliças mostrou-se ainda que o óptimo local corresponde a um óptimo global isolado (Simões, 1989).

Para a pesquisa do mínimo global em problemas não-convexos existem diversos métodos disponíveis, podendo ser subdivididos em determinísticos e estocásticos. A escolha do método depende das características do problema e dos resultados pretendidos. Deste modo, pode referir-se a necessidade de obtenção de todos os mínimos locais, a possibilidade de considerar variáveis discretas, as funções objectivo serem ou não diferenciáveis e a necessidade de obtenção do óptimo global, como aspectos a ter em conta na escolha do método para resolução do problema (Arora, 2004).

Como refere Arora (2004), para problemas não-convexos não existem condições matemáticas que garantam a obtenção do óptimo global, pelo que é difícil definir um critério de paragem para os algoritmos de optimização global. Assim, em geral admite-se como óptimo global a solução obtida após o algoritmo ter sido executado durante um longo período de tempo. Devido à inexistência de condições de optimalidade globais para problemas gerais, a solução global apenas pode ser obtida através de uma pesquisa exaustiva do espaço de projecto. Por conseguinte, os algoritmos enumerativos ou de planos de corte envolvendo subestimativas convexas representam a melhor opção tendo em vista a obtenção do óptimo global em problemas não-convexos (Simões, 1987). Os métodos de pesquisa padrão que podem utilizar caminhos aleatórios ou algoritmos de base biológica, tais como, algoritmos genéticos, algoritmos evolutivos, enxame de partículas, colónia de formigas, fornecem a melhor solução até então encontrada, não garantindo o óptimo global.

A maior desvantagem dos métodos de optimização globais reside no facto de requerem um elevado tempo de cálculo que é significativamente incrementado com o aumento do número de variáveis de decisão consideradas. Tendo em vista um processo integrado de análise e optimização e no caso de estruturas complexas e de grandes dimensões como as pontes de tirantes, em que o modelo de análise representa alguma exigência, o esforço computacional torna-se ainda maior.

Tendo em conta que não há garantia dos métodos globais atingirem o óptimo global e dadas as dificuldades destes métodos em lidarem eficientemente com problemas contendo um elevado número de variáveis de decisão opta-se neste trabalho, e para fazer face a estas desvantagens, por utilizar uma metodologia diferente.

Deste modo, adopta-se uma abordagem em que se utiliza um algoritmo de programação convexa (mais eficiente do ponto de vista computacional) em conjunto com diversos pontos de partida sendo adoptada a melhor solução encontrada, na medida em que a solução obtida com um algoritmo deste tipo depende da solução inicial. Neste trabalho, e tal como se descreve detalhadamente na secção 4.2.4, a optimização estrutural de pontes atirantadas de

betão é formulada como um problema *multi-objectivo*, adoptando-se uma abordagem *minimax* para a resolução do mesmo. A solução do problema *minimax* é obtida indirectamente através da minimização de uma função escalar convexa definida com base no *Princípio da Máxima Entropia* e em que a função objectivo e todas as restrições são convertidas numa única expressão.

Um problema de optimização estrutural envolve sempre a definição das variáveis de decisão, dos objectivos de projecto e da função objectivo. Nas secções seguintes descrevem-se detalhadamente cada um destes elementos, tendo em conta a formulação adoptada no desenvolvimento do presente trabalho.

4.2.2. Variáveis de decisão

O comportamento de qualquer sistema estrutural pode ser caracterizado por um conjunto de parâmetros que constituem uma determinada solução para o projecto da estrutura.

A optimização de uma estrutura visa obter uma melhoria do projecto actual e/ou inicial, pressupondo implicitamente a alteração da mesma, isto é, a alteração dos parâmetros caracterizadores do sistema estrutural. Assim, as *variáveis de decisão* do problema de optimização são os parâmetros a que é conferida liberdade de variação no decurso do processo iterativo de análise e optimização, ou seja, representam os graus de liberdade ou as incógnitas do problema de optimização. Para além das variáveis de decisão existem outros parâmetros caracterizadores do comportamento do sistema estrutural que não são alterados no decurso do processo de optimização pelo que podem ser designados como *parâmetros pré-definidos*.

Existe uma infinidade de parâmetros que podem ser considerados como variáveis de decisão. Assim, estas podem representar as dimensões das secções transversais de elementos da estrutura, parâmetros definidores da geometria da mesma ou propriedades dos materiais que a constituem. Os valores das variáveis de decisão podem ser de natureza contínua ou discreta. As variáveis de decisão contínuas possuem um intervalo de variação podendo assumir qualquer valor dentro desse intervalo. Por exemplo, o momento de inércia de uma viga sujeita à flexão pode ser considerado como uma variável contínua. As variáveis de decisão discretas apenas podem assumir valores isolados, tipicamente dentro de uma lista de valores permitidos. Deste modo, para o mesmo exemplo da viga sujeita à flexão poderá apenas ser possível escolher um dos perfis metálicos comercialmente disponíveis.

Como referem Haftka e Gürdal (1992), na resolução da maioria dos problemas de optimização é habitual não considerar a natureza discreta das variáveis de decisão. Assim, o

problema é resolvido considerando variáveis de decisão contínuas e, para a solução óptima obtida, os valores das variáveis de decisão são ajustados para os valores discretos mais próximos. Esta abordagem é adoptada pois a resolução de um problema de optimização com variáveis de decisão discretas é habitualmente bastante mais difícil que a resolução do mesmo problema com variáveis contínuas. No entanto, este procedimento é adequado quando se têm valores discretos próximos uns dos outros, pois a alteração do valor da variável de decisão para o valor discreto mais próximo não altera significativamente a resposta da estrutura. Nos casos em que os valores discretos são muito espaçados é necessário resolver o problema considerando variáveis de decisão discretas.

No caso de uma ponte atirantada, o seu comportamento estrutural é condicionado pela rigidez dos elementos constituintes (tirantes, tabuleiro e torres). Deste modo, para além da topologia e geometria da ponte, as secções transversais dos diversos elementos e as forças de pré-esforço nos tirantes condicionam, de modo decisivo, o comportamento estrutural. Por conseguinte, facilmente se percebe que existe uma enorme variedade de variáveis de decisão que desempenham um papel importante e das quais depende o comportamento das pontes atirantadas.

No âmbito dos problemas de optimização é usual representar as variáveis de decisão por x , podendo ser agrupadas no vector \underline{x} :

$$\underline{x} = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_N\}^T \quad (4.2)$$

onde N representa o número de variáveis de decisão.

No contexto da optimização de estruturas, as variáveis de decisão podem dividir-se em quatro grandes grupos: variáveis de decisão seccionais, variáveis de decisão mecânicas, variáveis de decisão geométricas e variáveis de decisão topológicas.

As variáveis de decisão seccionais constituem as dimensões das secções transversais dos diversos elementos estruturais. Para além de desempenharem um papel importante na rigidez e resistência dos elementos, as variáveis de decisão seccionais influenciam directamente o volume de material utilizado e, conseqüentemente, o custo da estrutura. Deste modo, torna-se fundamental a consideração de variáveis de decisão seccionais na formulação de um problema de optimização em que um dos objectivos seja a minimização do custo da estrutura.

Dentro do grupo das variáveis de decisão mecânicas podem considerar-se as forças de pré-esforço. No caso das pontes atirantadas de betão este tipo de variáveis de decisão pode representar as forças de pré-esforço nos tirantes e também nos elementos de betão. No caso particular do pré-esforço nos tirantes, este desempenha um papel decisivo no comportamento

deste tipo de estruturas. A distribuição de forças nos tirantes permite controlar os deslocamentos e esforços internos em toda a estrutura. Por conseguinte, pensa-se que a utilização de variáveis de decisão que representem as forças nos tirantes, deve ser de consideração obrigatória em qualquer problema de optimização no âmbito do projecto de pontes atirantadas. Relativamente ao pré-esforço nos elementos de betão, para além de auxiliar no controlo da deformação desempenha também uma função importante na distribuição de tensões, contribuindo para que os elementos de betão estejam quase sempre sujeitos unicamente a tensões de compressão, o que é desejável para assegurar a durabilidade da estrutura.

As variáveis de decisão mecânicas apesar de não estarem directamente ligadas ao custo dos materiais, vão possibilitar um melhor controlo dos deslocamentos e uma melhor distribuição de tensões e, por conseguinte, traduzir-se-ão também numa solução com um melhor aproveitamento dos materiais e necessariamente mais económica.

No que respeita às variáveis de decisão geométricas, estas representam as dimensões características da estrutura. No caso de uma ponte de tirantes podem utilizar-se, por exemplo, parâmetros como o comprimento do vão central, os comprimentos dos vãos laterais, a altura das torres e o posicionamento das ancoragens dos tirantes nas torres e no tabuleiro.

Finalmente, as variáveis de decisão topológicas podem representar o número de elementos e a forma como estes se ligam na estrutura. No caso de uma ponte atirantada podem referir-se como exemplos de variáveis de decisão topológicas o número de tirantes, a forma das torres e o tipo de ligação entre a torre e o tabuleiro.

À semelhança das variáveis de decisão mecânicas, as variáveis de decisão geométricas ou topológicas também não influenciam directamente o custo da estrutura. Contudo, uma vez que permitem disposições geométricas ou topologias mais favoráveis à redução de deslocamentos e a uma melhor distribuição de esforços internos, conduzem a soluções estruturalmente mais eficientes e a diminuições de custo indirectas por via de reduções adicionais nas variáveis seccionais.

No âmbito deste trabalho foram consideradas directamente variáveis de decisão seccionais e mecânicas na formulação do algoritmo de optimização, tendo em vista a resolução de problemas no contexto do projecto de pontes atirantadas de betão.

A não consideração de variáveis de decisão geométricas prende-se com o facto de as dimensões gerais das pontes de tirantes já se encontrarem tipificadas, como se pode verificar pela revisão bibliográfica efectuada e que foi apresentada no Capítulo 2. Por exemplo, sabe-se que para pontes atirantadas simétricas o comprimento dos vãos laterais deve situar-se entre os

40% e 45% do comprimento do vão central e que a altura das torres acima do tabuleiro deve ter um valor entre 20% a 25% do comprimento do vão central.

A consideração de variáveis de decisão geométricas no algoritmo de optimização apresenta a vantagem de permitir partir de soluções iniciais para uma ponte de tirantes com dimensões afastadas da gama de valores habituais. Utilizando-se, na concepção de uma ponte de tirantes, os valores habituais para os parâmetros definidores da geometria, pode em certa medida, ser dispensada a utilização das variáveis de decisão geométricas. Para uma ponte de tirantes de dimensões usuais a utilização de variáveis de decisão geométricas não se traduz numa melhoria significativa do projecto da estrutura, quer em termos de redução de custo, quer em termos das distribuições de deslocamentos e de esforços internos (Negrão, 1996).

Por outro lado, a implementação de variáveis de decisão geométricas no algoritmo de optimização e o cálculo das respectivas sensibilidades constitui uma tarefa laboriosa, pois requer a actualização da malha de elementos finitos em cada de ciclo de análise e optimização. Este aspecto dificulta a formulação das sensibilidades e aumenta o custo computacional do modelo numérico. Por conseguinte, dado que os benefícios em termos de melhoria da solução final são reduzidos quando comparados com as exigências impostas pela consideração deste tipo de variáveis de decisão, as mesmas não foram tidas em conta no desenvolvimento do modelo numérico.

De referir ainda que, apesar de neste trabalho não terem sido consideradas variáveis de decisão geométricas, o algoritmo de optimização *multi-objectivo* utilizado permite a utilização das mesmas, tal como foi levado a cabo por Negrão (1996) na optimização de pontes atirantadas metálicas.

Já no que respeita às variáveis de decisão topológicas, pode referir-se que as mesmas não foram consideradas para manter a compatibilidade na análise da estrutura. Por outro lado, o algoritmo de optimização utilizado também não se adequa à utilização de variáveis de decisão topológicas.

Apesar de não terem sido implementadas variáveis de decisão geométricas e topológicas é possível, utilizando o modelo numérico desenvolvido, resolver indirectamente problemas de optimização de modo a estudar a influência de parâmetros geométricos e topológicos no projecto óptimo de pontes atirantadas de betão. Assim, adoptando uma abordagem *multi-start*, ou seja, partindo de diversas soluções iniciais, em que se variam parâmetros geométricos ou topológicos, e analisando as respectivas soluções finais obtidas é possível estudar a influência destes parâmetros na optimização deste tipo de estruturas.

Para contemplar todas as variáveis que se consideraram relevantes para traduzir o comportamento das pontes atirantadas de betão foi criada uma biblioteca com diversos tipos de variáveis de decisão, que se podem agrupar do seguinte modo:

- Forças de pré-esforço nos tirantes;
- Secções dos tirantes;
- Secções dos elementos do tabuleiro e das torres;
- Forças de pré-esforço nos elementos de betão.

Esta biblioteca contém presentemente 23 tipos de variáveis de decisão que podem ser atribuídas a elementos individuais ou a grupos de elementos. Na Figura 4.1 ilustram-se os diversos tipos de variáveis de decisão implementadas no modelo numérico desenvolvido.

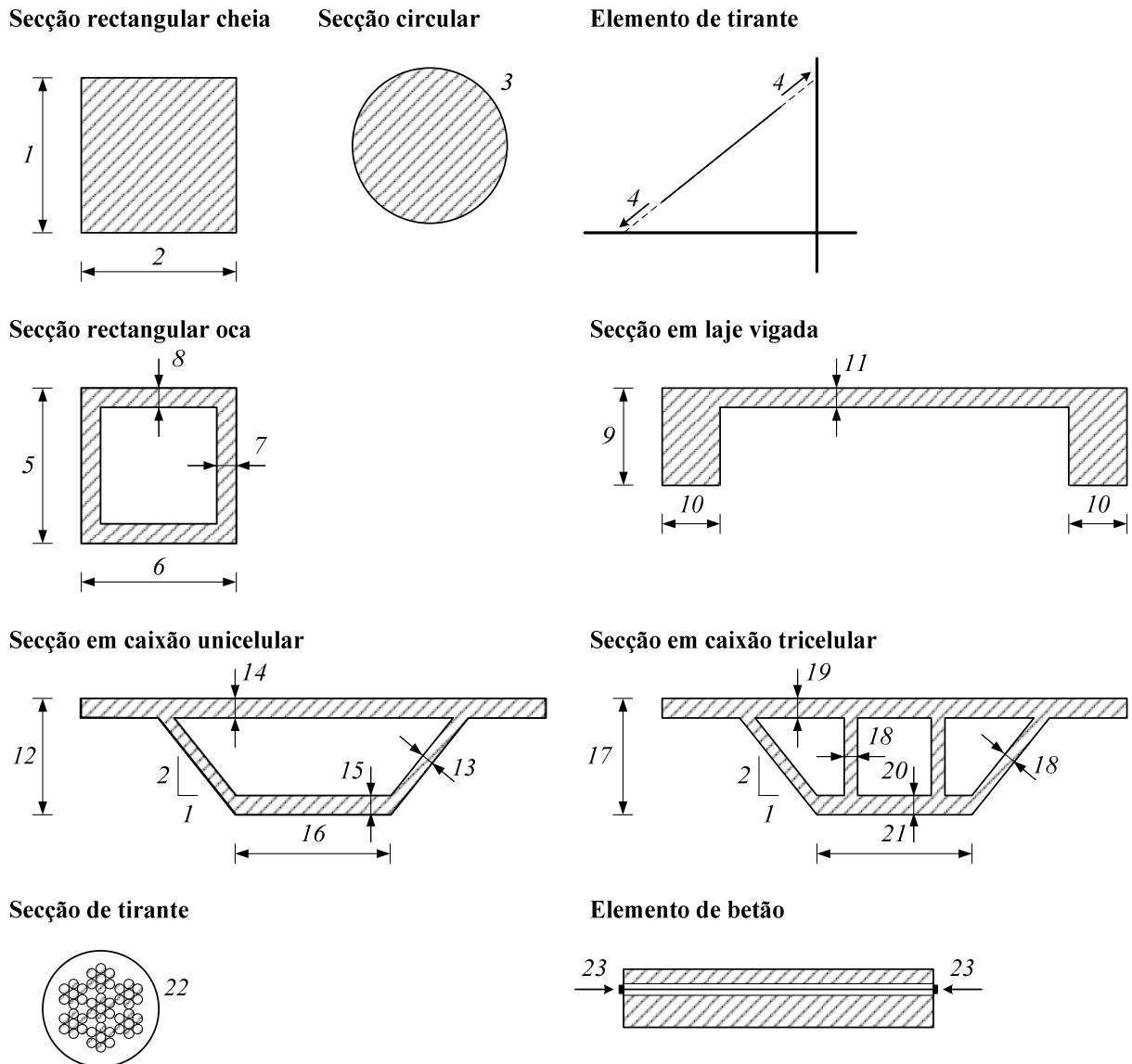


Figura 4.1 – Tipos de variáveis de decisão considerados

No Quadro 4.1, e como complemento à informação da Figura 4.1, apresenta-se a descrição de cada um dos tipos de variáveis de decisão implementadas.

Quadro 4.1 – Descrição dos tipos de variáveis de decisão considerados

Número	Descrição
1	Altura da secção rectangular cheia
2	Largura da secção rectangular cheia
3	Área da secção circular cheia
4	Força de pré-esforço nos tirantes
5	Altura da secção rectangular oca
6	Largura da secção rectangular oca
7	Espessura das paredes de altura h da secção rectangular oca
8	Espessura das paredes de largura b da secção rectangular oca
9	Altura da secção em laje vigada
10	Largura das vigas laterais da secção em laje vigada
11	Espessura da laje da secção em laje vigada
12	Altura da secção em caixão unicelular
13	Espessura das almas da secção em caixão unicelular
14	Espessura da laje superior da secção em caixão unicelular
15	Espessura da laje inferior da secção em caixão unicelular
16	Largura da laje inferior da secção em caixão unicelular
17	Altura da secção em caixão tritelular
18	Espessura das almas da secção em caixão tritelular
19	Espessura da laje superior da secção em caixão tritelular
20	Espessura da laje inferior da secção em caixão tritelular
21	Largura da laje inferior da secção em caixão tritelular
22	Área da secção de tirante constituído por cordões de aço de alta resistência
23	Força de pré-esforço nos elementos de betão

De referir ainda que se consideraram todos os tipos de variáveis de decisão como sendo de natureza contínua. De facto, do conjunto de tipos de variáveis de decisão utilizado, apenas a área da secção de tirante, por ser constituída pelo agrupamento de cordões de 7 fios de aço de alta resistência, apresenta uma variação discreta de valores. Contudo, como essa variação é pequena assumiu-se também a variação contínua desta variável de decisão.

Salienta-se ainda a importância da distinção entre o *número do tipo de variável de decisão* e o *número da variável de decisão*. Como foi referido, os 23 tipos de variáveis de decisão disponíveis podem ser atribuídos a elementos individuais ou a grupos de elementos. A cada atribuição de um tipo de variável de decisão a um elemento ou grupo de elementos corresponde uma variável de decisão. Por conseguinte, com os tipos de variáveis de decisão considerados podem resolver-se exemplos com dezenas ou centenas de variáveis de decisão, dependendo apenas da malha de elementos finitos considerada e da maior ou menor homogeneidade pretendida para a solução.

Na medida em que as variáveis de decisão constituem os graus de liberdade do algoritmo de optimização, a introdução de variáveis adicionais conduzirá a soluções de menor custo. Por outro lado, um número crescente de variáveis de decisão aumenta o custo computacional e o risco de instabilidade numérica do processo de solução. Deste modo, deve procurar-se um número de variáveis de decisão adequado ao tipo de problema a resolver, em número suficiente que permita uma melhoria efectiva do projecto da estrutura. Contudo, deve evitar-se um número excessivo de variáveis de decisão que encareça o custo computacional e sobretudo que conduza a soluções demasiado heterogéneas no que respeita às dimensões das secções transversais dos elementos, aspecto desvantajoso em pontes atirantadas onde a regularidade de formas é de importância primordial (Negrão, 1996).

Desta forma e como se apresentará no Capítulo 5, na resolução de problemas de optimização de ponte atirantadas, em vez de se adoptar uma correspondência um-a-um entre elementos e variáveis de decisão, definem-se zonas no tabuleiro e nas torres em que todos os elementos de cada zona apresentam as mesmas dimensões das secções transversais. Consequentemente, a mesma variável de decisão representa uma dimensão da secção transversal (por exemplo, a altura ou largura da secção) a utilizar em todos os elementos da mesma zona.

A definição das variáveis de decisão num determinado problema é efectuada através da informação contida nos ficheiros de dados. Assim, define-se nos ficheiros de dados uma *matriz de dependências* na qual se indica o elemento, o número da variável de decisão da qual depende e o tipo dessa variável de decisão.

4.2.3. Objectivos de projecto

Num problema de optimização estrutural, qualquer conjunto de variáveis de decisão constitui uma solução para o projecto da estrutura. Do conjunto de soluções do problema algumas são adequadas, enquanto outras podem ser inadequadas em termos de desempenho

ou comportamento da estrutura. Se uma solução verifica todos os requisitos impostos é designada por *solução admissível*. Os requisitos que devem ser verificados de modo a obter uma solução admissível designam-se por *restrições* ou *constrangimentos* (Kirsch, 1981). Dum ponto de vista físico podem ter-se dois tipos de restrições:

- Restrições impostas às variáveis de decisão, limitando a gama de variação destas e que se designam por restrições de projecto (*design constraints* ou *side constraints* na literatura inglesa). Estas restrições têm forma explícita e derivam de várias considerações do ponto de vista de funcionalidade, de fabricação ou de estética. Deste modo, estas restrições definem os limites, superior e inferior, entre os quais podem variar os valores das variáveis de decisão. Como exemplos podem referir-se a altura de uma viga e a espessura de uma parede ou de uma laje.
- Restrições que derivam de requisitos de comportamento da estrutura e que se designam por restrições de comportamento (*behaviour constraints* na literatura inglesa). São exemplos deste tipo de restrições as limitações impostas nos deslocamentos e nas tensões. Estas restrições são geralmente funções implícitas das variáveis de decisão sendo os seus valores obtidos através da análise da estrutura.

Deste modo, as restrições definem as condições a verificar para as variáveis de decisão e para determinadas grandezas que traduzem o comportamento da estrutura face às acções a que está sujeita, de modo que a solução do problema de optimização seja admissível. Apesar de no âmbito dos problemas de optimização ser habitual utilizar a designação *restrições*, neste trabalho optou-se pela designação *objectivos de projecto*.

Pensa-se ser uma designação mais adequada para o tipo de problema que se pretende resolver, justificando-se a escolha pela formulação adoptada para o problema de optimização. Neste não existe um objectivo principal, sujeito a restrições, mas sim uma função objectivo global onde entram todos os objectivos de projecto e que traduz o problema *multi-objectivo* ou *multi-critério* a resolver. A formulação adoptada para a função objectivo descreve-se em detalhe na secção seguinte.

Os objectivos de projecto representam, deste modo, as condições de desempenho a atingir com o projecto da estrutura, visando a obtenção de uma solução económica, segura e estruturalmente eficiente.

No caso particular do projecto de uma ponte de tirantes pode definir-se um conjunto de objectivos a garantir, relacionados com a verificação da resistência e das condições de utilização. Estes objectivos podem ser definidos com base em disposições regulamentares e através da imposição de limites nas tensões nos elementos e nos deslocamentos dos pontos da

estrutura. De referir ainda que se devem verificar objectivos não só para a ponte completa mas também durante as diversas etapas do processo construtivo da mesma. Para além destes pode ainda definir-se um objectivo relacionado com o custo da estrutura, procurando a redução do mesmo.

No âmbito deste trabalho considerou-se o seguinte conjunto de objectivos na formulação do problema de optimização:

- a) Custo da estrutura;
- b) Deslocamentos dos pontos da estrutura;
- c) Tensões nos elementos de betão estrutural em fase construtiva e em serviço;
- d) Tensões nos elementos de betão estrutural para verificação da resistência;
- e) Tensões nos tirantes durante a construção, em serviço e para verificação da resistência.

De seguida, descrevem-se detalhadamente, cada um dos objectivos considerados no modelo numérico desenvolvido.

De salientar ainda a importância de se proceder à normalização dos objectivos, aspecto fundamental para assegurar a robustez e estabilidade numérica deste e doutros algoritmos de optimização. Na formulação do problema de optimização intervêm quantidades de diferentes naturezas e magnitudes numéricas, como tensões, forças, deslocamentos e limites de variáveis de decisão. Embora a sua importância no contexto do problema seja em princípio similar, os termos de maior expressão numérica tornar-se-ão dominantes no algoritmo desvirtuando a solução. A fim de evitar este problema utilizam-se formas adimensionais dessas quantidades, obtidas pela sua normalização a respeito de determinados valores de referência, ao invés dos valores absolutos.

a) Custo da estrutura

O primeiro objectivo do problema *multi-critério* representa o custo da estrutura. Este depende de várias parcelas como o custo dos materiais, custos de transporte, custos de execução (mão-de-obra, equipamentos, cofragens, operações de betonagem, tensionamento dos cabos de pré-esforço, etc.). Estas diversas parcelas podem ser definidas como percentagens do custo dos materiais e, por simplicidade, pode definir-se o custo da estrutura em função dos custos dos materiais. Deste modo, o custo de uma ponte atirantada de betão pode definir-se como

$$C = \sum_{i=1}^{NEB} CB \cdot A_i \cdot L_i + \sum_{j=1}^{NEP} CP \cdot A_j \cdot L_j + \sum_{k=1}^{NT} CT \cdot A_k \cdot L_k \quad (4.3)$$

onde C representa o custo da ponte, NEB o número de elementos de betão armado, NEP o número de elementos de betão pré-esforçado, NT o número de tirantes, CB o custo unitário do betão armado, CP o custo unitário do aço de pré-esforço nos elementos de betão e CT o custo unitário dos tirantes. Os parâmetros A e L representam, respectivamente, as áreas da secção transversal e o comprimento dos elementos de betão estrutural, dos cabos de pré-esforço e dos tirantes. Como foi referido, os valores de cada um dos custos unitários deverão incluir, para além dos custos dos materiais, os restantes custos associados à execução de cada um dos elementos da estrutura.

Por conseguinte, procurando a minimização do custo dos materiais na perspectiva da minimização do custo da estrutura, o primeiro objectivo do problema de optimização que traduz o custo da estrutura pode escrever-se como

$$g_1(x) = \frac{C}{C_0} - 1 \leq 0 \quad (4.4)$$

em que C representa o custo da estrutura e C_0 , a grandeza a respeito da qual se faz a normalização, representa um custo de referência. Este custo de referência corresponde ao custo da estrutura no início de cada ciclo de análise e optimização. Este facto garante que o objectivo do custo é sempre um dos objectivos prioritários que o algoritmo de optimização vai procurar minimizar.

b) Deslocamentos dos pontos da estrutura

Para além da minimização do custo, no projecto de uma ponte de tirantes deve procurar-se também um adequado desempenho estrutural. Este aspecto pode ser conseguido limitando-se as tensões e os deslocamentos da estrutura.

Desta forma, outro dos objectivos considerados foi a limitação dos valores dos deslocamentos dos pontos da estrutura. Este aspecto assume especial importância para se evitarem deformações excessivas para a ponte completa em condições de carga permanente em serviço. No caso da construção pelo método dos avanços sucessivos é também importante garantir que, no decorrer do processo construtivo, os deslocamentos do tabuleiro apresentam valores reduzidos e compatíveis, quer com a ligação do tabuleiro aos encontros, quer com o fecho do mesmo a meio-vão. Os objectivos de deslocamento podem ser expressos através de

$$g_2(x) = \frac{|\delta|}{\delta_0} - 1 \leq 0 \quad (4.5)$$

onde δ representa o valor do deslocamento e δ_0 representa o valor admissível para o deslocamento a controlar.

Relativamente a este tipo de objectivo deve salientar-se a importância da imposição de limites nos deslocamentos verticais do tabuleiro e no deslocamento horizontal do topo das torres. A limitação dos deslocamentos verticais do tabuleiro visa garantir o fecho do tabuleiro a meio-vão, a ligação aos encontros e, para a ponte completa, a rasante pretendida para condições de carga permanente e em serviço. Nestas mesmas condições deve também limitar-se o deslocamento horizontal no topo das torres. Com este objectivo procura-se minimizar a deformação de flexão e as correspondentes tensões de flexão nas torres. Para além disso, a definição deste objectivo faz com que o algoritmo procure uma solução para as forças nos tirantes que equilibre as cargas no vão central e nos vãos laterais. Este aspecto, desejável no projecto de qualquer ponte de tirantes e fundamental para um adequado comportamento da estrutura, é conseguido com forças mais elevadas nos tirantes de retenção.

c) Tensões nos elementos de betão estrutural em fase construtiva e em serviço

Para além de limitação de deslocamentos é necessário também limitar as tensões nos diversos elementos estruturais. Assim, no que respeita aos elementos de betão estrutural, definiram-se limites durante o processo construtivo e para a ponte completa em condições de serviço. Estes limites estão relacionados com a durabilidade da estrutura procurando-se que o betão estrutural permaneça em regime elástico e se evite a fendilhação do mesmo. Na definição destes objectivos seguiram-se as recomendações do EC2 (EN 1992-1-1, 2010).

Deste modo, para evitar a fendilhação por tracção, limitaram-se os valores das tensões de tracção ao valor do quantilho de 5% do valor característico da tensão de rotura do betão à tracção simples ($f_{ctk,0,05}$), podendo exprimir-se este objectivo através da expressão

$$g_3(x) = \frac{\sigma_c}{f_{ctk,0,05}} - 1 \leq 0 \quad (4.6)$$

onde σ_c representa o valor máximo da tensão de tracção actuante no elemento de betão.

No que respeita às tensões de compressão limitaram-se a 45% do valor característico da tensão de rotura à compressão do betão (f_{ck}), sendo este objectivo dado pela expressão

$$g_4(x) = \frac{\sigma_c}{0,45 f_{ck}} - 1 \leq 0 \quad (4.7)$$

em que σ_c representa o valor máximo da tensão de compressão actuante no elemento de betão. A adopção deste limite permite evitar a formação de fendas longitudinais, a micro-fendilhação e níveis de fluência elevados, podendo a análise ser efectuada em regime de fluência linear.

d) Tensões nos elementos de betão estrutural para verificação da resistência

Relativamente aos elementos de betão estrutural, para além da verificação de tensões durante a construção e em serviço, deve proceder-se também à verificação da sua resistência sendo este objectivo expresso por

$$g_5(x) = \frac{\sigma_c}{\sigma_{allow}} - 1 \leq 0 \quad (4.8)$$

em que σ_c e σ_{allow} representam, respectivamente, o valor máximo da tensão actuante e a tensão admissível no elemento de betão estrutural. O valor da tensão admissível é determinado com base nos valores dos esforços resistentes correspondentes obtidos para a secção de betão a partir dum diagrama de interacção esforço axial resistente – momento flector resistente (N_{Rd} – M_{Rd}) como se representa esquematicamente na Figura 4.3.

A determinação do diagrama de interacção para uma dada secção de betão é efectuada através do estabelecimento do equilíbrio interno da secção e cálculo dos respectivos esforços internos resistentes. A capacidade resistente de um elemento de betão armado é baseada na definição de extensões máximas para o betão e para o aço. Tendo em conta as indicações do EC2 (EN 1992-1-1, 2010) consideram-se os seguintes limites:

- extensão máxima de compressão no betão igual a $3,5 \times 10^{-3}$;
- extensão máxima de tracção no aço igual a 10×10^{-3} ;
- quando toda a secção estiver sujeita a tensões de compressão, as extensões devem situar-se entre $2,0 \times 10^{-3}$ e $3,5 \times 10^{-3}$.

No cálculo da resistência da secção assumiu-se ainda que o aço das armaduras apresenta comportamento elasto-plástico perfeito, assumiu-se também uma distribuição rectangular de tensões na zona comprimida do betão e desprezou-se a contribuição do betão traccionado. Deste modo, considerando uma determinada distribuição de extensões na rotura da secção é possível determinar a correspondente distribuição de tensões e as respectivas forças no aço e no betão. Na Figura 4.2 representam-se os parâmetros intervenientes no equilíbrio interno de uma secção de betão duplamente armada e sujeita a flexão composta.

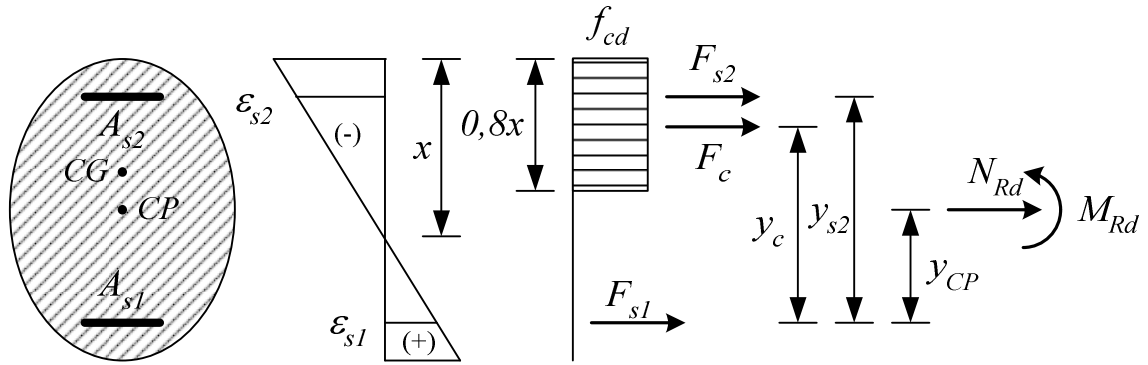


Figura 4.2 – Equilíbrio interno de sec o de bet o armado sujeita a flexão composta

De acordo com o esquema da Figura 4.2 podem escrever-se as seguintes equa es de equilíbrio

$$N_{Rd} = F_c + F_{s2} + F_{s1} \quad (4.9)$$

$$M_{Rd} = -F_c \cdot y_c - F_{s2} \cdot y_{s2} + N_{Rd} \cdot y_{CP} \quad (4.10)$$

onde F_c representa a força de compressão no bet o, F_{s2} representa a força de compressão na armadura superior e F_{s1} a força de trac o na armadura inferior. Os valores destas forças serão positivos ou negativos consoante correspondam, respectivamente, a forças de trac o ou a forças de compressão. De salientar o facto de que, para sec es transversais com largura variável ao longo da altura, a força de compressão no bet o   determinada dividindo a sec o em faixas ao longo da altura e calculando a contribui o de cada uma delas.

Na Equa o (4.10) o equilíbrio de momentos flectores   estabelecido a respeito da armadura inferior. Deste modo, os parâmetros y_c , y_{s2} e y_{CP} representam as distâncias da armadura inferior, respectivamente,   resultante das forças de compressão no betão,   armadura superior e ao centro plástico da sec o. O centro plástico da sec o corresponde   posi o da resultante das forças quando a sec o está totalmente comprimida ou totalmente traccionada, ou seja, quando a distribui o de tensões e extensões   constante em toda a sec o. Para outras distribui es das extensões a resultante das forças actua excentricamente em rela o ao centro plástico originando momento flector.

Desta forma, calculando os esforços resistentes para um determinado diagrama de extensões na rotura obt m-se um ponto do diagrama de interac o. Variando as extensões no betão e no aço tendo por base os limites indicados, de modo a obter todos os possíveis diagramas de rotura, e repetindo os c culos anteriores obt m-se todos os pares de esforços resistentes (N_{Rd} - M_{Rd}) que constituem o diagrama de interac o para uma determinada quantidade de armadura. Este diagrama pode ser expresso em termos de grandezas

adimensionais utilizando os valores reduzidos dos esforços resistentes, obtidos através das expressões

$$v_{Rd} = \frac{N_{Rd}}{b \cdot h \cdot f_{cd}} \quad (4.11)$$

$$\mu_{Rd} = \frac{M_{Rd}}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} \quad (4.12)$$

No modelo numérico desenvolvido foi implementado o cálculo dos diagramas de interacção para as diversas secções consideradas para os elementos de betão e seguindo o procedimento descrito. Na Figura 4.3 representa-se, esquematicamente, o diagrama de interacção adimensional adoptado para verificação da resistência dos elementos de betão estrutural. A verificação da resistência da secção é efectuada comparando os valores das tensões devidos aos esforços actuantes com os valores das tensões correspondentes aos esforços resistentes. Assim, para os pontos correspondentes a esforços actuantes que se encontrem no interior do perímetro delimitado pelo diagrama de interacção está garantida a resistência da secção.

No cálculo dos objectivos definidos pela Equação (4.8) e tal como se mostra na Figura 4.3, para um determinado par de esforços actuantes (N_{Ed} - M_{Ed}) a que corresponde uma tensão actuante (σ_c) calculam-se os respectivos esforços resistentes (N_{Rd} - M_{Rd}) e a correspondente tensão admissível (σ_{allow}).

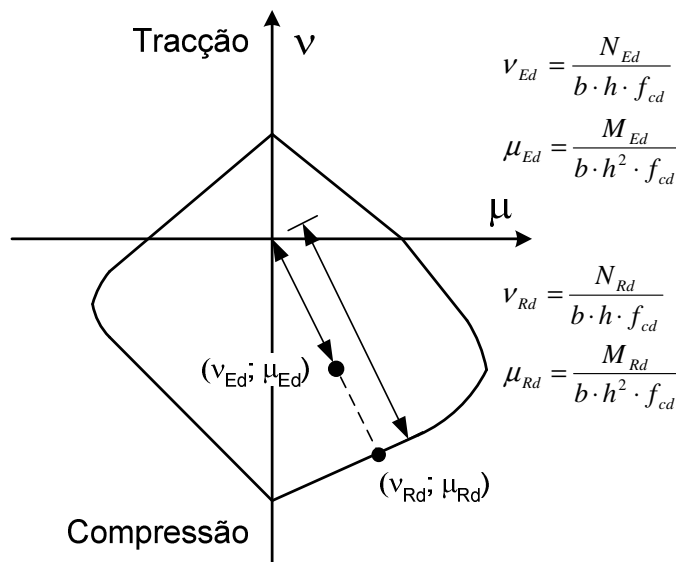


Figura 4.3 – Exemplo de diagrama de interacção adimensional para um elemento de betão

e) Tensões nos tirantes durante a construção, em serviço e para verificação da resistência

Um outro conjunto de objectivos diz respeito à verificação dos limites de tensão nos tirantes. No projecto de pontes atirantadas tem sido comum limitar a tensão máxima instalada nos tirantes, em condições de serviço, a 45% da tensão de rotura à tracção do aço dos cordões que os compõem. A utilização deste limite deveu-se à necessidade de prevenir as consequências negativas das tensões de fadiga, quer axiais nos tirantes, quer as tensões locais de flexão nas ancoragens, principalmente nos tirantes de grande diâmetro das primeiras pontes atirantadas (Walther *et al.*, 1999; Pedro, 2007). Em virtude da evolução na tecnologia dos tirantes e das respectivas ancoragens é possível, presentemente, utilizar um valor superior para este limite. De facto, nos sistemas de atirantamento actualmente disponíveis, a utilização de diversos dispositivos de amortecimento e de guiamento dos tirantes nas ancoragens permitem reduzir significativamente a vibração e as tensões de flexão induzidas nos tirantes.

No âmbito dos Eurocódigos, as disposições relativas aos limites de tensão a considerar para os tirantes encontram-se indicadas na Parte 1-11 do Eurocódigo 3 (EN 1993-1-11, 2006) que diz respeito ao projecto de estruturas de aço e em particular ao projecto de estruturas com elementos traccionados. Nessas disposições é efectuada a distinção entre a existência ou não de dispositivos de limitação dos esforços de flexão nas ancoragens. Deste modo, na definição dos objectivos de tensão nos tirantes considerou-se a existência de dispositivos para minimização da flexão nas ancoragens e utilizaram-se os correspondentes limites indicados no EC3-1-11 (EN 1993-1-11, 2006).

Durante a construção o valor da tensão nos tirantes deve ser limitado a 55% do valor característico da tensão de rotura à tracção do aço de pré-esforço. Este objectivo pode ser expresso através de

$$g_6(x) = \frac{\sigma}{0,55 f_{pk}} - 1 \leq 0 \quad (4.13)$$

onde σ é o valor da tensão de tracção instalada no tirante.

Para a ponte completa em condições de serviço, o valor limite é reduzido, passando a ser 50% do valor característico da tensão de rotura à tracção do aço de pré-esforço, obtendo-se a expressão

$$g_7(x) = \frac{\sigma}{0,50 f_{pk}} - 1 \leq 0 \quad (4.14)$$

Para além dos limites de tensão durante a construção e em serviço é necessário estabelecer também um limite para a verificação da resistência dos tirantes. De acordo com o

EC3-1-11 (EN 1993-1-11, 2006) o valor de cálculo da resistência à tracção do tirante é dado por

$$\min \left\{ \frac{f_{pk}}{1,5 \cdot \gamma_R}; \frac{f_{p0,1k}}{\gamma_R} \right\} \quad (4.15)$$

em que γ_R é um coeficiente parcial que assume o valor 0,90 quando existem dispositivos de minimização da flexão nas ancoragens. Por conseguinte, pode estabelecer-se um limite de 74% do valor característico da tensão de rotura à tracção do aço de pré-esforço para verificação da resistência dos tirantes, podendo escrever-se o correspondente objectivo através de

$$g_8(x) = \frac{\sigma}{0,74 f_{pk}} - 1 \leq 0 \quad (4.16)$$

Para garantir a eficiência estrutural dos tirantes definiu-se ainda outro objectivo de modo a limitar a tensão mínima nestes elementos, tendo-se utilizado um valor mínimo de 10% do valor característico da tensão de rotura à tracção do aço de pré-esforço. Deste modo, quando o valor da tensão no tirante (σ) é inferior a este limite o algoritmo considera o objectivo dado pela seguinte expressão

$$g_9(x) = 1 - \frac{\sigma}{0,10 f_{pk}} \leq 0 \quad (4.17)$$

4.2.4. Função objectivo

A noção de optimização implica que exista uma função ou funções que traduzem o desempenho e que podem ser melhoradas, podendo ser usadas como uma medida da eficiência do projecto (Haftka e Gürdal, 1992). Assim, para além das variáveis de decisão e dos objectivos de projecto, a resolução de um problema de optimização envolve sempre a definição da função objectivo a minimizar.

Como se viu na secção anterior, o projecto de uma ponte de tirantes envolve a verificação de diversos tipos de objectivos (custo, tensões, deslocamentos) o que dificulta a escolha da função objectivo. Esta escolha é feita frequentemente de forma subjectiva, em virtude da importância relativa atribuída a cada um dos objectivos e constrangimentos, pelo que o mesmo problema genérico pode ser alvo de uma variedade de formulações para a optimização. Como se referiu na secção 2.7, a função objectivo é normalmente formulada com base em critérios de eficiência estrutural e/ou economia, de modo a minimizar o custo total da estrutura, a energia de deformação elástica ou os esforços de flexão no tabuleiro ou

nas torres. No entanto, independentemente da função objectivo escolhida, na minimização desta deve ter-se sempre presente a necessidade de satisfazer limites de deslocamentos e tensões.

Uma abordagem possível para a resolução do problema consiste em atribuir o papel de função objectivo a um dos objectivos de projecto a que se reconhece uma importância dominante, impondo-se limites aos restantes e tratando-os como constrangimentos a satisfazer pela solução optimizada. Como exemplo pode referir-se a definição do custo da estrutura como a função objectivo a minimizar, estabelecendo-se constrangimentos associados às tensões e/ou deslocamentos.

No entanto, em muitas situações pretende-se uma solução que considere a optimização simultânea de todos ou vários objectivos. No caso de pontes atirantadas, por exemplo, a minimização do custo estrutural deve ser compatível com a admissibilidade dos estados de tensão da estrutura e com a minimização das flechas do tabuleiro sob carga permanente em serviço. Nesta situação tem-se um problema de optimização *multi-objectivo* ou *multi-critério* (Haftka e Gürdal, 1992; Arora, 2004).

Ao contrário dos problemas de optimização com um único objectivo, a optimização *multi-objectivo* pode conduzir a mais do que uma solução que é óptima a respeito de todos os objectivos. Deste modo, dentro do domínio de soluções admissíveis existe um conjunto de soluções superiores às restantes, contudo, não existe nenhuma solução neste conjunto que seja absolutamente superior às restantes desse conjunto. As soluções desse conjunto designam-se por *soluções óptimas de Pareto* (Haftka e Gürdal, 1992; Templeman, 1993; Arora, 2004).

Designando por $\underline{G}(\underline{x})$ o vector que contém os objectivos de projecto $g_j(\underline{x})$ ($j = 1, \dots, M$), diz-se que um vector das variáveis de decisão, \underline{x}^* , pertencente ao domínio de soluções admissíveis é um *ótimo de Pareto*, se e só se não existe outro vector \underline{x} , pertencente ao domínio, tal que $\underline{G}(\underline{x}) \leq \underline{G}(\underline{x}^*)$, com pelo menos um $g_j(\underline{x}) < g_j(\underline{x}^*)$ (Arora, 2004). Isto significa que não existe outro vector admissível de variáveis de decisão que possa diminuir um objectivo sem aumentar, pelo menos, um outro objectivo. Nestas soluções, a melhoria de qualquer objectivo terá um impacto negativo em pelo menos outro objectivo.

Para a obtenção de soluções óptimas de Pareto de um problema *multi-objectivo* têm sido propostas várias abordagens, tais como a soma de objectivos ponderados (*weighed sum method*), o método da função objectivo limitada (*bounded objective function method*), a programação de objectivos (*goal programming*) ou a abordagem minimax (*minimax approach*) (Haftka e Gürdal, 1992; Arora, 2004). De um modo geral, estas metodologias

baseiam-se na transformação do problema de optimização *multi-objectivo* num problema com um único objectivo. Isto é efectuado combinando os diversos objectivos numa única função, atribuindo pesos aos objectivos individuais ou definindo um ou vários deles como a função objectivo a minimizar, transformando os restantes em restrições. Desta forma, o problema de um único objectivo daí resultante é resolvido utilizando um dos métodos de optimização habituais para problemas desse tipo.

A principal dificuldade no uso destes métodos consiste na selecção dos objectivos e respectivos coeficientes de peso, quando não existe um critério racional para o efeito. Deste modo, o propósito do algoritmo de optimização utilizado é o de fornecer soluções de Pareto que constituem melhoramentos imparciais do projecto actual.

No âmbito deste trabalho o problema *multi-objectivo* relativo à optimização de pontes atirantadas de betão é formulado como um problema *minimax* que pode ser traduzido pela expressão seguinte

$$\min_x \max_{j=1,\dots,M} g_j(x) \quad (4.18)$$

Os problemas deste tipo são descontínuos e não diferenciáveis, o que dificulta a sua resolução numérica. Para resolução dos mesmos, Templeman (1993) desenvolveu uma metodologia inovadora aplicando aos problemas de optimização estrutural o conceito de *entropia de informação*.

O conceito de *entropia* é tradicionalmente usado no âmbito da Termodinâmica como medida do estado de desordem de um sistema conservativo fechado, que tende para um máximo em condições de equilíbrio. Boltzmann observou que este conceito também podia ser interpretado num sentido probabilístico, como indicador da incerteza associada à ocorrência de micro-estados individuais das partículas constituintes do sistema (Templeman, 1993).

A utilização do conceito como medida da incerteza, noutros domínios para além da Termodinâmica, foi primeiramente proposta por Shannon, tendo-o aplicado na Teoria da Informação. Mais tarde, Jaynes sugeriu que, representando a entropia uma medida da incerteza, podia ser utilizada no sentido inverso para gerar ou inferir distribuições de probabilidade correspondentes a desordem máxima. Desta forma, o *Princípio da Máxima Entropia (Maximum Entropy Principle)* de Shannon/Jaynes pode ser enunciado como:

“Ao fazer inferências com base em informação parcial deve usar-se a distribuição de probabilidade que apresente máxima entropia, condicionada ao que quer que se conheça. Esta é a única assumpção parcial que pode fazer-se. Qualquer outra pressupõe o uso arbitrário de informação da qual, por hipótese, se não dispõe.” (Templeman, 1993; Negrão, 1996).

Nos problemas de optimização estrutural parte-se de informação concreta acerca dos valores dos objectivos, constrangimentos e respectivos gradientes num ponto inicial do projecto. Utilizando esta informação, os algoritmos de optimização produzem “movimentos” sucessivos do ponto de projecto de modo a melhorar os objectivos definidos e procurando a solução óptima. A maioria destes algoritmos utiliza interpretações geométricas no processo de busca de soluções, extrapolando para o espaço n -dimensional as representações geométricas de problemas de optimização no espaço a duas ou três dimensões (Negrão, 1996).

Templeman (1989) observou que esta interpretação geométrica para obtenção da solução não constituía um facto objectivo mas uma suposição arbitrária que introduzia limitações injustificadas ao problema, concluindo que o uso do *Princípio da Máxima Entropia* seria a única estratégia de inferência adequada. Deste modo, tendo por base este princípio no desenvolvimento de uma metodologia de solução para problemas não-lineares sujeitos a constrangimentos, Templeman e Xingsi (1987) chegaram à seguinte expressão de uma função de penalidade

$$\frac{1}{\rho} \ln \left[\sum_{j=1}^M e^{\rho \cdot \alpha_j g_j(x)} \right] \quad (4.19)$$

que é semelhante à função de Kreisselmeier-Steinhauser (Haftka e Gurdal, 1992) usada no tratamento de problemas de controlo como técnica de combinação de restrições múltiplas, indiciando assim a possibilidade de aplicação deste princípio na resolução de problemas *multi-objectivo*.

Utilizando a *desigualdade de Jensen* é possível mostrar (Simões e Templeman, 1989; Simões, 1991; Templeman, 1993; Negrão, 1996) que a resolução do problema *minimax* é equivalente à minimização sem restrições de uma função escalar convexa (Equação 4.20), constituindo a solução o mínimo particular de Pareto do problema *multi-objectivo*:

$$\min F(x) = \min \frac{1}{\rho} \ln \left[\sum_{j=1}^M e^{\rho(g_j(x))} \right] \quad (4.20)$$

Nesta equação ρ representa um parâmetro real que pode tomar qualquer valor dentro do intervalo $1 \leq \rho \leq \infty$. Cada valor deste parâmetro conduz a uma solução de Pareto do problema *multi-objectivo* (Equação (4.18)). O valor deste parâmetro não deve decrescer durante o processo de optimização e desta forma o método converge assintoticamente para a solução particular do problema *minimax*. Contudo, do ponto de vista prático as soluções são indistinguíveis para valores de ρ situados entre 100 e 1000 (Negrão, 1996).

O significado físico da função escalar (Equação (4.20)) é o de uma aproximação convexa do interior do domínio constituído pelos objectivos de projecto. O erro introduzido por essa aproximação diminui quando ρ aumenta. A vantagem desta metodologia consiste em não ser necessário saber qual o conjunto activo de restrições nem o seu número, porque todas entram, ainda que com pesos diferentes, na construção da função escalar. O peso das diferentes restrições na função objectivo é atribuído em função da entropia de cada um destes critérios (Simões, 2008).

Como foi referido anteriormente, a optimização estrutural é um procedimento iterativo que ocorre a dois níveis. O primeiro, que se pode designar por *ciclo de análise e optimização* diz respeito a todo o processo de cálculo entre soluções estruturais consecutivas. Em cada ciclo é levada a cabo uma análise estrutural completa da qual se obtêm os valores dos objectivos e a informação necessária para o cálculo dos respectivos gradientes. Estes gradientes são obtidos através da análise de sensibilidades, cuja formulação e metodologia adoptada se descrevem em detalhe na secção 4.3.

Com os valores dos objectivos e respectivos gradientes tem-se a informação inicial para o módulo de optimização, dentro do qual tem lugar o segundo processo iterativo que se pode designar por *ciclo de iterações*. Este ciclo corresponde ao conjunto de “movimentos”, no espaço de projecto, que conduzem a uma melhoria do projecto inicial tendo em conta os objectivos anteriormente definidos. Cada um destes “movimentos” altera o actual ponto de projecto e, em rigor, uma nova análise estrutural seria necessária para reavaliar objectivos e gradientes. Para tal, seria necessária uma estrutura complexa do código-fonte com a chamada do módulo de análise desde dentro e de fora do módulo de optimização. A resolução dos problemas de optimização no âmbito deste trabalho envolve entre 20 a 60 ciclos de análise e optimização, cada um deles com 20 ou mais ciclos de iterações. Deste modo, facilmente se conclui que a realização de uma análise estrutural e de sensibilidades por cada ciclo de iterações se traduz num elevadíssimo custo computacional, o que torna proibitiva esta abordagem.

Para fazer face a esta situação utilizam-se técnicas de avaliação aproximada da informação no decorrer dos ciclos de iterações. O cálculo detalhado e rigoroso de objectivos e gradientes é realizado apenas no início de cada ciclo de análise e optimização e esses valores são utilizados para estimar a informação no decurso dos “movimentos” produzidos no ciclo de iterações. Para tal, utiliza-se o desenvolvimento em série de Taylor em torno do ponto de projecto inicial. Para limitar os erros introduzidos pelas aproximações impõem-se limites móveis às variações admissíveis para as variáveis de decisão.

Considere-se um determinado vector de variáveis de decisão que constitui o ponto actual do espaço de projecto

$$\underline{x}_0 = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_N\}^T \quad (4.21)$$

e que no final da análise estrutural e da análise de sensibilidade se dispõe dos correspondentes objectivos e sensibilidades

$$g_j(\underline{x}_0) \quad (4.22)$$

$$\nabla \underline{g}_j(\underline{x}_0) = \left\{ \frac{dg_j(\underline{x}_0)}{dx_1}; \frac{dg_j(\underline{x}_0)}{dx_2}; \dots; \frac{dg_j(\underline{x}_0)}{dx_N} \right\}^T \quad (4.23)$$

No decorrer do ciclo de iterações, o ponto de projecto move-se para uma vizinhança $\underline{x}_0 + \underline{\Delta x}$ do ponto inicial, a que correspondem novos valores dos objectivos dados por

$$g_j(\underline{x}_0 + \underline{\Delta x}) = g_j(\underline{x}_0) + \nabla \underline{g}_j^T(\underline{x}_0) \cdot \underline{\Delta x} + R_2 \quad (4.24)$$

em que R_2 representa os termos de segunda ordem e superiores, cujo valor pode ser limitado restringindo a amplitude do vector das variações da variáveis de decisão, $\underline{\Delta x}$.

Truncando os termos de segunda ordem e superiores na Equação (4.24) e substituindo o resultado na Equação (4.20) obtém-se a formulação aproximada do problema, adequada para a resolução numérica do mesmo e que é dada por

$$\min F(x) = \min \frac{1}{\rho} \ln \left[\sum_{j=1}^M e^{\rho \left(g_j(\underline{x}_0) + \sum_{i=1}^N \frac{dg_j(\underline{x}_0)}{dx_i} \Delta x_i \right)} \right] \quad (4.25)$$

onde N representa o número de variáveis de decisão e M o número de objectivos de projecto.

No final do ciclo de iterações os valores das variáveis de decisão são actualizados obtendo-se um novo vector (\underline{x}_1) que constitui um novo ponto no espaço de projecto. Partindo desta nova solução procede-se à análise estrutural e de sensibilidades, determinando-se os valores dos objectivos $g_j(\underline{x}_1)$ e respectivas sensibilidades $\nabla \underline{g}_j(\underline{x}_1)$, com os quais se realizam novos ciclos de iterações. Os ciclos de análise e optimização continuam até se atingir a solução óptima que garante a verificação dos critérios de convergência previamente definidos. A definição destes critérios é apresentada detalhadamente no Capítulo 5 a respeito dos diversos exemplos numéricos apresentados.

Como foi referido anteriormente, a fim de limitar os erros introduzidos pelas aproximações adoptadas para os objectivos de projecto, impõem-se limites móveis às variações admissíveis para as variáveis de decisão. Deste modo, na resolução do problema

definido pela Equação (4.25) definiram-se restrições de fronteira (*bound constraints*) de modo a estabelecer limites superiores e inferiores para as variações nas variáveis de decisão. Limitando essas variações a valores entre 2% e 10% do valor inicial de cada ciclo de análise e optimização garante-se uma precisão adequada das sensibilidades, facilitando a convergência do algoritmo de optimização.

Utilizando o *Princípio da Máxima Entropia* é possível transformar o problema *minimax* que traduz a resolução do problema de optimização *multi-objectivo* na minimização de uma função objectivo não-linear, escalar e convexa (Equação (4.20)). A minimização desta função pode ser levada a cabo através da aplicação de métodos *quasi-Newton* convencionais, obtendo-se uma solução óptima de Pareto para cada solução inicial. No âmbito deste trabalho utilizou-se a função *fmincon* do programa *MATLAB* que permite a minimização de funções escalares de várias variáveis sujeitas a restrições utilizando uma sequência de programas quadráticos.

Como se mostrará no Capítulo 5, o algoritmo de optimização utilizado neste trabalho, associado a múltiplas soluções iniciais (*multiple starting points*) fornece soluções optimizadas e adequadas do ponto de vista da engenharia, rearranjando a rigidez dos apoios proporcionados pelos tirantes e a distribuição de massas entre o tabuleiro e as torres.

Trata-se de um algoritmo eficiente pois permite tratar problemas com um elevado número de variáveis de decisão e de objectivos de projecto, fornecendo soluções óptimas num reduzido número de iterações. Para iniciar o processo de optimização é sempre necessária uma solução de partida e o algoritmo permite que essa solução seja não-admissível. Em subsequentes ciclos de análise e optimização a solução é melhorada, tornando-se admissível.

4.3. Análise de sensibilidades

4.3.1. Formulação geral

Num problema de optimização estrutural procura-se uma melhoria do projecto inicial efectuando modificações nos parâmetros caracterizadores da resposta do sistema. Deste modo, o conhecimento da evolução da resposta do sistema face a modificações introduzidas nos parâmetros que o caracterizam é um aspecto fundamental no processo de solução destes problemas. Essa informação permite determinar a direcção, no espaço de projecto, segundo a qual se deve processar a evolução da estrutura, por forma a melhorar-se o seu desempenho em simultâneo com a desejada redução de custo. Permite ainda manter a solução dentro dos limites impostos pelas condições de segurança e serviço. O processo que fornece esta

informação designa-se por *análise de sensibilidades* e corresponde, em termos matemáticos, ao cálculo dos gradientes dos objectivos de projecto a respeito das variáveis de decisão.

O cálculo das sensibilidades a respeito de variações nas variáveis de decisão representa a maior parcela do custo computacional de resolução da generalidade dos problemas de optimização. Constitui também a principal origem de erros e imprecisões pelo que a evolução da solução do problema depende da precisão com que é efectuado esse cálculo.

Haftka e Gürdal (1992) apresentam uma descrição detalhada desta temática e das várias metodologias que se podem adoptar para levar a cabo análise de sensibilidades, efectuando uma distinção entre *métodos variacionais* e *métodos discretos*.

Nos *métodos variacionais* começa-se pela diferenciação das equações contínuas que descrevem o fenómeno em estudo, procedendo-se posteriormente à discretização do sistema estrutural. Deste modo, estes métodos são mais adequados para a resolução de problemas em que o domínio e as equações de estado podem ser descritos de forma contínua. Os valores das sensibilidades são obtidos através da análise da estrutura sujeita a pseudo-carregamentos cujos valores são definidos efectuando a diferenciação das equações governativas do problema a respeito das diversas variáveis de decisão. As duas vantagens geralmente apontadas a estes métodos são a de favorecerem uma estrutura modular de programas de optimização e a de dispensarem o acesso ao código fonte do programa de análise pelo Método dos Elementos Finitos (Negrão, 1996).

Nos *métodos discretos* procede-se primeiro à discretização do sistema estrutural e posteriormente efectua-se a diferenciação das equações que traduzem o fenómeno em estudo. Por conseguinte, estes métodos integram-se facilmente com a metodologia de análise estrutural através do Método dos Elementos Finitos, sendo especialmente adequados quando a estrutura é discreta por natureza, como ocorre no caso das pontes de tirantes. Os métodos discretos incluem o *método das diferenças finitas*, o *método semi-analítico* e o *método analítico (directo ou adjunto)*.

A escolha do método a utilizar é condicionada pelo tipo de problema e pela possibilidade de acesso ao código-fonte do programa de análise estrutural. Assim, o método das diferenças finitas e o método semi-analítico não requerem acesso ao código fonte do programa mas constituem procedimentos numéricos aproximados. Por outro lado, os métodos analíticos fornecem soluções rigorosas mas exigem um investimento inicial em programação para desenvolvimento e adaptação do código-fonte.

O *método das diferenças finitas* constitui a técnica mais simples para o cálculo de gradientes dos objectivos, baseando-se na introdução de perturbações nos valores das

variáveis de decisão. Apesar de exigente a nível de custo computacional é fácil de implementar e bastante popular.

Neste método, para obter uma aproximação de derivadas de primeira ordem é necessário, consoante o esquema de diferenças finitas utilizado, resolver o sistema de equações para o valor actual e para um ou dois valores vizinhos, correspondentes a perturbações positiva e negativa da variável. Por conseguinte, num problema com N variáveis de decisão será necessário efectuar $N + 1$ ou $2N + 1$ resoluções do sistema de equações de equilíbrio, o que se traduz num elevado custo computacional. Para o modelo de análise considerado neste trabalho incluindo o faseamento construtivo este esforço de cálculo tornar-se-ia ainda muito mais significativo.

Este método apresenta problemas de exactidão devido aos arredondamentos numéricos na resolução do sistema de equações e a erros associados à truncagem dos termos de segunda ordem e superiores da série de Taylor a partir da qual se obtém a expressão da diferença finita. O valor da perturbação deve ser cuidadosamente escolhido na medida em que os erros dependem do valor utilizado, variando de forma inversa com este.

Não obstante as desvantagens referidas este método constitui a alternativa a adoptar quando não se tem acesso ao código fonte e o programa de análise não possibilita a saída da matriz de rigidez nem do vector de forças do problema.

No caso de o programa de análise fornecer os valores da matriz de rigidez e do vector de forças nodais equivalentes, pode utilizar-se o *método semi-analítico*. Como se apresentará de seguida, nos métodos analíticos a determinação das sensibilidades requer o cálculo das derivadas da matriz de rigidez e do vector de forças a respeito das diversas variáveis de decisão. No *método semi-analítico* estas derivadas são obtidas de forma aproximada através de diferenças finitas requerendo apenas uma resolução do sistema de equações. Por conseguinte, apesar de ser tão eficiente como os métodos analíticos, dado que se recorre a uma aproximação por diferenças finitas, este método pode apresentar problemas de imprecisão numérica tal como foi referido para o método das diferenças finitas.

Caso se tenha acesso ao código fonte do programa de análise é possível utilizar os *métodos analíticos*, que requerem a programação explícita das derivadas das diversas quantidades elementares. Estes métodos são computacionalmente mais eficientes e fornecem resultados mais precisos, mas, exigem um esforço inicial de programação das derivadas de todas as quantidades relevantes a respeito das diversas variáveis de decisão. Dentro desta categoria tem-se o *método directo* e o *método adjunto*, nos quais as sensibilidades são obtidas a partir da derivação do sistema de equações de equilíbrio. A diferença entre eles reside no

facto de que no *método directo* se calculam primeiro as sensibilidades dos deslocamentos e a partir destas, as das tensões, enquanto no *método adjunto* podem calcular-se directamente as sensibilidades das tensões.

A eficiência computacional é semelhante em ambos os métodos, na medida em que ambos requerem apenas uma factorização da matriz de rigidez. O número de segundos membros é igual a $N + 1$ no método directo e a $M + 1$ no método adjunto, pelo que, o primeiro é mais eficiente quando o número de variáveis de decisão é menor que o número de objectivos para os quais é necessário calcular as sensibilidades, devendo optar-se pelo segundo no caso contrário.

No âmbito do presente trabalho optou-se pelo desenvolvimento de um modelo computacional destinado à análise estrutural de pontes atirantadas de betão, de modo a contemplar as particularidades relacionadas com o processo construtivo e com os efeitos diferidos do comportamento do betão. Para além disso, o facto de se ter acesso ao código fonte do programa de análise possibilita a utilização de métodos analíticos na análise de sensibilidades o que, apesar do maior investimento inicial em programação, permite desenvolver um algoritmo computacionalmente mais eficiente e que fornece resultados mais precisos.

Como se indicou anteriormente, o problema de optimização de pontes de tirantes envolve a definição de diversos objectivos de projecto associados ao custo, aos deslocamentos e às tensões. Dadas as dimensões de uma estrutura deste tipo, facilmente se tem uma malha com mais de uma centena de elementos finitos, considerando-se como objectivos as tensões nas fibras superior e inferior de cada um deles. A análise do faseamento construtivo e a consideração de vários casos de carga para a ponte completa aumenta ainda mais o número de tensões a controlar. A estes objectivos devem juntar-se ainda o controlo dos deslocamentos para a ponte completa, de modo a garantir a rasante, e durante a construção para permitir o fecho do tabuleiro a meio-vão e a ligação do mesmo aos encontros. Deste modo, tem-se um problema com objectivos na ordem das centenas o que é largamente superior ao número de variáveis de decisão que serão na ordem das dezenas.

Tendo em conta os aspectos indicados e dada a natureza discreta das pontes de tirantes implementou-se uma análise de sensibilidades através do *método analítico discreto directo*.

Como foi referido anteriormente, nos métodos analíticos as expressões das sensibilidades são obtidas a partir da diferenciação do sistema de equações de equilíbrio da estrutura dado pela expressão

$$\underline{K} \cdot \underline{u} = \underline{F} \quad (4.26)$$

onde \underline{K} e \underline{F} representam, respectivamente, a matriz de rigidez e o vector de forças nodais equivalentes, sendo funções explícitas do vector das N variáveis de decisão

$$\underline{x} = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_N\}^T \quad (4.27)$$

e \underline{u} representa o vector de deslocamentos nodais que é função implícita das mesmas por não apresentar forma algébrica conhecida.

Diferenciando a equação (4.26) a respeito da variável de decisão x_i , obtém-se

$$\frac{d\underline{K}}{dx_i} \underline{u} + \underline{K} \frac{d\underline{u}}{dx_i} = \frac{d\underline{F}}{dx_i} \quad (4.28)$$

que pode ser reescrita na forma

$$\underline{K} \frac{d\underline{u}}{dx_i} = \frac{d\underline{F}}{dx_i} - \frac{d\underline{K}}{dx_i} \underline{u} = \underline{Q}_{vi} \quad (4.29)$$

Deste modo, as sensibilidades dos deslocamentos podem ser expressas através de:

$$\frac{d\underline{u}}{dx_i} = \underline{K}^{-1} \cdot \underline{Q}_{vi} \quad (4.30)$$

em que \underline{Q}_{vi} representa o *vector das pseudo-cargas virtuais* a respeito da variável de decisão x_i e que envolve o cálculo das derivadas da matriz de rigidez e do vector de forças nodais equivalentes a respeito de cada um dos tipos de variáveis de decisão. Para tal, efectuou-se a programação das derivadas das matrizes de rigidez e dos vectores de forças elementares a respeito dos diversos tipos de variáveis de decisão. Após o cálculo das diversas contribuições elementares, efectua-se o seu agrupamento do mesmo modo que se procede para a matriz de rigidez e para o vector de forças nodais equivalentes aquando da análise estrutural. Deste modo, o cálculo das sensibilidades dos deslocamentos processa-se com apenas uma inversão da matriz de rigidez da estrutura e a resolução do sistema para N segundos membros correspondentes aos *vectores das pseudo-cargas virtuais* relativos a cada uma das variáveis de decisão consideradas.

O cálculo das tensões é efectuado a nível elementar a partir dos valores dos deslocamentos, obtidos através da resolução do sistema de equações de equilíbrio, aplicando a relação entre tensões e deslocamentos, dada por

$$\underline{\sigma}^e = \underline{D} \cdot \underline{B}^e \cdot \underline{u}^e \quad (4.31)$$

Por conseguinte, as sensibilidades das tensões são determinadas através da diferenciação desta expressão, obtendo-se

$$\frac{d\sigma^e}{dx_i} = \frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_i} \cdot \underline{u}^e + \underline{D} \cdot \underline{B}^e \cdot \frac{d\underline{u}^e}{dx_i} \quad (4.32)$$

Assim, o cálculo destas sensibilidades envolve uma parcela explícita e outra implícita. A primeira é calculada a nível elementar requerendo a programação, para cada tipo de elemento finito, da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ e da respectiva derivada a respeito dos diversos tipos de variáveis de decisão. A parte implícita requer os valores dos deslocamentos nodais e das respectivas sensibilidades, pelo que só pode ser determinada após a análise estrutural e posterior cálculo das sensibilidades dos deslocamentos.

Tendo em conta o que foi referido, e como se observa na Equação (4.29), a determinação das sensibilidades dos deslocamentos envolve o cálculo das derivadas da matriz de rigidez e do vector de forças nodais equivalentes a respeito dos diversos tipos de variáveis de decisão. Para além disso, o cálculo das sensibilidades das tensões requer também a derivada da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$, tal como se indica na Equação (4.32). Por conseguinte, uma parte importante do desenvolvimento do modelo computacional que se apresenta neste trabalho centrou-se na dedução e programação destas derivadas, incluindo-as nas sub-rotinas destinadas aos cálculos elementares possibilitando desta forma, levar a cabo a análise de sensibilidades cujos resultados são utilizados no algoritmo de optimização.

Para as variáveis de decisão seccionais pode referir-se que os gradientes da matriz de rigidez, do vector de forças e da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$, se obtêm por substituição, nas respectivas expressões, da área da secção e do momento de inércia pelas correspondentes derivadas a respeito das variáveis de decisão. De um modo geral os diversos tipos de variáveis de decisão seccionais podem ser atribuídos aos dois tipos de elementos finitos (viga e barra). No caso das variáveis de decisão mecânicas, ou seja, correspondentes ao pré-esforço, considerar-se-ão associadas apenas aos elementos barra usados para modelar os tirantes, no caso da variável de tipo 4, ou aos elementos de viga, no caso da variável de tipo 23.

Nas secções seguintes apresentam-se, detalhadamente e para cada tipo de variável de decisão considerada, as expressões relativas a estas derivadas. A sua determinação foi efectuada com auxílio do programa *Mathematica* e as expressões obtidas foram posteriormente implementadas no programa de computador desenvolvido em ambiente *MATLAB*.

4.3.2. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 1

Tipo de variável – Seccional

Significado – Altura da secção rectangular cheia

Na Figura 4.4 apresenta-se a identificação das variáveis de decisão, de tipo 1 e de tipo 2, consideradas para a secção rectangular cheia.

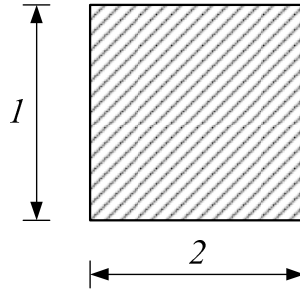


Figura 4.4 – Identificação das variáveis de decisão para a secção rectangular cheia

Tratando-se de uma variável de decisão seccional, a dependência da matriz de rigidez em relação a este tipo de variável faz-se sentir por via da área e do momento de inércia desta secção transversal. Deste modo, para obter a derivada da matriz de rigidez é necessário substituir a área e a inércia pelas respectivas derivadas em ordem à variável de decisão em causa. Considerando as expressões destas duas propriedades mecânicas para a secção rectangular cheia e derivado em ordem a $x_1 = h$, obtém-se

$$\frac{dA}{dx_1} = \frac{dA}{dh} = \frac{d}{dh}(h \cdot b) = b \quad (4.33)$$

$$\frac{dI_z}{dx_1} = \frac{dI_z}{dh} = \frac{d}{dh}\left(\frac{b \cdot h^3}{12}\right) = \frac{b \cdot h^2}{4} \quad (4.34)$$

Desta forma, para o elemento de viga a derivada da matriz de rigidez elementar em ordem à variável de decisão x_1 é dada por

$$\frac{d\mathbf{K}^e}{dx_1} = \begin{bmatrix} \frac{Eb}{L} & 0 & 0 & -\frac{Eb}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E b \cdot h^2}{L^3 \cdot 4} & \frac{6E b \cdot h^2}{L^2 \cdot 4} & 0 & -\frac{12E b \cdot h^2}{L^3 \cdot 4} & \frac{6E b \cdot h^2}{L^2 \cdot 4} \\ 0 & \frac{6E b \cdot h^2}{L^2 \cdot 4} & \frac{4E b \cdot h^2}{L \cdot 4} & 0 & -\frac{6E b \cdot h^2}{L^2 \cdot 4} & \frac{2E b \cdot h^2}{L \cdot 4} \\ -\frac{Eb}{L} & 0 & 0 & \frac{Eb}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E b \cdot h^2}{L^3 \cdot 4} & -\frac{6E b \cdot h^2}{L^2 \cdot 4} & 0 & \frac{12E b \cdot h^2}{L^3 \cdot 4} & -\frac{6E b \cdot h^2}{L^2 \cdot 4} \\ 0 & \frac{6E b \cdot h^2}{L^2 \cdot 4} & \frac{2E b \cdot h^2}{L \cdot 4} & 0 & -\frac{6E b \cdot h^2}{L^2 \cdot 4} & \frac{4E b \cdot h^2}{L \cdot 4} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Para além de influ rem na matriz de rigidez, as variáveis de decisão seccionais também exercem influ ncia no vector de forças nodais equivalentes da estrutura, na medida em que os vectores de forças elementares dependem destas variáveis. No que respeita a estes vectores podem considerar-se as contribui es do peso próprio, das cargas distribuídas ao longo do v o, das varia es de temperatura e dos efeitos diferidos do bet o.

Tal como foi apresentado no capítulo anterior, para o elemento de viga o vector elementar de forças nodais equivalentes ao peso próprio   dado por

$$\underline{f}_{-b}^e = \int_V \underline{N}^T \cdot \underline{b} dV = \left\{ -\frac{g_x \cdot L}{2} \quad -\frac{g_y \cdot L}{2} \quad -\frac{g_y \cdot L^2}{12} \quad -\frac{g_x \cdot L}{2} \quad -\frac{g_y \cdot L}{2} \quad \frac{g_y \cdot L^2}{12} \right\}^T \quad (4.36)$$

onde L representa o comprimento do elemento e g_x e g_y representam os valores das cargas distribuídas axial e transversal correspondentes ao peso próprio. Estas são dadas por $g_x = \gamma \cdot A \cdot \sin \alpha$ e $g_y = \gamma \cdot A \cdot \cos \alpha$, em que γ representa o peso volúmico do material que constitui o elemento, A representa a área da respectiva sec o transversal e α o ângulo entre o eixo do elemento e a direc o horizontal. Por conseguinte, a derivada do vector elementar de forças equivalentes ao peso próprio em ordem   variável de decisão x_1   dada por

$$\frac{d\underline{f}_{-b}^e}{dx_1} = \gamma \cdot b \cdot L \cdot \left\{ -\frac{\sin \alpha}{2} \quad -\frac{\cos \alpha}{2} \quad -\frac{L \cdot \cos \alpha}{12} \quad -\frac{\sin \alpha}{2} \quad -\frac{\cos \alpha}{2} \quad \frac{L \cdot \cos \alpha}{12} \right\}^T \quad (4.37)$$

A parcela das cargas distribuídas ao longo do v o n o depende explicitamente das variáveis de decisão seccionais pelo que a derivada do correspondente vector elementar   nula

$$\frac{d\underline{f}_{-t}^e}{dx_1} = \{0\} \quad (4.38)$$

No caso das ac es térmicas, o correspondente vector elementar de forças nodais equivalentes para o elemento de viga   dado por

$$\underline{\Delta f}_{-\Delta T}^e = \left\{ \begin{array}{c} -E \cdot \alpha_T \cdot \Delta T u \cdot A \\ 0 \\ -E \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T d}{h} \cdot I_z \\ E \cdot \alpha_T \cdot \Delta T u \cdot A \\ 0 \\ E \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T d}{h} \cdot I_z \end{array} \right\} \quad (4.39)$$

em que α_T representa o coeficiente de dilata o térmica linear e h representa a altura da sec o transversal. $\Delta T u$ e $\Delta T d$ representam, respectivamente as parcelas uniforme e diferencial em que pode ser decomposta a ac o térmica, sendo obtidas a partir dos valores

das variações de temperatura na face superior (ΔT_{sup}) e na face inferior (ΔT_{inf}) do elemento, através das expressões:

$$\Delta Tu = (\Delta T_{\text{sup}} + \Delta T_{\text{inf}}) \frac{h_{CG}}{h} \quad (4.40)$$

$$\Delta Td = \Delta T_{\text{inf}} - \Delta T_{\text{sup}} \quad (4.41)$$

Por conseguinte, na medida em que a parcela ΔTu também depende das variáveis de decisão seccionais deve igualmente proceder-se à sua derivação para o cálculo das sensibilidades. Deste modo, considerando o vector indicado na Equação (4.39) e derivando em ordem à variável de decisão x_i obtém-se a seguinte expressão geral:

$$\frac{d\Delta f^e}{dx_i} = \begin{Bmatrix} -E \cdot \alpha_T \cdot (\Delta T_{\text{inf}} + \Delta T_{\text{sup}}) \cdot \frac{d}{dx_i} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) \\ 0 \\ -E \cdot \alpha_T \cdot (\Delta T_{\text{inf}} - \Delta T_{\text{sup}}) \cdot \frac{d}{dx_i} \left(\frac{I_z}{h} \right) \\ E \cdot \alpha_T \cdot (\Delta T_{\text{inf}} + \Delta T_{\text{sup}}) \cdot \frac{d}{dx_i} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) \\ 0 \\ E \cdot \alpha_T \cdot (\Delta T_{\text{inf}} - \Delta T_{\text{sup}}) \cdot \frac{d}{dx_i} \left(\frac{I_z}{h} \right) \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

Calculando as derivadas indicadas na Equação (4.42) em ordem à variável de decisão x_l obtém-se a correspondente derivada do vector elementar de forças equivalentes à acção térmica, dada por

$$\frac{d\Delta f^e}{dx_l} = \begin{Bmatrix} -\frac{E \cdot b \cdot \alpha_T \cdot (\Delta T_{\text{inf}} + \Delta T_{\text{sup}})}{2} \\ 0 \\ -\frac{E \cdot \alpha_T \cdot b \cdot h \cdot (\Delta T_{\text{inf}} - \Delta T_{\text{sup}})}{6} \\ \frac{E \cdot b \cdot \alpha_T \cdot (\Delta T_{\text{inf}} + \Delta T_{\text{sup}})}{2} \\ 0 \\ \frac{E \cdot \alpha_T \cdot b \cdot h \cdot (\Delta T_{\text{inf}} - \Delta T_{\text{sup}})}{6} \end{Bmatrix} \quad (4.43)$$

No que respeita à parcela do vector de forças referente aos efeitos diferidos, indicou-se no Capítulo 3 (Equação (3.148)) a seguinte expressão para o vector elementar

$$\frac{\Delta f^e}{\Delta_{dif}} = \begin{Bmatrix} -E_c^{k*} \cdot A_c \cdot \Delta e_3 \\ 0 \\ -E_c^{k*} \cdot I_z \cdot \Delta e_1 \\ E_c^{k*} \cdot A_c \cdot \Delta e_3 \\ 0 \\ E_c^{k*} \cdot I_z \cdot \Delta e_1 \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

Deste modo, derivando a Equação (4.43) a respeito da variável de decisão x_i , obtém-se a expressão geral

$$\frac{d\Delta_{dif}^e}{dx_i} = \begin{Bmatrix} -\left(E_c^{k*} \cdot \Delta e_3 \cdot \frac{dA_c}{dx_i} + E_c^{k*} \cdot A_c \cdot \frac{d\Delta e_3}{dx_i} \right) \\ 0 \\ -\left(E_c^{k*} \cdot \Delta e_1 \cdot \frac{dI_z}{dx_i} + E_c^{k*} \cdot I_z \cdot \frac{d\Delta e_1}{dx_i} \right) \\ E_c^{k*} \cdot \Delta e_3 \cdot \frac{dA_c}{dx_i} + E_c^{k*} \cdot A_c \cdot \frac{d\Delta e_3}{dx_i} \\ 0 \\ E_c^{k*} \cdot \Delta e_1 \cdot \frac{dI_z}{dx_i} + E_c^{k*} \cdot I_z \cdot \frac{d\Delta e_1}{dx_i} \end{Bmatrix} \quad (4.45)$$

Como se observa na Equação (4.45) as forças nodais equivalentes aos efeitos diferidos dependem das variáveis seccionais por via da área e da inércia da secção e por via das deformações (axiais e de flexão) devidas aos efeitos diferidos. As deformações de fluência e retracção dependem das variáveis seccionais na medida em que alguns dos parâmetros dos respectivos modelos do EC2 (EN 1992-1-1, 2010) dependem do parâmetro h_0 , que representa a espessura equivalente do elemento. Para além disso, a deformação de fluência depende também do estado de tensão. Deste modo, modificações nas variáveis de decisão do problema traduzir-se-ão em alterações do estado de tensão e, por conseguinte, da deformação de fluência.

Estas particularidades dificultam o processo de obtenção por via analítica das derivadas do vector de forças devido aos efeitos diferidos. Em rigor considera-se que seria necessário um processo com duas análises de sensibilidades: a primeira para calcular as sensibilidades das tensões necessárias ao cálculo da parcela das derivadas das deformações devidas aos efeitos diferidos; e a segunda para o cálculo das sensibilidades das forças nodais equivalentes aos efeitos diferidos, utilizando as sensibilidades das tensões calculadas previamente.

Para fazer face a estas dificuldades, no modelo numérico desenvolvido adoptou-se uma formulação simplificada calculando-se apenas a parcela correspondente às derivadas da área e da inércia da secção. Para minimizar os erros introduzidos por esta simplificação na resolução

dos problemas de optimização utilizaram-se limites móveis com valores reduzidos para as variações admissíveis nas variáveis de decisão. Esta formulação mostrou-se adequada para prever a resposta da estrutura, tal como se ilustra no exemplo de verificação apresentado posteriormente na secção 4.3.25.

Como se indicou na Equação (4.3) o custo da estrutura foi definido em função dos custos dos materiais, dependendo directamente das variáveis de decisão seccionais pois destas dependem os volumes de materiais utilizados. Deste modo, as sensibilidades do custo são obtidas através das respectivas derivadas a respeito das diversas variáveis de decisão seccionais. De acordo com a referida equação, a contribuição de um dado elemento para o custo da estrutura é dada pelo produto do custo unitário do material pelo volume do elemento. Por conseguinte, derivando essa expressão em ordem à variável de decisão x_i tem-se a seguinte expressão geral aplicável a todas as variáveis de decisão seccionais

$$\frac{dC}{dx_i} = \frac{d}{dx_i} (CU \cdot A \cdot L) = CU \cdot L \cdot \frac{dA}{dx_i} \quad (4.46)$$

onde CU representa o custo unitário do material, A representa área da secção transversal do elemento e L o respectivo comprimento. Verifica-se, assim, que o cálculo das sensibilidades do custo envolve a determinação da derivada da área a respeito da variável de decisão em causa.

Relativamente às sensibilidades das tensões referiu-se anteriormente que o seu cálculo envolvia uma parcela explícita requerendo a determinação da derivada da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ a respeito dos diversos tipos de variáveis de decisão.

Como foi referido no Capítulo 3, para o elemento de viga tem-se o seguinte vector elementar de tensões

$$\underline{\sigma}^e = \{ \sigma_n \quad \sigma_{fs} \quad \sigma_{fi} \quad \tau \} \quad (4.47)$$

onde σ_n , σ_{fs} , σ_{fi} e τ representam, respectivamente, a tensão normal devido ao esforço axial, a tensão normal devido à flexão na fibra superior, a tensão normal devido à flexão na fibra inferior e a tensão tangencial máxima.

Considerando a relação entre esforços internos e tensões tem-se, para o ponto central do elemento, o seguinte vector de tensões

$$\underline{\sigma}^e = \begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_{fs} \\ \sigma_{fi} \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{N}{A} \\ \frac{M \cdot y_{fs}}{I_z} \\ \frac{M \cdot y_{fi}}{I_z} \\ \frac{V \cdot S}{I_z \cdot b} \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$

em que y_{fs} e y_{fi} , representam, respectivamente, as posições da fibra superior e da fibra inferior da secção medidas a partir do centro geométrico da mesma. S e b representam, respectivamente, o momento estático da meia-secção e a largura desta.

Deste modo, os valores das tensões podem ser obtidos através do produto da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ pelo vector de deslocamentos elementares. Assim, para o elemento de viga tem-se

$$\underline{\sigma}^e = \underline{D} \cdot \underline{B}^e \cdot \underline{u}^e \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_{fs} \\ \sigma_{fi} \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{E}{L} & 0 & 0 & \frac{E}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E \cdot y_{fs}}{L} & 0 & 0 & \frac{E \cdot y_{fs}}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{E \cdot y_{fi}}{L} & 0 & 0 & \frac{E \cdot y_{fi}}{L} \\ 0 & \frac{12E \cdot S}{b \cdot L^3} & \frac{6E \cdot S}{b \cdot L^2} & 0 & -\frac{12E \cdot S}{b \cdot L^3} & \frac{6E \cdot S}{b \cdot L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ \theta_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ \theta_2^e \end{Bmatrix} \quad (4.49)$$

Por conseguinte, a derivação da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ envolve a determinação das derivadas das posições das fibras superior e inferior e também do quociente entre momento estático e a largura em ordem à variável de decisão em causa. Assim, derivando estas grandezas a respeito da variável de decisão x_1 , obtêm-se as seguintes expressões:

$$\frac{dy_{fs}}{dx_1} = \frac{dy_{fs}}{dh} = \frac{d}{dh}(h_{CG} - h) = \frac{d}{dh}\left(\frac{h}{2} - h\right) = -\frac{1}{2} \quad (4.50)$$

$$\frac{dy_{fi}}{dx_1} = \frac{dy_{fi}}{dh} = \frac{d}{dh}(h_{CG}) = \frac{d}{dh}\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad (4.51)$$

$$\frac{d}{dx_1}\left(\frac{S}{b}\right) = \frac{d}{dh}\left(\frac{S}{b}\right) = \frac{d}{dh}\left(\frac{b \cdot h^2}{8} \cdot \frac{1}{b}\right) = \frac{h}{4} \quad (4.52)$$

Desta forma, a derivada da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ em ordem à variável de decisão x_1 é dada por

$$\frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E \cdot}{2L} & 0 & 0 & -\frac{E}{2L} \\ 0 & 0 & -\frac{E}{2L} & 0 & 0 & \frac{E}{2L} \\ 0 & \frac{3Eh}{L^3} & \frac{3Eh}{2L^2} & 0 & -\frac{3Eh}{L^3} & \frac{3Eh}{2L^2} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Como se pode observar pelas expressões anteriores, para determinação da derivada da matriz de rigidez e dos vectores de forças em ordem a variáveis de decisão do tipo seccional é necessário calcular as derivadas da área e do momento de inércia da secção. No caso das acções térmicas é necessário calcular ainda as derivadas $d(A \cdot h_{CG} / h) / dx_i$ e $d(I_z / h) / dx_i$. Para além disso, a determinação das sensibilidades das tensões requer também o cálculo da derivada da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$. Nesta secção apresentou-se, detalhadamente, o processo de determinação destas derivadas para a variável de decisão tipo 1 (x_1). Na medida em que este processo é semelhante para todas as variáveis de decisão de tipo seccional, nas secções seguintes referentes a variáveis deste tipo, apenas se apresentam os valores das derivadas da área, do momento de inércia, de $d(A \cdot h_{CG} / h) / dx_i$, de $d(I_z / h) / dx_i$ e da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$.

De referir ainda que, apesar de se apresentarem as expressões para o elemento de viga, esta variável de decisão, e genericamente todas as variáveis de decisão seccionais, podem também ser atribuídas a elementos de barra. Nos problemas abordados neste trabalho os elementos barra, associados ao módulo de elasticidade equivalente, são usados na modelação dos tirantes. No entanto, o programa de computador desenvolvido pode ser utilizado na resolução de problemas de optimização de outro tipo de estruturas em que seja adequado utilizar elementos barra para a modelação de outros elementos estruturais que não tirantes.

Optou-se por expor as expressões para o elemento de viga por apresentarem maior generalidade, sendo as referentes ao elemento de barra obtidas facilmente a partir das apresentadas.

4.3.3. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 2

Tipo de variável – Seccional

Significado – Largura da secção rectangular cheia

Na Figura 4.4 encontra-se identificada a variável de decisão tipo 2. À semelhança do que foi referido para a variável de decisão tipo 1, tratando-se de uma variável de decisão seccional, a dependência da matriz de rigidez e dos vectores de forças expressa-se pela área e momento de inércia da secção transversal. Tendo em conta as expressões destas duas

propriedades mecânicas para a secção rectangular cheia e derivado em ordem a $x_2 = b$, obtém-se

$$\frac{dA}{dx_2} = \frac{dA}{db} = \frac{d}{db}(h \cdot b) = h \quad (4.54)$$

$$\frac{dI_z}{dx_2} = \frac{dI_z}{db} = \frac{d}{db}\left(\frac{b \cdot h^3}{12}\right) = \frac{h^3}{12} \quad (4.55)$$

que substituindo na matriz de rigidez elementar permite determinar a derivada desta a respeito da variável de decisão tipo 2, $d\underline{K}^e / dx_2$. Conhecendo as derivadas da área e do momento de inércia, a determinação das derivadas dos vectores de forças a respeito da variável de decisão x_2 processa-se do mesmo modo que para a variável de decisão x_1 . Para o cálculo da derivada do vector de forças devido às acções térmicas têm-se ainda as seguintes derivadas

$$\frac{d}{dx_2}\left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h}\right) = \frac{d}{db}\left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h}\right) = \frac{d}{db}\left(\frac{h \cdot b \cdot h_{CG}}{h}\right) = \frac{b}{2} \quad (4.56)$$

$$\frac{d}{dx_2}\left(\frac{I_z}{h}\right) = \frac{d}{db}\left(\frac{I_z}{h}\right) = \frac{d}{db}\left(\frac{b \cdot h^3}{12} \cdot \frac{1}{h}\right) = \frac{h^2}{12} \quad (4.57)$$

No que respeita à derivada da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$, interveniente no cálculo das sensibilidades das tensões, viu-se anteriormente que depende das derivadas da posição da fibra superior e da fibra inferior da secção e também da derivada do quociente entre o momento estático e a largura da secção. Assim, derivando as expressões destes parâmetros em ordem à largura da secção rectangular cheia, tem-se

$$\frac{dy_{fs}}{dx_2} = \frac{dy_{fs}}{db} = \frac{d}{db}\left(\frac{h}{2} - h\right) = 0 \quad (4.58)$$

$$\frac{dy_{fi}}{dx_2} = \frac{dy_{fi}}{db} = \frac{d}{db}\left(\frac{h}{2}\right) = 0 \quad (4.59)$$

$$\frac{d}{dx_2}\left(\frac{S}{b}\right) = \frac{d}{dh}\left(\frac{S}{b}\right) = \frac{d}{db}\left(\frac{b \cdot h^2}{8} \cdot \frac{1}{b}\right) = 0 \quad (4.60)$$

pelo que, a derivada da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ em ordem às variáveis de decisão tipo 2 é nula

$$\frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

4.3.4. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 3

Tipo de variável – Seccional

Significado – Área da secção circular

Na Figura 4.5 encontra-se ilustrada a variável de decisão tipo 3. Tal como para as restantes variáveis de decisão seccionais, os gradientes da matriz de rigidez e dos vectores de forças são obtidos a partir das derivadas da área da secção transversal e do respectivo momento de inércia.

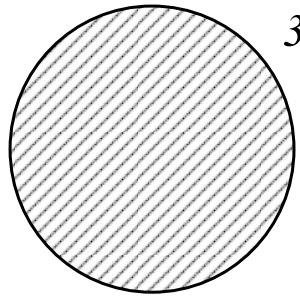


Figura 4.5 – Identificação da variável de decisão de tipo 3

A determinação da derivada da área da secção em ordem a esta variável de decisão, que representa a própria área, é imediata

$$\frac{dA}{dx_3} = \frac{dA}{dA} = 1 \quad (4.62)$$

A área e o momento de inércia para a secção circular cheia são dados por

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad (4.63)$$

$$I_z = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \quad (4.64)$$

Rearranjando a Equação (4.63) de modo a exprimir o diâmetro em função da área e substituindo na expressão do momento de inércia, vem:

$$I_z = \frac{\pi \cdot \left(\sqrt{\frac{4A}{\pi}} \right)^4}{64} = \frac{A^2}{4\pi} \quad (4.65)$$

Deste modo, derivando a expressão do momento de inércia em ordem à área da secção, obtém-se

$$\frac{dI_z}{dx_3} = \frac{dI_z}{dA} = \frac{A}{2\pi} \quad (4.66)$$

No caso da acção térmica as derivadas intervenientes são dadas por

$$\frac{d}{dx_3} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{d} \right) = \frac{d}{dA} \left(\frac{A}{2} \right) = \frac{1}{2} \quad (4.67)$$

$$\frac{d}{dx_3} \left(\frac{I_z}{d} \right) = \frac{d}{dA} \left(\frac{I_z}{d} \right) = \frac{d}{dA} \left(\frac{\frac{A^2}{4\pi}}{\sqrt{\frac{4A}{\pi}}} \right) = \frac{3\sqrt{A}}{16\sqrt{\pi}} \quad (4.68)$$

Para a secção circular cheia as derivadas da posição da fibra superior, da posição da fibra inferior e do quociente entre o momento estático e a largura são dadas pelas expressões:

$$\frac{dy_{fs}}{dx_3} = \frac{dy_{fs}}{dA} = \frac{d}{dA} (h_{CG} - d) = \frac{d}{dA} \left(\frac{d}{2} - d \right) = -\frac{1}{2\sqrt{A\pi}} \quad (4.69)$$

$$\frac{dy_{fi}}{dx_3} = \frac{dy_{fi}}{dA} = \frac{d}{dA} (h_{CG}) = \frac{d}{dA} \left(\frac{d}{2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{A\pi}} \quad (4.70)$$

$$\frac{d}{dx_3} \left(\frac{S}{b} \right) = \frac{d}{dA} \left(\frac{S}{b} \right) = \frac{d}{dA} \left(\frac{A}{2} \cdot \frac{2 \cdot d}{3\pi} \cdot \frac{1}{d} \right) = \frac{1}{3\pi} \quad (4.71)$$

Assim, para o cálculo das sensibilidades das tensões a respeito da variável de decisão $x_3 = A$, a derivada da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ é dada pela expressão

$$\frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2L} \frac{1}{\sqrt{A\pi}} & 0 & 0 & -\frac{E}{2L} \frac{1}{\sqrt{A\pi}} \\ 0 & 0 & -\frac{E}{2L} \frac{1}{\sqrt{A\pi}} & 0 & 0 & \frac{E}{2L} \frac{1}{\sqrt{A\pi}} \\ 0 & \frac{4E}{\pi \cdot L^3} & \frac{2E}{\pi \cdot L^2} & 0 & -\frac{4E}{\pi \cdot L^3} & \frac{2E}{\pi \cdot L^2} \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

De referir ainda que, tal como as anteriores, esta variável de decisão também pode ser associada a elementos de viga ou barra. Pode ser igualmente utilizada para representar, de forma aproximada, a área de elementos de tirante. No entanto, para esse efeito desenvolveu-se e implementou-se a variável de decisão tipo 22 correspondente à área da secção de tirante que é constituída pelo agrupamento de cordões de 7 fios de aço de alta resistência.

4.3.5. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 4

Tipo de variável – Mecânica

Significado – Força de pré-esforço nos tirantes

Na Figura 4.6 apresenta-se a identificação da variável de decisão tipo 4. Neste caso tem-se uma variável de decisão de natureza mecânica que representa a força de pré-esforço a aplicar nos tirantes.

Como foi referido, a determinação dos valores adequados destas grandezas é essencial no âmbito do projecto de pontes de tirantes, pois permitem controlar os deslocamentos e a distribuição de esforços na estrutura, daí a importância da sua consideração como variável de decisão no problema de optimização de pontes atirantadas.

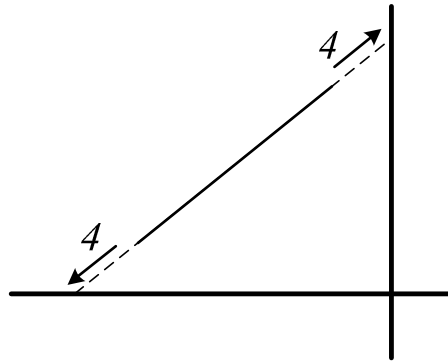


Figura 4.6 – Identificação da variável de decisão de tipo 4

Tratando-se de uma variável de decisão de natureza mecânica, os parâmetros geométricos da secção não dependem desta variável. Por conseguinte, são nulas as derivadas da área e do momento de inércia a respeito desta variável de decisão. De referir também que esta variável de decisão será apenas considerada em elementos barra utilizados para modelar os tirantes, pelo que o elemento de viga não depende explicitamente desta variável de decisão, sendo nulas as correspondentes sensibilidades. Nos elementos barra devem ainda considerar-se a situação de modelação dos tirantes com módulo de elasticidade constante ou com módulo equivalente dado pela fórmula de Ernst.

Numa formulação de módulo de elasticidade constante, e tratando-se de uma variável de decisão mecânica, esta só afecta explicitamente o vector de forças nodais equivalentes ao pré-esforço no tirante em que foi definida. Deste modo, são nulas as derivadas da matriz de rigidez elementar e da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ em ordem à variável de decisão tipo 4. Relativamente à derivada do vector elementar de forças nodais equivalentes ao pré-esforço no tirante tem-se

$$\frac{df_p^e}{dx_4} = \frac{df_p^e}{dF_p} = \{-1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\}^T \quad (4.73)$$

No que respeita à formulação de módulo equivalente, utilizada para consideração dos efeitos geometricamente não-lineares do comportamento dos tirantes, é necessário ter em conta que o valor deste parâmetro é afectado pela alteração da tensão no tirante resultante da variação do valor da força de pré-esforço aplicada. Este aspecto traduz-se em derivadas não nulas para a matriz de rigidez elementar e para a matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ a respeito desta variável de decisão. Assim, para a derivada da matriz de rigidez tem-se

$$\frac{d\underline{K}^e}{dx_4} = \frac{d\underline{K}^e}{dF_p} = \frac{dE_{eq}}{dF_p} \cdot \begin{bmatrix} \frac{A}{L} & 0 & 0 & -\frac{A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A}{L} & 0 & 0 & \frac{A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

em que a derivada do módulo equivalente em ordem a esta variável de decisão é dada por

$$\frac{dE_{eq}}{dF_p} = \frac{dE_{eq}}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dF_p} = \frac{36 \cdot (E \cdot \gamma \cdot L \cos \alpha \cdot \sigma)^2}{(E \cdot (L \cos \alpha)^2 + 12\sigma^3)^2} \cdot \frac{d\sigma}{dF_p} \quad (4.75)$$

No caso do vector de forças tem-se a mesma situação que para a formulação de módulo constante, sendo a derivada do vector de forças nodais equivalentes ao pré-esforço no tirante dada pela expressão indicada na Equação (4.73).

Para os elementos barra tem-se apenas a tensão normal devido ao esforço axial. Considerando a formulação com módulo equivalente, a respectiva matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ é dada por

$$\underline{D} \cdot \underline{B}^e = \begin{bmatrix} -\frac{E_{eq}}{L} & 0 & 0 & \frac{E_{eq}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

Derivando esta matriz em ordem à variável de decisão tipo 4 obtém-se a seguinte expressão

$$\frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_4} = \frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dF_p} = \frac{dE_{eq}}{dF_p} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

em que a derivada do módulo equivalente em ordem à força de pré-esforço é dada pela Equação (4.75).

4.3.6. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 5

Tipo de variável – Seccional

Significado – Altura da secção rectangular oca

Na Figura 4.7 representa-se a secção rectangular oca e as respectivas variáveis de decisão consideradas. Este tipo de secção é usado fundamentalmente na modelação da secção transversal das torres das pontes atirantadas. Tratando-se de uma variável seccional, o cálculo das sensibilidades dos deslocamentos, que envolve a determinação das derivadas da matriz de rigidez e do vector de forças, implica o cálculo das derivadas da área, do momento de inércia, de $(A \cdot h_{CG} / h)$ e de (I_z / h) em ordem a esta variável de decisão.

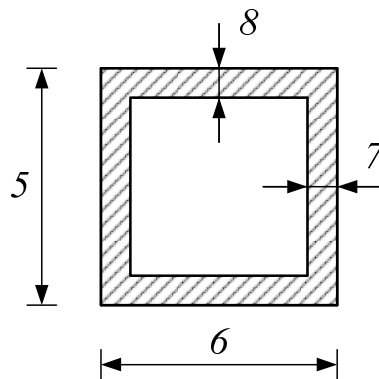


Figura 4.7 – Identificação das variáveis de decisão para a secção rectangular oca

Partindo das Equações (3.30) e (3.31), que traduzem área e o momento de inércia da secção rectangular oca e derivando-as em ordem à variável de decisão tipo 5, obtém-se

$$\frac{dA}{dx_5} = \frac{dA}{dh} = \frac{d}{dh} (b \cdot h - ((b - 2 \cdot t_w) \cdot (h - 2 \cdot t_f))) = 2 \cdot t_w \quad (4.78)$$

$$\frac{dI_z}{dx_5} = \frac{dI_z}{dh} = \frac{b \cdot h^2 - (h - 2t_f)^2 \cdot (b - 2 \cdot t_w)}{4} \quad (4.79)$$

$$\frac{d}{dx_5} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{dh} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = t_w \quad (4.80)$$

$$\frac{d}{dx_5} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{d}{dh} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{b(3h^2 \cdot t_f - 4 \cdot t_f^3) + 2 \cdot t_w \cdot (h - 2t_f)^2 \cdot (h + t_f)}{6h^2} \quad (4.81)$$

Deste modo, têm-se os valores relevantes para a determinação de $d\underline{K}/dx_5$ e de $d\underline{F}/dx_5$ e, consequentemente, das sensibilidades dos deslocamentos a respeito desta variável de decisão.

Para determinar as sensibilidades das tensões é necessário o cálculo da derivada da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ em ordem à variável de decisão em causa. Como se viu, esta derivada obtém-se, substituindo na respectiva expressão as derivadas de y_{fs} , y_{fi} e S/b . Para o caso da secção rectangular oca estes parâmetros são dados por:

$$y_{fs} = h_{CG} - h = \frac{h}{2} - h = -\frac{h}{2} \quad (4.82)$$

$$y_{fi} = h_{CG} = \frac{h}{2} \quad (4.83)$$

$$S = \frac{b \cdot h^2}{8} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - t_f \right)^2 (b - 2 \cdot t_w) \quad (4.84)$$

Derivando estas equações a respeito da variável de decisão tipo 5 obtêm-se as seguintes expressões

$$\frac{dy_{fs}}{dx_5} = \frac{dy_{fs}}{dh} = \frac{d}{dh} \left(-\frac{h}{2} \right) = -\frac{1}{2} \quad (4.85)$$

$$\frac{dy_{fi}}{dx_5} = \frac{dy_{fi}}{dh} = \frac{d}{dh} \left(\frac{h}{2} \right) = \frac{1}{2} \quad (4.86)$$

$$\frac{d}{dx_5} \left(\frac{S}{b} \right) = \frac{d}{dh} \left(\frac{S}{b} \right) = \frac{b \cdot t_f + h \cdot t_w - 2 \cdot t_f \cdot t_w}{2b} \quad (4.87)$$

e, por conseguinte, a derivada da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ pode ser expressa por

$$\frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2L} & 0 & 0 & -\frac{E}{2L} \\ 0 & 0 & -\frac{E}{2L} & 0 & 0 & \frac{E}{2L} \\ 0 & \frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_5} \left(\frac{S}{b} \right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_5} \left(\frac{S}{b} \right) & 0 & -\frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_5} \left(\frac{S}{b} \right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_5} \left(\frac{S}{b} \right) \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

4.3.7. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 6

Tipo de variável – Seccional

Significado – Largura da secção rectangular oca

A variável de decisão tipo 6 encontra-se identificada na Figura 4.7. Neste caso as derivadas da área e do momento de inércia são dadas por

$$\frac{dA}{dx_6} = \frac{dA}{db} = \frac{d}{db} (b \cdot h - ((b - 2 \cdot t_w) \cdot (h - 2 \cdot t_f))) = 2 \cdot t_f \quad (4.89)$$

$$\frac{dI_z}{dx_6} = \frac{dI_z}{db} = \frac{h^3 - (h - 2 \cdot t_f)^3}{12} \quad (4.90)$$

e as derivadas de $(A \cdot h_{CG} / h)$ e de (I_z / h) são dadas por

$$\frac{d}{dx_6} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{db} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = t_f \quad (4.91)$$

$$\frac{d}{dx_6} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{d}{db} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{t_f \cdot \left(3h - 6t_f + \frac{4 \cdot t_f^2}{h} \right)}{6} \quad (4.92)$$

A derivada do quociente entre o momento estático e a largura da secção a respeito desta variável de decisão é dada por:

$$\frac{d}{dx_6} \left(\frac{S}{b} \right) = \frac{d}{db} \left(\frac{S}{b} \right) = - \frac{(h - 2 \cdot t_f)^2 \cdot t_w}{4 \cdot b^2} \quad (4.93)$$

Assim, no que respeita à derivada da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ em ordem a esta variável de decisão, tem-se

$$\frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_6} \left(\frac{S}{b} \right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_6} \left(\frac{S}{b} \right) & 0 & -\frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_6} \left(\frac{S}{b} \right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_6} \left(\frac{S}{b} \right) \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

4.3.8. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 7

Tipo de variável – Seccional

Significado – Espessura das paredes de comprimento h da secção rectangular oca

Esta variável de decisão encontra-se representada na Figura 4.7. Derivando as expressões da área, do momento de inércia, de $(A \cdot h_{CG} / h)$ e de (I_z / h) para a secção rectangular oca em ordem à variável tipo 7, obtém-se:

$$\frac{dA}{dx_7} = \frac{dA}{dt_w} = \frac{d}{dt_w} = 2 \cdot (h - 2 \cdot t_f) \quad (4.95)$$

$$\frac{dI_z}{dx_7} = \frac{dI_z}{dt_w} = \frac{(h - 2 \cdot t_f)^3}{6} \quad (4.96)$$

$$\frac{d}{dx_7} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{dt_w} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = h - 2 \cdot t_f \quad (4.97)$$

$$\frac{d}{dx_7} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{d}{dt_w} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{(h - 2 \cdot t_f)^3}{6h} \quad (4.98)$$

A derivada do quociente entre o momento estático e a largura da secção a respeito desta variável de decisão é dada por:

$$\frac{d}{dx_7} \left(\frac{S}{b} \right) = \frac{d}{dt_w} \left(\frac{S}{b} \right) = \frac{(h - 2 \cdot t_f)^2}{4 \cdot b} \quad (4.99)$$

No que respeita à derivada da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ em ordem a esta variável de decisão, tem-se

$$\frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_7} \left(\frac{S}{b} \right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_7} \left(\frac{S}{b} \right) & 0 & -\frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_7} \left(\frac{S}{b} \right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_7} \left(\frac{S}{b} \right) \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

4.3.9. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 8

Tipo de variável – Seccional

Significado – Espessura das paredes de comprimento b da secção rectangular oca

A variável de decisão tipo 8 encontra-se representada na Figura 4.7. As derivadas da área, do momento de inércia, de $(A \cdot h_{CG} / h)$ e de (I_z / h) para a secção rectangular oca a respeito desta variável de decisão são dadas pelas expressões:

$$\frac{dA}{dx_8} = \frac{dA}{dt_f} = \frac{d}{dt_f} = 2 \cdot (b - 2 \cdot t_w) \quad (4.101)$$

$$\frac{dI_z}{dx_8} = \frac{dI_z}{dt_f} = \frac{(h - 2 \cdot t_f)^2 \cdot (b - 2 \cdot t_w)}{2} \quad (4.102)$$

$$\frac{d}{dx_8} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{dt_f} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = b - 2 \cdot t_w \quad (4.103)$$

$$\frac{d}{dx_8} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{d}{dt_f} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{(h - 2 \cdot t_f)^2 \cdot (b - 2 \cdot t_w)}{2h} \quad (4.104)$$

A derivada do quociente entre o momento estático e a largura da secção a respeito desta variável de decisão é dada por:

$$\frac{d}{dx_8} \left(\frac{S}{b} \right) = \frac{d}{dt_f} \left(\frac{S}{b} \right) = \frac{(h - 2 \cdot t_f) \cdot (b - 2 \cdot t_w)}{2 \cdot b} \quad (4.105)$$

Relativamente à derivada da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ em ordem à variável de decisão tipo 8, tem-se

$$\frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_8} \left(\frac{S}{b} \right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_8} \left(\frac{S}{b} \right) & 0 & -\frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_8} \left(\frac{S}{b} \right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_8} \left(\frac{S}{b} \right) \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

4.3.10. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 9

Tipo de variável – Seccional

Significado – Altura da secção em laje vigada

Para permitir a análise de soluções alternativas para a secção transversal do tabuleiro de pontes atirantadas de betão e de modo a cobrir as soluções mais usuais, definiram-se três tipos de secções transversais: laje vigada, caixão unicelular e caixão tricelular. Para a secção em laje vigada consideraram-se as variáveis de decisão tipo 9, 10 e 11, que se representam na Figura 4.8.

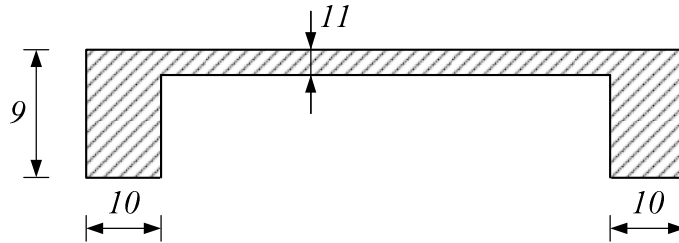


Figura 4.8 – Identificação das variáveis de decisão para a secção em laje vigada

Recorrendo às expressões já apresentadas nas Equações (3.36) e (3.41), relativas à área e ao momento de inércia da secção em laje vigada, e derivando-as em ordem à variável de decisão tipo 9, obtém-se

$$\frac{dA}{dx_9} = \frac{dA}{dh} = 2 \cdot t_w \quad (4.107)$$

$$\frac{dI_z}{dx_9} = \frac{dI_z}{dh} = \frac{t_w \cdot (b \cdot (2 \cdot h - t_{fs}) \cdot t_{fs} + 2 \cdot (h - t_{fs})^2 \cdot t_w)^2}{2(b \cdot t_{fs} + 2 \cdot (h - t_{fs}) \cdot t_w)^2} \quad (4.108)$$

Estas derivadas substituem as propriedades correspondentes nas matrizes e vectores elementares, obtendo-se as suas derivadas a respeito da variável de decisão tipo 9. Para a acção térmica têm-se as seguintes derivadas a respeito desta variável de decisão

$$\frac{d}{dx_9} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{dh} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{t_{fs}^2 \cdot (b - 2 \cdot t_w)}{2 \cdot h^2} + t_w \quad (4.109)$$

$$\frac{d}{dx_9} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{d}{dh} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{1}{12} \left[\begin{aligned} & 3b \cdot t_{fs} - \frac{b \cdot t_{fs}^3}{h^2} + 4h \cdot t_w - 6t_{fs} \cdot t_w + \frac{2t_{fs}^3 \cdot t_w}{h^2} - \\ & - \frac{3b^3 \cdot h \cdot t_{fs}^3}{(h - t_{fs}) \cdot (b \cdot t_{fs} + 2(h - t_{fs}) \cdot t_w)^2} + \\ & + \frac{3b^2 \cdot t_{fs}^3}{(h - t_{fs}) \cdot (b \cdot t_{fs} + 2(h - t_{fs}) \cdot t_w)} \end{aligned} \right] \quad (4.110)$$

Para a secção transversal em laje vigada, os parâmetros y_{fs} , y_{fi} e S , intervenientes na determinação da derivada da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ são obtidos aplicando as seguintes expressões:

$$y_{fs} = h_{CG} - h = \frac{t_{fs}^2 \cdot (b - 2 \cdot t_w) + 2 \cdot h^2 \cdot t_w}{-2 \cdot b \cdot t_{fs} + 4 \cdot (-h + t_{fs}) \cdot t_w} \quad (4.111)$$

$$y_{fi} = h_{CG} = \frac{1}{2} \left(h - t_{fs} + \frac{b \cdot h \cdot t_{fs}}{b \cdot t_{fs} + 2 \cdot h \cdot t_w - 2 \cdot t_{fs} \cdot t_w} \right) \quad (4.112)$$

$$S = \frac{t_w \cdot (b \cdot (2 \cdot h - t_{fs}) \cdot t_{fs} + 2(h - t_{fs})^2 \cdot t_w)^2}{4 \cdot (b \cdot t_{fs} + 2(h - t_{fs}) \cdot t_w)^2} \quad (4.113)$$

Derivando estas equações a respeito da variável de decisão tipo 9 obtêm-se as seguintes expressões

$$\frac{dy_{fs}}{dx_9} = \frac{dy_{fs}}{dh} = \frac{t_w (b \cdot t_{fs} (-2h + t_{fs}) - 2(h - t_{fs})^2 \cdot t_w)}{(b \cdot t_{fs} + 2(h - t_{fs}) \cdot t_w)^2} \quad (4.114)$$

$$\frac{dy_{fi}}{dx_9} = \frac{dy_{fi}}{dh} = 1 + \frac{t_w (b \cdot t_{fs} (-2h + t_{fs}) - 2(h - t_{fs})^2 \cdot t_w)}{(b \cdot t_{fs} + 2(h - t_{fs}) \cdot t_w)^2} \quad (4.115)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_9} \left(\frac{S}{b} \right) &= \frac{d}{dh} \left(\frac{S}{b} \right) = \\ &= \frac{t_w \cdot (b^3 (2h - t_{fs}) \cdot t_{fs}^3 + b^2 \cdot t_{fs}^2 (6h^2 - 12h \cdot t_{fs} + 5t_{fs}^2) \cdot t_w + \dots)}{b \cdot (b \cdot t_{fs} + 2(h - t_{fs}) \cdot t_w)^3} \end{aligned} \quad (4.116)$$

$$\frac{(\dots + 8b(h - t_{fs})^3 t_{fs} \cdot t_w^2 + 4(h - t_{fs})^4 t_w^3)}{b \cdot (b \cdot t_{fs} + 2(h - t_{fs}) \cdot t_w)^3}$$

Deste modo, a derivada da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ pode ser expressa por

$$\frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_9} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_9}(y_{fs}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_9}(y_{fs}) \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_9}(y_{fi}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_9}(y_{fi}) \\ 0 & \frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_9} \left(\frac{S}{b} \right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_9} \left(\frac{S}{b} \right) & 0 & -\frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_9} \left(\frac{S}{b} \right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_9} \left(\frac{S}{b} \right) \end{bmatrix} \quad (4.117)$$

4.3.11. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 10

Tipo de variável – Seccional

Significado – Largura das vigas laterais da secção em laje vigada

A variável de decisão tipo 10 encontra-se identificada na Figura 4.8. Considerando as expressões relativas à área e ao momento de inércia da secção em laje vigada e derivando-as em ordem a esta variável de decisão, obtêm-se as seguintes expressões:

$$\frac{dA}{dx_{10}} = \frac{dA}{dt_w} = 2 \cdot (h - t_{fs}) \quad (4.118)$$

$$\frac{dI_z}{dx_{10}} = \frac{dI_z}{dt_w} = \frac{1}{6} (h - t_{fs}) \frac{(h - t_{fs})^2 + 3b^2 \cdot h^2 \cdot t_{fs}^2}{(b \cdot t_{fs} + 2 \cdot (h - t_{fs}) \cdot t_w)^2} \quad (4.119)$$

As derivadas de $(A \cdot h_{CG} / h)$ e de (I_z / h) são dadas por:

$$\frac{d}{dx_{10}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{dt_w} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{(h - t_{fs})^2}{h} \quad (4.120)$$

$$\frac{d}{dx_{10}} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{d}{dt_w} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{(h - t_{fs})^3}{6h} + \frac{b^2 \cdot h \cdot (h - t_{fs}) \cdot t_{fs}^2}{2(b \cdot t_{fs} + 2(h - t_{fs}) \cdot t_w)^2} \quad (4.121)$$

As derivadas da posição da fibra superior, da posição da fibra inferior e do quociente entre o momento estático e a largura da secção a respeito desta variável de decisão são dadas por:

$$\frac{dy_{fs}}{dx_{10}} = \frac{dy_{fs}}{dt_w} = \frac{b \cdot h \cdot t_{fs} \cdot (-h + t_{fs})}{(b \cdot t_{fs} + 2(h - t_{fs}) \cdot t_w)^2} \quad (4.122)$$

$$\frac{dy_{fi}}{dx_{10}} = \frac{dy_{fi}}{dt_w} = \frac{b \cdot h \cdot t_{fs} \cdot (-h + t_{fs})}{(b \cdot t_{fs} + 2(h - t_{fs}) \cdot t_w)^2} \quad (4.123)$$

$$\frac{d}{dx_{10}} \left(\frac{S}{b} \right) = \frac{d}{dt_w} \left(\frac{S}{b} \right) = \frac{(h-t_{fs})^2 + \frac{2b^3 h^2 t_{fs}^3}{(b \cdot t_{fs} + 2(h-t_{fs}) \cdot t_w)^3} + \frac{b^2 h (h-2t_{fs}) \cdot t_{fs}^2}{(b \cdot t_{fs} + 2(h-t_{fs}) \cdot t_w)^2}}{4b} \quad (4.124)$$

pele que a derivada da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ pode ser escrita como

$$\frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_{10}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_{10}}(y_{fs}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_{10}}(y_{fs}) \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_{10}}(y_{fi}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_{10}}(y_{fi}) \\ 0 & \frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_{10}} \left(\frac{S}{b} \right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_{10}} \left(\frac{S}{b} \right) & 0 & -\frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_{10}} \left(\frac{S}{b} \right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_{10}} \left(\frac{S}{b} \right) \end{bmatrix} \quad (4.125)$$

4.3.12. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 11

Tipo de variável – Seccional

Significado – Espessura da laje da sec o em laje vigada

Esta variável de decisão encontra-se identificada na Figura 4.8. As derivadas da área, do momento de inércia, de $(A \cdot h_{CG} / h)$ e de (I_z / h) para a sec o em laje vigada a respeito desta variável de decisão são dadas pelas seguintes expressões:

$$\frac{dA}{dx_{11}} = \frac{dA}{dt_{fs}} = b - 2 \cdot t_w \quad (4.126)$$

$$\frac{dI_z}{dx_{11}} = \frac{dI_z}{dt_{fs}} = \frac{(b - 2 \cdot t_w) \cdot (b \cdot t_{fs}^2 - 2 \cdot (h - t_{fs})^2 \cdot t_w)^2}{(4 \cdot (b \cdot t_{fs} + 2 \cdot (h - t_{fs}) \cdot t_w))^2} \quad (4.127)$$

$$\frac{d}{dx_{11}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{dt_{fs}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{(h - t_{fs}) \cdot (b - 2t_w)}{h} \quad (4.128)$$

$$\frac{d}{dx_{11}} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{d}{dt_{fs}} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{(b - 2t_w) \cdot (b \cdot t_{fs}^2 - 2(h - t_{fs})^2 \cdot t_w)^2}{4h \cdot (b \cdot t_{fs} + 2(h - t_{fs}) \cdot t_w)^2} \quad (4.129)$$

As derivadas das posi es da fibra superior e da fibra inferior em ordem a esta variável de decisão são dadas por:

$$\frac{dy_{fs}}{dx_{11}} = \frac{dy_{fs}}{dt_{fs}} = -\frac{(b - 2t_w) \cdot (b \cdot t_{fs}^2 - 2(h - t_{fs})^2 \cdot t_w)}{2 \cdot (b \cdot t_{fs} + 2(h - t_{fs}) \cdot t_w)^2} \quad (4.130)$$

$$\frac{dy_{fi}}{dx_{11}} = \frac{dy_{fi}}{dt_{fs}} = -\frac{(b - 2t_w) \cdot (b \cdot t_{fs}^2 - 2(h - t_{fs})^2 \cdot t_w)}{2 \cdot (b \cdot t_{fs} + 2(h - t_{fs}) \cdot t_w)^2} \quad (4.131)$$

Derivando o quociente entre o momento estático e a largura da secção a respeito da variável de decisão tipo 11 obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_{11}}\left(\frac{S}{b}\right) &= \frac{d}{dt_{fs}}\left(\frac{S}{b}\right) = \\ &= -\frac{(b - 2 \cdot t_w) \cdot t_w \cdot (b \cdot t_{fs}^2 - 2(h - t_{fs})^2 t_w) \times \dots}{2b \cdot (b \cdot t_{fs} + 2(h - t_{fs}) \cdot t_w)^3} \\ &= \frac{\dots \times (b \cdot t_{fs}(-2h + t_{fs}) - 2(h - t_{fs})^2 t_w)}{2b \cdot (b \cdot t_{fs} + 2(h - t_{fs}) \cdot t_w)^3} \end{aligned} \quad (4.132)$$

Assim, para a derivada da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$, tem-se a seguinte expressão

$$\frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_{11}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_{11}}(y_{fs}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_{11}}(y_{fs}) \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_{11}}(y_{fi}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_{11}}(y_{fi}) \\ 0 & \frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_{11}}\left(\frac{S}{b}\right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_{11}}\left(\frac{S}{b}\right) & 0 & -\frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_{11}}\left(\frac{S}{b}\right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_{11}}\left(\frac{S}{b}\right) \end{bmatrix} \quad (4.133)$$

4.3.13. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 12

Tipo de variável – Seccional

Significado – Altura da secção em caixão unicelular

Como foi referido anteriormente, para o tabuleiro pode também utilizar-se uma secção transversal em caixão unicelular. Na Figura 4.9 representa-se este tipo de secção transversal e as respectivas variáveis de decisão consideradas (variáveis de decisão tipo 12, 13, 14, 15 e 16).

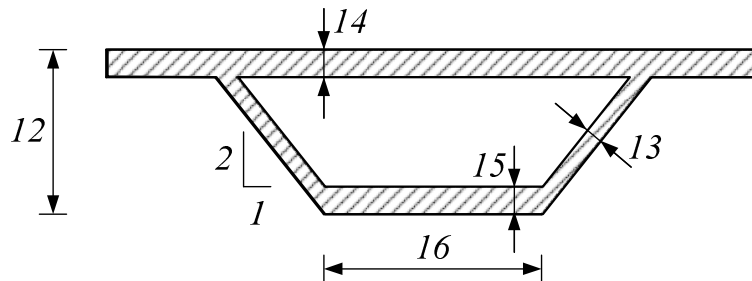


Figura 4.9 – Identificação das variáveis de decisão para a secção em caixão unicelular

Para a secção em caixão unicelular as expressões da área e do momento de inércia encontram-se indicadas nas Equações (3.47) e (3.53). Derivando a expressão da área em ordem à variável de decisão x_{12} que representa a altura da secção em caixão unicelular, tem-se

$$\frac{dA}{dx_{12}} = \frac{dA}{dh} = \sqrt{5} \cdot t_w \quad (4.134)$$

No que respeita às derivadas do momento de inércia, de $(A \cdot h_{CG} / h)$ e de (I_z / h) a respeito desta variável de decisão obtêm-se expressões muito extensas, pelo que se optou por apresentá-las somente em anexo, indicando-se apenas as seguintes expressões genéricas

$$\frac{dI_z}{dx_{12}} = \frac{dI_z}{dh} \quad (4.135)$$

$$\frac{d}{dx_{12}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{dh} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) \quad (4.136)$$

$$\frac{d}{dx_{12}} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{d}{dh} \left(\frac{I_z}{h} \right) \quad (4.137)$$

Este procedimento é também adoptado para as restantes derivadas necessárias para o cálculo das sensibilidades das tensões, nomeadamente, as derivadas dos parâmetros y_{fs} , y_{fi} e S/b . Deste modo, indicam-se somente as expressões genéricas para as derivadas referidas, podendo indicar-se a seguinte expressão para a derivada da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$

$$\frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_{12}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_{12}}(y_{fs}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_{12}}(y_{fs}) \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_{12}}(y_{fi}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_{12}}(y_{fi}) \\ 0 & \frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_{12}} \left(\frac{S}{b} \right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_{12}} \left(\frac{S}{b} \right) & 0 & -\frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_{12}} \left(\frac{S}{b} \right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_{12}} \left(\frac{S}{b} \right) \end{bmatrix} \quad (4.138)$$

Para as restantes variáveis de decisão relativas a este tipo de secção utiliza-se a mesma abordagem. Assim, nas secções seguintes apresentar-se-ão apenas as expressões genéricas para as derivadas intervenientes no cálculo das sensibilidades dos deslocamentos e das tensões, sendo as expressões completas apresentadas em anexo.

4.3.14. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 13

Tipo de variável – Seccional

Significado – Espessura da alma da secção em caixão unicelular

A variável de decisão tipo 13 encontra-se indicada na Figura 4.9. A derivada da área da secção em caixão unicelular a respeito desta variável de decisão é dada por

$$\frac{dA}{dx_{13}} = \frac{dA}{dt_w} = \sqrt{5} \cdot (h - t_{fi} - t_{fs}) \quad (4.139)$$

As expressões genéricas para as derivadas do momento de inércia, de $(A \cdot h_{CG} / h)$, de (I_z / h) e da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ em ordem a esta variável de decisão podem ser escritas como

$$\frac{dI_z}{dx_{13}} = \frac{dI_z}{dt_w} \quad (4.140)$$

$$\frac{d}{dx_{13}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{dt_w} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) \quad (4.141)$$

$$\frac{d}{dx_{13}} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{d}{dt_w} \left(\frac{I_z}{h} \right) \quad (4.142)$$

$$\frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_{13}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_{13}}(y_{fs}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_{13}}(y_{fs}) \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_{13}}(y_{fi}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_{13}}(y_{fi}) \\ 0 & \frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_{13}} \left(\frac{S}{b} \right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_{13}} \left(\frac{S}{b} \right) & 0 & -\frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_{13}} \left(\frac{S}{b} \right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_{13}} \left(\frac{S}{b} \right) \end{bmatrix} \quad (4.143)$$

4.3.15. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 14

Tipo de variável – Seccional

Significado – Espessura da laje superior da secção em caixão unicelular

Esta variável de decisão encontra-se representada na Figura 4.9. Derivando a expressão da área da secção em caixão unicelular em ordem à variável de decisão tipo 14, obtém-se:

$$\frac{dA}{dx_{14}} = \frac{dA}{dt_{fs}} = b_{fs} - \sqrt{5} \cdot t_w \quad (4.144)$$

As expressões genéricas para as derivadas do momento de inércia, de $(A \cdot h_{CG} / h)$, de (I_z / h) e da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ em ordem a esta variável de decisão podem ser escritas como

$$\frac{dI_z}{dx_{14}} = \frac{dI_z}{dt_{fs}} \quad (4.145)$$

$$\frac{d}{dx_{14}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{dt_{fs}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) \quad (4.146)$$

$$\frac{d}{dx_{14}} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{d}{dt_{fs}} \left(\frac{I_z}{h} \right) \quad (4.147)$$

$$\frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_{14}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_{14}}(y_{fs}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_{14}}(y_{fs}) \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_{14}}(y_{fi}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_{14}}(y_{fi}) \\ 0 & \frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_{14}}\left(\frac{S}{b}\right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_{14}}\left(\frac{S}{b}\right) & 0 & -\frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_{14}}\left(\frac{S}{b}\right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_{14}}\left(\frac{S}{b}\right) \end{bmatrix} \quad (4.148)$$

4.3.16. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 15

Tipo de variável – Seccional

Significado – Espessura da laje inferior da secção em caixão unicelular

Esta variável de decisão encontra-se indicada na Figura 4.9. A derivada da área da secção em caixão unicelular a respeito desta variável de decisão é dada pela expressão

$$\frac{dA}{dx_{15}} = \frac{dA}{dt_{fi}} = b_{fi} - \sqrt{5} \cdot t_w \quad (4.149)$$

As derivadas do momento de inércia, de $(A \cdot h_{CG} / h)$, de (I_z / h) e da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ em ordem a esta variável de decisão podem ser expressas de forma genérica através de

$$\frac{dI_z}{dx_{15}} = \frac{dI_z}{dt_{fi}} \quad (4.150)$$

$$\frac{d}{dx_{15}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{dt_{fi}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) \quad (4.151)$$

$$\frac{d}{dx_{15}} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{d}{dt_{fi}} \left(\frac{I_z}{h} \right) \quad (4.152)$$

$$\frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_{15}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_{15}}(y_{fs}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_{15}}(y_{fs}) \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_{15}}(y_{fi}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_{15}}(y_{fi}) \\ 0 & \frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_{15}}\left(\frac{S}{b}\right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_{15}}\left(\frac{S}{b}\right) & 0 & -\frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_{15}}\left(\frac{S}{b}\right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_{15}}\left(\frac{S}{b}\right) \end{bmatrix} \quad (4.153)$$

4.3.17. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 16

Tipo de variável – Seccional

Significado – Largura da base da secção em caixão unicelular

Esta variável de decisão encontra-se indicada na Figura 4.9. A derivada da área da secção em caixão unicelular em ordem a esta variável de decisão é dada pela expressão

$$\frac{dA}{dx_{16}} = \frac{dA}{db_{fi}} = t_{fi} \quad (4.154)$$

As derivadas do momento de inércia, de $(A \cdot h_{CG} / h)$, de (I_z / h) e da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ em ordem a esta variável de decisão podem ser expressas de forma genérica através de

$$\frac{dI_z}{dx_{16}} = \frac{dI_z}{db_{fi}} \quad (4.155)$$

$$\frac{d}{dx_{16}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{db_{fi}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) \quad (4.156)$$

$$\frac{d}{dx_{16}} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{d}{db_{fi}} \left(\frac{I_z}{h} \right) \quad (4.157)$$

$$\frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_{16}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_{16}}(y_{fs}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_{16}}(y_{fs}) \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_{16}}(y_{fi}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_{16}}(y_{fi}) \\ 0 & \frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_{16}} \left(\frac{S}{b} \right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_{16}} \left(\frac{S}{b} \right) & 0 & -\frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_{16}} \left(\frac{S}{b} \right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_{16}} \left(\frac{S}{b} \right) \end{bmatrix} \quad (4.158)$$

4.3.18. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 17

Tipo de variável – Seccional

Significado – Altura da secção em caixão tritelular

Para a modelação da secção transversal do tabuleiro de pontes atirantadas de betão considerou-se também a secção em caixão tritelular. Na Figura 4.10 representa-se este tipo de secção transversal e identificam-se as correspondentes variáveis de decisão consideradas (variáveis de decisão tipo 17, 18, 19, 20 e 21).

Tal como no caso da secção em caixão unicelular, também para esta secção as derivadas dos parâmetros intervenientes, à excepção da área, no cálculo das derivadas das matrizes de rigidez, dos vectores de forças elementares e da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ conduzem a expressões muito extensas. Deste modo, indicam-se somente as expressões gerais, sendo as expressões completas apresentadas em anexo.

As derivadas do momento de inércia, de $(A \cdot h_{CG} / h)$, de (I_z / h) e da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ em ordem a esta variável de decisão podem ser expressas de forma genérica através de

$$\frac{dI_z}{dx_{18}} = \frac{dI_z}{dt_w} \quad (4.165)$$

$$\frac{d}{dx_{18}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{dt_w} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) \quad (4.166)$$

$$\frac{d}{dx_{18}} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{d}{dt_w} \left(\frac{I_z}{h} \right) \quad (4.167)$$

$$\frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_{18}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_{18}}(y_{fs}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_{18}}(y_{fs}) \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_{18}}(y_{fi}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_{18}}(y_{fi}) \\ 0 & \frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_{18}} \left(\frac{S}{b} \right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_{18}} \left(\frac{S}{b} \right) & 0 & -\frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_{18}} \left(\frac{S}{b} \right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_{18}} \left(\frac{S}{b} \right) \end{bmatrix} \quad (4.168)$$

4.3.20. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 19

Tipo de variável – Seccional

Significado – Espessura da laje superior da secção em caixão tricelular

Esta variável de decisão encontra-se indicada na Figura 4.10. A derivada da área da secção em caixão tricelular em ordem a esta variável de decisão é dada pela expressão

$$\frac{dA}{dx_{19}} = \frac{dA}{dt_{fs}} = b_{fs} - 2 \cdot t_w - \sqrt{5} \cdot t_w \quad (4.169)$$

As derivadas do momento de inércia, de $(A \cdot h_{CG} / h)$, de (I_z / h) e da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ em ordem a esta variável de decisão podem ser expressas de forma genérica através de

$$\frac{dI_z}{dx_{19}} = \frac{dI_z}{dt_{fs}} \quad (4.170)$$

$$\frac{d}{dx_{19}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{dt_{fs}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) \quad (4.171)$$

$$\frac{d}{dx_{19}} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{d}{dt_{fs}} \left(\frac{I_z}{h} \right) \quad (4.172)$$

$$\frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_{19}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_{19}}(y_{fs}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_{19}}(y_{fs}) \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_{19}}(y_{fi}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_{19}}(y_{fi}) \\ 0 & \frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_{19}}\left(\frac{S}{b}\right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_{19}}\left(\frac{S}{b}\right) & 0 & -\frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_{19}}\left(\frac{S}{b}\right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_{19}}\left(\frac{S}{b}\right) \end{bmatrix} \quad (4.173)$$

4.3.21. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 20

Tipo de variável – Seccional

Significado – Espessura da laje inferior da secção em caixão tricelular

Na Figura 4.10 identifica-se a variável de decisão tipo 20. A derivada da área da secção em caixão tricelular a respeito desta variável de decisão é dada por

$$\frac{dA}{dx_{20}} = \frac{dA}{dt_{fi}} = b_{fi} - 2 \cdot t_w - \sqrt{5} \cdot t_w \quad (4.174)$$

As expressões genéricas para as derivadas do momento de inércia, de $(A \cdot h_{CG} / h)$, de (I_z / h) e da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ em ordem a esta variável de decisão podem ser escritas como

$$\frac{dI_z}{dx_{19}} = \frac{dI_z}{dt_{fi}} \quad (4.175)$$

$$\frac{d}{dx_{20}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{dt_{fi}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) \quad (4.176)$$

$$\frac{d}{dx_{20}} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{d}{dt_{fi}} \left(\frac{I_z}{h} \right) \quad (4.177)$$

$$\frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_{20}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_{20}}(y_{fs}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_{20}}(y_{fs}) \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_{20}}(y_{fi}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_{20}}(y_{fi}) \\ 0 & \frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_{20}}\left(\frac{S}{b}\right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_{20}}\left(\frac{S}{b}\right) & 0 & -\frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_{20}}\left(\frac{S}{b}\right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_{20}}\left(\frac{S}{b}\right) \end{bmatrix} \quad (4.178)$$

4.3.22. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 21

Tipo de variável – Seccional

Significado – Largura da base da secção em caixão tricelular

Na Figura 4.10 identifica-se a variável de decisão tipo 21. A derivada da área da secção em caixão tritelular a respeito desta variável de decisão é dada por

$$\frac{dA}{dx_{21}} = \frac{dA}{db_{fi}} = t_{fi} \quad (4.179)$$

As expressões genéricas para as derivadas momento de inércia, de $(A \cdot h_{CG} / h)$, de (I_z / h) e da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ em ordem a esta variável de decisão podem ser escritas como

$$\frac{dI_z}{dx_{21}} = \frac{dI_z}{db_{fi}} \quad (4.180)$$

$$\frac{d}{dx_{21}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{db_{fi}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) \quad (4.181)$$

$$\frac{d}{dx_{21}} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{d}{db_{fi}} \left(\frac{I_z}{h} \right) \quad (4.182)$$

$$\frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_{21}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_{21}}(y_{fs}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_{21}}(y_{fs}) \\ 0 & 0 & -\frac{E}{L} \frac{d}{dx_{21}}(y_{fi}) & 0 & 0 & \frac{E}{L} \frac{d}{dx_{21}}(y_{fi}) \\ 0 & \frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_{21}} \left(\frac{S}{b} \right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_{21}} \left(\frac{S}{b} \right) & 0 & -\frac{12E}{L^3} \frac{d}{dx_{21}} \left(\frac{S}{b} \right) & \frac{6E}{L^2} \frac{d}{dx_{21}} \left(\frac{S}{b} \right) \end{bmatrix} \quad (4.183)$$

4.3.23. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 22

Tipo de variável – Seccional

Significado – Área da secção de tirante constituído por cordões de aço de pré-esforço

Na Figura 4.11 ilustra-se a variável de decisão tipo 22. Esta variável de decisão não pode ser associada a elementos de viga sendo considerada apenas em elementos de barra utilizados na modelação de tirantes. Neste sentido, e dependendo do tipo de análise, podem ter-se duas situações: a modelação dos tirantes com módulo de elasticidade constante ou a modelação dos tirantes com módulo de elasticidade equivalente dado pela fórmula de Ernst, como foi referido no Capítulo 3.

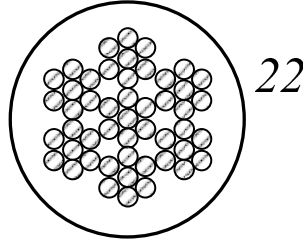


Figura 4.11 – Identificação da variável de decisão de tipo 22

No caso de módulo de elasticidade constante, a derivada da matriz de rigidez elementar a respeito da variável de decisão, $x_{22} = A$,   dada pela expressão

$$\frac{d\mathbf{K}^e}{dx_{22}} = \frac{d\mathbf{K}^e}{dA} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.184)$$

Quando se opta por uma análise não-linear considera-se para os tirantes um módulo de elasticidade equivalente dado pela fórmula de Ernst

$$E_{eq} = \frac{E}{1 + \frac{(\gamma \cdot L \cos \alpha)^2 E}{12\sigma^3}} \quad (4.185)$$

Neste caso o módulo de elasticidade equivalente depende da área da secção por via da tensão no tirante usada na sua determinação. Deste modo, a derivada da matriz de rigidez a respeito da variável de decisão tipo 22 pode ser escrita como

$$\frac{d\mathbf{K}^e}{dx_{22}} = \frac{d\mathbf{K}^e}{dA} = \frac{d}{dA} (E_{eq} \cdot A) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.186)$$

em que a parcela da derivada   dada por

$$\frac{d}{dA} (E_{eq} \cdot A) = \frac{dE_{eq}}{dA} \cdot A + E_{eq} \cdot \frac{dA}{dA} = \frac{dE_{eq}}{dA} \cdot A + E_{eq} \quad (4.187)$$

e a derivada do módulo equivalente pode ser escrita como

$$\frac{dE_{eq}}{dA} = \frac{d}{dA} \left(\frac{E}{1 + \frac{(\gamma \cdot L \cos \alpha)^2 E}{12 \left(\frac{N}{A}\right)^3}} \right) = - \frac{36N^3 (E \cdot A \cdot \gamma \cdot L \cos \alpha)^2}{(12N^3 + E \cdot A^3 \cdot (L \cos \alpha)^2)^2} \quad (4.188)$$

No que respeita ao vector de forças nodais equivalentes da estrutura, esta variável de decisão exerce influência nas parcelas referentes ao peso próprio e à variação uniforme de temperatura. Assim, derivando o vector elementar de forças nodais equivalentes ao peso próprio em ordem a esta variável de decisão obtém-se:

$$\frac{d\underline{f}_b^e}{dx_{22}} = \frac{d\underline{f}_b^e}{dA} = \gamma \cdot L \cdot \left\{ -\frac{\sin \alpha}{2} \quad -\frac{\cos \alpha}{2} \quad 0 \quad -\frac{\sin \alpha}{2} \quad -\frac{\cos \alpha}{2} \quad 0 \right\}^T \quad (4.189)$$

Na derivada do vector de forças devido a uma variação uniforme de temperatura intervém a derivada de $(A \cdot h_{CG} / h)$. Assumindo uma secção transversal circular equivalente, esta derivada é dada por:

$$\frac{d}{dx_{22}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{d} \right) = \frac{d}{dA} \left(\frac{A}{2} \right) = \frac{1}{2} \quad (4.190)$$

No cálculo das sensibilidades das tensões intervém a derivada da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$. No caso do elemento de barra tem-se apenas a tensão normal devido ao esforço axial, pelo que esta matriz é dada por

$$\underline{D} \cdot \underline{B}^e = \begin{bmatrix} -\frac{E}{L} & 0 & 0 & \frac{E}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.191)$$

Por conseguinte, para a correspondente derivada em ordem à variável de decisão tipo 22 e considerando a situação de módulo de elasticidade constante, tem-se a seguinte expressão

$$\frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_{22}} = \frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.192)$$

Quando se utiliza o módulo de elasticidade equivalente e uma vez que este depende da área da secção, tem-se

$$\frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_{22}} = \frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dA} = \frac{dE_{eq}}{dA} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.193)$$

onde a expressão da derivada do módulo equivalente em ordem   área da secção   dada pela Equa o (4.188).

4.3.24. Sensibilidades a respeito da variável de decisão tipo 23

Tipo de variável – Mecânica

Significado – Força de pré-esforço nos elementos de viga

Na Figura 4.12 apresenta-se a identifica o da variável de decisão de tipo 23 que representa a força de pré-esforço nos elementos de betão estrutural.

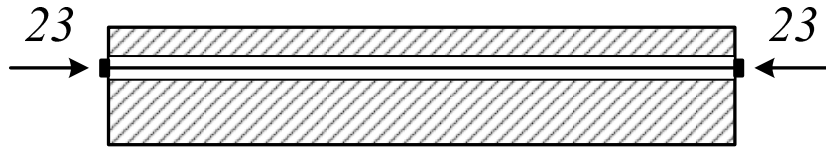


Figura 4.12 – Identifica o da variável de decisão de tipo 23

Esta variável de decisão exerce influência no vector de forças nodais equivalentes da estrutura por via da parcela referente ao pré-esforço nos elementos de betão. Derivando em ordem a esta variável de decisão o correspondente vector elementar de forças apresentado na Equa o (3.127), obt m-se:

$$\frac{df_p^e}{dx_{23}} = \frac{df_p^e}{dP_0} = \{\cos \alpha_1 \quad \sin \alpha_1 \quad -e_1 \cdot \cos \alpha_1 \quad -\cos \alpha_2 \quad -\sin \alpha_2 \quad e_2 \cdot \cos \alpha_2\}^T \quad (4.194)$$

Tendo em conta a limita o do valor máximo da força de pré-esforço indicada no EC2 (EN 1992-1-1, 2010)   possível definir a área de armadura activa, A_p , a partir do valor da força de pré-esforço aplicada, P_0 , através de

$$A_p = \frac{P_0}{\sigma_{p,max}} = \frac{P_0}{\min\{0,80 \cdot f_{pk}; 0,90 \cdot f_{p0,1k}\}} \quad (4.195)$$

Deste modo, a variável de decisão de tipo 23 exerce influência na matriz de rigidez do elemento de cabo. Para o caso particular de um cabo com excentricidade constante, e , relativamente ao eixo do elemento de viga ao qual está ligado tem-se a seguinte matriz de rigidez elementar

$$\underline{K}_p^e = \begin{bmatrix} \frac{E_p \cdot A_p}{L} & 0 & -\frac{E_p \cdot A_p \cdot e}{L} & -\frac{E_p \cdot A_p}{L} & 0 & \frac{E_p \cdot A_p \cdot e}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E_p \cdot A_p \cdot e}{L} & 0 & \frac{E_p \cdot A_p \cdot e^2}{L} & \frac{E_p \cdot A_p \cdot e}{L} & 0 & -\frac{E_p \cdot A_p \cdot e^2}{L} \\ -\frac{E_p \cdot A_p}{L} & 0 & \frac{E_p \cdot A_p \cdot e}{L} & \frac{E_p \cdot A_p}{L} & 0 & -\frac{E_p \cdot A_p \cdot e}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_p \cdot A_p \cdot e}{L} & 0 & -\frac{E_p \cdot A_p \cdot e^2}{L} & -\frac{E_p \cdot A_p \cdot e}{L} & 0 & \frac{E_p \cdot A_p \cdot e^2}{L} \end{bmatrix} \quad (4.196)$$

Derivando a Equação (4.196) a respeito da variável de decisão de tipo 23 obtém-se

$$\frac{d\underline{K}_p^e}{dx_{23}} = \frac{d\underline{K}_p^e}{dP_0} = \frac{1}{\sigma_{p,\max}} \begin{bmatrix} \frac{E_p}{L} & 0 & -\frac{E_p \cdot e}{L} & -\frac{E_p}{L} & 0 & \frac{E_p \cdot e}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_p \cdot e}{L} & 0 & \frac{E_p \cdot e^2}{L} & \frac{E_p \cdot e}{L} & 0 & -\frac{E_p \cdot e^2}{L} \\ -\frac{E_p}{L} & 0 & \frac{E_p \cdot e}{L} & \frac{E_p}{L} & 0 & -\frac{E_p \cdot e}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_p \cdot e}{L} & 0 & -\frac{E_p \cdot e^2}{L} & -\frac{E_p \cdot e}{L} & 0 & \frac{E_p \cdot e^2}{L} \end{bmatrix} \quad (4.197)$$

Como se referiu anteriormente, o cálculo da derivada da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ para o elemento de viga envolve a determinação das derivadas das posições das fibras superior e inferior e também do quociente entre momento estático e a largura em ordem à variável de decisão em causa. Como estas grandezas não dependem directamente da variável de decisão de tipo 23, tem-se uma derivada nula da matriz $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ a respeito desta variável de decisão

$$\frac{d(\underline{D} \cdot \underline{B}^e)}{dx_{23}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.198)$$

4.3.25. Exemplos de verificação

Na presente secção apresentam-se dois exemplos de verificação do modelo numérico desenvolvido no que respeita à análise de sensibilidades. Têm-se os mesmos dados gerais nos dois exemplos, diferindo apenas na contabilização dos efeitos diferidos e dos efeitos geometricamente não-lineares, que não são tidos em conta no primeiro exemplo e que são considerados no segundo exemplo.

Como foi referido, a análise de sensibilidades permite obter uma previsão da resposta da estrutura face a variações nas variáveis de decisão, assumindo especial relevância na evolução da solução do problema de optimização. Recorrendo aos valores das sensibilidades a respeito das diversas variáveis de decisão, a previsão da resposta da estrutura em termos de deslocamentos (u) e de tensões (σ) pode ser efectuada, respectivamente, através das seguintes expressões

$$u = u_0 + \sum_{i=1}^{NVD} \frac{du}{dx_i} \Delta x_i \quad (4.199)$$

$$\sigma = \sigma_0 + \sum_{i=1}^{NVD} \frac{d\sigma}{dx_i} \Delta x_i \quad (4.200)$$

onde u_0 e σ_0 representam os valores iniciais dos deslocamentos e das tensões, NVD o número de variáveis de decisão e Δx_i as variações nas variáveis de decisão. Por conseguinte, o procedimento de verificação dos resultados fornecidos pela análise de sensibilidades desenvolveu-se em três etapas:

- 1) Análise estrutural e análise de sensibilidades considerando um conjunto inicial de valores das variáveis de decisão;
- 2) Introdução de variações nos valores iniciais das variáveis de decisão e análise estrutural;
- 3) A partir dos valores iniciais dos deslocamentos, das tensões e das correspondentes sensibilidades prever a resposta da estrutura para as variações consideradas nas variáveis de decisão. Comparação dos resultados assim obtidos com os obtidos na etapa 2.

Nos exemplos a seguir apresentados consideraram-se variáveis de decisão seccionais associadas aos tirantes e aos elementos de betão, e também variáveis de natureza mecânica correspondentes às forças de pré-esforço nos tirantes e nos elementos de betão.

Exemplo 1 – Análise de sensibilidades sem considerar efeitos diferidos nem efeitos geometricamente não-lineares

Este exemplo consiste na análise de uma consola com três tramos suportada por três tirantes. Considerou-se o peso próprio dos elementos, sendo os tirantes pré-esforçados e a viga sujeita a uma carga transversal uniformemente distribuída. Utilizou-se um betão da classe C35/45 ($E_{cm} = 34$ GPa), um aço de pré-esforço Y1860 ($E_p = 195$ GPa) e não se consideraram os efeitos diferidos nem os efeitos geometricamente não-lineares. Para a consola considerou-se uma secção transversal em laje vigada com dimensões de $h = 2,00$ m; b

= 19,00 m; $t_w = 0,80$ m e $t_{fs} = 0,20$ m. A consola foi pré-esforçada com uma força de 1000 kN aplicada num cabo de pré-esforço com traçado recto e com excentricidade constante de 0,20 m acima do centro geométrico da secção. Cada tramo da consola tem 10,00 m de comprimento e foi discretizado em 12 elementos de viga com cabo de pré-esforço e cada tirante foi modelado como elemento de barra com módulo de elasticidade equivalente. Na Figura 4.13 apresentam-se os dados deste exemplo.

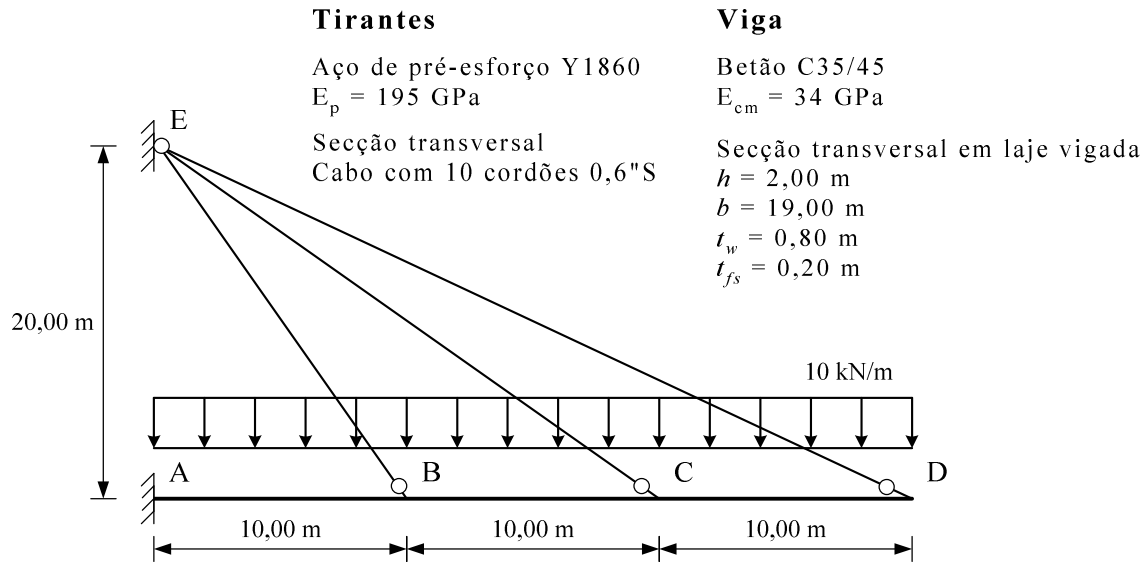


Figura 4.13 – Dados do exemplo de verificação da análise de sensibilidades

Neste exemplo considerou-se um total de 8 variáveis de decisão que são descritas no Quadro 4.2, indicando-se também o valor inicial adoptado para cada uma. A análise foi efectuada considerando uma variação de 5% nos valores iniciais indicados.

Quadro 4.2 – Descrição das variáveis de decisão do exemplo de verificação da análise de sensibilidades

Variável de decisão	Descrição	Valor inicial
1	Força de pré-esforço no tirante EB	1000 kN
2	Área da secção transversal do tirante EB	$1,500 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
3	Força de pré-esforço no tirante EC	1200 kN
4	Área da secção transversal do tirante EC	$1,500 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
5	Força de pré-esforço no tirante ED	1500 kN
6	Área da secção transversal do tirante ED	$1,500 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
7	Altura da secção transversal da consola	2,000 m
8	Força de pré-esforço na consola	1000 kN

No que respeita aos resultados obtidos apresentam-se nas Figuras 4.14 e 4.15 os deslocamentos verticais e a distribuição de tensões normais na consola, respectivamente. Em

cada uma destas figuras representam-se, simultaneamente, os valores “exactos” obtidos com a análise para os novos valores das variáveis de decisão e os valores previstos utilizando a análise de sensibilidades.

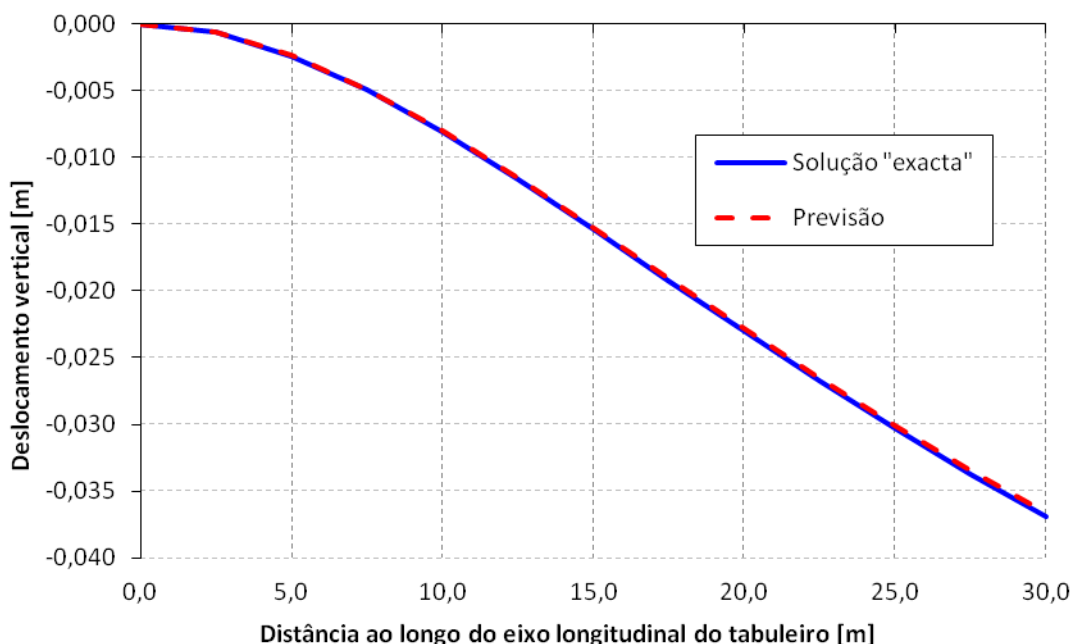


Figura 4.14 – Deslocamentos verticais da consola do Exemplo 1 (análise de sensibilidades)

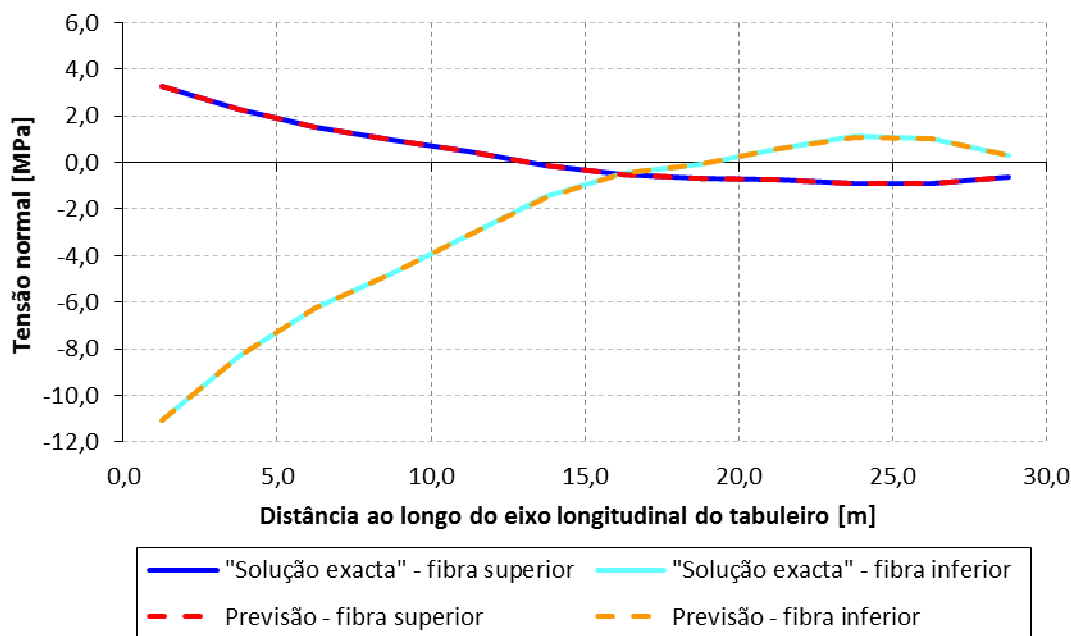


Figura 4.15 – Tensões normais na consola do Exemplo 1 (análise de sensibilidades)

Como se pode verificar pela observação das Figuras 4.14 e 4.15 os resultados obtidos apresentam muito boa concordância pelo que se pode referir que, para as condições do

exemplo, a análise de sensibilidades implementada prevê adequadamente a resposta estrutural face a variações nos diversos tipos de variáveis de decisão.

Exemplo 2 – Análise de sensibilidades considerando efeitos diferidos e efeitos geometricamente não-lineares

Tal como foi referido, neste segundo exemplo têm-se os mesmos dados do exemplo anterior mas consideram-se agora a acção dos efeitos diferidos do comportamento do betão e os efeitos geometricamente não-lineares. Neste exemplo a análise foi efectuada considerando uma variação de 2,5% nos valores iniciais indicados para as variáveis de decisão.

Em termos de resultados, e à semelhança do exemplo anterior, apresentam-se os deslocamentos verticais e a distribuição de tensões normais na consola, respectivamente, nas Figuras 4.16 e 4.17.

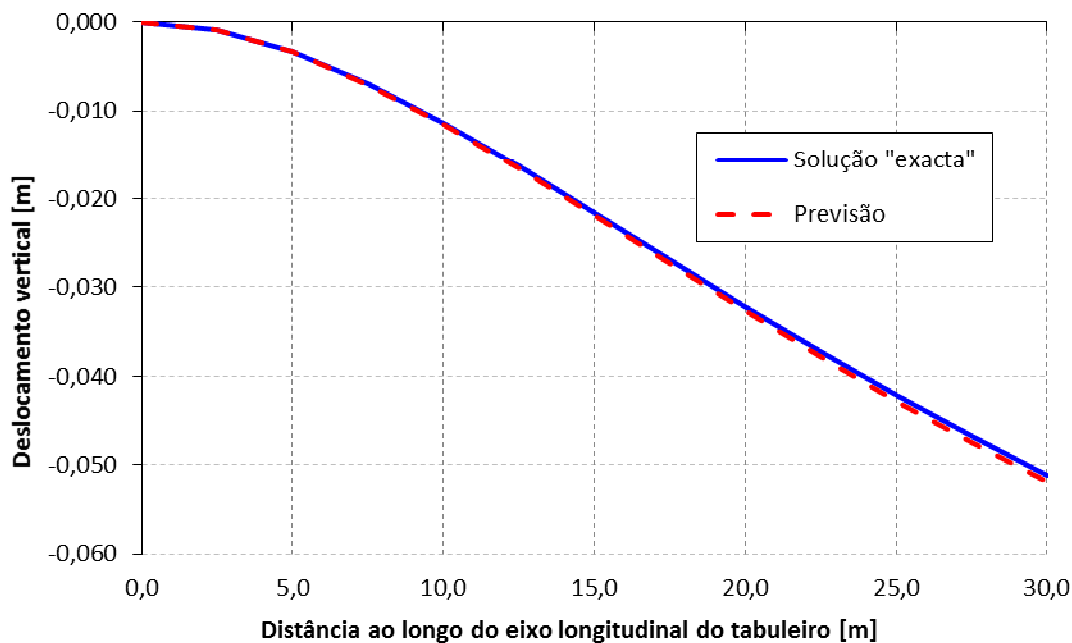


Figura 4.16 – Deslocamentos verticais da consola do Exemplo 2 (análise de sensibilidades)

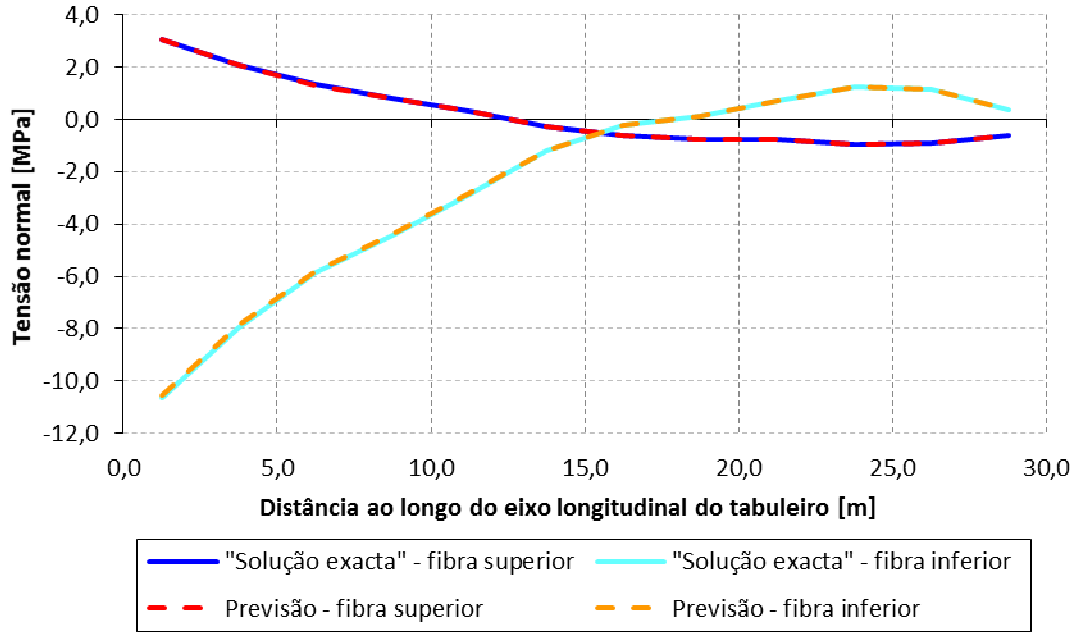


Figura 4.17 – Tensões normais na consola do Exemplo 2 (análise de sensibilidades)

Tendo em conta os resultados apresentados, e dada a concordância entre a solução “exacta” e a solução prevista, pode referir-se que a análise de sensibilidades prevê adequadamente a resposta da estrutura face a variações nas variáveis de decisão quando se consideram os efeitos diferidos e os efeitos geometricamente não-lineares. Estes resultados justificam a opção tomada na formulação das sensibilidades dos efeitos diferidos e que foi apresentada na secção 4.3.2. Por conseguinte, verifica-se que a simplificação adoptada nessa formulação, associada a valores reduzidos das variações nas variáveis de decisão, se mostra adequada para prever a resposta da estrutura. Do mesmo modo, a utilização de valores reduzidos para as variações nas variáveis de decisão permite controlar os erros na previsão da resposta da estrutura quando se consideram os efeitos geometricamente não-lineares.

Capítulo 5 - Exemplos de Aplicação

5.1. Introdução

No presente capítulo apresentam-se os diversos exemplos de aplicação que permitem ilustrar as capacidades e funcionalidades do modelo numérico desenvolvido como ferramenta de apoio ao projecto de pontes atirantadas de betão.

Deste modo, começa-se por apresentar as características gerais dos exemplos numéricos, descrevendo-se a geometria da ponte, as propriedades dos materiais utilizados, o modelo de elementos finitos, as fases construtivas e as acções consideradas. Os exemplos numéricos apresentados neste capítulo encontram-se divididos em dois subcapítulos em que se aborda a resolução de dois problemas relevantes no contexto do projecto de pontes atirantadas de betão, nomeadamente, o problema de determinação das forças nos tirantes e o problema da minimização do custo da estrutura.

No que respeita ao problema de determinação das forças nos tirantes começa-se por apresentar um exemplo de optimização para a condição de ponte completa. De seguida apresenta-se o exemplo mais geral deste problema em que se consideram o faseamento construtivo, os efeitos diferidos do betão e os efeitos geometricamente não-lineares. Posteriormente apresentam-se os resultados de vários exemplos em que se analisa a influência dos efeitos diferidos, das fases construtivas e dos efeitos geometricamente não-lineares, sobretudo nos valores óptimos das forças nos tirantes, mas também nas secções transversais dos mesmos e no custo da ponte. No que respeita aos efeitos diferidos procede-se também à análise da influência de alguns parâmetros intervenientes nos modelos de fluência e retracção e apresentam-se também os resultados de uma análise a longo prazo.

Relativamente ao problema mais geral que pode ser resolvido com o modelo numérico, ou seja, o problema da minimização do custo da estrutura, começa-se também por apresentar os resultados da optimização considerando a ponte completa. De seguida apresentam-se e discutem-se os resultados do problema considerando o processo construtivo, os efeitos diferidos do betão e os efeitos geometricamente não-lineares. A solução óptima é analisada em termos de custo total e custos do tabuleiro, torres e tirantes. Presta-se também especial atenção aos valores das diversas variáveis de decisão, forças e secções transversais dos tirantes e dimensões das secções transversais do tabuleiro e das torres. Neste exemplo considerou-se uma secção do tabuleiro em laje vigada. Posteriormente analisam-se soluções

alternativas para a secção transversal do tabuleiro, considerando-se secções em caixão unicelular e em caixão tricelular, e resolvendo o mesmo problema de minimização do custo. Procede-se também à optimização incluindo variáveis de decisão relativas às forças de pré-esforço no tabuleiro, sendo os resultados comparados com a solução sem pré-esforço, obtida previamente.

Como já foi referido, no âmbito deste trabalho, consideraram-se variáveis de decisão de natureza contínua. No entanto, propõe-se também uma metodologia alternativa, e que se revelou eficiente, para a optimização considerando valores discretos para as variáveis de decisão correspondentes às dimensões das secções transversais do tabuleiro e das torres.

Apesar de o algoritmo de optimização utilizado não possibilitar a consideração de variáveis de decisão topológicas e de não se terem implementado variáveis de decisão geométricas, as potencialidades do modelo numérico na consideração deste tipo de variáveis de decisão são ilustradas através de um conjunto de exemplos. Por conseguinte, apresentam-se os resultados da optimização considerando diferentes valores de parâmetros geométricos, como a altura das torres e o comprimento dos vãos laterais e central, e de parâmetros topológicos, como o número de tirantes e a ligação entre o tabuleiro e as torres. Deste modo, analisa-se a influência destes parâmetros no projecto óptimo de pontes atirantadas de betão.

Como foi referido no capítulo anterior, o algoritmo de optimização fornece, para cada ponto de partida, um mínimo de Pareto do problema *multi-critério*. Desta forma, diferentes pontos de partida conduzirão a diferentes soluções óptimas, pelo que, para cada um dos problemas apresentados neste capítulo as soluções óptimas não serão únicas. Assim, no desenvolvimento do trabalho, e para todos os exemplos apresentados, analisou-se mais do que uma solução inicial e a respectiva solução óptima obtida. No entanto, como a apresentação dos resultados para dois ou três pontos de partida tornaria o texto bastante extenso e sem adicionar informação relevante, optou-se por apresentar os resultados apenas para uma solução inicial e para a correspondente solução óptima alcançada, tendo sido escolhidas as que apresentaram melhores resultados em termos de minimização do custo e do comportamento da estrutura.

O presente capítulo conclui-se com um sumário das principais conclusões a que se chegou com os resultados dos diversos exemplos numéricos apresentados.

5.2. Características gerais dos exemplos numéricos

Nesta secção apresentam-se as características gerais dos exemplos numéricos utilizados para ilustrar as capacidades do modelo numérico desenvolvido e analisar diversos problemas no âmbito do projecto de pontes atirantadas de betão. Assim, nos exemplos numéricos utiliza-se uma ponte atirantada de betão, simétrica, com 166,0 m de vão central e vãos laterais de 77,0 m, totalizando um vão total de 320,0 m. As torres têm uma altura total de 55,0 m com o tabuleiro situado 15,0 m acima da fundação e sendo suportado por 36 tirantes. Na Figura 5.1 representa-se a geometria global da ponte considerada.

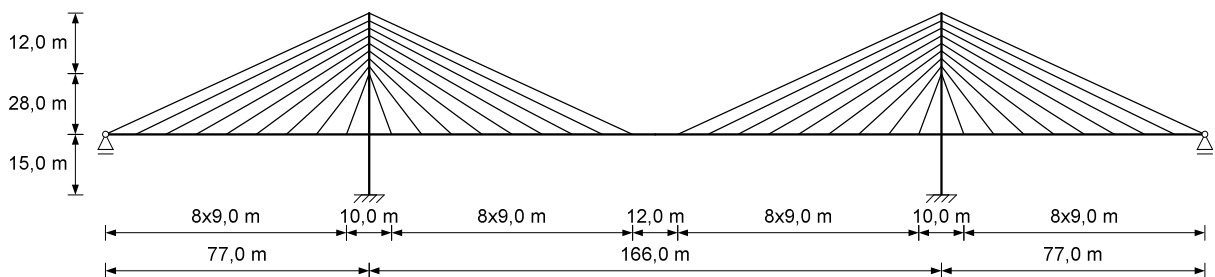


Figura 5.1 – Geometria da ponte utilizada nos exemplos numéricos

No que respeita aos materiais considerou-se um betão da classe C35/45 para o tabuleiro e as torres, um aço A500NR para as armaduras ordinárias e um aço de pré-esforço Y1860 quer para os tirantes, quer para o pré-esforço nos elementos de betão. No Quadro 5.1 indicam-se as propriedades dos materiais utilizados nos exemplos numéricos apresentados neste capítulo.

Quadro 5.1 – Propriedades dos materiais utilizados nos modelos numéricos

Betão C35/45 (Tabuleiro e Torres)	Aço de pré-esforço – Tirantes
$E = 34 \text{ GPa}; \gamma = 25 \text{ kN/m}^3$ $f_{ck} = 35 \text{ MPa}; f_{ctk,0,05} = 2,2 \text{ MPa}$ $f_{cd} = 23,3 \text{ MPa}$ Humidade relativa = 80% Cimento Tipo N Custo: 450 €/m ³	$E = 195 \text{ GPa}; \gamma = 77 \text{ kN/m}^3$ $f_{pk} = 1860 \text{ MPa}; f_{p0,1k} = 1770 \text{ MPa}$ Custo: 15.000 €/m ³ + 18.500 €/tirante
	Aço de pré-esforço nos elementos de betão
	$E = 195 \text{ GPa}; \gamma = 77 \text{ kN/m}^3$ $f_{pk} = 1860 \text{ MPa}; f_{p0,1k} = 1770 \text{ MPa}$ Custo: 11.550 €/m ³
	Aço das armaduras ordinárias – A500 NR
	$E = 200 \text{ GPa};$ $f_{yk} = 500 \text{ MPa}; f_{yd} = 435 \text{ MPa}$

Os custos indicados no Quadro 5.1 representam valores aproximados e foram obtidos com base em informações particulares prestadas por projectistas. Estes valores dizem respeito ao custo de execução dos elementos de betão estrutural e dos tirantes. Assim, no caso do betão diz respeito ao custo da execução de elementos de betão armado em pontes, incluindo os custos do betão, armaduras, cofragens, mão-de-obra, equipamentos, carrinhos de avanço, entre outros. No caso dos tirantes o custo de execução apresenta uma parcela dependente da quantidade de material e outra parcela fixa por cada tirante. Esta segunda parcela tem um valor aproximado de 18.500 € devido a:

- ancoragens incluindo o tubo antivandalismo – 4.000 €;
- equipamento de montagem, supervisão, transporte, engenharia e margem de lucro – 9.500 €;
- trabalho de montagem – 5.000 €.

Relativamente ao modelo numérico de análise estrutural, o tabuleiro e as torres foram modelados com elementos de viga e os tirantes foram modelados com elementos de barra com módulo de elasticidade equivalente dado pela formulação de Ernst. Tendo em conta a simetria, apenas metade da estrutura foi modelada. O modelo numérico de metade da estrutura representando a condição de ponte completa é constituído por um total de 90 nós e 107 elementos finitos. Deste modo, a torre foi discretizada em 32 elementos e o tabuleiro em 57 elementos, correspondendo os restantes 18 elementos a um elemento de barra por cada tirante. Na Figura 5.2 apresenta-se um esquema ilustrativo da malha de elementos finitos adoptada para a ponte utilizada nos exemplos numéricos.

No que respeita às secções transversais, consideraram-se para os elementos das torres secções rectangulares ocas e para os tirantes utilizaram-se secções transversais de cabo de pré-esforço constituído por N cordões de aço de alta resistência. Para o tabuleiro, e de acordo com o que foi apresentado no Capítulo 4, podem ser utilizados três tipos de secções transversais, secção em laje vigada, em caixão unicelular ou em caixão tricelular. No exemplo base usa-se a secção transversal em laje vigada, contudo, na secção 5.4.3 analisam-se separadamente cada um dos tipos de secções referidas de modo a efectuar uma análise de soluções estruturais alternativas para o tabuleiro de pontes atirantadas de betão.

Na medida em que tanto o tabuleiro como as torres não apresentam habitualmente secção transversal constante ao longo de todo o seu comprimento, estabeleceram-se zonas para definição de diferentes variáveis de decisão seccionais ao longo dos mesmos. Deste modo, definiram-se duas zonas nas torres, uma abaixo do tabuleiro e outra acima deste. No tabuleiro definiram-se três zonas, a primeira entre a torre e o primeiro par de tirantes, a segunda correspondente ao tramo entre tirantes quer no vão lateral, quer no vão central e a terceira correspondente ao tramo central de fecho da ponte a meio-vão. A identificação das zonas consideradas apresenta-se na Figura 5.3.

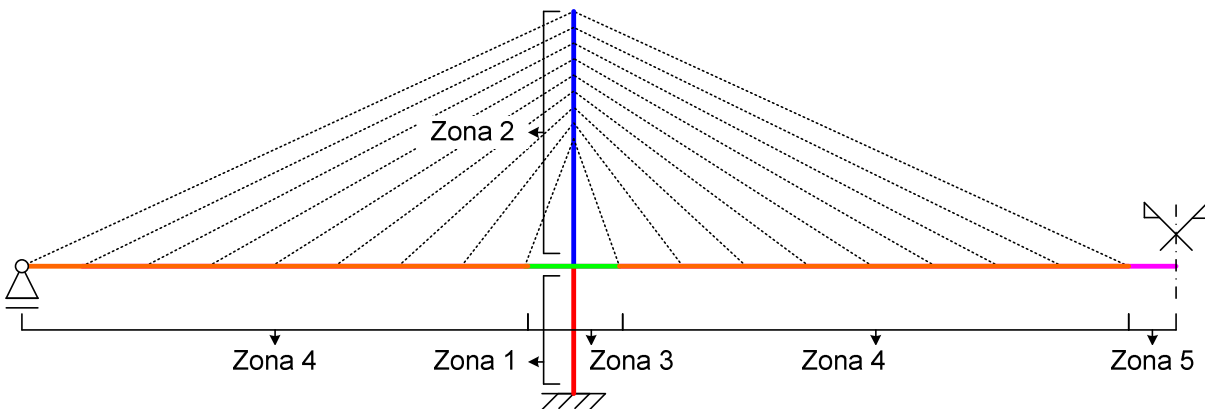


Figura 5.3 – Identificação das zonas das torres e do tabuleiro para definição das variáveis de decisão

Os exemplos apresentados neste capítulo compreendem a optimização da ponte completa e também a optimização considerando o faseamento construtivo dada a importância deste aspecto na análise de estruturas de betão. Nos exemplos em que se considera o faseamento construtivo, a respectiva modelação foi efectuada considerando o método dos avanços sucessivos, por ser o mais geral e amplamente utilizado na construção de pontes de tirantes. Para a ponte utilizada nos exemplos numéricos as fases construtivas consideradas utilizando o método dos avanços sucessivos representam-se na Figura 5.4, tendo-se considerado um total de 11 fases construtivas.

Durante o processo construtivo as acções consideradas foram o peso próprio dos elementos e cargas de $1,0 \text{ kN/m}^2$ devido aos trabalhadores e equipamentos manuais, $0,5 \text{ kN/m}^2$ devido a equipamento não permanente e ainda cargas concentradas de 400 kN na extremidade das consolas de modo a simular os carros de avanço (EN 1991-1-6, 2005; Mathivat, 1984).

Na Fase 1 são executados os primeiros segmentos do tabuleiro de cada lado das torres e é instalado o primeiro par de tirantes de modo a suportar estes segmentos. Em cada fase subsequente é executado um novo tramo do tabuleiro e é instalado um tirante, simetricamente de cada lado das torres. Na Fase 9 adiciona-se um apoio simples no final do vão lateral para simular a ligação ao encontro e na Fase 11 adiciona-se no meio-vão uma ligação restringindo a rotação e o deslocamento horizontal para simular o fecho da ponte. Para a ponte completa, a ligação tabuleiro-torre considerou-se apenas vertical (restringindo apenas o deslocamento vertical), contudo, durante as fases construtivas e para assegurar a estabilidade estrutural esta ligação foi considerada fixa (restrição das translações e da rotação).

As forças nos tirantes são calculadas em duas etapas determinando-se dois conjuntos de forças, as forças de instalação e as forças de ajustamento. Estes conjuntos de forças são determinados usando o algoritmo de optimização descrito em detalhe no Capítulo 4. As forças de instalação são determinadas de modo a garantir que nas Fases 9 e 10 o tabuleiro apresenta a geometria desejada para efectuar a ligação ao encontro e também o fecho da ponte a meio-vão. Para além disso, estas forças devem possibilitar ainda que as tensões em toda a estrutura durante as fases construtivas permaneçam dentro do intervalo de valores admissíveis. Estes aspectos são tidos em conta na definição dos objectivos de projecto, g_j , utilizados no problema de optimização que incluem os deslocamentos relevantes e as tensões em todos os elementos da estrutura durante as fases construtivas.

As forças de ajustamento são determinadas de modo a garantir que na Fase 11, correspondente ao final da construção, o tabuleiro apresenta a geometria de rasante pretendida e que as tensões em todos os elementos não ultrapassam os limites definidos para condições de serviço. Nesta fase considera-se a ponte sujeita ao peso próprio e às restantes cargas permanentes. Para estas cargas considerou-se um valor de $2,5 \text{ kN/m}^2$ correspondendo ao revestimento betuminoso, passeios, barreiras e rails de protecção (Sanpaolesi and Croce, 2005; EN 1991-1-1, 2009). No âmbito deste trabalho a designação “forças de ajustamento” diz respeito às forças de pré-esforço finais a aplicar nos tirantes. Deste modo, os valores correspondentes são dados pela soma das forças de instalação com os ajustamentos a efectuar na Fase 11.

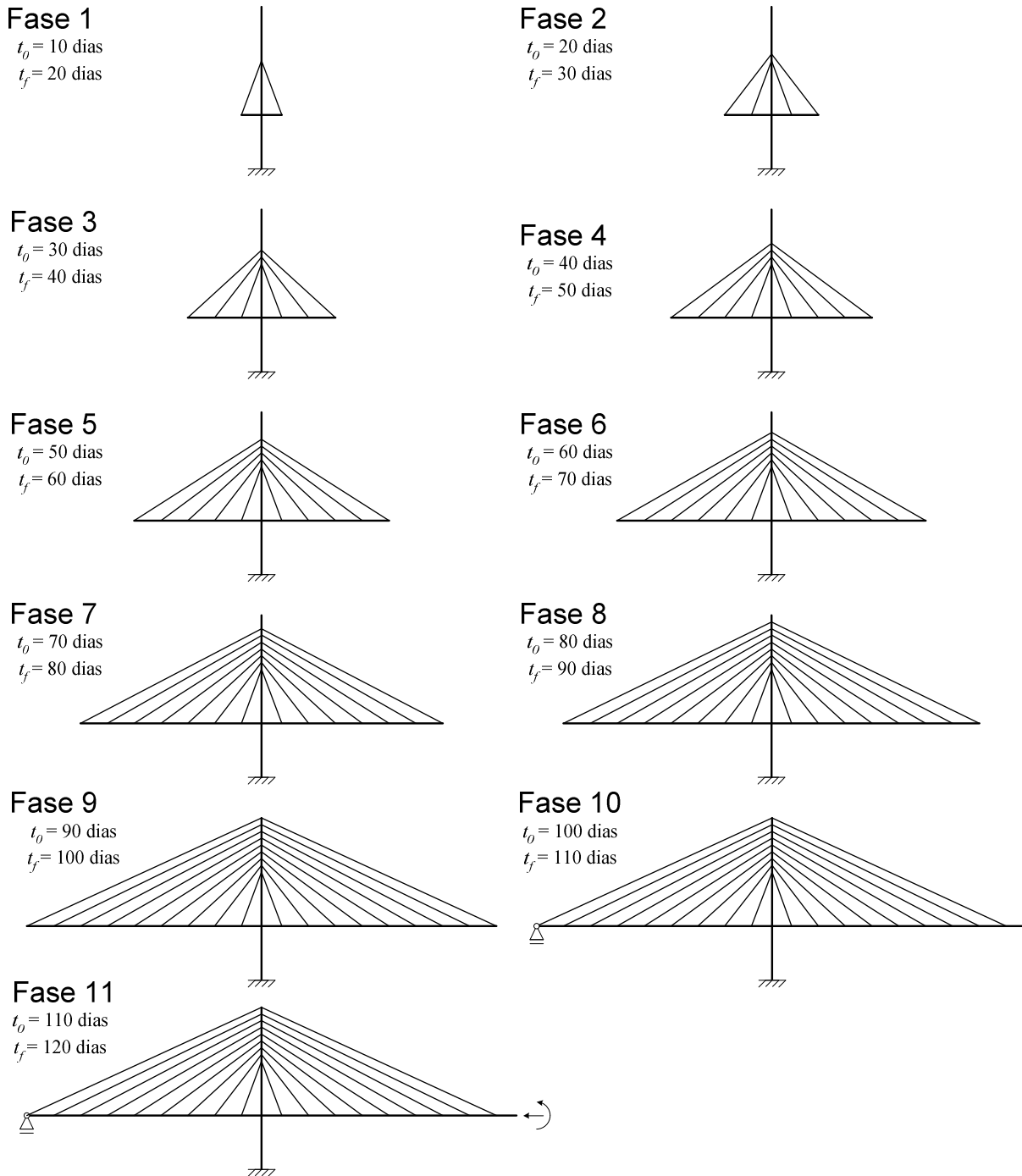


Figura 5.4 – Fases construtivas

Após a Fase 11 efectua-se a análise estrutural considerando a ponte completa no estado permanente e sem efeitos diferidos sujeita a vários casos de carga. Este aspecto é tido em conta no algoritmo de optimização procedendo à verificação da resistência dos diversos elementos estruturais através da consideração dos respectivos objectivos de tensões máximas. No exemplo base consideraram-se três casos de carga que consistem na carga permanente mais a sobrecarga de utilização de 4 kN/m^2 , correspondente ao tráfego rodoviário, aplicada em todo o vão (Caso 1), apenas nos vãos laterais (Caso 2) ou apenas no vão central (Caso 3).

5.3. Problema da determinação das forças nos tirantes

Tal como foi referido no Capítulo 2, a determinação da distribuição de forças nos tirantes é um aspecto distintivo do projecto de pontes atirantadas, quando comparado com o de outros tipos de pontes. Estas estruturas apresentam elevado grau de hiperstaticidade sendo o seu comportamento governado pela rigidez dos diversos elementos estruturais (torres, tabuleiro e tirantes) e pela distribuição de forças nos tirantes. Deste modo, o cálculo dos deslocamentos e dos esforços internos não pode ser efectuado sem a definição das secções dos tirantes e das forças neles instaladas. As forças nos tirantes permitem controlar a distribuição de tensões e ajustar a geometria das torres e do tabuleiro, possibilitando ainda a correcção de eventuais desvios que ocorram durante o processo construtivo.

Na resolução do problema de determinação das forças nos tirantes devem calcular-se não só as forças que devem ficar instaladas nos tirantes na ponte completa, mas também devem determinar-se os valores das forças de instalação dos tirantes no decorrer do processo construtivo. Este conjunto de forças deve permitir efectuar o fecho da ponte, garantir a rasante no final da construção e também a verificação dos limites de tensões em toda a estrutura durante o processo construtivo e para a ponte completa sob várias condições de carregamento.

Como foi oportunamente referido no Capítulo 2 existem na bibliografia diversos métodos para determinação das forças nos tirantes, tendo sido também utilizados algoritmos de optimização. No entanto, de acordo com a pesquisa bibliográfica efectuada pensa-se que o problema de optimização das forças nos tirantes em pontes atirantadas de betão, considerando as fases construtivas, os efeitos diferidos e os efeitos geometricamente não-lineares, ainda não se encontra resolvido. Assim, tendo em conta o que foi referido anteriormente, considerou-se relevante aplicar o modelo numérico desenvolvido à resolução deste problema.

No desenvolvimento do trabalho de investigação conducente à elaboração da presente tese começou-se por resolver o problema de determinação das forças nos tirantes considerando como variáveis de decisão apenas as forças de pré-esforço nos mesmos (Martins *et al.*, 2011). Em termos de efeitos geometricamente não-lineares considerou-se primeiro apenas o efeito de catenária dos tirantes (Martins *et al.*, 2015a) e posteriormente incluíram-se os efeitos de segunda ordem através do *método das forças laterais equivalentes* (Martins *et al.*, 2013; Martins *et al.*, 2015b).

Nas secções seguintes apresentam-se vários exemplos de aplicação, começando pela optimização considerando a ponte completa e passando posteriormente à optimização considerando o faseamento construtivo. Apresentam-se também os resultados de vários

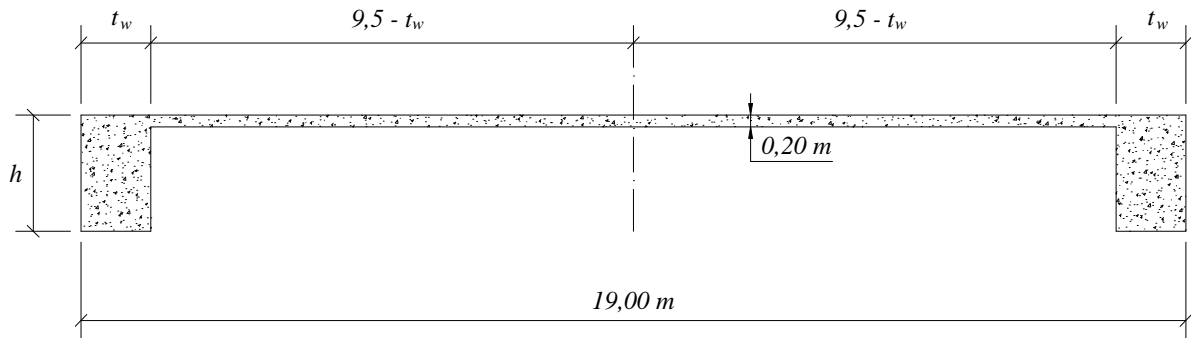
exemplos a fim de estudar a influência das fases construtivas, dos efeitos diferidos, dos efeitos geometricamente não-lineares e de alguns parâmetros intervenientes nos modelos de fluência e retracção utilizados. Apresentam-se ainda os resultados de uma análise a longo prazo. Para facilitar a identificação dos exemplos resolvidos nesta secção apresenta-se, em resumo, no Quadro 5.2 a descrição geral de cada um deles.

Quadro 5.2 – Identificação dos exemplos resolvidos no âmbito do problema de determinação das forças nos tirantes

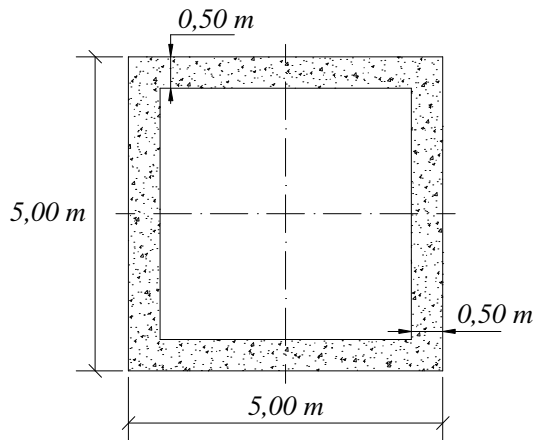
Exemplo	Descrição
1	Optimização considerando a ponte completa
2	Optimização considerando o faseamento construtivo, efeitos diferidos e efeitos geometricamente não-lineares
3	Optimização considerando o faseamento construtivo, efeitos geometricamente não-lineares mas sem considerar efeitos diferidos
4a, 4b, 4c e 4d	Optimização considerando o faseamento construtivo, efeitos diferidos, efeitos geometricamente não-lineares e variando os valores de alguns parâmetros intervenientes nos modelos de fluência e retracção do betão
5a	Optimização considerando o faseamento construtivo, efeitos diferidos e análise linear
5b	Optimização considerando o faseamento construtivo, efeitos diferidos e análise de segunda ordem considerando apenas os tirantes com módulo de elasticidade equivalente
6	Análise a longo prazo

Na resolução do problema de optimização das forças nos tirantes consideraram-se apenas variáveis de decisão directamente relacionadas com os mesmos, utilizando-se as forças de pré-esforço e as secções transversais destes elementos, ou seja, variáveis de decisão dos tipos 4 e 22, respectivamente. Neste problema as secções transversais do tabuleiro e das torres não foram consideradas como variáveis de decisão, sendo parâmetros constantes ao longo do processo de optimização. Para as torres e tabuleiro consideraram-se, respectivamente, secções rectangulares ocas e secções em laje vigada, variáveis ao longo do comprimento destes elementos de acordo com as zonas definidas na Figura 5.3. Na Figura 5.5 apresenta-se um esquema das secções transversais adoptadas para o tabuleiro e para as torres.

Secção transversal do tabuleiro



Secção transversal das torres abaixo do tabuleiro



Secção transversal das torres acima do tabuleiro

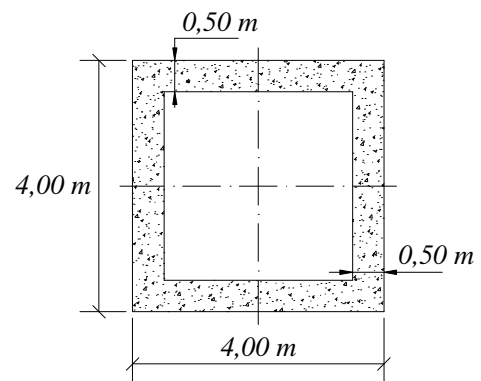


Figura 5.5 – Esquema das secções transversais do tabuleiro e das torres no problema de determinação das forças nos tirantes

No Quadro 5.3 resumem-se as dimensões caracterizadoras das secções transversais do tabuleiro e das torres adoptadas na resolução deste problema.

Quadro 5.3 – Dimensões gerais das secções do tabuleiro e das torres no problema de determinação das forças nos tirantes

	Zona	Dimensões
Torres	Zona 1	$h = 5,00 \text{ m}; b = 5,00 \text{ m}; t_w = 0,50 \text{ m}; t_{fs} = t_{fi} = 0,50 \text{ m}$
	Zona 2	$h = 4,00 \text{ m}; b = 4,00 \text{ m}; t_w = 0,50 \text{ m}; t_{fs} = t_{fi} = 0,50 \text{ m}$
Tabuleiro	Zona 3	$h = 2,50 \text{ m}; b = 19,00 \text{ m}; t_w = 1,20 \text{ m}; t_{fs} = 0,20 \text{ m}$
	Zona 4	$h = 2,00 \text{ m}; b = 19,00 \text{ m}; t_w = 0,80 \text{ m}; t_{fs} = 0,20 \text{ m}$
	Zona 5	$h = 1,50 \text{ m}; b = 19,00 \text{ m}; t_w = 0,80 \text{ m}; t_{fs} = 0,20 \text{ m}$

Com a resolução deste problema pretende-se chegar a uma distribuição óptima de forças nos tirantes de modo a minimizar o custo dos mesmos através da minimização do volume de aço de alta resistência. Essa distribuição de forças nos tirantes deve possibilitar também a obtenção da geometria pretendida para a ponte no final da construção e garantir que as tensões

em toda a estrutura permanecem dentro dos limites impostos durante a construção e para a ponte completa sob várias condições de carregamento.

O processo de análise e otimização requer a definição de uma solução inicial. Apesar de o algoritmo utilizado permitir partir de uma solução não-admissível é desejável que esta não se encontre muito afastada do domínio, para que os resultados da otimização não sejam afectados. Na pesquisa da solução o algoritmo tenderia, nesse caso, a sacrificar a desejável redução de custo para satisfazer os restantes objectivos, de modo a encaminhar a solução para o interior do domínio.

Como foi referido, as únicas variáveis de decisão consideradas neste problema foram as forças de pré-esforço nos tirantes e as respectivas áreas da secção transversal destes elementos. Por conseguinte, a solução inicial foi estabelecida por tentativas definindo as áreas dos tirantes e um conjunto de forças de pré-esforço que garantem que esta solução é admissível ou se encontra próximo do domínio. A partir da solução inicial assim definida inicia-se o processo iterativo de análise e otimização em que o algoritmo procura, através da minimização da função objectivo definida pela Equação (4.20), minimizar o custo da estrutura e a verificação de todos os objectivos de projecto (tensões e deslocamentos). Este processo repete-se até se atingir convergência, ou seja, quando se verifica uma estabilização do valor do custo da ponte de iteração para iteração. A solução final obtida (solução óptima) apresenta custo mínimo e garante a verificação de todos os objectivos de projecto.

5.3.1. Otimização considerando a ponte completa

No que respeita ao problema de determinação das forças nos tirantes apresentam-se nesta secção os resultados obtidos para o exemplo considerando a ponte completa. Neste exemplo a análise é efectuada considerando a ponte completa sujeita a quatro casos de carga, nomeadamente, às cargas permanentes e aos três casos de carga já referidos em que se considera a alternância da sobrecarga rodoviária.

Tal como foi referido anteriormente, neste problema têm-se como variáveis de decisão apenas as forças de pré-esforço nos tirantes e as respectivas secções transversais de cada um destes elementos. Deste modo, tem-se um total de 36 variáveis de decisão, metade correspondendo às forças nos tirantes e outra metade correspondendo às secções desses elementos. No Quadro 5.4 descrevem-se as variáveis de decisão consideradas neste exemplo. A numeração dos tirantes é a que se encontra indicada na Figura 5.2.

Quadro 5.4 – Descrição das variáveis de decisão utilizadas no Exemplo 1

Variável de decisão	Descrição
1 e 2	Forças de pré-esforço nos tirantes 1 e 2
3 e 4	Área da secção transversal dos tirantes 1 e 2
5 e 6	Forças de pré-esforço nos tirantes 3 e 4
7 e 8	Área da secção transversal dos tirantes 3 e 4
9 e 10	Forças de pré-esforço nos tirantes 5 e 6
11 e 12	Área da secção transversal dos tirantes 5 e 6
13 e 14	Forças de pré-esforço nos tirantes 7 e 8
15 e 16	Área da secção transversal dos tirantes 7 e 8
17 e 18	Forças de pré-esforço nos tirantes 9 e 10
19 e 20	Área da secção transversal dos tirantes 9 e 10
21 e 22	Forças de pré-esforço nos tirantes 11 e 12
23 e 24	Área da secção transversal dos tirantes 11 e 12
25 e 26	Forças de pré-esforço nos tirantes 13 e 14
27 e 28	Área da secção transversal dos tirantes 13 e 14
29 e 30	Forças de pré-esforço nos tirantes 15 e 16
31 e 32	Área da secção transversal dos tirantes 15 e 16
33 e 34	Forças de pré-esforço nos tirantes 17 e 18
35 e 36	Área da secção transversal dos tirantes 17 e 18

No que respeita aos objectivos de projecto consideraram-se o custo dos tirantes e as tensões em toda a estrutura em condições de serviço (Equações (4.6), (4.7) e (4.14)) e para verificação da resistência (Equações (4.8) e (4.15)). Para verificação da resistência dos elementos de betão estrutural considerou-se uma área total (faces inferior e superior) de armadura passiva igual a 2% da área da secção transversal de betão.

Para além destes, consideraram-se também objectivos de deslocamentos verticais no tabuleiro e horizontal no topo da torre (Equação (4.5)). Com estes objectivos pretende-se garantir a rasante do tabuleiro na condição de carga permanente e controlar a deformação e os esforços de flexão nas torres. Os valores admissíveis considerados para os deslocamentos foram de 1,0 cm e 2,0 cm, respectivamente, para o deslocamento horizontal no topo da torre e para os deslocamentos verticais do tabuleiro.

Para iniciar o processo de análise e optimização definiram-se as áreas das secções transversais dos tirantes e um conjunto de forças de pré-esforço a aplicar em cada um desses elementos, constituindo desta forma, a solução inicial. Os valores das variáveis de decisão que caracterizam esta solução apresentam-se no Quadro 5.5. Partindo desta solução o processo iterativo de análise e optimização repete-se até se alcançar uma estabilização do valor do custo da estrutura, obtendo-se a solução óptima, de custo mínimo e que garante a verificação de todos os objectivos de projecto.

Relativamente aos resultados obtidos começa-se por apresentar a Figura 5.6 onde se representa a evolução do custo da ponte e a respectiva redução de custo em função do número de iterações de análise e optimização.

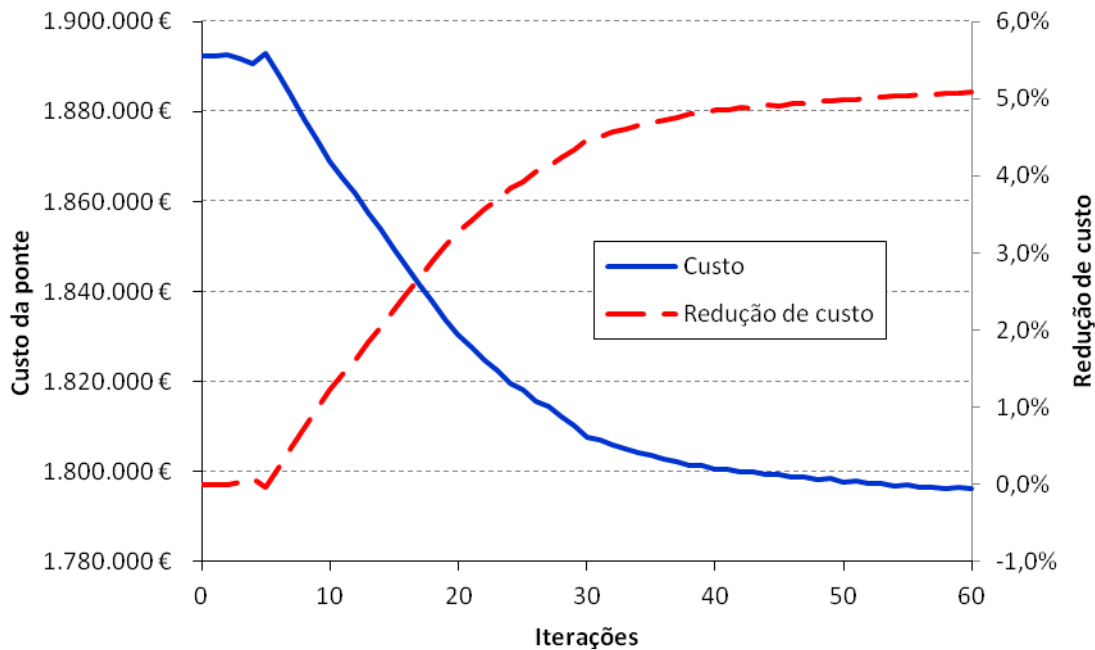


Figura 5.6 – Evolução do custo da ponte e da redução de custo em função do número de iterações (Exemplo 1)

Como se observa na Figura 5.6 o custo da ponte vai sendo progressivamente reduzido, tendendo assintoticamente para o valor do custo mínimo. Neste exemplo tem-se um custo inicial de 1.892.309 € e o algoritmo de optimização permite reduzi-lo 5,07% para um valor de 1.796.430 €.

No Quadro 5.5 apresentam-se, em resumo, os resultados obtidos para as diversas variáveis de decisão após o processo de optimização, indicando-se também os respectivos valores iniciais. Os valores das variáveis de decisão são apresentados em m^2 e em kN , respectivamente, para as áreas dos tirantes e para as forças de pré-esforço nesses elementos.

Na medida em que neste problema o custo da ponte depende apenas do custo do aço de alta resistência dos tirantes, a redução de custo observada deve-se à redução das secções transversais destes elementos, como se pode verificar pela observação dos valores indicados no Quadro 5.5. Comparando os valores iniciais e finais, verifica-se uma redução das áreas das secções transversais em todos os tirantes. As reduções variam entre 30,2% (tirante 17) e 65,1% (tirante 1).

Relativamente aos valores iniciais das forças nos tirantes verifica-se um aumento entre 0,1% e 2,4% para os tirantes do vão lateral correspondentes às variáveis de decisão 1, 5, 9, 13

e 17. Para os correspondentes tirantes dispostos simetricamente relativamente à torre e localizados no vão central, a que dizem respeito as variáveis de decisão 2, 6, 10, 14 e 18, observa-se uma diminuição entre 1,0% e 4,6% das respectivas forças. Para os tirantes correspondentes às variáveis de decisão 21, 22, 25, 26, 29, 30, 33 e 34 observa-se um aumento entre 1,6% e 16,3% dos valores das respectivas forças.

Quadro 5.5 – Valores iniciais e finais (após optimização) das variáveis de decisão (Exemplo 1)

Variável	Valor inicial	Valor final	Variável	Valor inicial	Valor final
1	2000	2006	19	$6,000 \times 10^{-3}$	$3,188 \times 10^{-3}$
2	2000	1981	20	$6,000 \times 10^{-3}$	$3,111 \times 10^{-3}$
3	$6,000 \times 10^{-3}$	$2,092 \times 10^{-3}$	21	3500	3661
4	$6,000 \times 10^{-3}$	$2,354 \times 10^{-3}$	22	3500	3555
5	2000	2006	23	$7,500 \times 10^{-3}$	$3,748 \times 10^{-3}$
6	2000	1932	24	$7,500 \times 10^{-3}$	$3,738 \times 10^{-3}$
7	$6,000 \times 10^{-3}$	$2,137 \times 10^{-3}$	25	3500	3788
8	$6,000 \times 10^{-3}$	$2,293 \times 10^{-3}$	26	3500	3799
9	2500	2503	27	$7,500 \times 10^{-3}$	$3,944 \times 10^{-3}$
10	2500	2378	28	$7,500 \times 10^{-3}$	$4,063 \times 10^{-3}$
11	$6,000 \times 10^{-3}$	$2,590 \times 10^{-3}$	29	3500	3895
12	$6,000 \times 10^{-3}$	$2,509 \times 10^{-3}$	30	3500	3964
13	3000	3021	31	$7,500 \times 10^{-3}$	$3,996 \times 10^{-3}$
14	3000	2863	32	$7,500 \times 10^{-3}$	$4,178 \times 10^{-3}$
15	$6,000 \times 10^{-3}$	$3,086 \times 10^{-3}$	33	4500	5027
16	$6,000 \times 10^{-3}$	$3,004 \times 10^{-3}$	34	4000	4651
17	3000	3072	35	$7,500 \times 10^{-3}$	$5,234 \times 10^{-3}$
18	3000	2908	36	$7,500 \times 10^{-3}$	$4,903 \times 10^{-3}$

Na Figura 5.7 apresenta-se um gráfico de barras correspondente à distribuição de forças e de tensões nos tirantes para a condição de ponte completa sujeita à carga permanente. De acordo com os resultados indicados observa-se que as forças nos tirantes aumentam da torre para o vão, sendo aproximadamente iguais em tirantes simetricamente dispostos em relação à torre. O tirante 17 é aquele em que é aplicada maior força, o que se justifica pelo facto de este desempenhar o papel de tirante de retenção. De facto, os valores mais elevados das forças aplicadas nos tirantes de retenção têm como objectivo contrabalançar a carga mais elevada existente no vão central relativamente ao vão lateral. As forças nos tirantes de retenção desempenham um papel fundamental no controlo do deslocamento horizontal no topo da torre e desta forma permitem controlar as deformações e tensões de flexão nas torres. Esta é uma característica necessária para um adequado comportamento estrutural das pontes atirantadas.

Verifica-se também que a tensão na maioria dos tirantes se encontra próximo do limite de $0,50f_{pk}$ imposto no algoritmo de optimização para condições de serviço. Este facto indica um adequado aproveitamento do aço dos tirantes, tal como se pretende obter com a optimização da estrutura. Em alguns tirantes este limite é ultrapassado, sendo o desvio máximo de 0,8% o que se considera aceitável para o processo numérico levado a cabo.

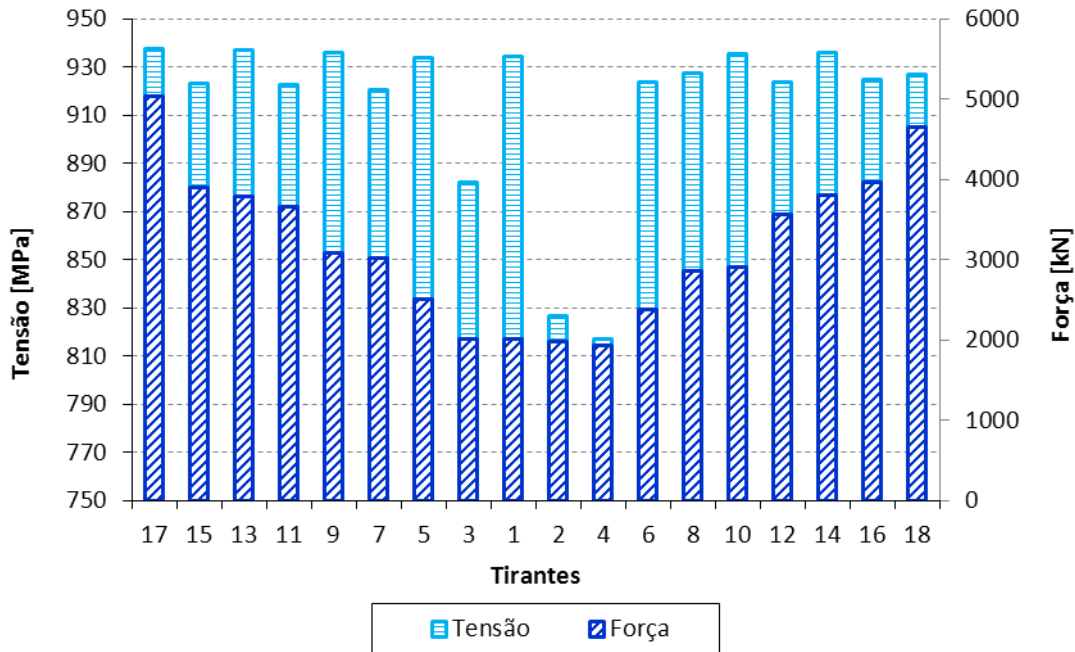


Figura 5.7 – Distribuição de forças e de tensão nos tirantes para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura optimizada (Exemplo 1)

Recorrendo às funcionalidades de representação gráfica dos resultados com que se dotou o programa de computador desenvolvido, apresenta-se na Figura 5.8 a configuração deformada da ponte sujeita a carga permanente correspondente à solução final obtida com a optimização. De salientar os valores reduzidos dos deslocamentos dos nós da estrutura obtidos com o processo de optimização, sendo inferiores aos limites impostos.

No algoritmo de optimização consideraram-se como objectivos de projecto o deslocamento horizontal do topo da torre e os deslocamentos verticais dos pontos de ancoragem dos tirantes no tabuleiro. De acordo com os resultados obtidos pode referir-se que os objectivos de deslocamentos considerados se mostraram adequados para controlar a geometria da estrutura.

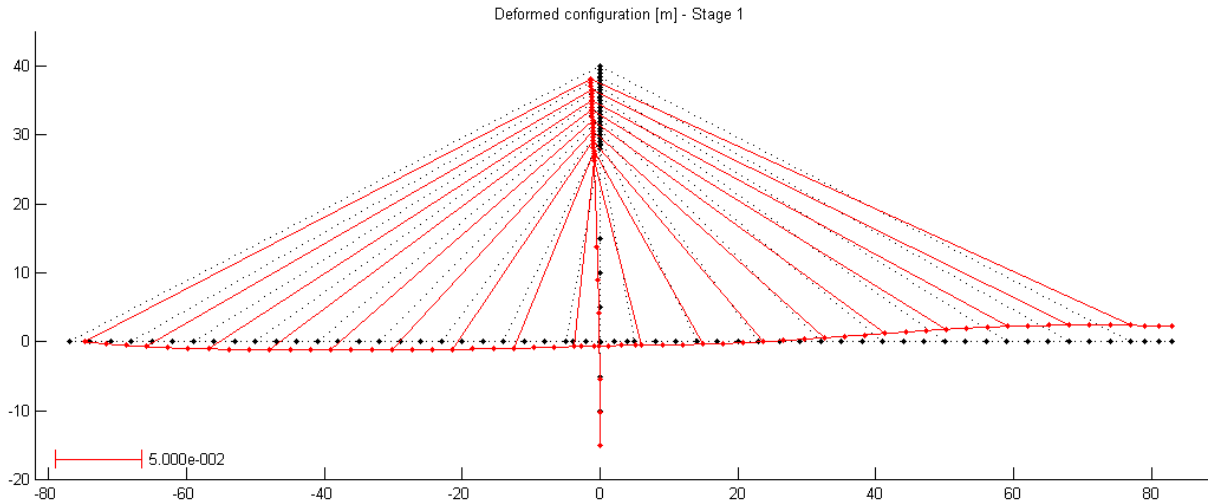


Figura 5.8 – Deformada para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 1)

A Figura 5.9 apresenta os valores dos deslocamentos verticais do tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente, representando-se conjuntamente os valores da solução inicial e da solução final. Facilmente se observa a melhoria do comportamento da estrutura conseguida com o algoritmo de optimização, verificando-se uma redução significativa dos deslocamentos verticais do tabuleiro.

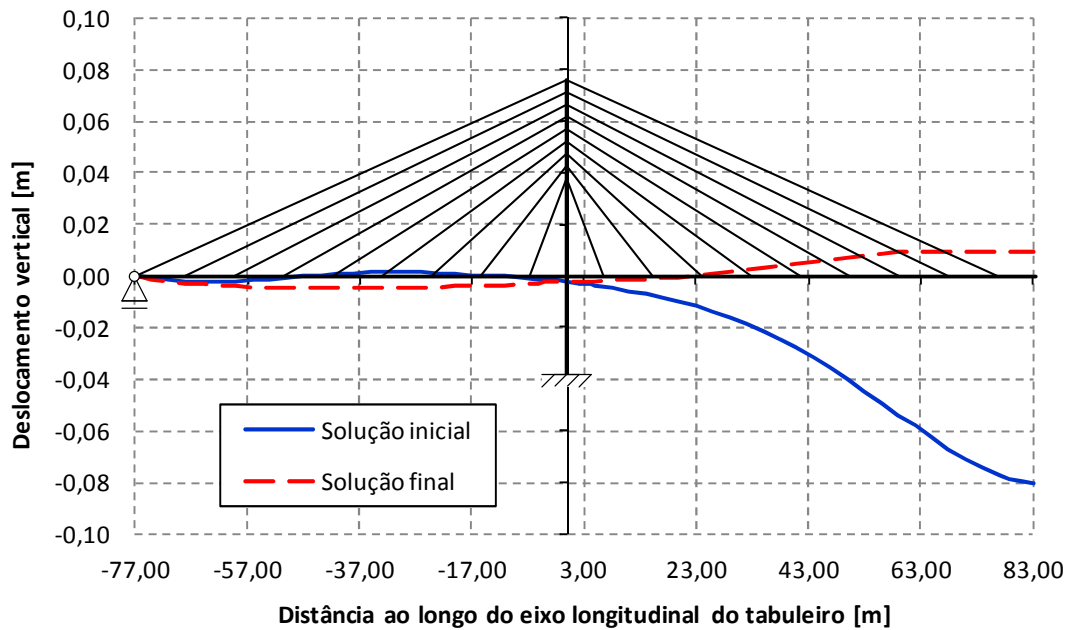


Figura 5.9 – Deslocamentos verticais do tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – solução inicial vs solução final (Exemplo 1)

Novamente, recorrendo às rotinas de representação gráfica implementadas no programa de computador desenvolvido, é possível representar as distribuições de esforços internos.

Desta forma, apresentam-se nas Figuras 5.10, 5.11 e 5.12 os digramas de momento flector, esforço transverso e esforço axial para a ponte sujeita a carga permanente.

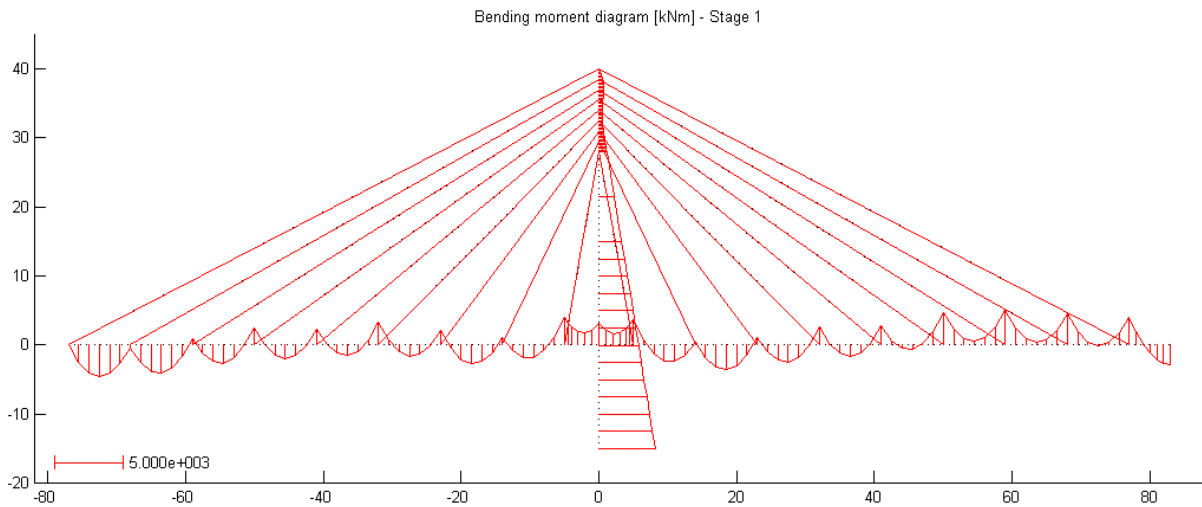


Figura 5.10 – Diagrama de momento flector para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 1)

Como se pode verificar pela observação da Figura 5.10 obteve-se, para a ponte completa sujeita a carga permanente, um diagrama de momento flector no tabuleiro similar ao que se obteria se o tabuleiro fosse uma viga contínua rigidamente apoiada nos pontos de ancoragem dos tirantes no tabuleiro, tal como é desejável no projecto de uma ponte atirantada e foi oportunamente referido no Capítulo 2. De referir também que o momento flector máximo na torre é da mesma ordem de grandeza dos momentos flectores máximos no tabuleiro.

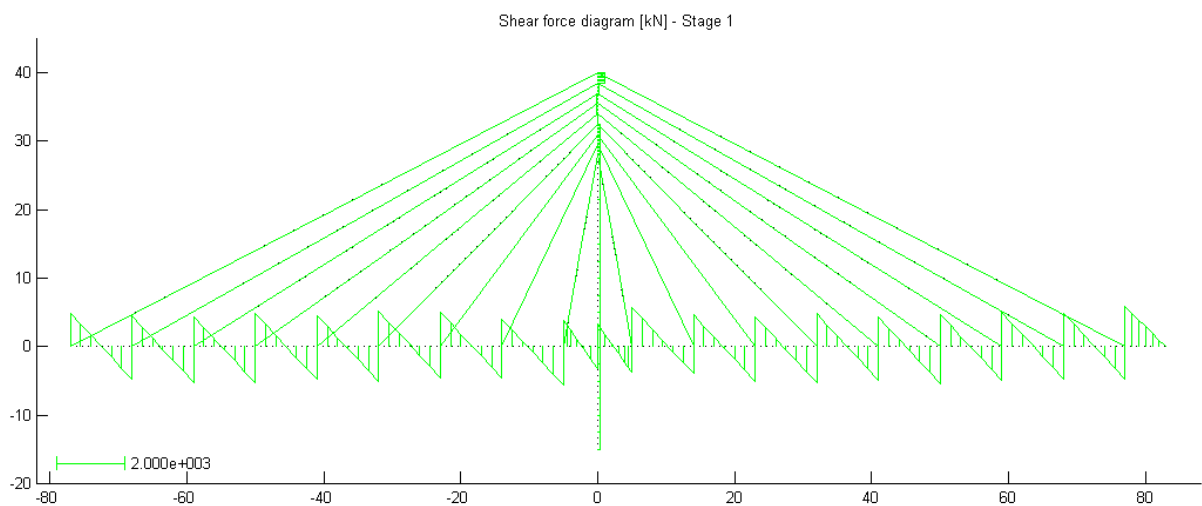


Figura 5.11 – Diagrama de esforço transverso para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 1)

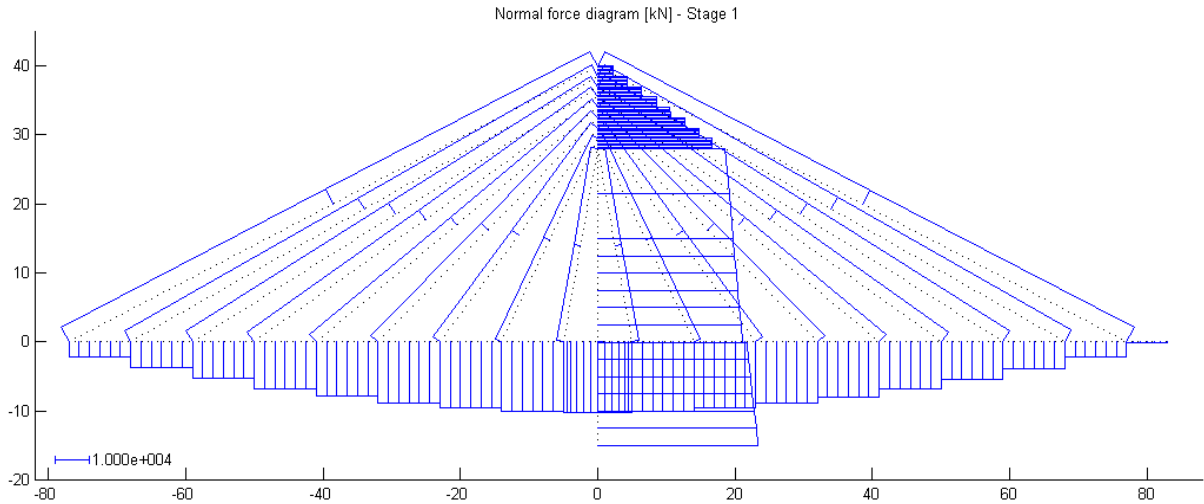


Figura 5.12 – Diagrama de esforço axial para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 1)

Nas Figura 5.13 e 5.14 apresentam-se as distribuições de tensões normais ao longo do tabuleiro e das torres, respectivamente. De acordo com os resultados apresentados pode referir-se que na solução otimizada para a ponte completa sujeita a carga permanente as tensões nos elementos de betão permanecem dentro dos limites impostos para condições de serviço. De referir também que as torres estão sujeitas unicamente a tensões de compressão e que o tabuleiro também se encontra quase na totalidade sujeito a tensões de compressão.

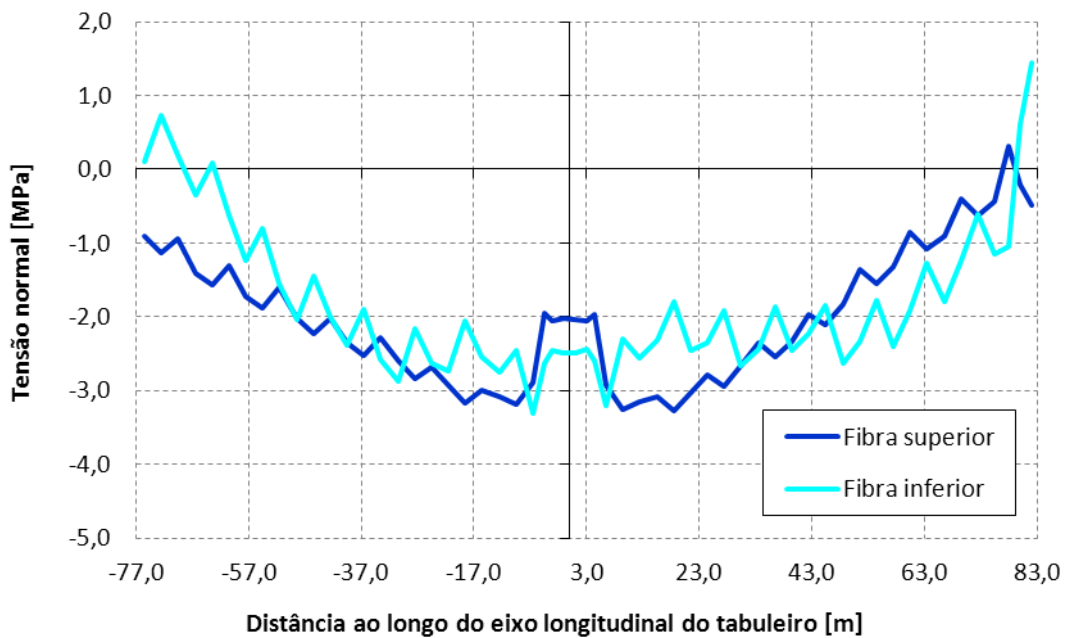


Figura 5.13 – Distribuição de tensões normais no tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 1)

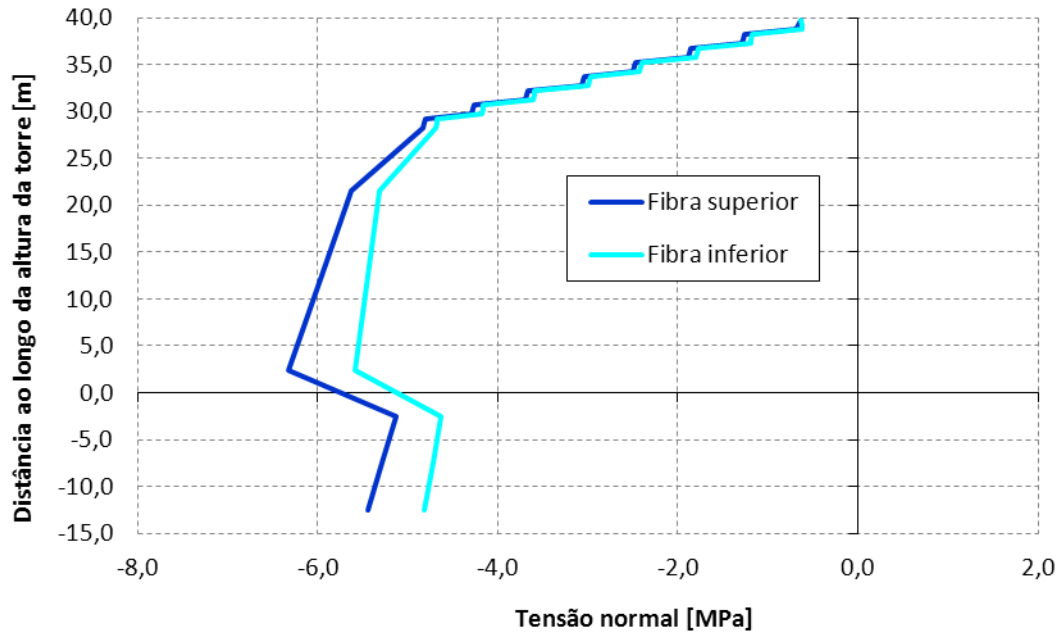


Figura 5.14 – Distribuição de tensões normais na torre para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 1)

Neste exemplo a ponte completa foi analisada para a condição de carga permanente e para três casos de carga em que se considerou a alternância de sobrecargas. Nas Figuras 5.15 a 5.26 apresentam-se a configuração deformada e os diagramas de esforços internos para esses três casos de carga.

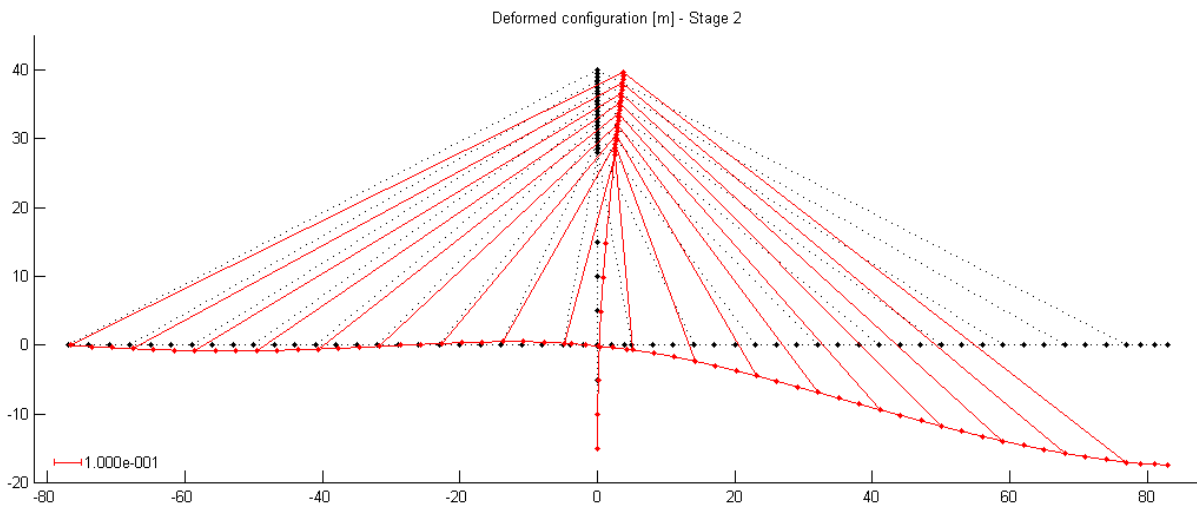


Figura 5.15 – Deformada para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 1)

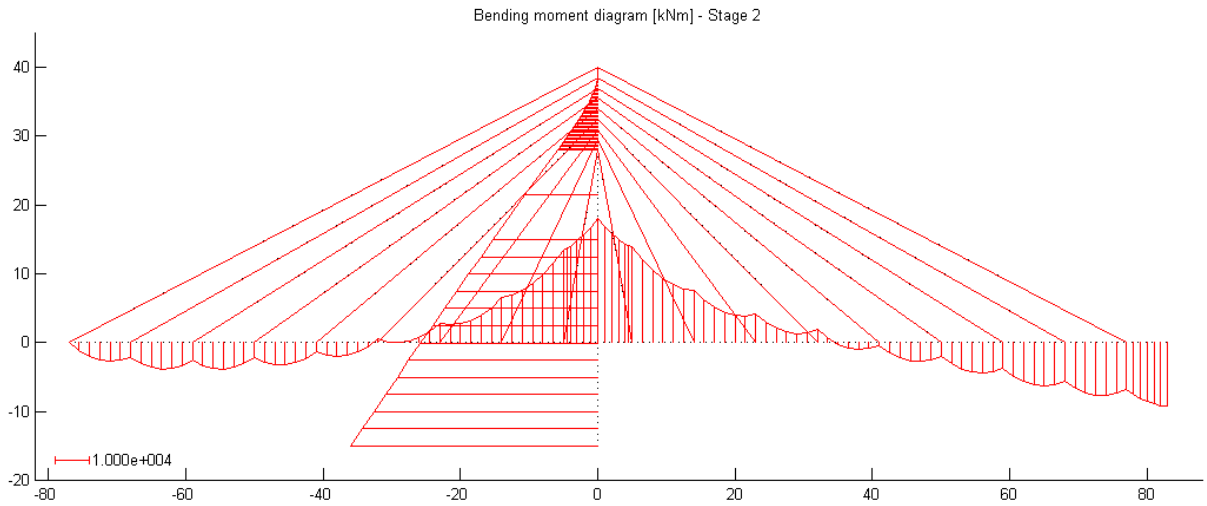


Figura 5.16 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 1)

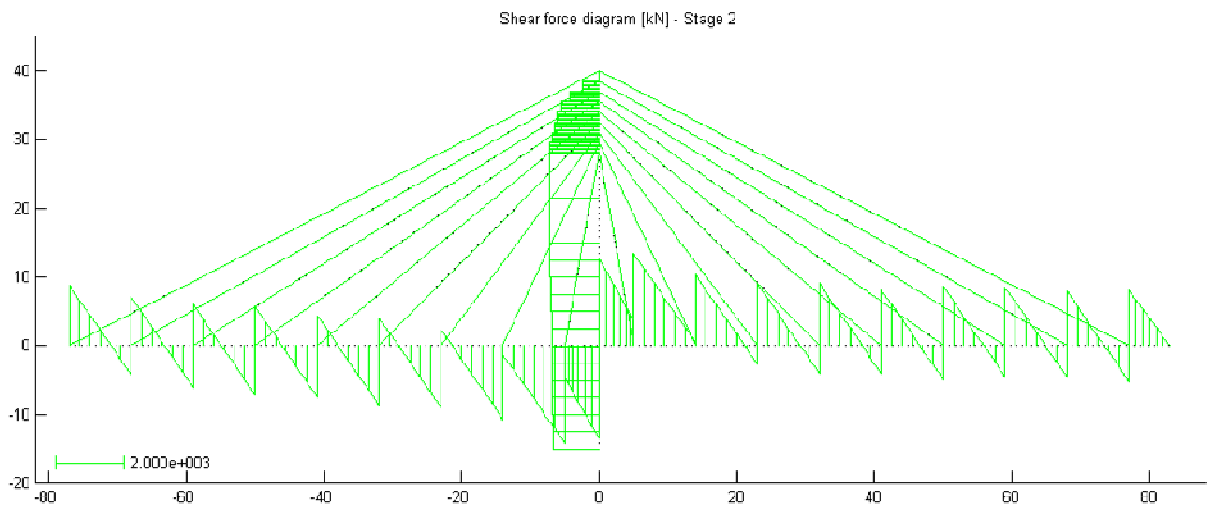


Figura 5.17 – Diagrama de esforço transverso para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 1)

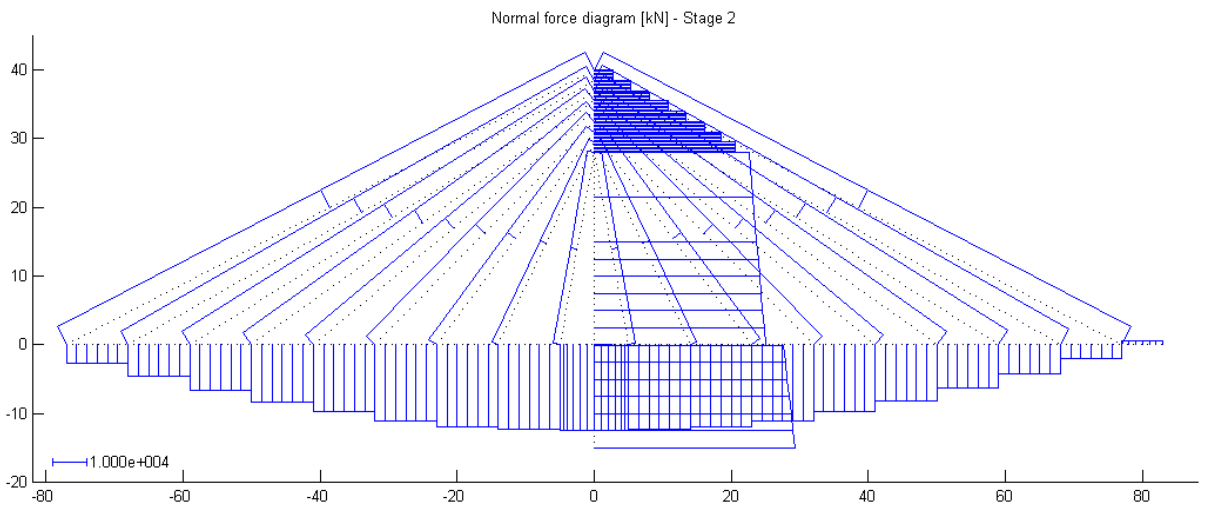


Figura 5.18 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 1)

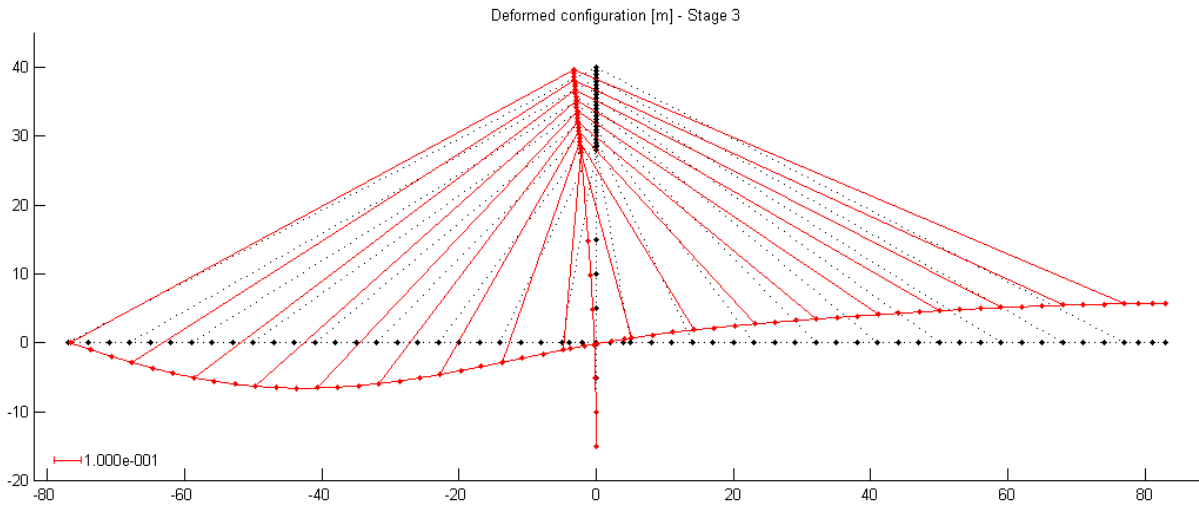


Figura 5.19 – Deformada para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 1)

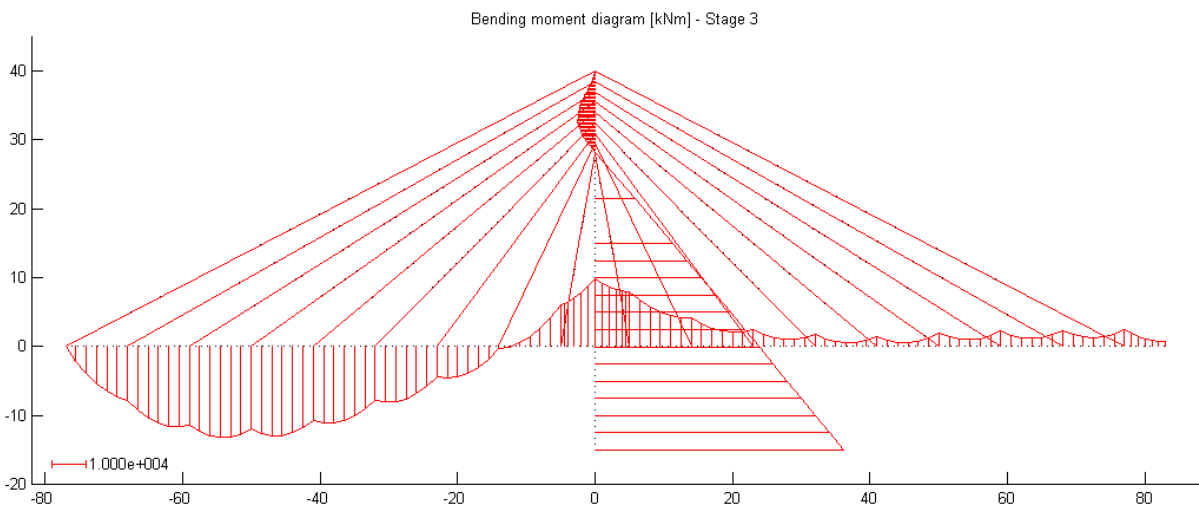


Figura 5.20 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 1)

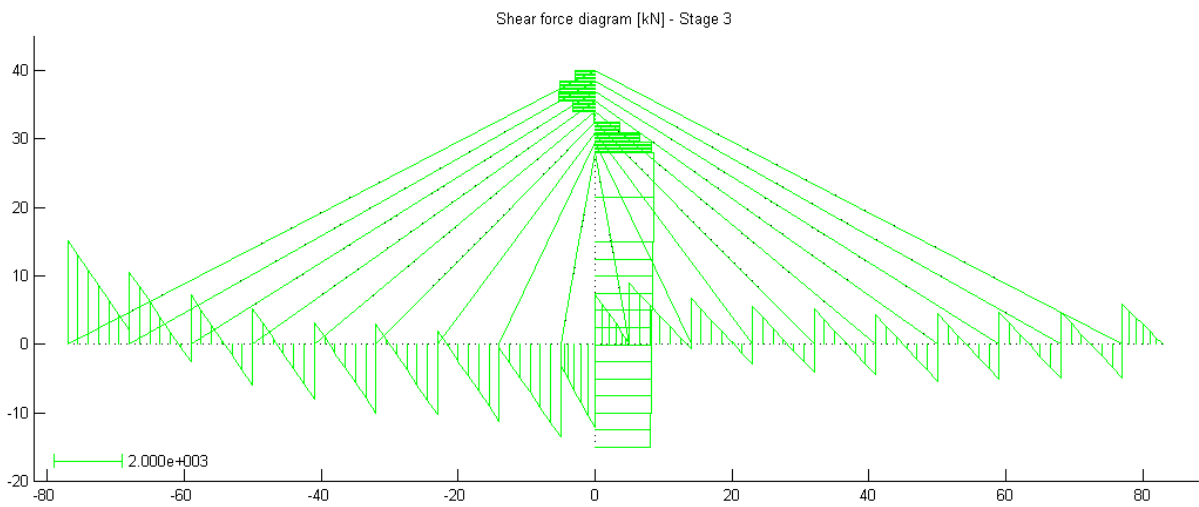


Figura 5.21 – Diagrama de esforço transversal para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 1)

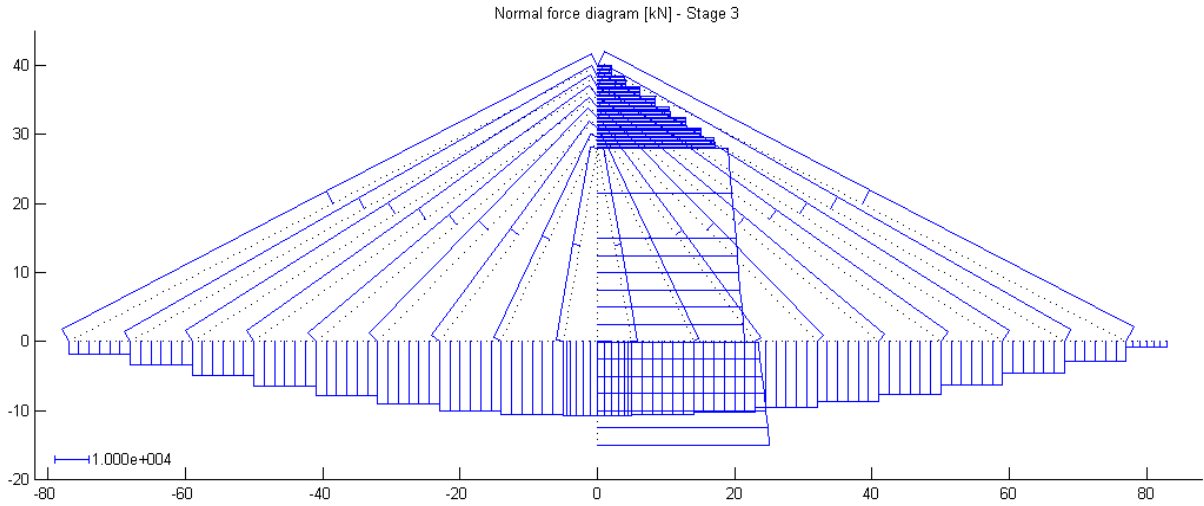


Figura 5.22 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 1)

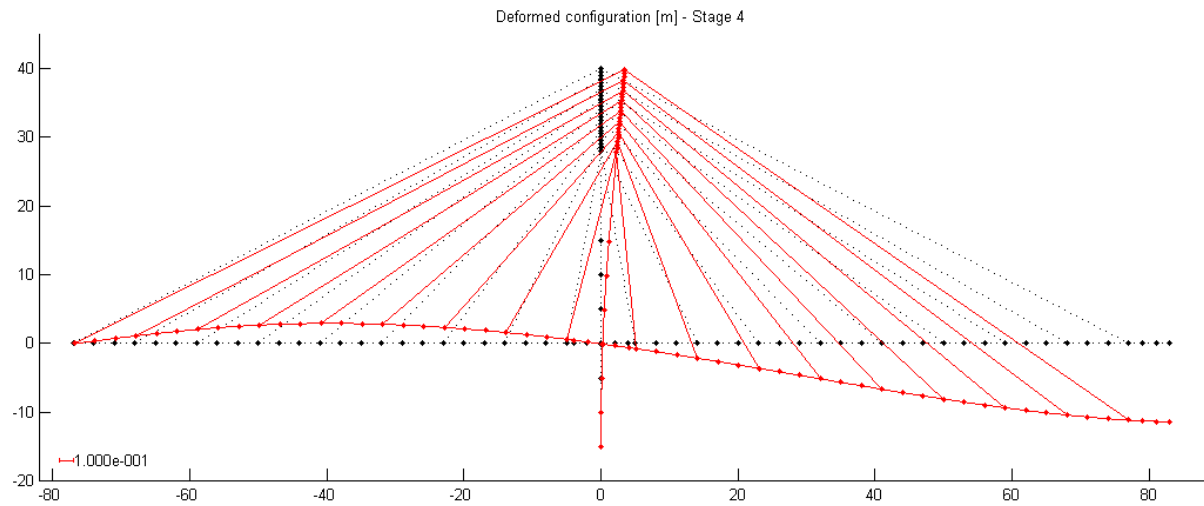


Figura 5.23 – Deformada para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 1)

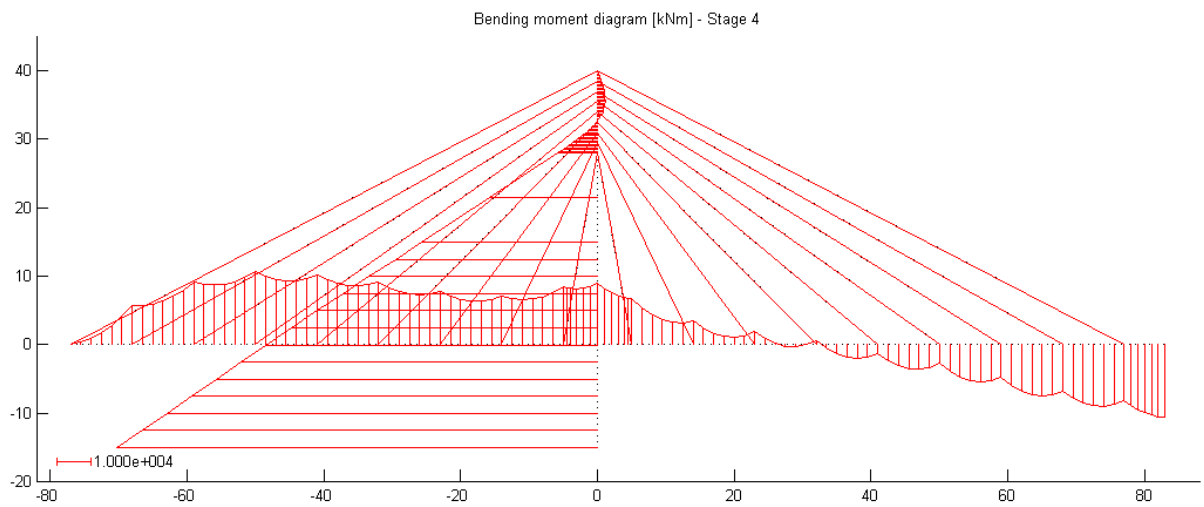


Figura 5.24 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 1)

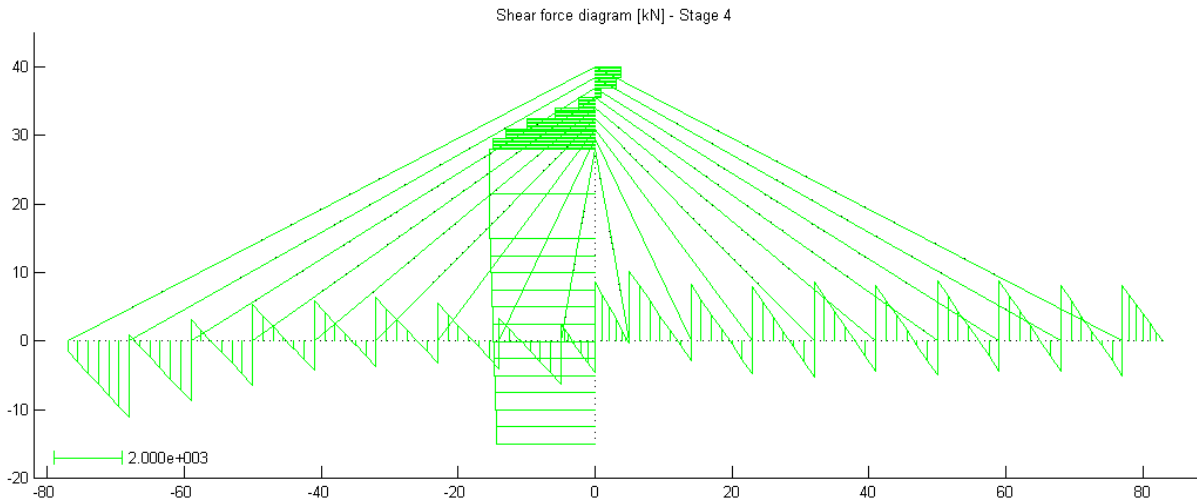


Figura 5.25 – Diagrama de esforço transversal para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 1)

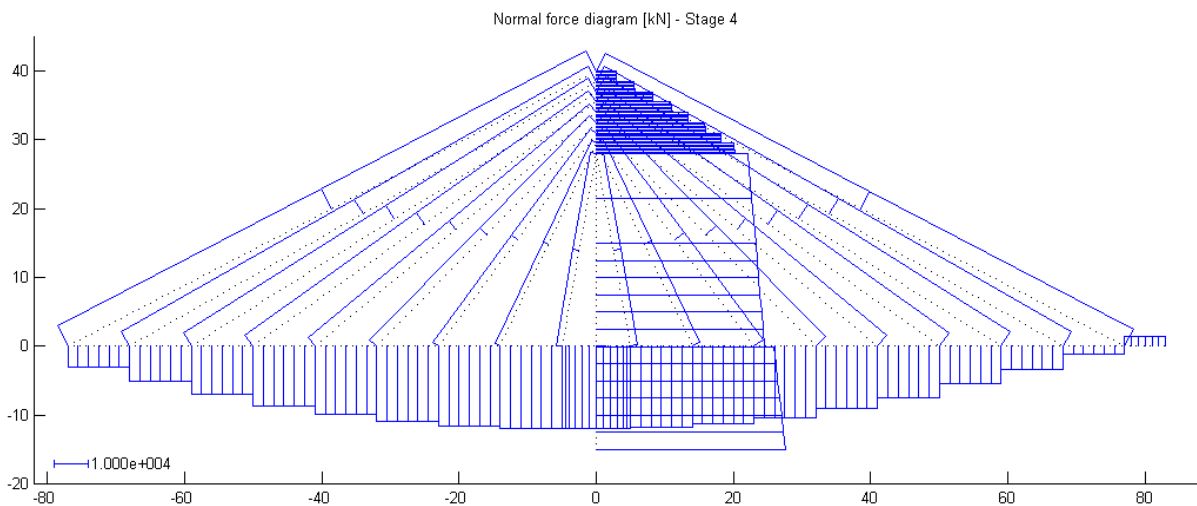


Figura 5.26 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 1)

5.3.2. Optimização considerando o faseamento construtivo

Nesta secção apresentam-se os resultados obtidos para o Exemplo 2 que constitui o exemplo geral da determinação das forças nos tirantes numa ponte atirantada de betão. Neste, a análise estrutural envolve, não apenas a ponte completa sujeita a várias condições de carregamento, mas também o processo construtivo. São ainda considerados os efeitos diferidos do comportamento do betão e é realizada uma análise de segunda ordem para serem contabilizados os efeitos geometricamente não-lineares.

Deste modo, no problema de optimização consideram-se como variáveis de decisão, tal como no exemplo anterior, as áreas da secção transversal de cada um dos tirantes e as forças de pré-esforço a aplicar em cada um deles. No entanto, estas forças subdividem-se agora em forças de instalação e forças de ajustamento. Assim, as forças de instalação correspondem à

forças a aplicar nos tirantes aquando da sua montagem no decorrer do processo construtivo. As forças de ajustamento dizem respeito às forças a aplicar aos tirantes na ponte completa para garantir a geometria pretendida. Neste exemplo tem-se agora um total de 54 variáveis de decisão que são descritas no Quadro 5.6.

Quadro 5.6 – Descrição das variáveis de decisão utilizadas no Exemplo 2

Variável de decisão	Descrição
1 e 2	Forças de instalação nos tirantes 1 e 2
3 e 4	Área da secção transversal dos tirantes 1 e 2
5 e 6	Forças de instalação nos tirantes 3 e 4
7 e 8	Área da secção transversal dos tirantes 3 e 4
9 e 10	Forças de instalação nos tirantes 5 e 6
11 e 12	Área da secção transversal dos tirantes 5 e 6
13 e 14	Forças de instalação nos tirantes 7 e 8
15 e 16	Área da secção transversal dos tirantes 7 e 8
17 e 18	Forças de instalação nos tirantes 9 e 10
19 e 20	Área da secção transversal dos tirantes 9 e 10
21 e 22	Forças de instalação nos tirantes 11 e 12
23 e 24	Área da secção transversal dos tirantes 11 e 12
25 e 26	Forças de instalação nos tirantes 13 e 14
27 e 28	Área da secção transversal dos tirantes 13 e 14
29 e 30	Forças de instalação nos tirantes 15 e 16
31 e 32	Área da secção transversal dos tirantes 15 e 16
33 e 34	Forças de instalação nos tirantes 17 e 18
35 e 36	Área da secção transversal dos tirantes 17 e 18
37 a 54	Forças de ajustamento nos tirantes 1 a 18

À semelhança do que foi referido para o Exemplo 1, também neste exemplo se consideraram os seguintes objectivos:

- custo da estrutura;
- deslocamentos verticais a meio-vão e nos pontos de ancoragem dos tirantes no tabuleiro e deslocamento horizontal do topo da torre para a ponte completa sujeita à carga permanente;
- tensões em todos os elementos para a ponte completa sujeita à carga permanente e aos casos de alternância de sobrecargas.

Para além destes, têm-se agora objectivos adicionais relacionados com a consideração do faseamento construtivo. Deste modo, incluíram-se nos objectivos de projecto do Exemplo 2 as tensões nos diversos elementos estruturais durante o processo construtivo. Considerou-se ainda um objectivo de deslocamento vertical do tabuleiro na Fase 9 que possibilite a ligação deste ao encontro. Para este objectivo definiu-se um valor de 2 cm para o deslocamento

admissível que se considerou adequado para permitir a ligação do tabuleiro ao encontro. No que respeita aos objectivos de deslocamento para a ponte completa sujeita a carga permanente (Fase 11) consideraram-se 2 cm e 5 cm para os valores admissíveis dos deslocamentos horizontais e verticais, respectivamente.

Tal como foi referido na secção anterior, também neste caso se definiu uma solução inicial próxima do domínio. Esta tarefa foi levada a cabo por tentativas ajustando as forças nos tirantes e verificando os resultados da análise estrutural daí resultantes.

No que respeita aos resultados do Exemplo 2, apresenta-se na Figura 5.27 a evolução do custo da ponte e a correspondente redução de custo em função do número de iterações de análise e optimização.

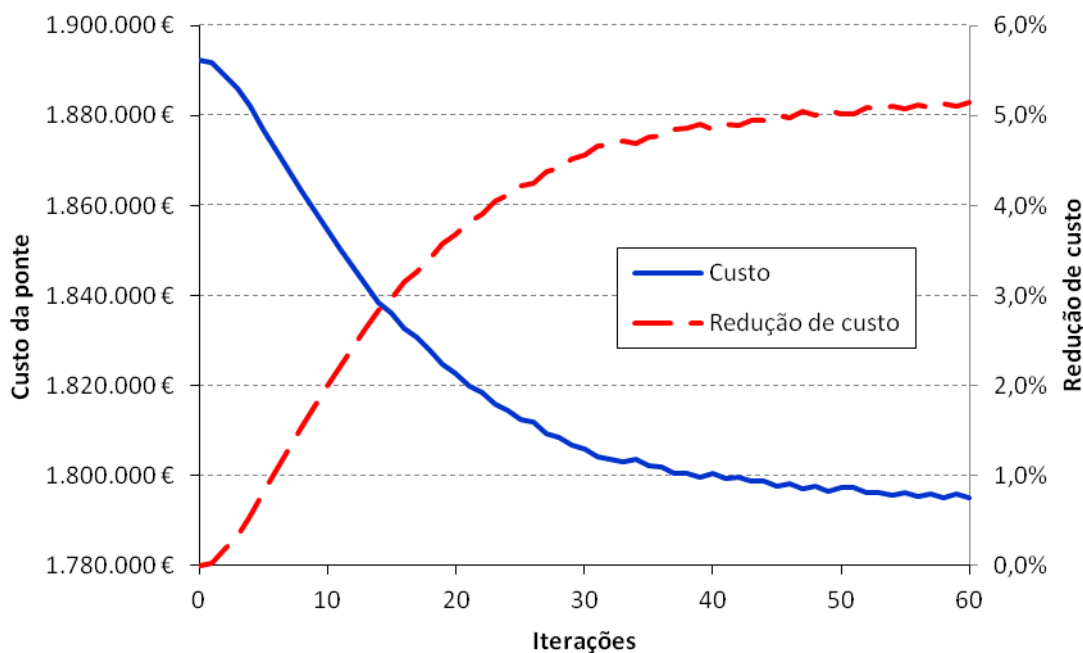


Figura 5.27 – Evolução do custo da ponte e da redução de custo em função do número de iterações (Exemplo 2)

Como se observa na Figura 5.27 o custo da ponte vai sendo progressivamente reduzido, tendendo assintoticamente para o valor do custo mínimo. Tal como no Exemplo 1, tem-se um custo inicial de 1.892.309 €, sendo neste exemplo reduzido para 1.795.862 €, representando uma variação de 5,10%. Comparando os custos finais dos Exemplos 1 e 2 verifica-se que são praticamente iguais, tendo-se no Exemplo 2 uma redução de 0,03% relativamente ao Exemplo 1.

No Quadro 5.7 apresentam-se, em resumo, os valores iniciais e os resultados obtidos com a optimização para as forças de instalação e de ajustamento dos tirantes.

Quadro 5.7 – Valores iniciais e finais (após optimização) das forças nos tirantes (Exemplo 2)

Tirante	Forças de instalação [kN]		Forças de ajustamento [kN]	
	Valor inicial	Valor final	Valor inicial	Valor final
1	1000	1006	1500	1497
2	1000	991	1500	1500
3	1500	1511	1800	1794
4	1500	1487	1800	1802
5	1800	1811	2300	2295
6	1800	1798	2300	2310
7	2000	2011	2500	2504
8	2000	2020	2500	2528
9	2200	2214	2700	2723
10	2200	2253	2700	2758
11	2500	2521	3000	3054
12	2500	2595	3000	3097
13	2500	2532	3000	3096
14	2500	2618	3000	3131
15	3000	3030	3500	3644
16	3000	3146	3500	3658
17	3000	3040	5000	5202
18	3000	3157	4500	4694

De acordo com os resultados apresentados no Quadro 5.7, verifica-se que os valores das forças de instalação aumentam da torre para os vãos, sendo similares em tirantes dispostos simetricamente relativamente à torre. Este facto deve-se à simetria da ponte relativamente à torre, apresentando na zona entre tirantes, o mesmo comprimento nos vãos laterais e central.

Relativamente à solução inicial algumas forças são reduzidas (tirantes 2, 4 e 6), sendo essa redução no máximo de 0,9%. Para os restantes tirantes verifica-se um aumento, entre 0,5% e 5,2%, dos valores das forças de instalação. Este aumento é mais significativo nos tirantes do vão central

Relativamente às forças de ajustamento observa-se a mesma tendência que para as forças de instalação, ou seja, os valores das forças aumentam da torre para os vãos, sendo similares em tirantes dispostos simetricamente relativamente à torre. A maior diferença entre os valores das forças ocorre para os tirantes 17 e 18. Isto justifica-se pelo facto de o tirante 17 desempenhar o papel de tirante de retenção. Tal como foi referido no Exemplo 1, para um adequado comportamento estrutural das pontes atirantadas há a necessidade de aplicar forças mais elevadas nos tirantes de retenção de modo a contrabalançar a carga mais elevada existente no vão central relativamente ao vão lateral. Deste modo é possível garantir a geometria de rasante do tabuleiro e controlar as deformações e tensões de flexão nas torres.

Relativamente aos valores da solução inicial observa-se um aumento das forças em quase todos os tirantes. Esse aumento varia entre 0,1% e 4,1%. Nos tirantes 1, 3 e 5 há uma redução entre 0,2% e 0,3% dos valores das forças relativamente à solução inicial. Comparando os valores finais obtidos verifica-se que as forças de ajustamento são superiores às forças de instalação, o que se justifica pelo facto de as primeiras serem determinadas para fazer face aos valores mais elevados de carga que ocorrem na ponte completa.

No Quadro 5.8 apresentam-se os valores iniciais e finais das áreas da secção transversal dos tirantes. Tal como no Exemplo 1, observa-se uma redução da área da secção para todos os tirantes. Esta redução varia entre 25,4% (tirante 18) e 65,1% (tirante 2) e possibilita a redução de custo da ponte ao diminuir a quantidade de aço de alta resistência utilizada nos tirantes. A distribuição das áreas dos tirantes segue o mesmo padrão que a distribuição de forças, aumentando das torres para os vãos para fazer face aos maiores valores de esforço axial nos tirantes mais afastados das torres, e deste modo, garantir os limites de tensão impostos.

Quadro 5.8 – Valores iniciais e finais (após optimização) das áreas dos tirantes (Exemplo 2)

Tirante	Valor inicial	Valor final	Tirante	Valor inicial	Valor final
1	$6,000 \times 10^{-3}$	$2,159 \times 10^{-3}$	2	$6,000 \times 10^{-3}$	$2,096 \times 10^{-3}$
3	$6,000 \times 10^{-3}$	$2,229 \times 10^{-3}$	4	$6,000 \times 10^{-3}$	$2,314 \times 10^{-3}$
5	$6,000 \times 10^{-3}$	$3,161 \times 10^{-3}$	6	$6,000 \times 10^{-3}$	$2,500 \times 10^{-3}$
7	$6,000 \times 10^{-3}$	$3,405 \times 10^{-3}$	8	$6,000 \times 10^{-3}$	$2,803 \times 10^{-3}$
9	$6,000 \times 10^{-3}$	$3,497 \times 10^{-3}$	10	$6,000 \times 10^{-3}$	$3,096 \times 10^{-3}$
11	$7,500 \times 10^{-3}$	$3,623 \times 10^{-3}$	12	$7,500 \times 10^{-3}$	$3,569 \times 10^{-3}$
13	$7,500 \times 10^{-3}$	$3,110 \times 10^{-3}$	14	$7,500 \times 10^{-3}$	$3,517 \times 10^{-3}$
15	$7,500 \times 10^{-3}$	$3,152 \times 10^{-3}$	16	$7,500 \times 10^{-3}$	$4,294 \times 10^{-3}$
17	$7,500 \times 10^{-3}$	$5,573 \times 10^{-3}$	18	$7,500 \times 10^{-3}$	$5,597 \times 10^{-3}$

Na medida em que neste exemplo se considerou o faseamento construtivo apresentam-se seguidamente os resultados obtidos para as diversas fases construtivas. Deste modo, nas Figuras 5.28 e 5.29 apresentam-se as configurações deformadas da estrutura para as Fases 1 a 10. Posteriormente, nas Figuras 5.30 a 5.35 apresentam-se os diagramas de esforços internos, momento flector, esforço transversal e esforço axial para as mesmas fases construtivas.

No que respeita às configurações deformadas para as diversas fases construtivas, salienta-se o facto de o algoritmo conduzir a uma solução em que na Fase 9 o tabuleiro apresenta um deslocamento vertical pequeno (inferior a 2 cm) no nó de extremidade do vão lateral, de modo a permitir a ligação ao encontro. Na fase seguinte é adicionado um apoio simples nesse nó de modo a simular a ligação do tabuleiro ao encontro. Desta forma, em fases subsequentes o nó de ligação do tabuleiro ao encontro exibirá sempre o valor do deslocamento obtido no final da

Fase 9. De referir também que a solução obtida para as forças de instalação se caracteriza por valores mais elevados destas nos tirantes do vão central, tal como indicado no Quadro 5.7. Isto traduz-se na introdução de uma contra-flecha no tabuleiro, tal como se pode verificar pela observação das deformadas, em particular, das Fases 7, 8 e 9. Este facto permite fazer face ao acréscimo de deslocamentos verticais do tabuleiro aquando da posterior adição do tramo central de fecho a meio-vão de modo a garantir os objectivos de deslocamento na Fase 11.

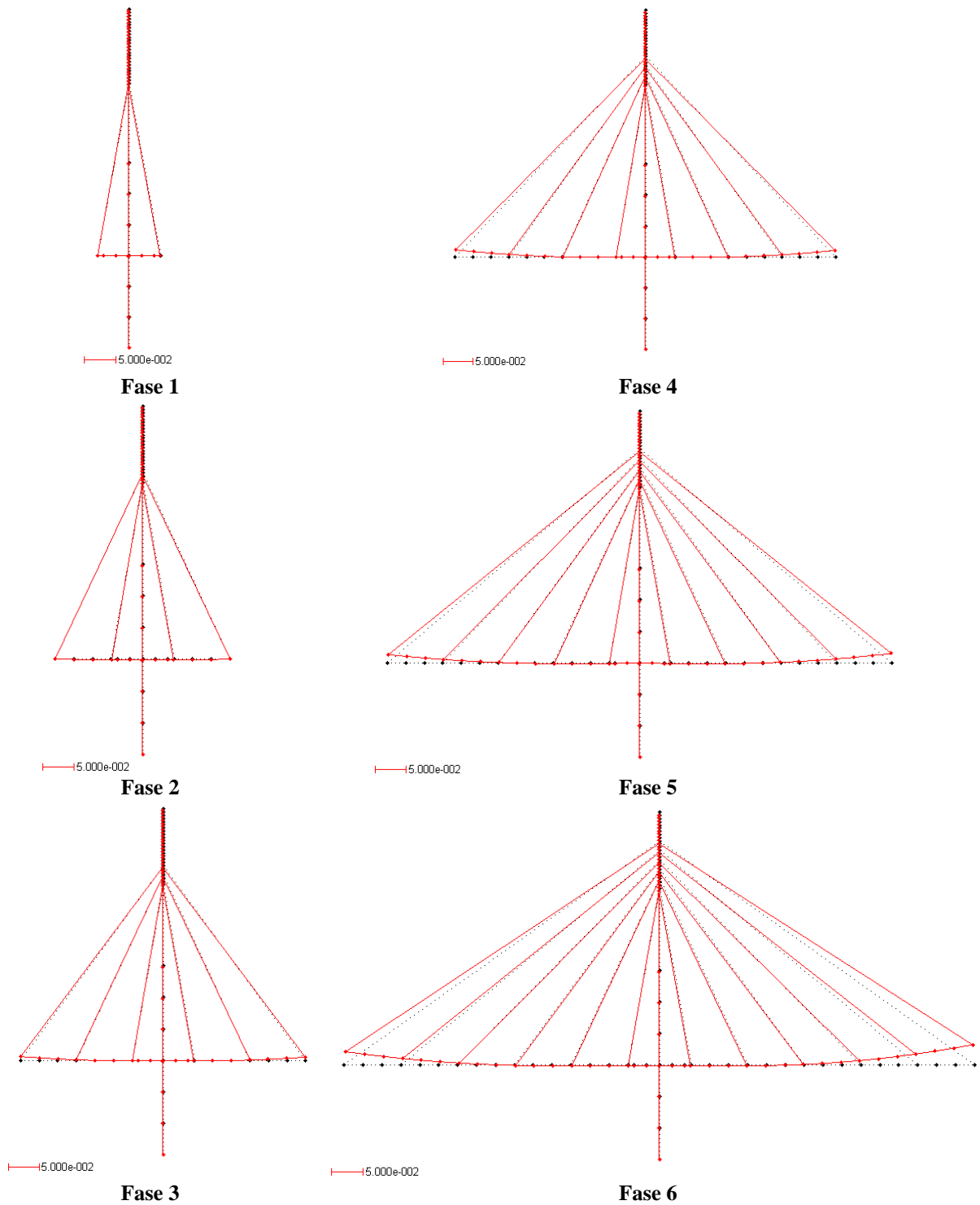


Figura 5.28 – Deformadas das fases 1 a 6 – estrutura otimizada (Exemplo 2)

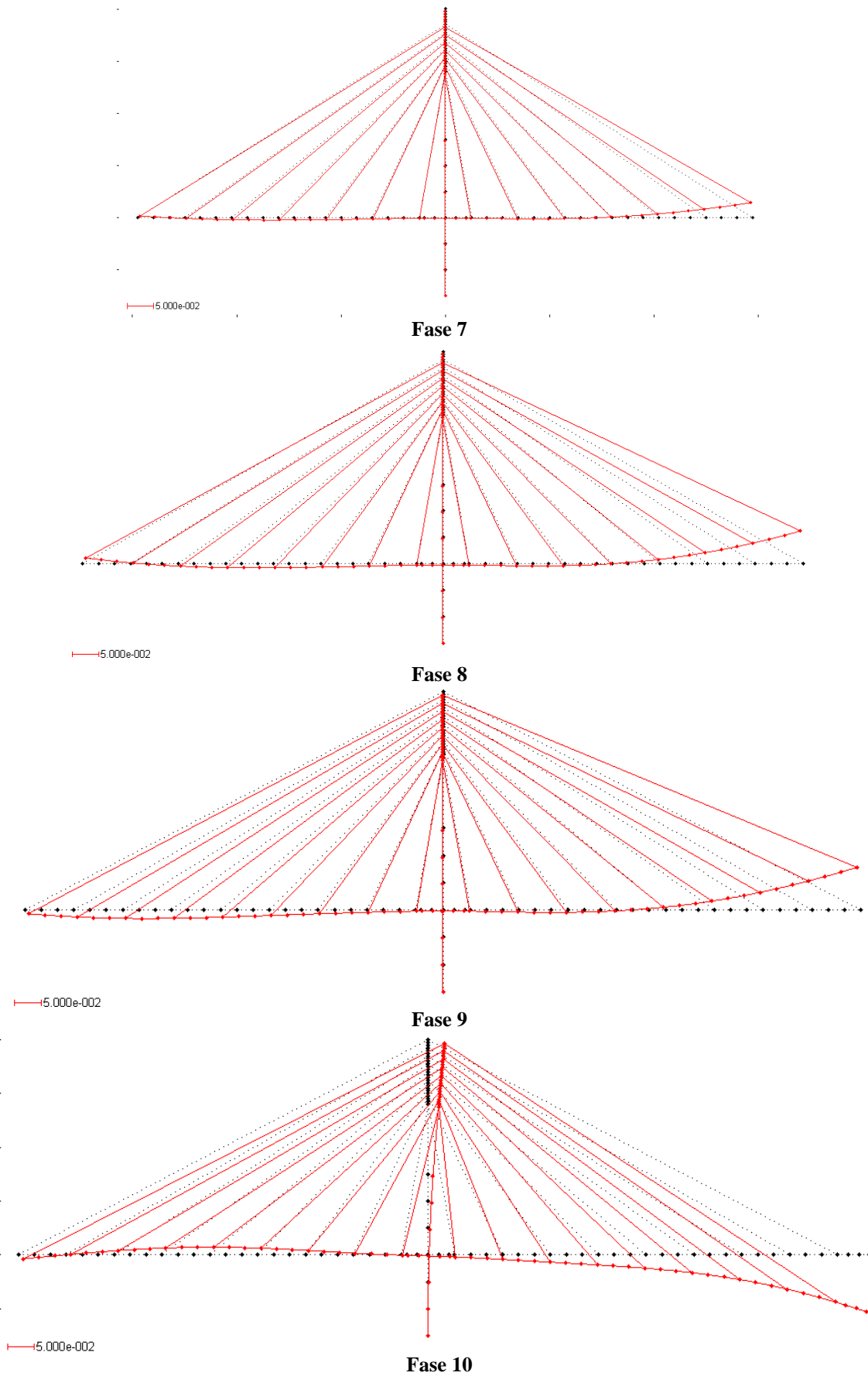


Figura 5.29 – Deformadas das fases 7 a 10 – estrutura otimizada (Exemplo 2)

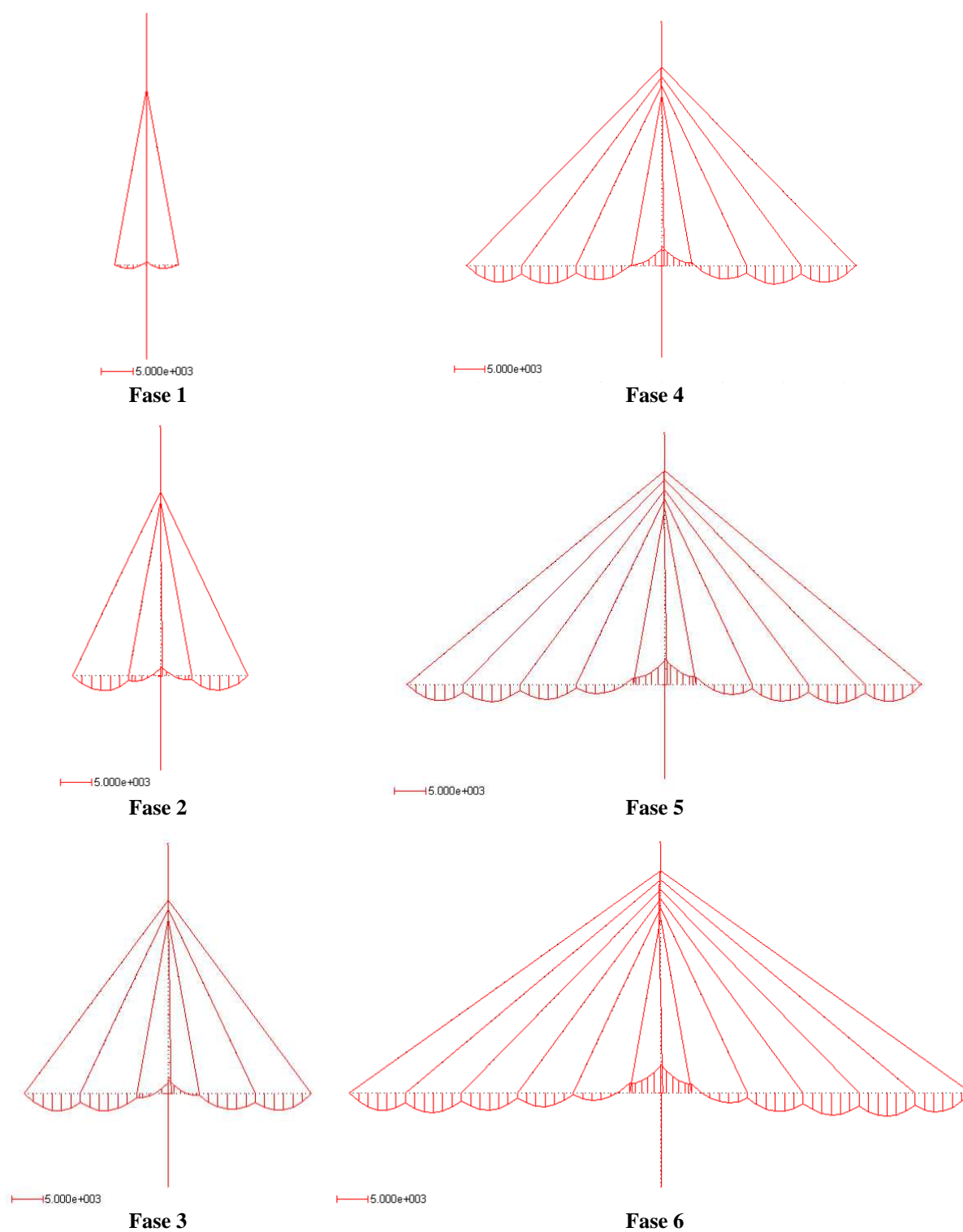


Figura 5.30 – Diagramas de momento flector das fases 1 a 6 – estrutura otimizada (Exemplo 2)

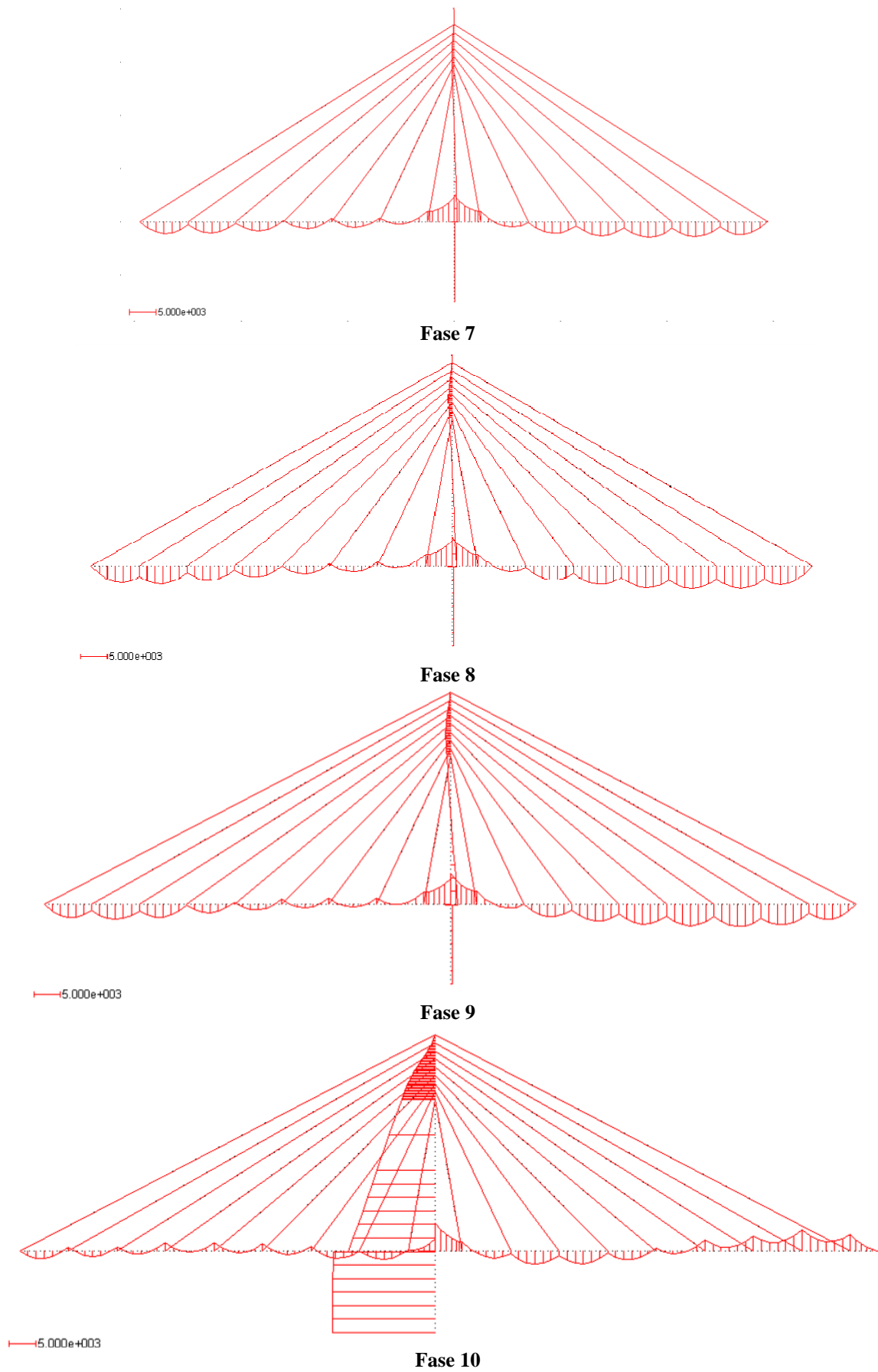


Figura 5.31 – Diagramas de momento flector das fases 7 a 10 – estrutura otimizada (Exemplo 2)

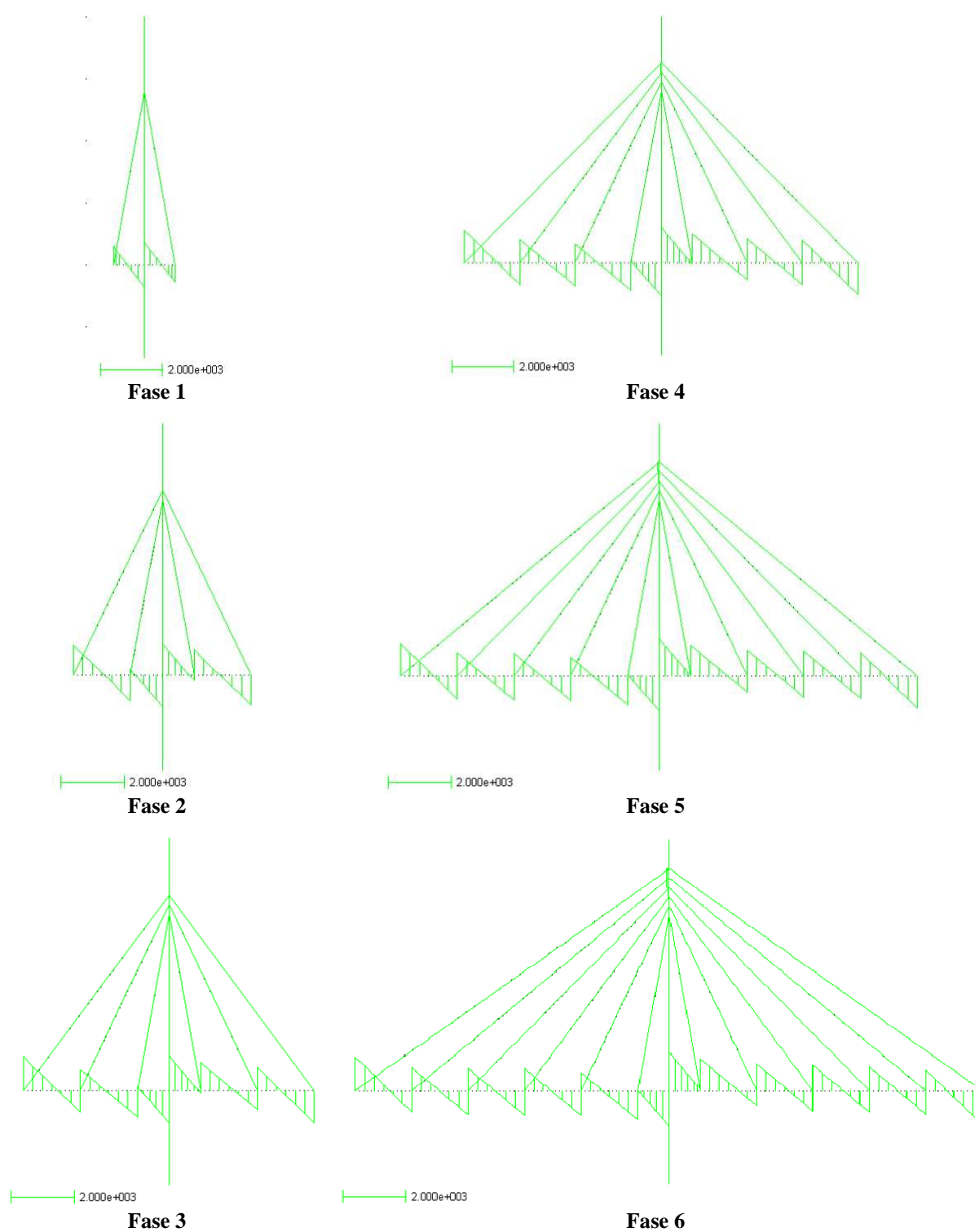


Figura 5.32 – Diagramas de esforço transverso das fases 1 a 6 – estrutura otimizada (Exemplo 2)

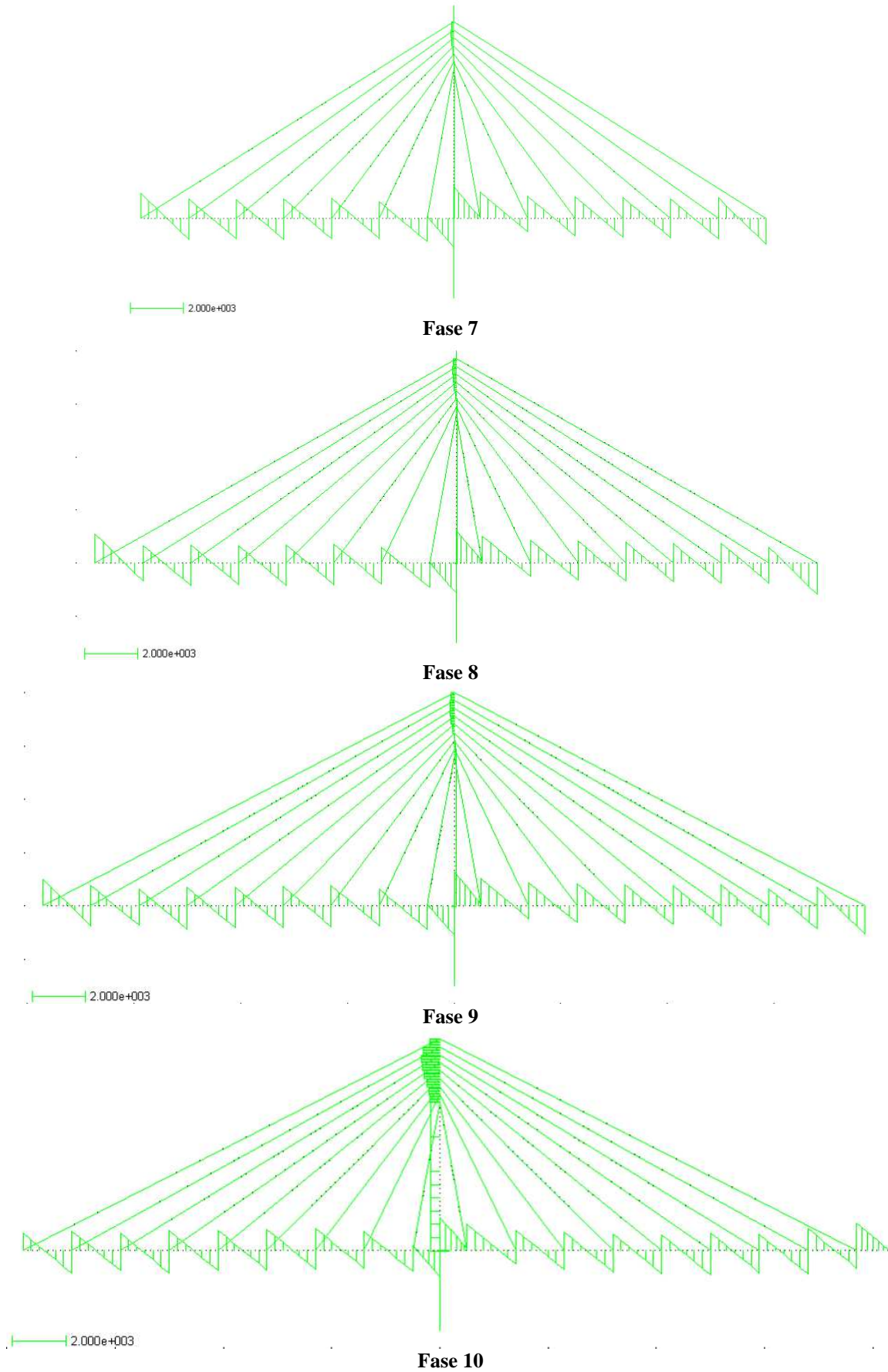


Figura 5.33 – Diagramas de esforço transverso das fases 7 a 10 – estrutura otimizada (Exemplo 2)

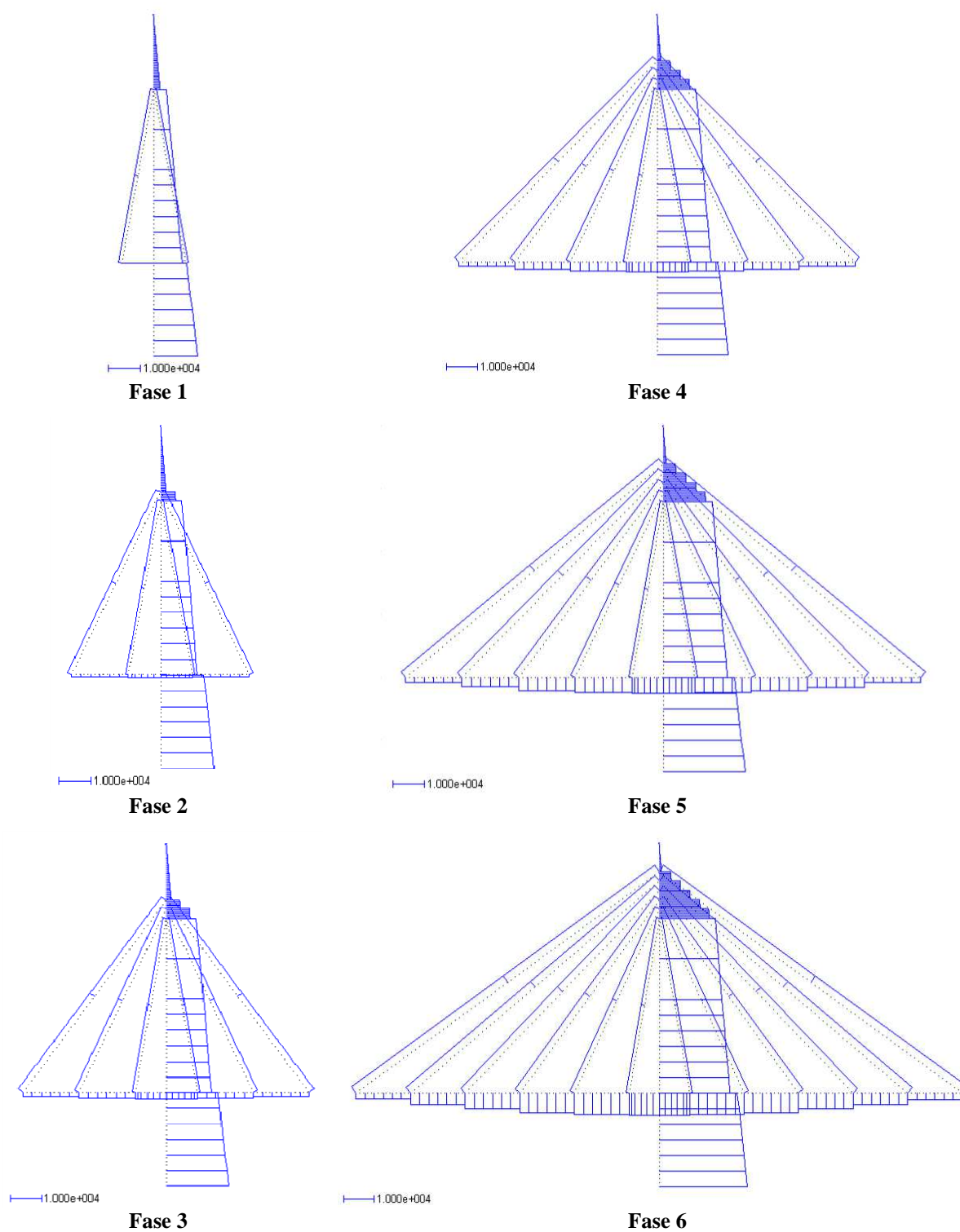


Figura 5.34 – Diagramas de esforço axial das fases 1 a 6 – estrutura otimizada (Exemplo 2)

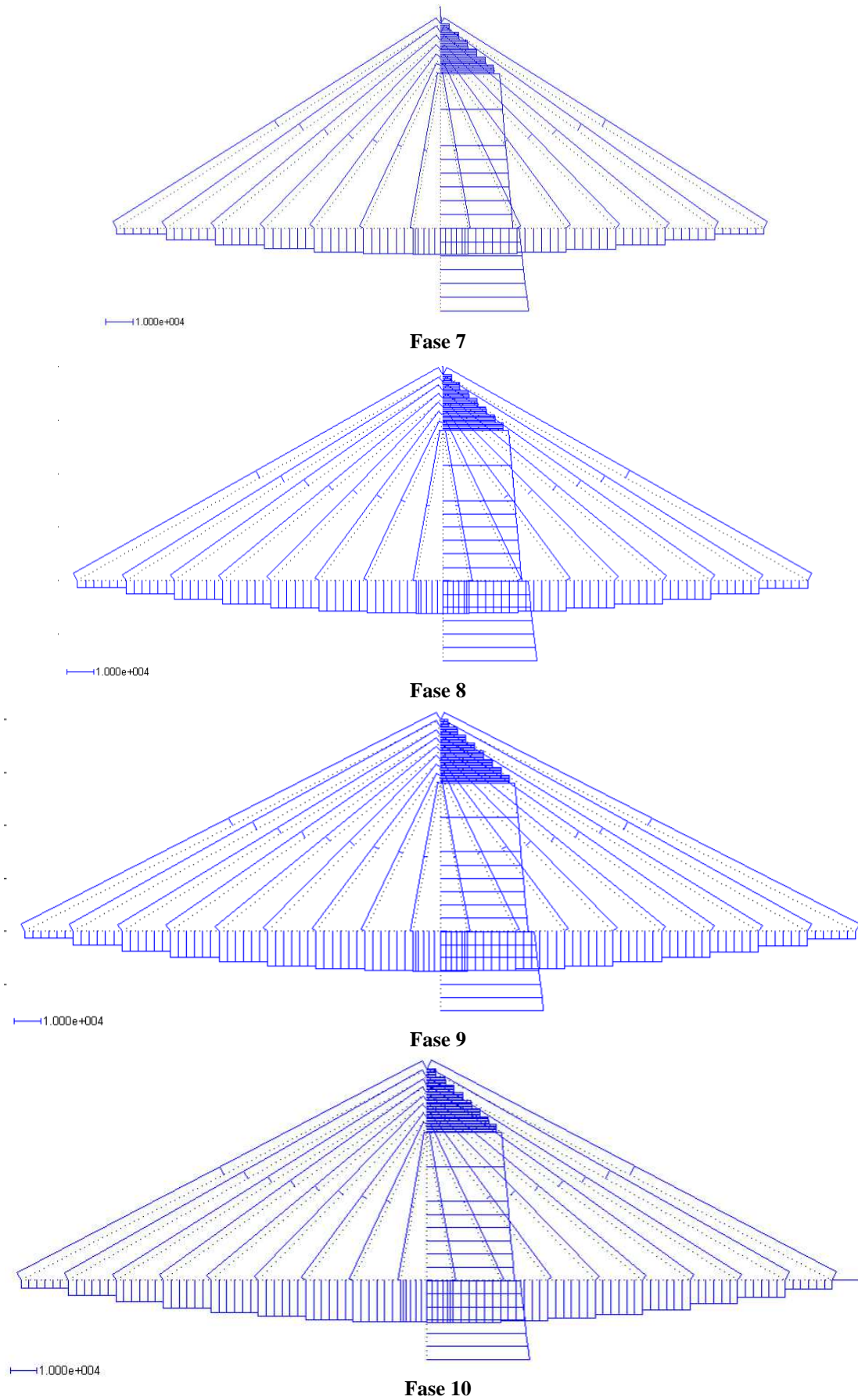


Figura 5.35 – Diagramas de esforço axial das fases 7 a 10 – estrutura otimizada (Exemplo 2)

Na Figura 5.36 apresenta-se a deformada da estrutura na Fase 11 correspondendo à ponte completa sujeita à carga permanente. Como se pode observar, a solução obtida com o processo de optimização caracteriza-se por apresentar pequenos deslocamentos, sendo inferiores aos limites impostos nos objectivos de projecto. A norma dos deslocamentos verticais do tabuleiro é de apenas 1,93 cm, apresentando um valor máximo de 4,77 cm na secção de meio-vão. O deslocamento horizontal no topo da torre tem um valor de 8,32 mm.

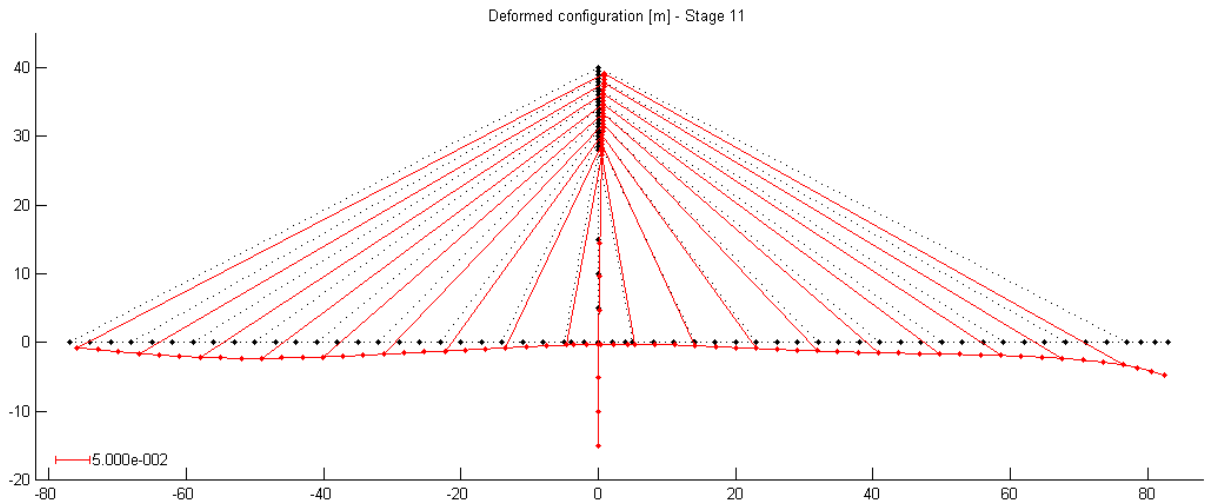


Figura 5.36 – Deformada para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura optimizada (Exemplo 2)

Relativamente aos esforços internos para a ponte completa sujeita a carga permanente, apresentam-se nas Figuras 5.37 a 5.39 os respectivos diagramas de momento flector, esforço transversal e esforço axial.

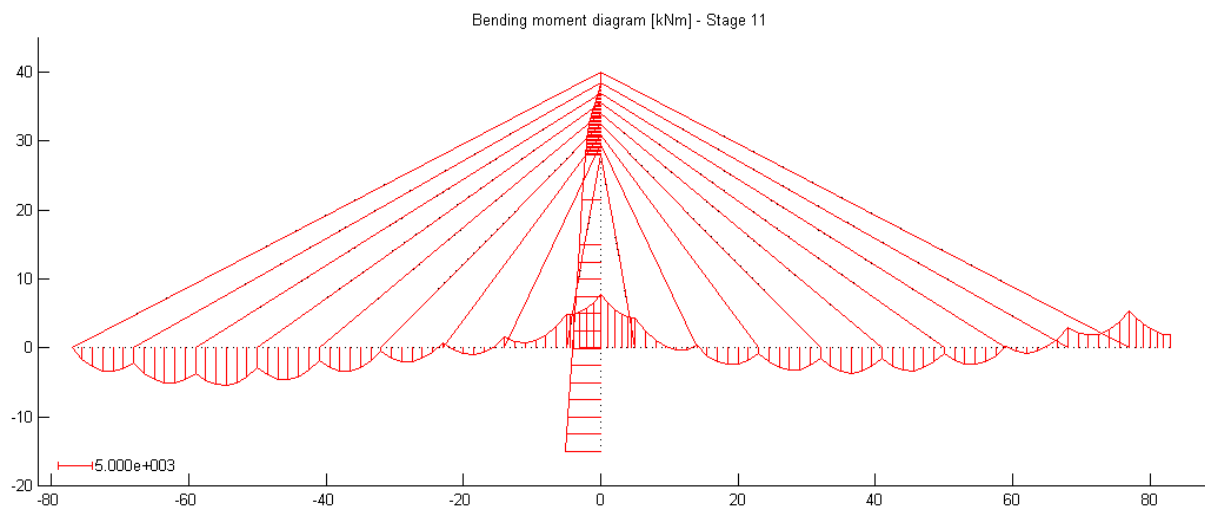


Figura 5.37 – Diagrama de momento flector para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura optimizada (Exemplo 2)

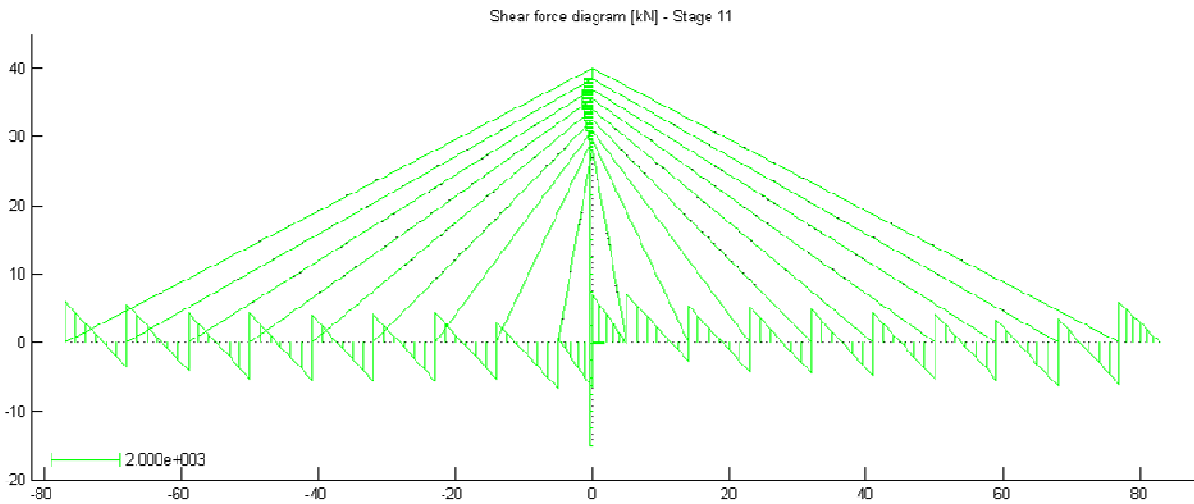


Figura 5.38 – Diagrama de esforço transversal para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 2)

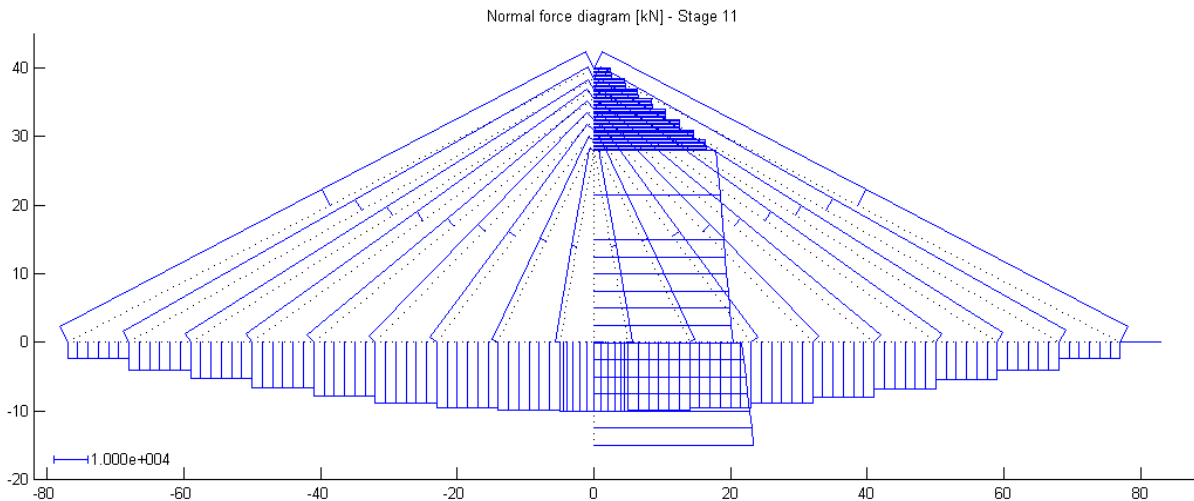


Figura 5.39 – Diagrama de esforço axial para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 2)

Na Figura 5.37 observa-se, tal como para o Exemplo 1, o padrão de viga contínua para a distribuição de momento flector no tabuleiro. O momento flector máximo negativo no tabuleiro ocorre na ligação com a torre e apresenta um valor de -7811 kNm. O momento flector máximo positivo verifica-se no vão lateral e apresenta um valor de 5298 kNm. Na torre o momento flector máximo ocorre na base e apresenta um valor de 5066 kNm, ou seja, da mesma ordem de grandeza do momento flector máximo no tabuleiro.

No que respeita ao diagrama de esforço axial representado na Figura 5.39 observa-se, no caso dos tirantes, o aumento desta grandeza da torre para os vãos. As torres estão sujeitas a elevados esforços de compressão, que aumentam do topo para a base, onde se verifica um esforço axial de, aproximadamente, 46700 kN. No caso do tabuleiro o esforço axial aumenta

dos vãos para a torre devido às forças de compressão introduzidas pelos tirantes inclinados no tabuleiro. Desta forma, devido à contribuição de todos os tirantes, a zona mais comprimida do tabuleiro é a zona junto à torre onde se verifica um esforço axial de, aproximadamente, 20000 kN. Este efeito de compressão no tabuleiro devido aos tirantes não se faz sentir no tramo de meio-vão da ponte onde se tem um esforço axial de tracção reduzido, cerca de 62 kN.

Nas Figuras 5.40 e 5.41 apresentam-se, respectivamente, as distribuições de tensões normais ao longo do tabuleiro e das torres, para a ponte completa sujeita a carga permanente (Fase 11). Como se pode observar, os valores das tensões são inferiores aos limites definidos para os elementos de betão estrutural em condições de serviço. As torres estão totalmente sujeitas a tensões de compressão que variam, aproximadamente, entre os 1 e 6 MPa. No tabuleiro também predominam as tensões de compressão, à excepção das zonas de extremidade dos vãos laterais e central onde se observam tensões de tracção de valor reduzido, inferior a 2 MPa.

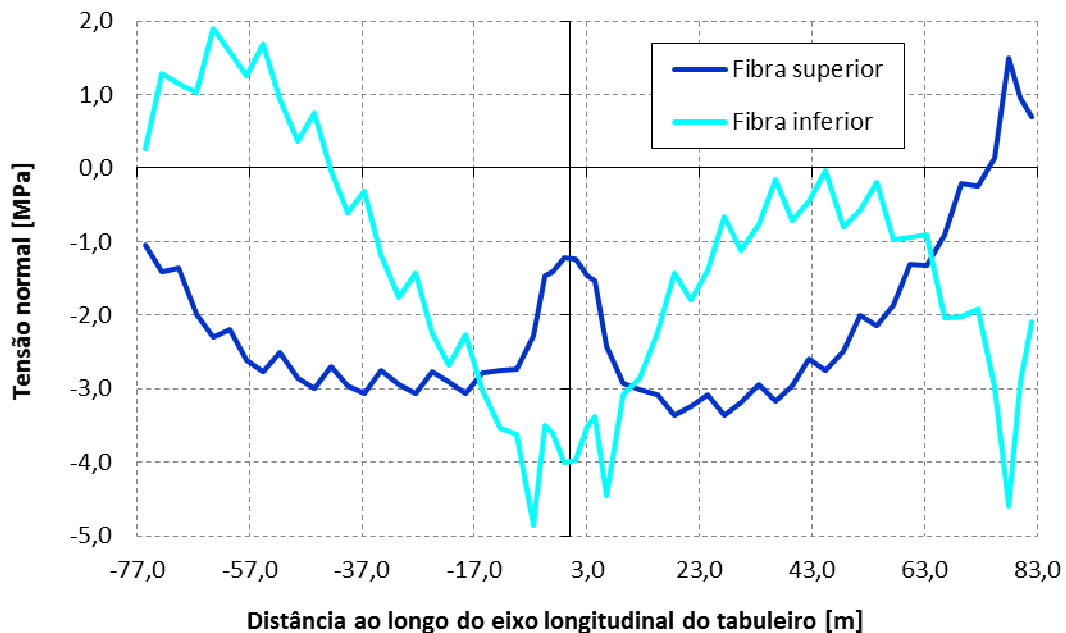


Figura 5.40 – Distribuição de tensões normais no tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 2)

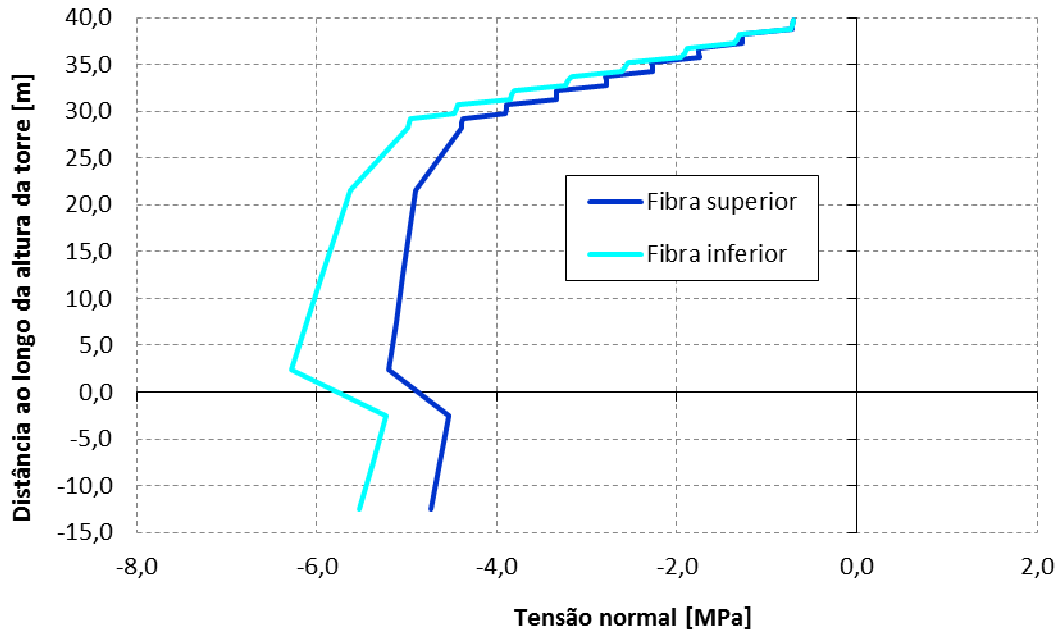


Figura 5.41 – Distribuição de tensões normais na torre para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 2)

Como já foi referido, para além da análise para a condição de carga permanente, a ponte foi ainda analisada para três casos de carga em que se considera a alternância da sobrecarga rodoviária. Nas Figuras 5.42 a 5.53 apresentam-se a configuração deformada e os diagramas de esforços internos para esses três casos de carga.

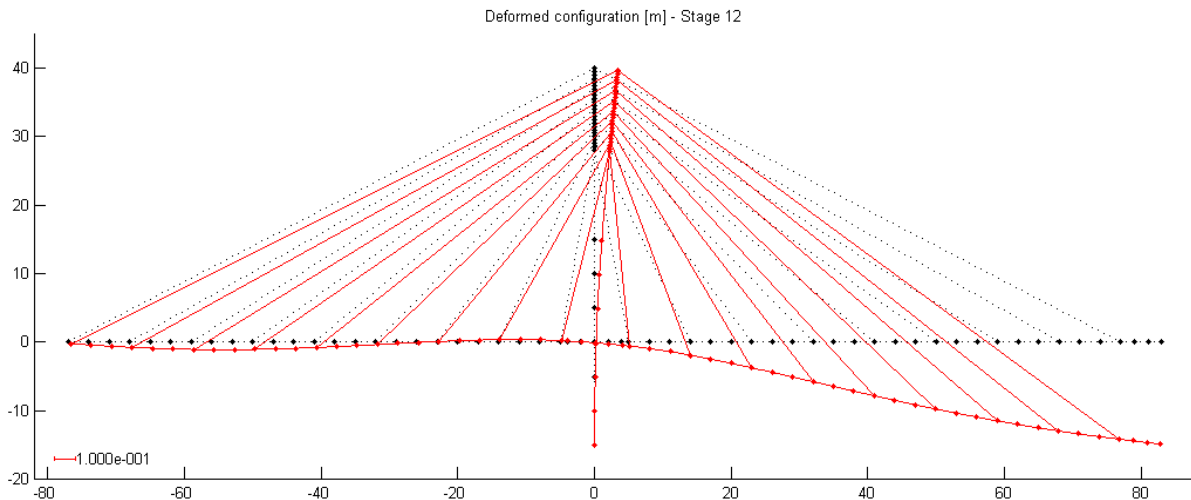


Figura 5.42 – Deformada para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 2)

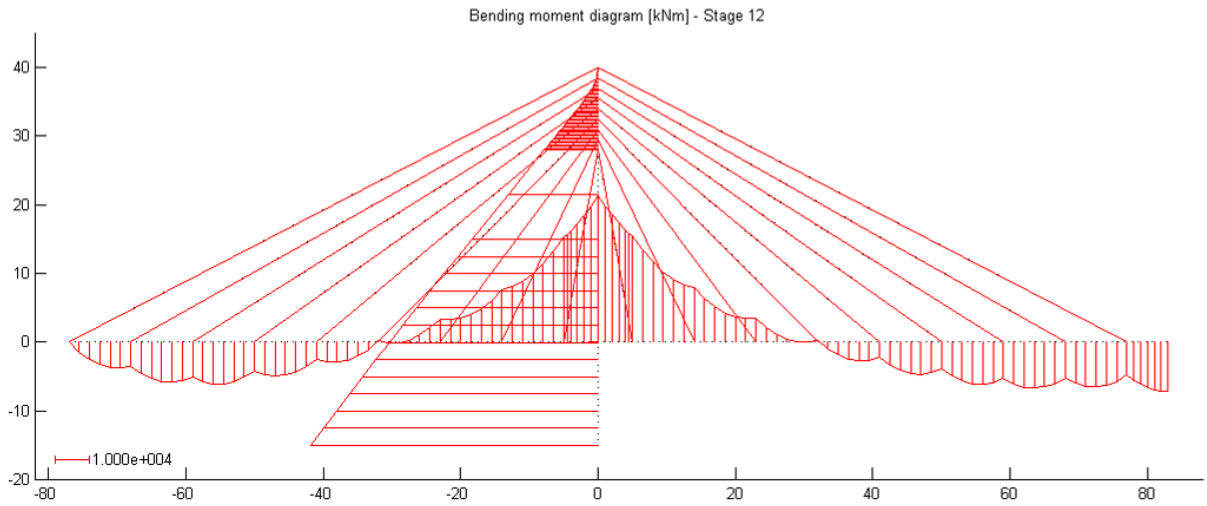


Figura 5.43 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 2)

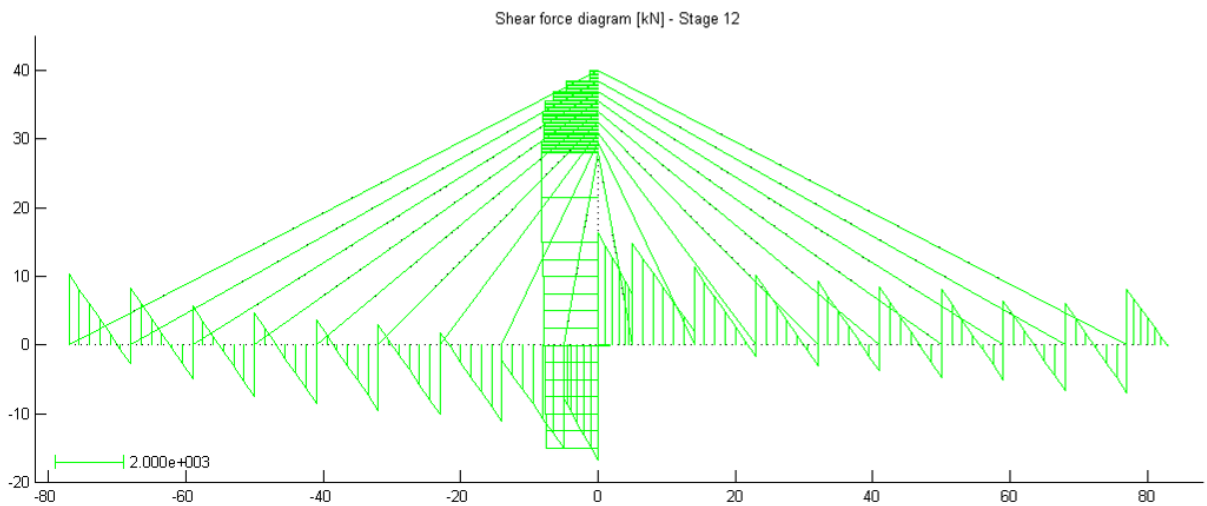


Figura 5.44 – Diagrama de esforço transversal para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 2)

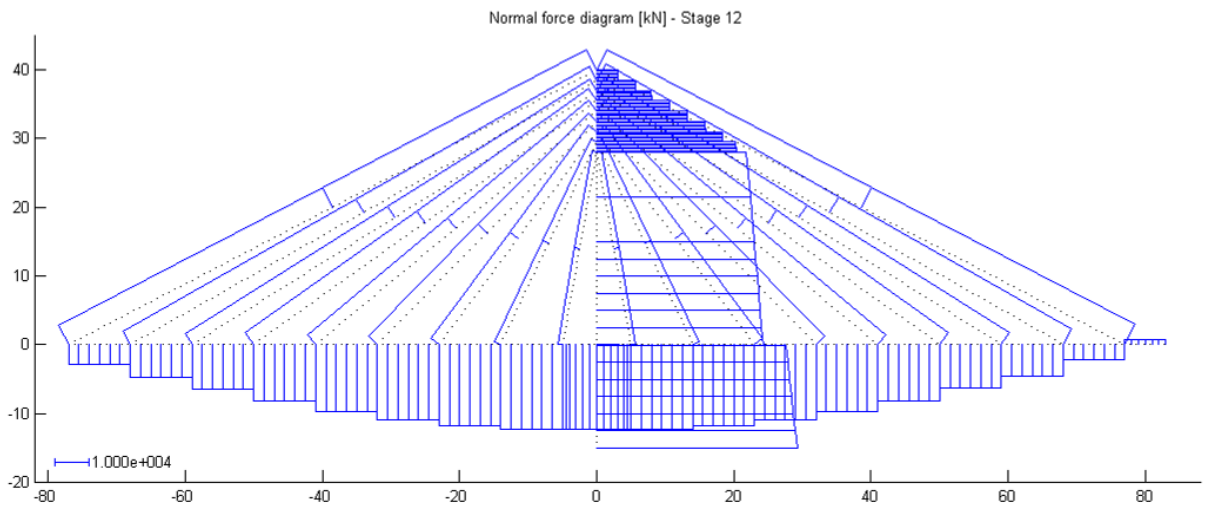


Figura 5.45 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 2)

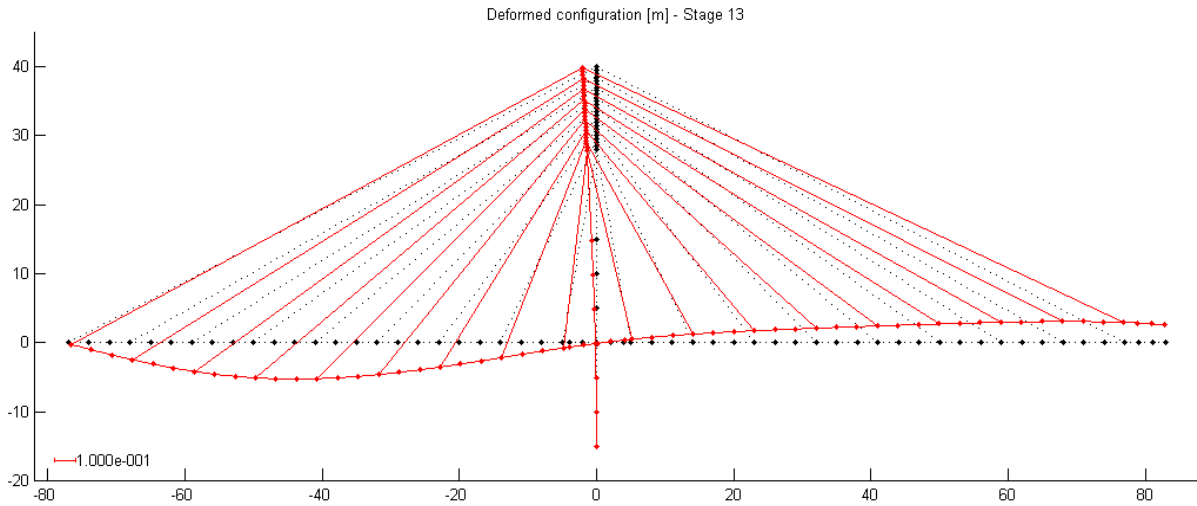


Figura 5.46 – Deformada para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 2)

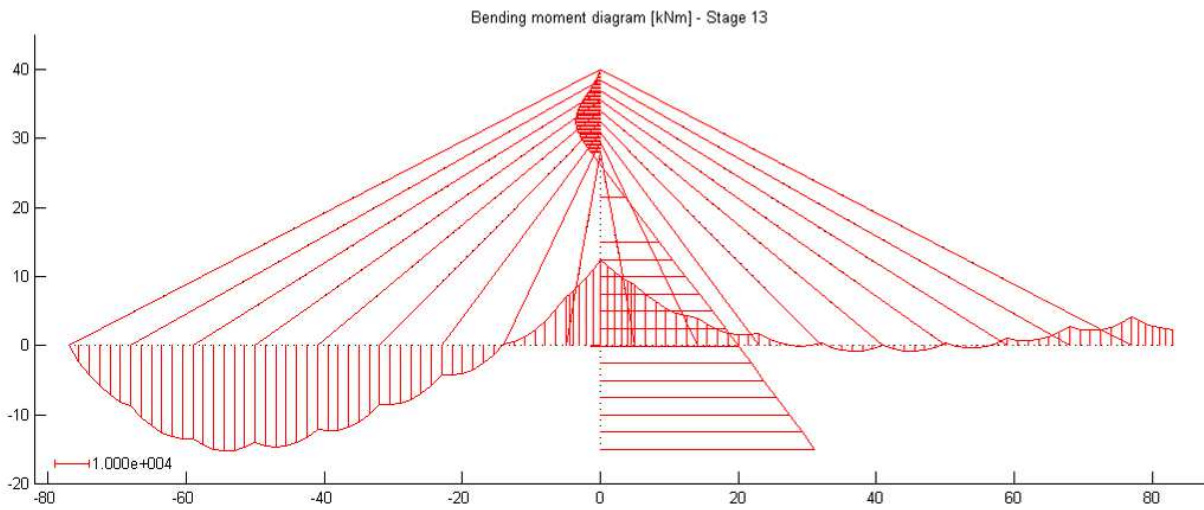


Figura 5.47 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 2)

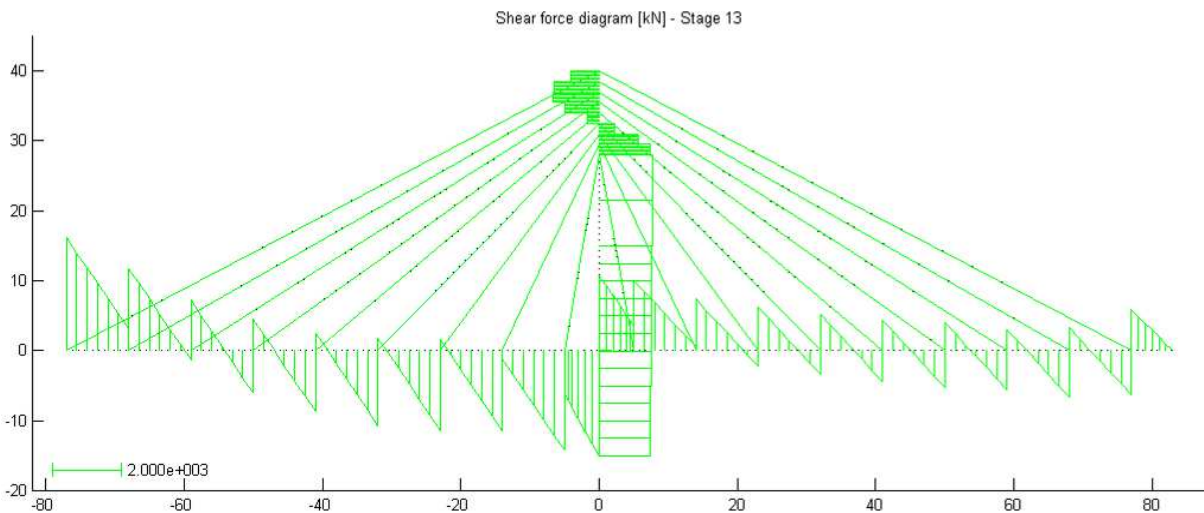


Figura 5.48 – Diagrama de esforço transversal para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 2)

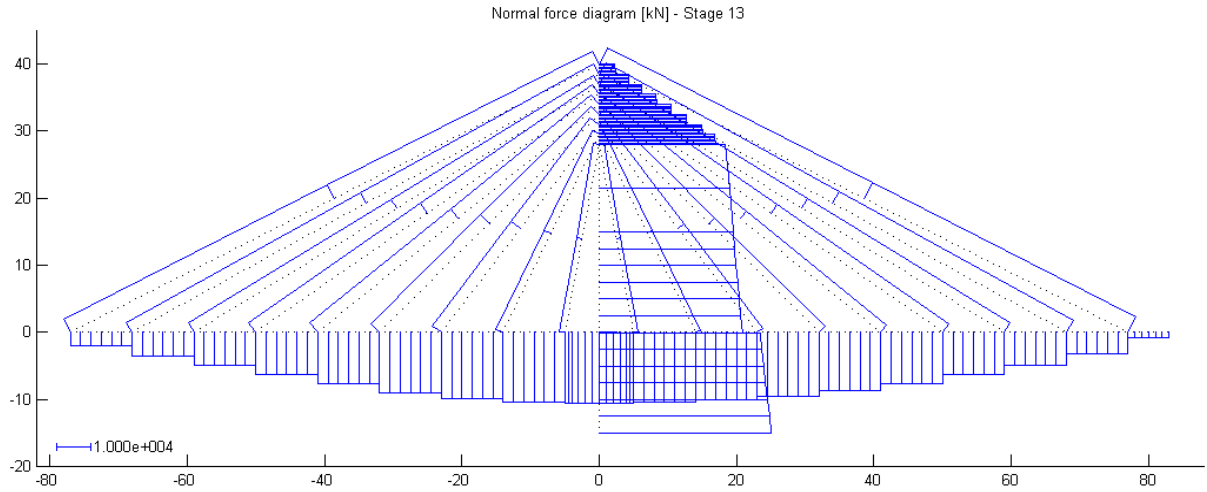


Figura 5.49 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 2)

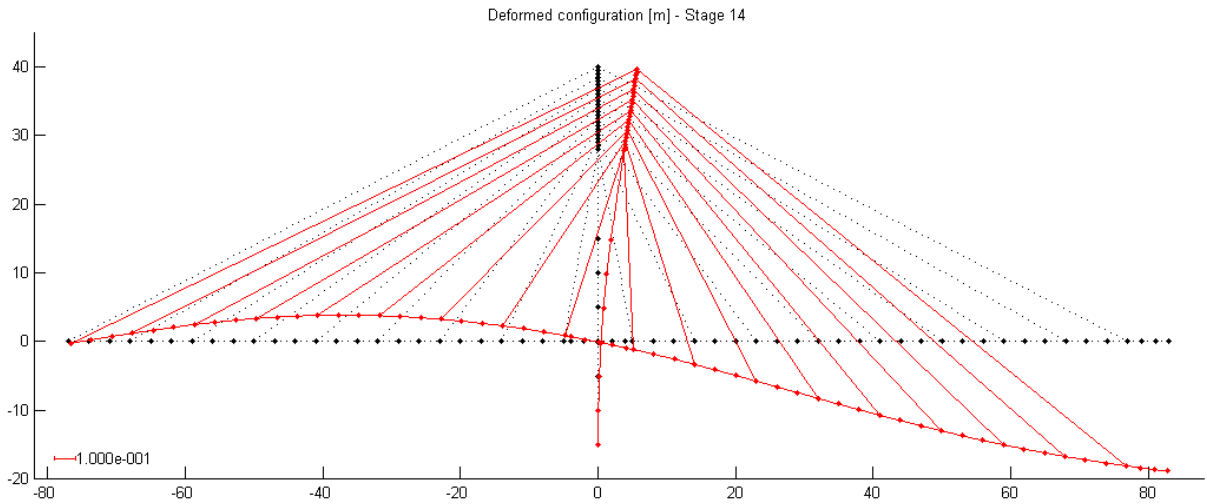


Figura 5.50 – Deformada para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 2)

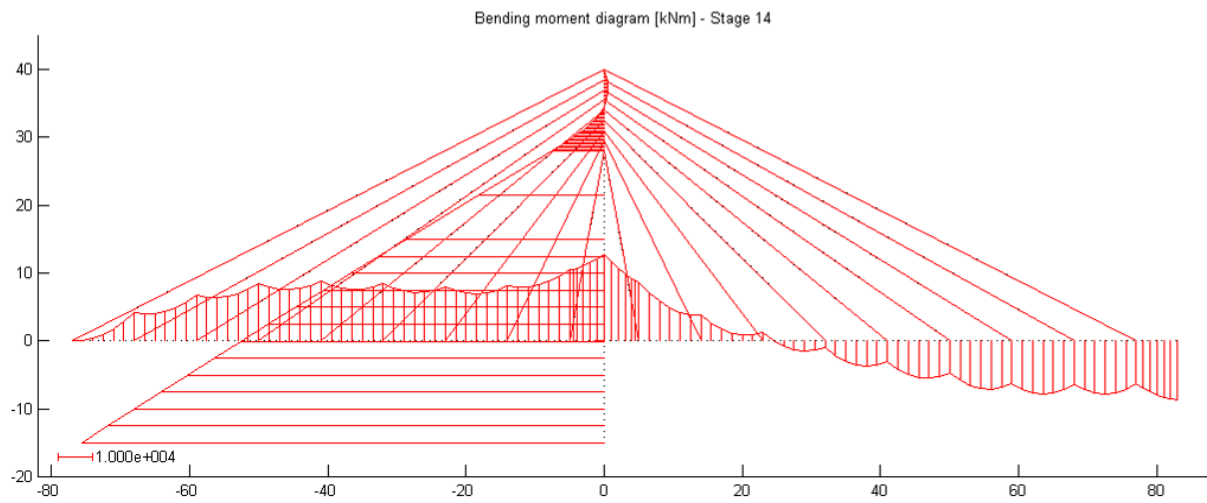


Figura 5.51 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 2)

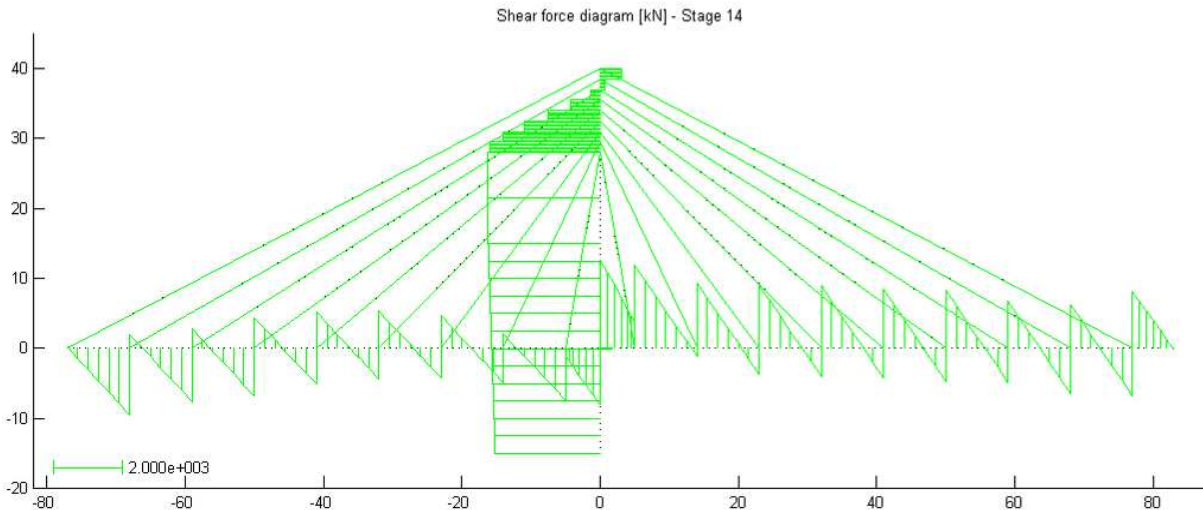


Figura 5.52 – Diagrama de esforço transversal para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 2)

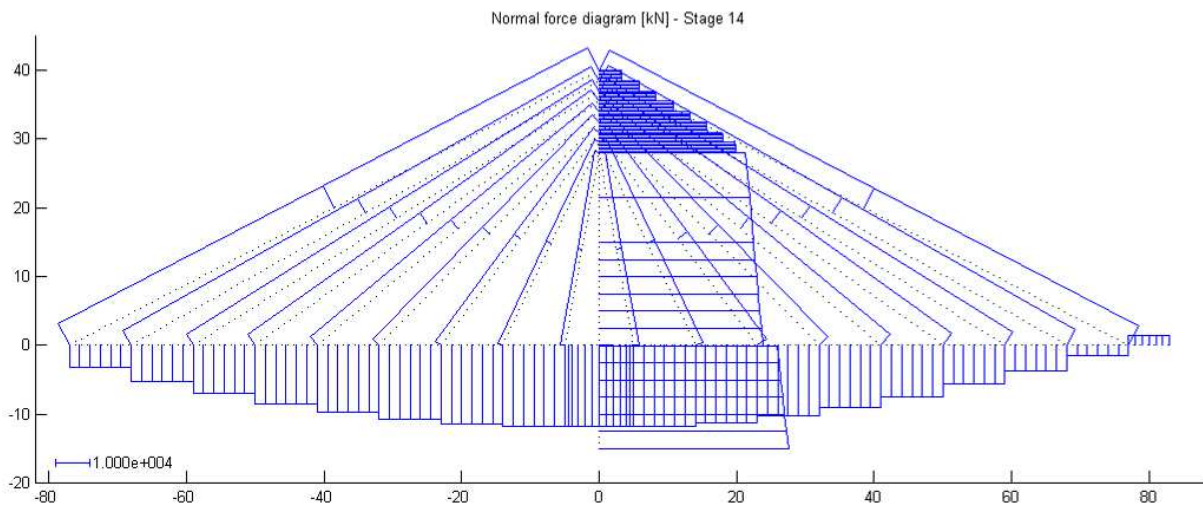


Figura 5.53 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 2)

5.3.3. Análise da influência dos efeitos diferidos

Para analisar a influência dos efeitos diferidos resolveu-se o Exemplo 3, semelhante ao anterior e em que se consideraram o faseamento construtivo e os efeitos geometricamente não-lineares, mas neste caso sem a consideração dos efeitos diferidos do comportamento do betão. Os resultados obtidos neste exemplo são comparados com os obtidos no Exemplo 2 e que foram apresentados na secção anterior. Procedeu-se também à análise da estrutura, sem recorrer à optimização, nas condições do Exemplo 2 mas utilizando os valores das variáveis de decisão obtidas no Exemplo 3, ou seja, sem efeitos diferidos. No Exemplo 3 têm-se os mesmos objectivos de projecto que no Exemplo 2, ocorrendo o mesmo para as variáveis de decisão, cuja descrição se apresentou no Quadro 5.6.

De referir ainda que na presente secção e nas seguintes, em que se estuda a influência de vários aspectos na solução do problema de determinação das forças nos tirantes, não se irá proceder a uma apresentação exaustiva dos resultados dada a enorme quantidade de informação associada para cada exemplo analisado. Apresentam-se apenas os resultados mais relevantes de modo a analisar a influência dos vários aspectos estudados no custo da ponte e em especial nas forças de instalação e de ajustamento nos tirantes.

Relativamente aos resultados do Exemplo 3 começa-se por apresentar, na Figura 5.54, a evolução do custo da ponte e da correspondente redução de custo em função do número de iterações de análise e optimização. Como se pode observar, a evolução do custo e da sua redução ao longo do processo de optimização apresentam o mesmo padrão que nos exemplos apresentados nas secções anteriores. Para a solução final do Exemplo 3 obteve-se uma redução de custo de 5,18% a que corresponde um custo de 1.794.209 €. Relativamente à solução obtida para o Exemplo 2 em que se consideraram os efeitos diferidos, o custo final é aproximadamente o mesmo, verificando-se uma ligeiríssima diminuição de 0,09%. A obtenção de um custo similar é expectável na medida em que este depende unicamente das áreas da secção transversal dos tirantes e não existem grandes diferenças nas condições dos exemplos analisados.

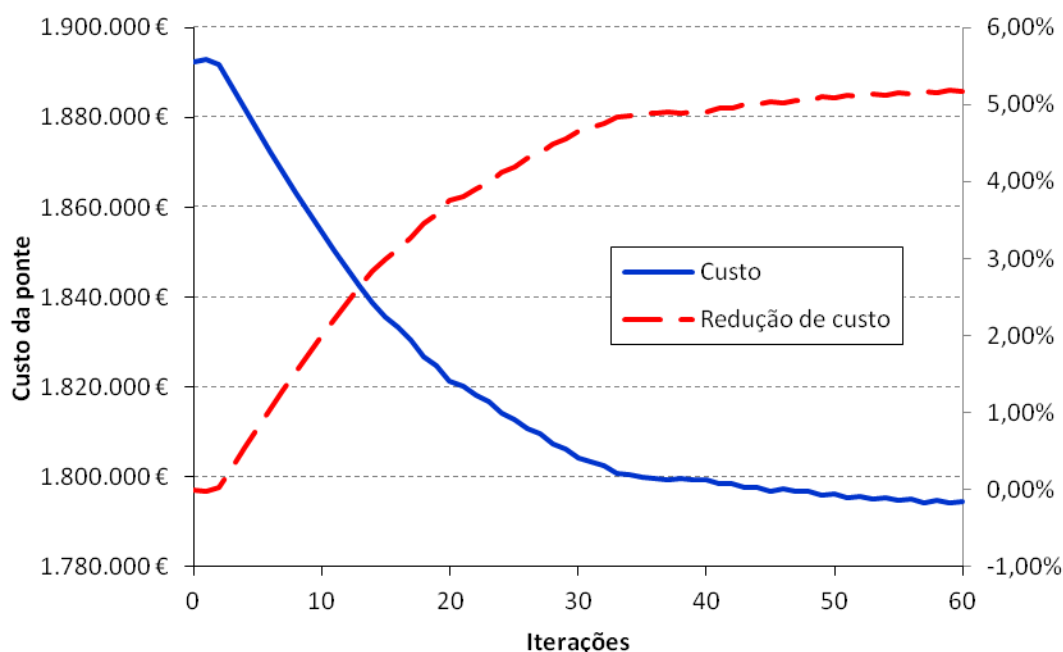


Figura 5.54 – Evolução do custo da ponte e da redução de custo em função do número de iterações (Exemplo 3)

Nas Figuras 5.55 a 5.58 apresentam-se, respectivamente, os deslocamentos verticais do tabuleiro, a distribuição de momentos flectores no tabuleiro e as distribuições de tensões normais no tabuleiro e nas torres, correspondentes à ponte completa sujeita a carga

permanente (Fase 11) para as soluções finais obtidas nos Exemplos 2 e 3 e para a análise do Exemplo 2 com os valores das variáveis de decisão obtidas no Exemplo 3.

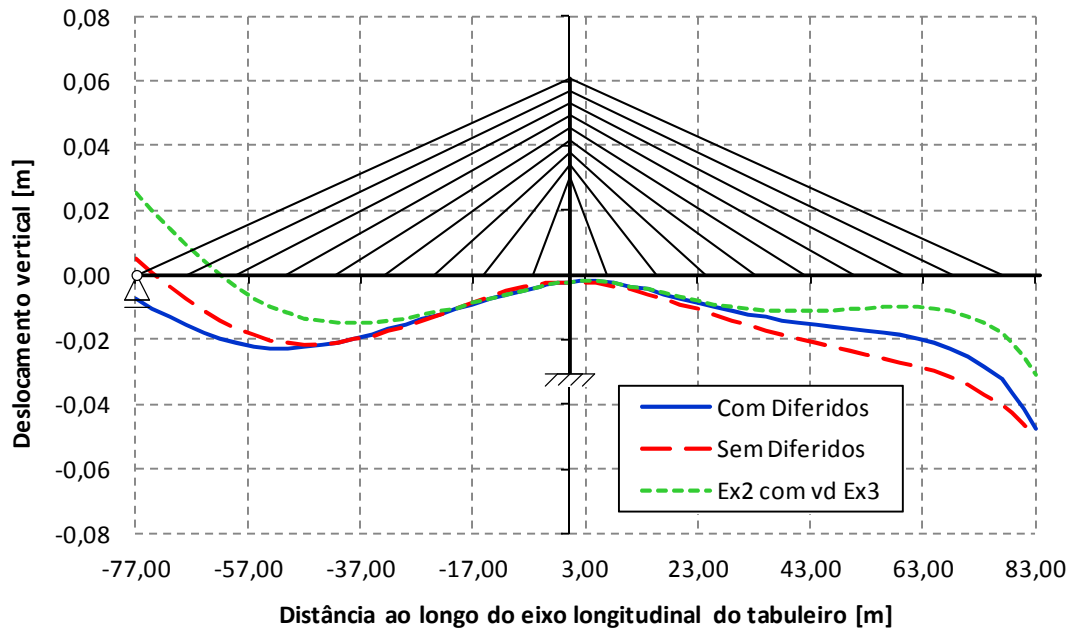


Figura 5.55 – Deslocamentos verticais do tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – análise com efeitos diferidos vs análise sem efeitos diferidos

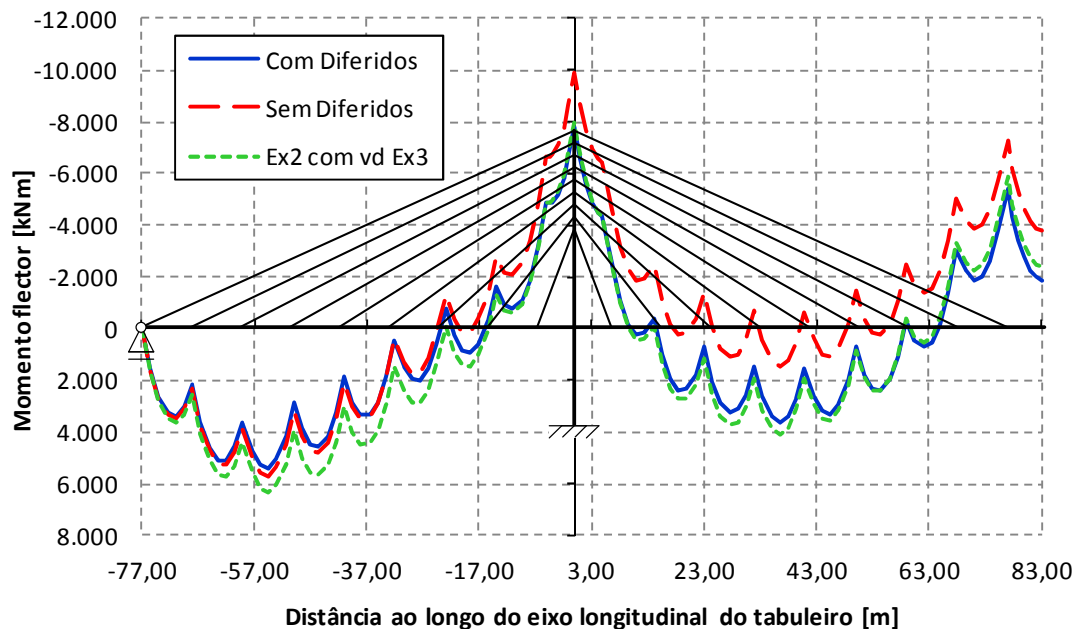


Figura 5.56 – Distribuição de momento flector no tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – análise com efeitos diferidos vs análise sem efeitos diferidos

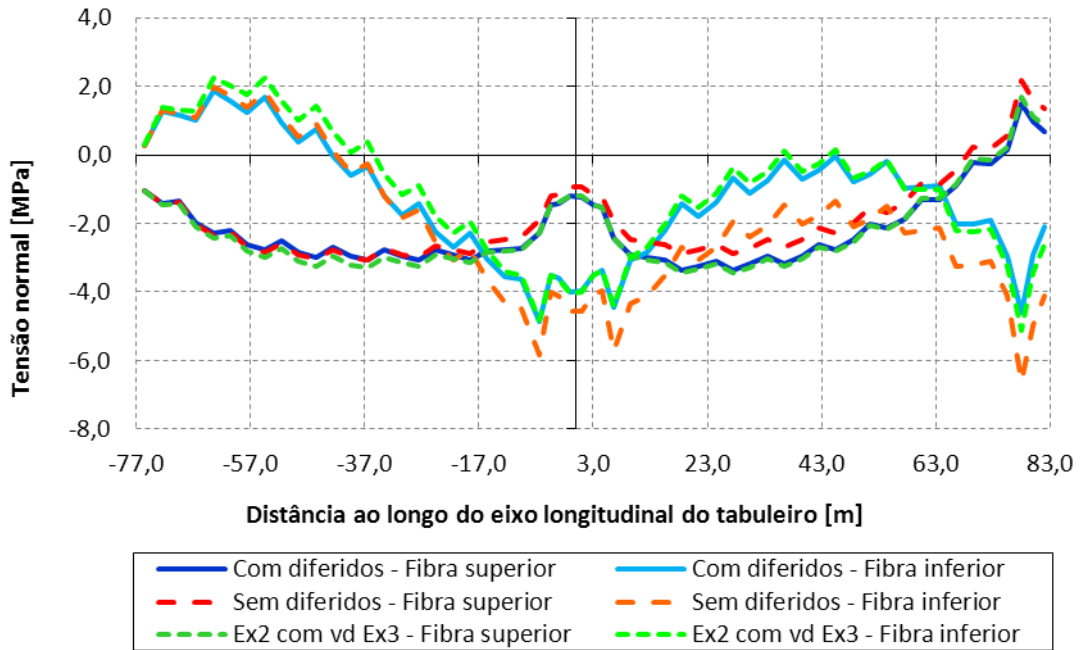


Figura 5.57 – Distribuição de tensões normais no tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – análise com efeitos diferidos vs análise sem efeitos diferidos

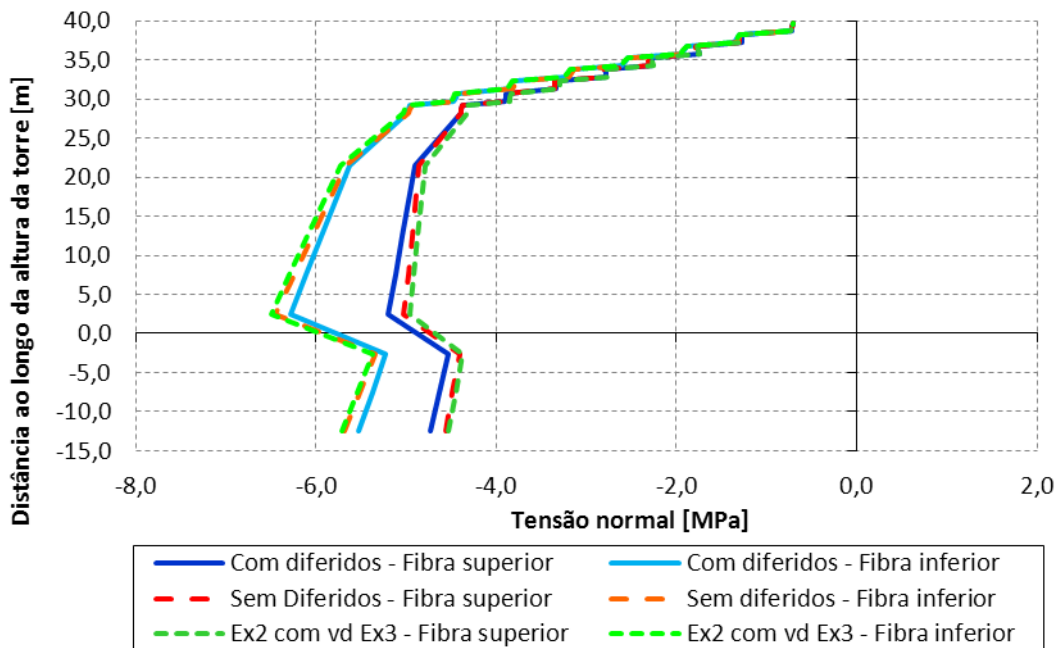


Figura 5.58 – Distribuição de tensões normais na torre para a ponte completa sujeita a carga permanente – análise com efeitos diferidos vs análise sem efeitos diferidos

Como se pode observar nas Figuras 5.55 a 5.58 os resultados obtidos para os deslocamentos verticais do tabuleiro, momentos flectores no tabuleiro e tensões normais no tabuleiro e nas torres, considerando ou não os efeitos diferidos do betão, são similares. Deste modo, apesar da não consideração dos efeitos diferidos alterar as condições do problema, o

algoritmo de optimização procura uma solução que, para as novas condições, verifique o conjunto de objectivos de projecto, que neste caso são os mesmos nos dois exemplos. De referir também que em ambos os exemplos se utilizou a mesma solução inicial para as variáveis de decisão.

Verifica-se também que a análise com efeitos diferidos utilizando os valores das variáveis de decisão obtidos sem a consideração destes efeitos conduz a alterações na resposta da estrutura. Assim, observam-se alterações nos valores dos deslocamentos e das tensões que, mesmo não sendo significativas, correspondem a violações dos valores admissíveis definidos para os objectivos de projecto. Do ponto de vista da optimização esta solução constitui uma solução não admissível. A este respeito pode referir-se que o deslocamento vertical do nó de ligação do tabuleiro ao encontro apresenta um valor 28,6% superior ao valor admissível (2 cm). De referir também que na Fase 11 as tensões nos tirantes 17 e 18 apresentam valores 1,65% e 2,16% superiores ao limite definido para condições de serviço.

Para o Exemplo 3, apresentam-se no Quadro 5.9 os valores iniciais e finais, das áreas da secção transversal, das forças de instalação e das forças de ajustamento, que constituem as variáveis de decisão do problema de optimização.

Quadro 5.9 – Valores iniciais e finais (após optimização) das forças e das áreas dos tirantes (Exemplo 3)

Tirante	Áreas da secção transversal [m ²]		Forças de instalação [kN]		Forças de ajustamento [kN]	
	Valor inicial	Valor final	Valor inicial	Valor final	Valor inicial	Valor final
1	6,000×10 ⁻³	2,043×10 ⁻³	1000	1002	1500	1497
2	6,000×10 ⁻³	2,096×10 ⁻³	1000	995	1500	1500
3	6,000×10 ⁻³	2,318×10 ⁻³	1500	1503	1800	1793
4	6,000×10 ⁻³	2,297×10 ⁻³	1500	1494	1800	1802
5	6,000×10 ⁻³	3,082×10 ⁻³	1800	1803	2300	2294
6	6,000×10 ⁻³	2,553×10 ⁻³	1800	1804	2300	2311
7	6,000×10 ⁻³	3,231×10 ⁻³	2000	2007	2500	2504
8	6,000×10 ⁻³	2,846×10 ⁻³	2000	2027	2500	2532
9	6,000×10 ⁻³	3,366×10 ⁻³	2200	2219	2700	2726
10	6,000×10 ⁻³	3,065×10 ⁻³	2200	2262	2700	2765
11	6,000×10 ⁻³	3,449×10 ⁻³	2500	2541	3000	3061
12	7,500×10 ⁻³	3,534×10 ⁻³	2500	2609	3000	3110
13	7,500×10 ⁻³	2,929×10 ⁻³	2500	2571	3000	3110
14	7,500×10 ⁻³	3,540×10 ⁻³	2500	2638	3000	3150
15	7,500×10 ⁻³	3,152×10 ⁻³	3000	3096	3500	3665
16	7,500×10 ⁻³	4,358×10 ⁻³	3000	3173	3500	3685
17	7,500×10 ⁻³	5,732×10 ⁻³	3000	3098	5000	5226
18	7,500×10 ⁻³	5,642×10 ⁻³	3000	3185	4500	4722

Para facilitar a comparação dos resultados obtidos apresentam-se as Figuras 5.59 e 5.60, onde se representam, respectivamente, as distribuições de forças de instalação e de ajustamento nos tirantes para a análise com efeitos diferidos (Exemplo 2) e sem efeitos diferidos (Exemplo 3).

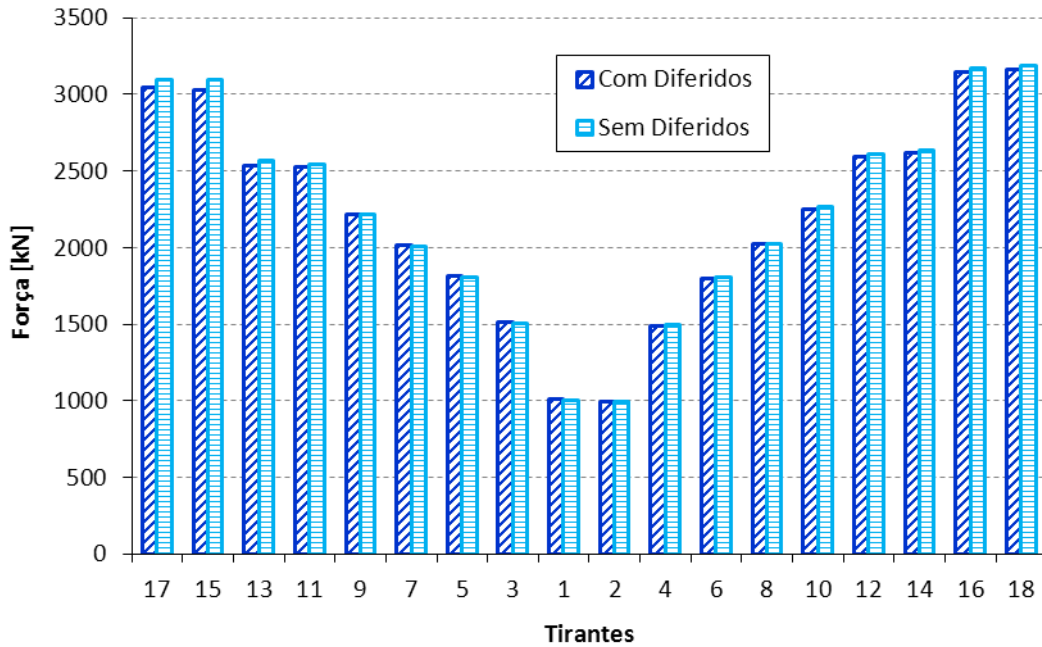


Figura 5.59 – Forças de instalação dos tirantes – análise com efeitos diferidos vs análise sem efeitos diferidos

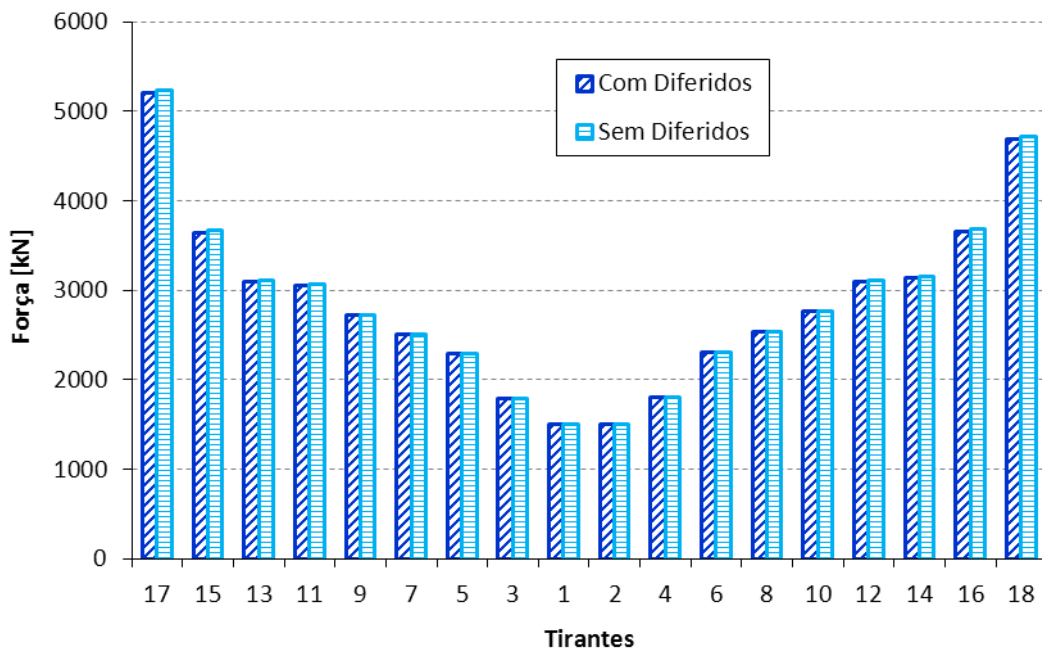


Figura 5.60 – Forças de ajustamento dos tirantes – análise com efeitos diferidos vs análise sem efeitos diferidos

De acordo com os resultados apresentados nas Figuras 5.59 e 5.60 pode referir-se que não se observam diferenças significativas nas forças nos tirantes. Deste modo, a não consideração dos efeitos diferidos do betão não altera significativamente a solução óptima obtida para os valores das forças de instalação e de ajustamento dos tirantes. Para ambos os conjuntos de forças verifica-se uma tendência geral de aumento dos valores das forças no caso da análise sem efeitos diferidos. Este facto poderá ser justificado pela necessidade de fazer face a maiores deslocamentos verticais que ocorram no tabuleiro na análise sem efeitos diferidos. A análise com efeitos diferidos tem em conta o aumento do módulo de elasticidade do betão, em virtude da maturação, e que se traduz numa menor deformação elástica. Da mesma forma, a consideração dos efeitos diferidos permite ter em conta um eventual efeito positivo da deformação de fluência quando são aplicados valores adequados das forças nos tirantes para contrabalançar o peso do tabuleiro.

Quanto à análise sem efeitos diferidos observa-se, em comparação com a solução obtida considerando os efeitos diferidos, uma diminuição máxima nas forças de instalação de 0,57% (tirante 3) e um aumento máximo de 2,18% (tirante 15), verificando-se um aumento médio de 0,55%. No que respeita aos valores das forças de ajustamento tem-se uma diminuição máxima de 0,05% (tirante 3) e um aumento máximo de 0,73% (tirante 15), verificando-se um aumento médio de 0,25%.

Em resumo, pode referir-se que a não consideração dos efeitos diferidos do betão não altera significativamente o resultado do problema de optimização das forças nos tirantes. Por conseguinte, tanto o custo da ponte como as distribuições de forças de instalação e de ajustamento nos tirantes não apresentam variações relevantes face à análise considerando os efeitos diferidos. Deste modo, o algoritmo de optimização procura, ajustando os valores das secções e das forças nos tirantes, uma solução óptima de custo mínimo que garante os objectivos de projecto para as diferentes condições de análise.

Eventualmente poderiam ter-se mais diferenças caso se considerassem outros valores para parâmetros como a resistência à compressão do betão ou a humidade relativa do ambiente, que influenciam os valores das deformações devido aos efeitos diferidos.

De referir ainda que, apesar das diferenças não serem significativas, os resultados sugerem que os efeitos diferidos devem ser considerados no problema de optimização de modo a obter valores adequados das forças de instalação e de ajustamento, assim como das áreas dos tirantes, para cada situação específica de análise da estrutura.

5.3.4. Análise da influência do faseamento construtivo

Os resultados apresentados nas secções 5.3.1 e 5.3.2 permitem analisar a influência da consideração do faseamento construtivo e dos efeitos diferidos no problema de optimização das forças nos tirantes. Assim, na presente secção efectua-se uma análise comparativa dos resultados obtidos nos Exemplos 1 e 2 em que se procedeu, respectivamente, à optimização da ponte completa e à optimização considerando efeitos diferidos e fases construtivas. De referir também que, na medida em que para o Exemplo 1 apenas se considera a ponte completa, não se dispõe dos valores das forças de instalação, pelo que a comparação é feita com os valores das forças de ajustamento do Exemplo 2.

No que respeita ao custo da ponte têm-se valores aproximadamente iguais, 1.796.430 € para o Exemplo 1 e 1.795.862 € para o Exemplo 2, o que corresponde a uma diferença relativa de 0,03%.

Na Figura 5.61 apresenta-se a distribuição das forças nos tirantes para a análise sem fases e para a análise com fases. Os resultados apresentados ilustram algumas diferenças entre os valores das forças obtidas com as duas análises. Assim, para a análise da ponte completa tem-se para todos os tirantes, à excepção dos tirantes 17 e 18, valores mais elevados das forças. A solução óptima para a análise sem fases apresenta valores das forças nos tirantes, em média 13,25% superiores. A variação máxima é de 34,01% no tirante 1 e a variação mínima é de 2,95% no tirante 6. Nos tirantes 17 e 18 têm-se valores inferiores das forças relativamente à análise com fases, verificando-se uma variação de 3,37% e 0,91%, respectivamente.

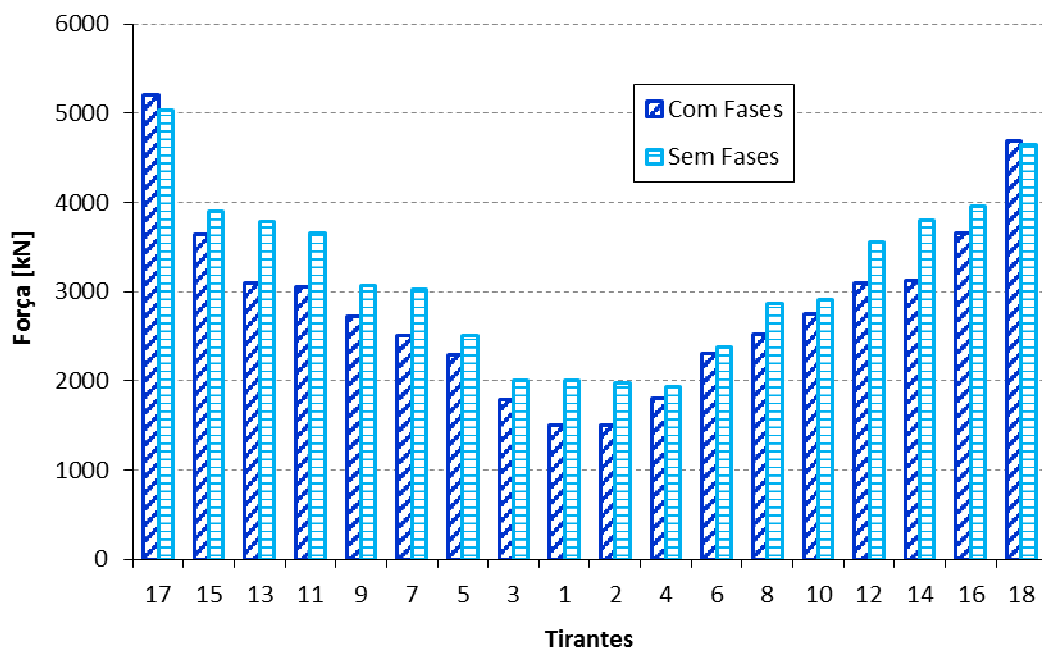


Figura 5.61 – Forças nos tirantes para a ponte completa – análise com fases vs análise sem fases

Os resultados dos Exemplos 1 e 2 salientam a importância de se considerar o faseamento construtivo no problema de determinação das forças nos tirantes em pontes atirantadas de betão. Neste sentido a análise considerando o faseamento construtivo inclui a alteração da geometria da estrutura, a história de cargas e a evolução das propriedades mecânicas e dos efeitos diferidos do betão.

De salientar ainda que a consideração do faseamento construtivo permite determinar as forças de instalação dos tirantes e não apenas as forças que deverão ser aplicadas na ponte completa em condições de serviço. Este é um aspecto importante pois as forças de instalação e de ajustamento são significativamente diferentes e o conhecimento das forças de instalação é relevante para um melhor controlo da resposta da estrutura durante o processo construtivo.

5.3.5. Análise da influência de parâmetros intervenientes nos modelos de fluência e retracção

Na presente secção analisa-se a influência de alguns parâmetros intervenientes nos modelos de fluência e retracção na solução do problema de optimização das forças nos tirantes. Para tal, resolveu-se o exemplo base (Exemplo 2) variando os valores de parâmetros como a resistência à compressão do betão (f_{ck}), a humidade relativa do ambiente (RH), a idade do betão aquando do primeiro carregamento (t_0) e a espessura equivalente da secção transversal (h_0). No exemplo base considerou-se um valor da resistência à compressão do betão de 35 MPa, uma humidade relativa do ambiente de 80%, 10 dias para a idade do betão aquando do primeiro carregamento e a espessura equivalente calculada com a fórmula habitual (Equação (3.84)) dependendo das dimensões da secção transversal. Nos Quadros 5.10 a 5.12 resumem-se os resultados dos vários exemplos analisados no que respeita às forças de instalação, às forças de ajustamento e às áreas da secção transversal dos tirantes, respectivamente.

Quadro 5.10 – Forças de instalação para diferentes valores de parâmetros dos modelos de fluência e retração

Parâmetros	$f_{ck} = 35$ MPa; $RH = 80\%$; $t_0 = 10$ dias; h_0	$f_{ck} = 50$ MPa; $RH = 80\%$; $t_0 = 10$ dias; h_0	$f_{ck} = 35$ MPa; $RH = 50\%$; $t_0 = 10$ dias; h_0	$f_{ck} = 35$ MPa; $RH = 80\%$; $t_0 = 20$ dias; h_0	$f_{ck} = 35$ MPa; $RH = 80\%$; $t_0 = 20$ dias; $1,2 h_0$
Tirante	Força [kN]	Força [kN]	Força [kN]	Força [kN]	Força [kN]
1	1006	1007	1035	1008	1006
2	991	990	981	990	992
3	1511	1519	1533	1516	1509
4	1487	1486	1470	1485	1489
5	1811	1769	1832	1806	1808
6	1798	1798	1784	1797	1800
7	2011	1962	1983	1983	2007
8	2020	2024	2011	2023	2021
9	2214	2217	2211	2223	2215
10	2253	2261	2250	2261	2255
11	2521	2553	2495	2532	2522
12	2595	2607	2597	2599	2597
13	2532	2571	2535	2534	2536
14	2618	2633	2623	2608	2621
15	3030	3078	3055	3024	3037
16	3146	3166	3154	3147	3150
17	3040	3067	3068	3029	3019
18	3157	3177	3169	3158	3161

De acordo com os resultados obtidos verifica-se que as variações introduzidas nos diversos parâmetros não conduzem a alterações significativas nos valores das forças de instalação. Do mesmo modo, não é possível indicar um padrão claro para as alterações dos valores dessas forças.

Os resultados mostram que aumentando a resistência à compressão do betão de 35 MPa para 50 MPa se obtém uma redução máxima de 2,42% nos valores das forças de instalação (tirante 7), contudo, tem-se um aumento médio de 0,22%. Verifica-se também que diminuindo a humidade relativa de 80% para 50% se obtém um aumento máximo de 2,82% nas forças de instalação (tirante 1), observando-se um aumento médio de 0,13%. O aumento da idade do betão aquando do primeiro carregamento conduz a uma redução média de 0,05% e a uma redução máxima de 1,39% (tirante 7) nos valores das forças de instalação. No que respeita à espessura equivalente, aumentando 20% o valor deste parâmetro obteve-se um aumento médio de 0,02% e uma redução máxima de 0,70% (tirante 17) nos valores das forças de instalação.

Quadro 5.11 – Forças de ajustamento para diferentes valores de parâmetros dos modelos de fluência e retracção

Parâmetros	$f_{ck} = 35 \text{ MPa};$ $RH = 80\%;$ $t_0 = 10 \text{ dias};$ h_0	$f_{ck} = 50 \text{ MPa};$ $RH = 80\%;$ $t_0 = 10 \text{ dias};$ h_0	$f_{ck} = 35 \text{ MPa};$ $RH = 50\%;$ $t_0 = 10 \text{ dias};$ h_0	$f_{ck} = 35 \text{ MPa};$ $RH = 80\%;$ $t_0 = 20 \text{ dias};$ h_0	$f_{ck} = 35 \text{ MPa};$ $RH = 80\%;$ $t_0 = 20 \text{ dias};$ $1,2 h_0$
Tirante	Força [kN]	Força [kN]	Força [kN]	Força [kN]	Força [kN]
1	1497	1500	1514	1498	1497
2	1500	1497	1500	1499	1500
3	1794	1806	1796	1797	1794
4	1802	1797	1803	1801	1803
5	2295	2258	2299	2289	2295
6	2310	2308	2312	2310	2311
7	2504	2458	2472	2476	2503
8	2528	2531	2530	2532	2529
9	2723	2726	2736	2734	2726
10	2758	2765	2762	2767	2760
11	3054	3080	3062	3068	3055
12	3097	3109	3103	3113	3099
13	3096	3122	3105	3116	3098
14	3131	3146	3138	3122	3134
15	3644	3669	3653	3646	3646
16	3658	3678	3666	3660	3663
17	5202	5225	5207	5202	5201
18	4694	4714	4704	4695	4697

No que respeita aos valores das forças de ajustamento apresentados no Quadro 5.11 pode referir-se que as variações máximas relativamente à solução base são menores do que as verificadas para as forças de instalação. Deste modo, o aumento da resistência à compressão do betão traduz-se numa redução máxima de 1,83% (tirante 7) e num aumento médio de 0,11%. A diminuição da humidade relativa conduz a uma redução máxima de 1,28% (tirante 7) e num aumento médio de 0,15%. O aumento da idade do betão leva a uma redução máxima de 1,10% (tirante 7) e num aumento médio de 0,06%. Por último, o aumento da espessura equivalente é o que conduz a menores variações, tendo-se um aumento máximo de 0,12% (tirante 16) e um aumento médio de 0,04%.

Quadro 5.12 – Áreas da secção transversal dos tirantes para diferentes valores de parâmetros dos modelos de fluência e retracção

Parâmetros	$f_{ck} = 35 \text{ MPa};$ $RH = 80\%;$ $t_0 = 10 \text{ dias};$ h_0	$f_{ck} = 50 \text{ MPa};$ $RH = 80\%;$ $t_0 = 10 \text{ dias};$ h_0	$f_{ck} = 35 \text{ MPa};$ $RH = 50\%;$ $t_0 = 10 \text{ dias};$ h_0	$f_{ck} = 35 \text{ MPa};$ $RH = 80\%;$ $t_0 = 20 \text{ dias};$ h_0	$f_{ck} = 35 \text{ MPa};$ $RH = 80\%;$ $t_0 = 20 \text{ dias};$ $1,2 h_0$
Tirante	Área [m ²]	Área [m ²]	Área [m ²]	Área [m ²]	Área [m ²]
1	$2,159 \times 10^{-3}$	$2,026 \times 10^{-3}$	$1,974 \times 10^{-3}$	$2,034 \times 10^{-3}$	$2,009 \times 10^{-3}$
2	$2,096 \times 10^{-3}$	$2,248 \times 10^{-3}$	$2,034 \times 10^{-3}$	$2,226 \times 10^{-3}$	$2,156 \times 10^{-3}$
3	$2,229 \times 10^{-3}$	$2,129 \times 10^{-3}$	$2,209 \times 10^{-3}$	$2,270 \times 10^{-3}$	$2,148 \times 10^{-3}$
4	$2,314 \times 10^{-3}$	$2,293 \times 10^{-3}$	$2,124 \times 10^{-3}$	$2,509 \times 10^{-3}$	$2,248 \times 10^{-3}$
5	$3,161 \times 10^{-3}$	$3,053 \times 10^{-3}$	$2,559 \times 10^{-3}$	$2,990 \times 10^{-3}$	$3,093 \times 10^{-3}$
6	$2,500 \times 10^{-3}$	$2,513 \times 10^{-3}$	$3,089 \times 10^{-3}$	$2,509 \times 10^{-3}$	$2,537 \times 10^{-3}$
7	$3,405 \times 10^{-3}$	$2,992 \times 10^{-3}$	$3,291 \times 10^{-3}$	$3,176 \times 10^{-3}$	$3,320 \times 10^{-3}$
8	$2,803 \times 10^{-3}$	$2,785 \times 10^{-3}$	$2,824 \times 10^{-3}$	$2,800 \times 10^{-3}$	$2,829 \times 10^{-3}$
9	$3,497 \times 10^{-3}$	$3,284 \times 10^{-3}$	$3,600 \times 10^{-3}$	$3,606 \times 10^{-3}$	$3,552 \times 10^{-3}$
10	$3,096 \times 10^{-3}$	$3,045 \times 10^{-3}$	$3,104 \times 10^{-3}$	$3,128 \times 10^{-3}$	$3,061 \times 10^{-3}$
11	$3,623 \times 10^{-3}$	$3,640 \times 10^{-3}$	$3,519 \times 10^{-3}$	$3,547 \times 10^{-3}$	$3,638 \times 10^{-3}$
12	$3,569 \times 10^{-3}$	$3,574 \times 10^{-3}$	$3,587 \times 10^{-3}$	$3,618 \times 10^{-3}$	$3,575 \times 10^{-3}$
13	$3,110 \times 10^{-3}$	$3,150 \times 10^{-3}$	$3,096 \times 10^{-3}$	$3,311 \times 10^{-3}$	$3,210 \times 10^{-3}$
14	$3,517 \times 10^{-3}$	$3,572 \times 10^{-3}$	$3,483 \times 10^{-3}$	$3,494 \times 10^{-3}$	$3,553 \times 10^{-3}$
15	$3,152 \times 10^{-3}$	$3,161 \times 10^{-3}$	$3,112 \times 10^{-3}$	$3,229 \times 10^{-3}$	$3,192 \times 10^{-3}$
16	$4,294 \times 10^{-3}$	$4,364 \times 10^{-3}$	$4,369 \times 10^{-3}$	$4,344 \times 10^{-3}$	$4,295 \times 10^{-3}$
17	$5,573 \times 10^{-3}$	$5,708 \times 10^{-3}$	$5,491 \times 10^{-3}$	$5,513 \times 10^{-3}$	$5,692 \times 10^{-3}$
18	$5,597 \times 10^{-3}$	$5,676 \times 10^{-3}$	$5,632 \times 10^{-3}$	$5,600 \times 10^{-3}$	$5,639 \times 10^{-3}$
Custo	1.795.862 €	1.793.948 €	1.794.427 €	1.795.788 €	197.974 €

Os resultados apresentados no Quadro 5.12 referentes às áreas da secção transversal dos tirantes mostram uma maior variação do que a verificada para as forças de instalação e ajustamento. Assim, relativamente à solução base, observa-se uma diminuição máxima de 12,12% (tirante 7) e média de 1,03% em virtude do aumento da resistência à compressão do betão. Verifica-se também que a diminuição da humidade relativa do ambiente conduz a um aumento máximo de 23,57% (tirante 6) e a uma diminuição média de 1,10% nas áreas dos tirantes. O aumento da idade do betão aquando do primeiro carregamento leva a um aumento máximo de 8,42% (tirante 8) e a um aumento médio de 0,59%. Finalmente, o aumento da espessura equivalente traduz-se numa diminuição máxima de 6,95% (tirante 1) e numa diminuição média de 0,19% nas áreas da secção transversal dos tirantes. Relativamente ao custo da estrutura obtido após optimização observam-se valores idênticos para as diversas análises efectuadas.

Apesar das variações médias observadas sugerirem que os parâmetros analisados não exercem influência significativa, analisando individualmente cada um dos tirantes verifica-se, nalguns casos, variações significativas dos valores das variáveis de decisão. Para além disso é o conjunto das variáveis de decisão (áreas dos tirantes e forças de instalação e ajustamento) que condiciona a rigidez da estrutura determinando, deste modo, a solução do problema em termos de deslocamentos e a distribuição de tensões. Por conseguinte, alterações no conjunto das variáveis de decisão do problema de optimização podem traduzir-se em alterações na resposta da estrutura e condicionar a verificação dos objectivos de projecto.

As pequenas diferenças verificadas e a dificuldade em definir um padrão claro de variação das variáveis de decisão em função das alterações nos parâmetros analisados poderão justificar-se pelo facto de o algoritmo de optimização procurar uma solução que satisfaça os objectivos de projecto rearranjando a distribuição de forças e áreas para fazer face às condições do problema. Tratando-se de um problema de optimização *multi-objectivo*, obtêm-se diferentes soluções finais dependendo da solução inicial, sendo esta influenciada pelos valores dos parâmetros intervenientes nos modelos de fluência e retracção.

Os resultados obtidos indicam a necessidade de resolver o problema de optimização das forças nos tirantes utilizando valores apropriados dos parâmetros intervenientes nos modelos de fluência e retracção de modo a evitar discrepâncias entre o comportamento previsto e o comportamento real da ponte.

5.3.6. Análise da influência dos efeitos geometricamente não-lineares

Para analisar a influência dos efeitos geometricamente não-lineares na solução do problema de optimização das forças nos tirantes compararam-se os resultados do exemplo base (Exemplo 2) apresentado na secção 5.3.2, com os obtidos a partir deste exemplo mas considerando dois tipos de análise diferentes:

- a) análise linear, ou seja, modelação dos tirantes como elementos barra com módulo de elasticidade constante e não consideração das forças laterais equivalentes aos efeitos de segunda ordem;
- b) análise de segunda ordem aproximada em que os tirantes foram modelados como elementos de barra com módulo de elasticidade equivalente dado pela formulação de Ernst e em que não se consideraram as forças laterais equivalentes aos efeitos de segunda ordem.

Os resultados obtidos para as variáveis de decisão do problema de optimização encontram-se resumidos nos Quadros 5.13 e 5.14, onde se indicam, respectivamente, as forças de instalação e de ajustamento e as áreas da secção transversal dos tirantes.

Quadro 5.13 – Forças de instalação e de ajustamento para a solução base, análise linear e análise de segunda ordem apenas com módulo de Ernst

Tirante	Força de instalação [kN]			Força de ajustamento [kN]		
	Solução base	Análise linear	Apenas Ernst	Solução base	Análise linear	Apenas Ernst
1	1006	1008	1007	1497	1500	1499
2	991	990	991	1500	1498	1498
3	1511	1518	1516	1794	1803	1801
4	1487	1485	1487	1802	1798	1800
5	1811	1758	1801	2295	2244	2288
6	1798	1793	1799	2310	2304	2310
7	2011	1993	1961	2504	2488	2456
8	2020	2018	2021	2528	2526	2529
9	2214	2226	2219	2723	2736	2729
10	2253	2255	2251	2758	2759	2755
11	2521	2533	2538	3054	3066	3070
12	2595	2599	2605	3097	3101	3108
13	2532	2545	2552	3096	3107	3113
14	2618	2623	2632	3131	3136	3146
15	3030	3045	3054	3644	3654	3662
16	3146	3155	3166	3658	3668	3678
17	3040	3025	3038	5202	5208	5220
18	3157	3165	3178	4694	4701	4715

Como se pode observar pelos resultados apresentados no Quadro 5.13 não se obtiveram diferenças significativas para as forças nos tirantes alterando o tipo de análise. Assim, no que respeita às forças de instalação têm-se relativamente à solução base variações médias de 0,07% e 0,11% para a análise linear e para a análise com módulo de Ernst, respectivamente. Relativamente às forças de ajustamento verificam-se variações médias de 0,03% e 0,11% para a análise linear e para a análise com módulo de Ernst, respectivamente. No entanto, analisando individualmente os resultados para cada um dos tirantes observam-se reduções máximas de 2,90% (tirante 5) e de 2,47% (tirante 7) nos valores das forças de instalação obtidas, respectivamente, com a análise linear e com a análise utilizando o módulo de Ernst. No caso das forças de ajustamento verificam-se reduções máximas de 2,21% (tirante 5) e 1,91% (tirante 7), respectivamente.

Quadro 5.14 – Áreas da secção transversal dos tirantes para a solução base, análise linear e análise de segunda ordem apenas com módulo de Ernst

Parâmetros	Solução base	Análise linear	Apenas Ernst
Tirante	Área [m ²]	Área [m ²]	Área [m ²]
1	2,159×10 ⁻³	1,974×10 ⁻³	1,974×10 ⁻³
2	2,096×10 ⁻³	1,878×10 ⁻³	2,193×10 ⁻³
3	2,229×10 ⁻³	2,095×10 ⁻³	2,268×10 ⁻³
4	2,314×10 ⁻³	1,935×10 ⁻³	2,352×10 ⁻³
5	3,161×10 ⁻³	2,909×10 ⁻³	3,025×10 ⁻³
6	2,500×10 ⁻³	2,538×10 ⁻³	2,510×10 ⁻³
7	3,405×10 ⁻³	3,250×10 ⁻³	3,103×10 ⁻³
8	2,803×10 ⁻³	2,773×10 ⁻³	2,784×10 ⁻³
9	3,497×10 ⁻³	3,387×10 ⁻³	3,576×10 ⁻³
10	3,096×10 ⁻³	3,065×10 ⁻³	3,094×10 ⁻³
11	3,623×10 ⁻³	3,539×10 ⁻³	3,439×10 ⁻³
12	3,569×10 ⁻³	3,514×10 ⁻³	3,525×10 ⁻³
13	3,110×10 ⁻³	3,133×10 ⁻³	3,122×10 ⁻³
14	3,517×10 ⁻³	3,513×10 ⁻³	3,515×10 ⁻³
15	3,152×10 ⁻³	3,194×10 ⁻³	3,093×10 ⁻³
16	4,294×10 ⁻³	4,299×10 ⁻³	4,298×10 ⁻³
17	5,573×10 ⁻³	5,659×10 ⁻³	5,542×10 ⁻³
18	5,597×10 ⁻³	5,659×10 ⁻³	5,609×10 ⁻³
Custo	1.795.862 €	1.794.133 €	1.795.216 €

De acordo com os valores apresentados no Quadro 5.14 verifica-se que os diferentes tipos de análise não alteram significativamente os valores do custo da estrutura obtidos após optimização. No que respeita aos valores das áreas da secção transversal dos tirantes verificam-se, relativamente à solução base, diminuições médias de 3,16% e 1,11% para a análise linear e para a análise com módulo de Ernst, respectivamente. Em termos de variações máximas, para a análise linear observa-se uma diminuição máxima de 16,40% (tirante 4) e para a análise de segunda ordem utilizando apenas o módulo de Ernst tem-se uma diminuição máxima de 8,86% (tirante 7). Por conseguinte, pode referir-se que, de um modo geral, a consideração dos efeitos geometricamente não-lineares conduz a um aumento das áreas da secção transversal dos tirantes. Este aspecto pode justificar-se pela necessidade de dotar a estrutura de uma rigidez mais elevada para fazer face aos maiores deslocamentos que se verificam numa análise de segunda ordem.

Em resumo, pode referir-se que apesar de o tipo de análise não alterar significativamente a distribuição de forças nos tirantes, manifesta-se em algumas alterações nos valores das áreas dos tirantes. Assim, tal como foi referido em secções anteriores relativamente aos efeitos

diferidos, também os efeitos geometricamente não-lineares devem ser tidos em conta no problema de optimização das forças nos tirantes, de modo a determinar valores adequados das variáveis de decisão que garantam os objectivos de projecto.

De referir ainda que caso se estivesse perante a análise de uma ponte de maior vão a influência dos efeitos geometricamente não-lineares poderia ser mais significativa em virtude do aumento da deformabilidade da estrutura.

5.3.7. Análise a longo prazo

Para estudar a influência dos efeitos diferidos na resposta da estrutura apresentam-se nesta secção os resultados de uma análise a longo prazo partindo da solução óptima obtida para o Exemplo 2. Deste modo, considerando as áreas e as forças nos tirantes obtidas nessa solução, procedeu-se à análise da estrutura durante as fases construtivas e, para a condição de carga permanente, efectuou-se uma análise a longo prazo até aos 50 anos (aproximadamente, 18250 dias). Na Figura 5.62 apresentam-se os deslocamentos verticais do tabuleiro no final da construção e a longo prazo.

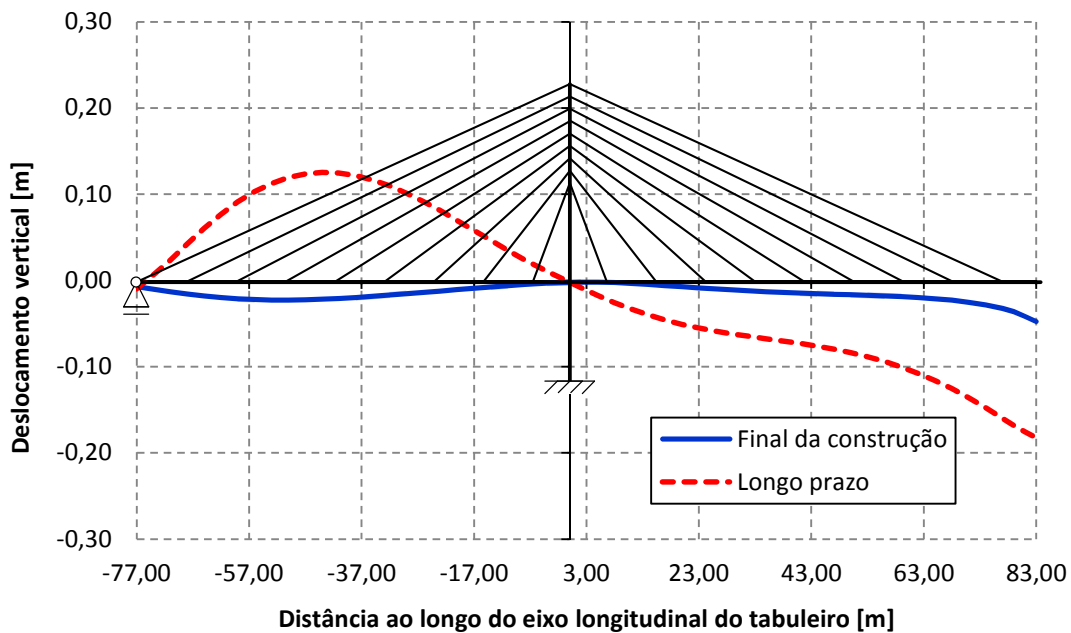


Figura 5.62 – Deslocamentos verticais do tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – final da construção vs longo prazo

Os resultados apresentados mostram alterações significativas nos deslocamentos verticais do tabuleiro em virtude dos efeitos diferidos da fluência e retracção do betão. A longo prazo observa-se um aumento da deformação do tabuleiro com uma descida do vão central e uma subida dos vãos laterais. As torres flectem no sentido do vão central, acompanhando a

deformação do tabuleiro, o que provoca um aumento da deformação e das tensões de flexão nas torres. O deslocamento vertical a meio-vão do tabuleiro aumenta de 4,8 cm no final da construção para 18,2 cm após 50 anos. De referir ainda que ao fim de 5 anos (aproximadamente 1825 dias) tem-se 88,4% do valor do deslocamento aos 50 anos. No caso do momento flector verifica-se que o seu valor a meio-vão do tabuleiro varia de -1978 kNm no final da construção para 8195 kNm após 50 anos.

Estes resultados sugerem a necessidade de monitorizar a resposta da estrutura a longo prazo de modo a avaliar a necessidade de ajustar as forças nos tirantes alguns anos após a construção para controlar os valores das tensões e dos deslocamentos. A determinação dos ajustamentos a efectuar nas forças nos tirantes poderia ser efectuada utilizando o modelo numérico desenvolvido. Deste modo, partindo da solução óptima para as forças e secções dos tirantes, resolver-se-ia um outro problema de optimização considerando como variáveis de decisão as forças nos tirantes e como objectivos as tensões e os deslocamentos numa fase, 2 a 5 anos, após a construção.

5.4. Problema de minimização do custo de uma ponte de tirantes

A aplicação de algoritmos de optimização no projecto de estruturas complexas e de grandes dimensões, como é o caso das pontes atirantadas, surge como uma maneira eficiente de lidar com a enorme quantidade de informação envolvida. Neste âmbito os algoritmos de optimização podem desempenhar um papel relevante na procura de soluções que visem a minimização do custo dos materiais e, deste modo, facilitar a obtenção de soluções económicas e estruturalmente eficientes.

Como foi referido na revisão bibliográfica, a utilização de algoritmos de optimização na minimização do custo de pontes atirantadas foi levada a cabo fundamentalmente em pontes metálicas e mistas aço-betão. Assim, no presente subcapítulo apresentam-se e discutem-se os resultados obtidos com a aplicação do modelo numérico desenvolvido no que respeita ao problema da minimização do custo de pontes atirantadas de betão. Com a resolução deste problema, que pode também ser designado por problema do projecto óptimo (*optimum design* na terminologia inglesa), pretende-se determinar não apenas as forças de instalação e de ajustamento nos tirantes e as respectivas áreas da secção transversal, mas também efectuar o dimensionamento dos diversos elementos de betão (Martins *et al.*, 2015c; Martins *et al.*, 2015d). Deste modo, para além de se proceder ao controlo da distribuição de tensões e da geometria das torres e do tabuleiro, a solução óptima caracteriza-se por um adequado aproveitamento da capacidade resistente dos materiais.

Nas secções seguintes apresentam-se vários exemplos de aplicação, começando pela optimização considerando a ponte completa e passando posteriormente à optimização considerando o faseamento construtivo. Estudam-se ainda soluções estruturais alternativas para a secção transversal do tabuleiro, a influência do pré-esforço nos elementos do tabuleiro e a optimização considerando valores discretos para as variáveis de decisão seccionais. Os exemplos numéricos apresentados neste subcapítulo apresentam as características gerais já indicadas na secção 5.2. No Quadro 5.15 apresenta-se a descrição geral de cada um dos exemplos resolvidos nesta secção.

Quadro 5.15 – Identificação dos exemplos resolvidos no âmbito do problema de minimização do custo de uma ponte atirantada de betão

Exemplo	Descrição
7	Optimização considerando a ponte completa
8	Optimização considerando o faseamento construtivo, efeitos diferidos e efeitos geometricamente não-lineares. Tabuleiro em laje vigada
9	Optimização considerando o faseamento construtivo, efeitos diferidos e efeitos geometricamente não-lineares. Tabuleiro em caixão unicelular
10	Optimização considerando o faseamento construtivo, efeitos diferidos e efeitos geometricamente não-lineares. Tabuleiro em caixão tritelular
11	Optimização considerando o faseamento construtivo, efeitos diferidos e efeitos geometricamente não-lineares. Tabuleiro pré-esforçado
12	Optimização considerando valores discretos para as variáveis de decisão seccionais
13a, 13b, 13c e 13d	Optimização considerando a ponte completa. Análise da influência de parâmetros geométricos e topológicos

No que respeita aos objectivos de projecto tem-se neste problema a situação mais geral do conjunto de objectivos referidos no capítulo anterior e que foram também utilizados no problema de optimização das forças nos tirantes. Assim, na função objectivo a minimizar, definida pela Equação (4.20), incluem-se os objectivos do custo, dos deslocamentos e das tensões durante a construção e para a ponte completa sujeita a várias condições de carregamento. Apesar de no problema de optimização das forças nos tirantes também se ter considerado o objectivo do custo, no problema actual a redução do custo assume o papel de objectivo principal. Isto ocorre em virtude da inclusão de variáveis de decisão seccionais referentes aos diversos elementos estruturais das quais depende directamente o custo da estrutura e que possibilitam a minimização do mesmo através da minimização do custo dos materiais.

Relativamente às variáveis de decisão, e tal como para os objectivos de projecto, tem-se a situação mais geral do conjunto de variáveis de decisão apresentadas no Capítulo 4. Neste problema as dimensões gerais da ponte são consideradas constantes ao longo do processo de optimização mas as dimensões das secções transversais dos diversos elementos estruturais são consideradas como variáveis de decisão. Por conseguinte, têm-se como variáveis de decisão as forças de instalação e de ajustamento dos tirantes, a área da secção transversal destes elementos e ainda as dimensões das secções transversais dos diversos elementos executados em betão estrutural. Para as torres e o tabuleiro consideraram-se secções transversais variáveis

ao longo do comprimento destes elementos de acordo com as zonas estabelecidas na Figura 5.3. Para as torres utilizaram-se secções rectangulares ocas e para o tabuleiro consideraram-se, no exemplo base deste problema, secções em laje vigada. Na secção 5.4.3 estudam-se soluções estruturais alternativas para o tabuleiro utilizando-se também secções transversais em caixão unicelular e tricelular. Para o tabuleiro, apesar de se ter considerado secção variável, definiu-se que a altura do mesmo é constante ao longo de todo o comprimento. Para cada exemplo definiu-se um conjunto de valores para as variáveis de decisão que constituem um projecto inicial a partir do qual se inicia o processo de análise e optimização até se chegar à solução óptima que apresenta custo mínimo e que verifica todos os objectivos de projecto.

5.4.1. Optimização considerando a ponte completa

No que respeita ao problema de minimização do custo, e à semelhança do que foi feito no problema de determinação das forças nos tirantes, começa-se por apresentar os resultados do exemplo considerando a ponte completa. Relativamente às condições de carregamento considerou-se novamente a ponte completa sujeita a carga permanente e aos três casos de carga referentes à alternância da sobrecarga rodoviária.

Como se referiu anteriormente, neste problema consideraram-se como variáveis de decisão as forças de pré-esforço nos tirantes e as dimensões das secções transversais dos diversos elementos da estrutura. No Quadro 5.16 descrevem-se as 51 variáveis de decisão consideradas neste exemplo, sendo a numeração dos tirantes a que se encontra indicada na Figura 5.2.

Os objectivos de projecto considerados foram os mesmos que no problema de optimização das forças nos tirantes, ou seja:

- custo da estrutura;
- deslocamentos verticais a meio-vão e nos pontos de ancoragem dos tirantes no tabuleiro e deslocamento horizontal do topo da torre para a ponte completa sujeita à carga permanente;
- tensões em todos os elementos para a ponte completa sujeita à carga permanente e aos casos de alternância de sobrecargas.

Do mesmo modo, consideraram-se 1,0 cm e 2,0 cm para os valores admissíveis do deslocamento horizontal no topo da torre e dos deslocamentos verticais do tabuleiro, respectivamente. Nos elementos de betão estrutural e para verificação da resistência dos

mesmos considerou-se uma área total (inferior e superior) de armadura passiva igual a 2% da área da secção transversal de betão.

Quadro 5.16 – Descrição das variáveis de decisão utilizadas no Exemplo 7

Variável de decisão	Descrição	Tipo de variável de decisão
1 e 2	Forças de pré-esforço nos tirantes 1 e 2	4
3 e 4	Área da secção transversal dos tirantes 1 e 2	22
5	Altura da secção do tabuleiro em laje vigada	9
6	Largura das vigas laterais da secção em laje vigada – Zona 3	10
7	Espessura da laje da secção em laje vigada – Zona 3	11
8 e 9	Forças de pré-esforço nos tirantes 3 e 4	4
10 e 11	Área da secção transversal dos tirantes 3 e 4	22
12	Largura das vigas laterais da secção em laje vigada – Zona 4	10
13	Espessura da laje da secção em laje vigada – Zona 4	11
14 e 15	Forças de pré-esforço nos tirantes 5 e 6	4
16 e 17	Área da secção transversal dos tirantes 5 e 6	22
18 e 19	Forças de pré-esforço nos tirantes 7 e 8	4
20 e 21	Área da secção transversal dos tirantes 7 e 8	22
22 e 23	Forças de pré-esforço nos tirantes 9 e 10	4
24 e 25	Área da secção transversal dos tirantes 9 e 10	22
26 e 27	Forças de pré-esforço nos tirantes 11 e 12	4
28 e 29	Área da secção transversal dos tirantes 11 e 12	22
30 e 31	Forças de pré-esforço nos tirantes 13 e 14	4
32 e 33	Área da secção transversal dos tirantes 13 e 14	22
34 e 35	Forças de pré-esforço nos tirantes 15 e 16	4
36 e 37	Área da secção transversal dos tirantes 15 e 16	22
38 e 39	Forças de pré-esforço nos tirantes 17 e 18	4
40 e 41	Área da secção transversal dos tirantes 17 e 18	22
42	Largura das vigas laterais da secção em laje vigada – Zona 5	10
43	Espessura da laje da secção em laje vigada – Zona 5	11
44	Altura da secção rectangular oca – Zona 1	5
45	Altura da secção rectangular oca – Zona 2	5
46	Largura da secção rectangular oca – Zona 1	6
47	Largura da secção rectangular oca – Zona 2	6
48	Espessura das paredes de altura h da secção rectangular oca – Zona 1	7
49	Espessura das paredes de altura h da secção rectangular oca – Zona 2	7
50	Espessura das paredes de largura b da secção rectangular oca – Zona 1	8
51	Espessura das paredes de largura b da secção rectangular oca – Zona 2	8

Para iniciar o processo iterativo de análise e optimização estabeleceu-se um projecto inicial próximo do domínio do problema, cujos valores das variáveis de decisão se apresentam nos Quadros 5.18 e 5.19. Este processo repete-se até se alcançar uma estabilização do valor

do custo da estrutura, obtendo-se a solução óptima, de custo mínimo e que satisfaz todos os objectivos de projecto.

Relativamente aos resultados obtidos começa-se por apresentar na Figura 5.63 a evolução do custo da ponte e a respectiva redução de custo em função do número de iterações de análise e optimização. Como se verifica pela observação da Figura 5.63 a optimização possibilita a redução progressiva do custo da ponte que tende para o valor do custo mínimo. Neste exemplo o valor do custo inicial é de 1.879.997 € e o algoritmo de optimização permite reduzi-lo para 1.294.844 €, o que representa uma redução de 31,13%. Deste modo, em termos de custo por área em planta de tabuleiro tem-se um valor de cerca de 309 €/m² na solução inicial, sendo reduzido para, aproximadamente, 213 €/m² na solução óptima. Comparando estes resultados com os obtidos no problema de optimização das forças nos tirantes verifica-se no problema actual uma redução de custo muito mais significativa. Este facto justifica-se, naturalmente, pela consideração de variáveis de decisão seccionais nos elementos do tabuleiro e das torres que possibilitam uma redução da quantidade de material e, por conseguinte, uma redução do custo da estrutura.

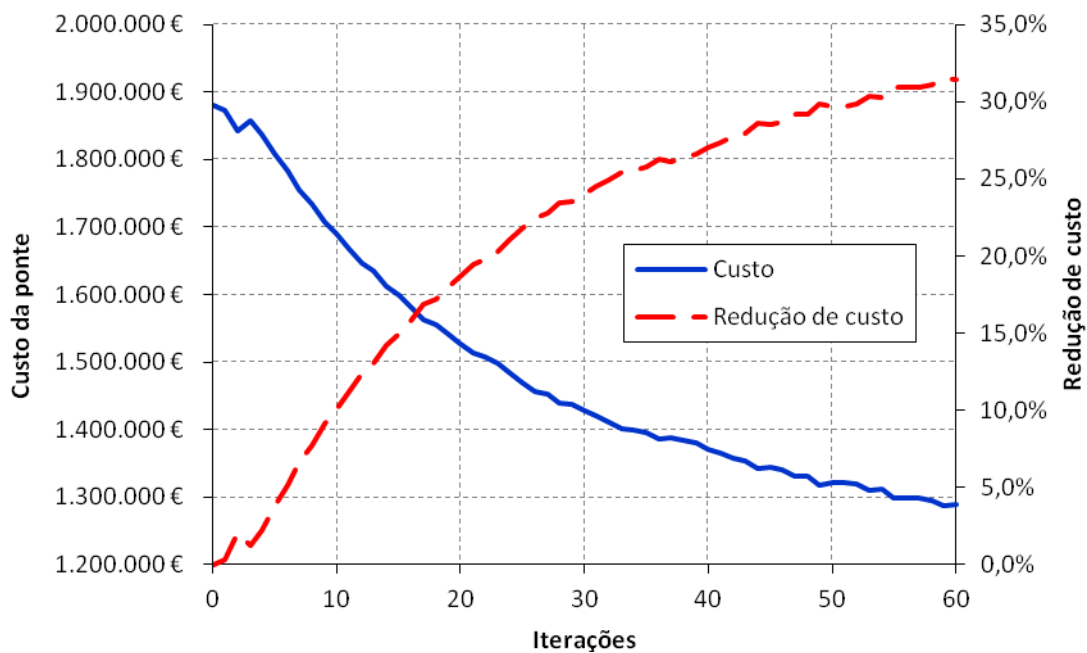


Figura 5.63 – Evolução do custo da ponte e da redução de custo em função do número de iterações (Exemplo 7)

No Quadro 5.17 apresenta-se um resumo dos valores iniciais e finais (após optimização) dos custos do tabuleiro, torres e tirantes. Os resultados apresentados mostram que, relativamente à solução inicial considerada, a optimização permite obter uma redução de 23,9% no custo do tabuleiro, de 70,3% no custo das torres e de 17,0% no custo dos tirantes.

Como se pode verificar, na solução óptima o tabuleiro representa 47,5% do custo total e os tirantes representam 34,5% do custo total, sendo o restante custo devido às torres.

Quadro 5.17 – Valores iniciais e finais (após optimização) dos custos do tabuleiro, torre e tirantes (Exemplo 7)

	Tabuleiro	Torres	Tirantes	Total
Solução inicial	969.048 €	373.320 €	537.629 €	1.879.997 €
	51,5%	19,9%	28,6%	100,0%
Solução final	737.595 €	111.011 €	446.238 €	1.294.844 €
	47,5%	8,6%	34,5%	100,0%

No Quadro 5.18 apresentam-se, em resumo, os valores iniciais e finais (obtidos após optimização) para as variáveis de decisão correspondentes às forças de pré-esforço nos tirantes. Relativamente à solução inicial verifica-se uma tendência geral de aumento, entre 0,1% e 2,5%, dos valores das forças nos tirantes. Nos tirantes 1, 3 e 5 verifica-se uma diminuição pouco significativa, entre 0,2% e 0,3%, das respectivas forças. Tal como nos exemplos anteriores pode referir-se que as forças nos tirantes são aproximadamente iguais em tirantes dispostos simetricamente relativamente à torre. Os valores das forças aumentam da torre para o vão, sendo o tirante de retenção o que apresenta maior força.

Comparando a solução obtida neste exemplo com a solução óptima do Exemplo 1, referente à optimização das forças nos tirantes, verifica-se uma redução dos valores das forças em todos os tirantes à excepção do tirante de retenção, para o qual se observa um aumento de 1,9%. Nos restantes tirantes a redução do valor da respectiva força de pré-esforço varia entre 0,8% (tirante 16) e 25,4% (tirante 1). Tendo em conta que nas pontes com tabuleiros em betão o peso próprio representa uma parcela significativa das cargas que os tirantes terão que suportar, a consideração de variáveis seccionais no tabuleiro permitiu reduzir o peso deste e, por conseguinte, dos valores das forças nos tirantes que são necessárias para o suportar.

Quadro 5.18 – Valores iniciais e finais (após optimização) das forças nos tirantes (Exemplo 7)

Tirante	Variável de decisão	Força de pré-esforço [kN]	
		Inicial	Final
1	1	1500	1497
2	2	1500	1500
3	8	1800	1794
4	9	1800	1802
5	14	2300	2295
6	15	2300	2310
7	18	2500	2502
8	19	2500	2526
9	22	2700	2716
10	23	2700	2749
11	26	3000	3041
12	27	3000	3075
13	30	3000	3075
14	31	3000	3075
15	34	3500	3587
16	35	3500	3587
17	38	5000	5125
18	39	4500	4612

No Quadro 5.19 apresentam-se os valores iniciais e finais obtidos após optimização referentes às diversas variáveis de decisão seccionais. Os valores são apresentados em m^2 e em m , respectivamente, para as áreas dos tirantes e para as dimensões das secções transversais dos elementos do tabuleiro e da torre. Como se pode verificar, as reduções de custo observadas nos diversos elementos estruturais e já referidas anteriormente devem-se à redução dos valores das diversas variáveis de decisão seccionais. Assim, na solução óptima tem-se uma redução dos valores de todas as variáveis de decisão à excepção das variáveis 5, 42 e 43, para as quais se verificam aumentos de 15,4%, 51,1% e 29,2%, respectivamente. As reduções nas restantes variáveis de decisão apresentam valores entre 1,0% (variável 44) e 60,5% (variável 48).

Quadro 5.19 – Valores mínimos, máximos, iniciais e finais das variáveis de decisão seccionais (Exemplo 7)

Variável de decisão	Mínimo	Máximo	Inicial	Final
3	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$6,000 \times 10^{-3}$	$3,421 \times 10^{-3}$
4	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$6,000 \times 10^{-3}$	$3,096 \times 10^{-3}$
5	1,000	4,000	2,000	2,308
6	0,500	3,000	1,200	0,511
7	0,150	0,500	0,200	0,152
10	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$6,000 \times 10^{-3}$	$3,654 \times 10^{-3}$
11	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$6,000 \times 10^{-3}$	$3,936 \times 10^{-3}$
12	0,500	3,000	0,800	0,508
13	0,150	0,500	0,200	0,150
16	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$6,000 \times 10^{-3}$	$3,593 \times 10^{-3}$
17	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$6,000 \times 10^{-3}$	$3,597 \times 10^{-3}$
20	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$6,000 \times 10^{-3}$	$3,065 \times 10^{-3}$
21	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$6,000 \times 10^{-3}$	$3,151 \times 10^{-3}$
24	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$6,000 \times 10^{-3}$	$2,727 \times 10^{-3}$
25	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$6,000 \times 10^{-3}$	$3,096 \times 10^{-3}$
28	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$3,522 \times 10^{-3}$
29	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$3,541 \times 10^{-3}$
32	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$3,501 \times 10^{-3}$
33	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$3,501 \times 10^{-3}$
36	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$4,227 \times 10^{-3}$
37	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$3,909 \times 10^{-3}$
40	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$5,362 \times 10^{-3}$
41	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$4,815 \times 10^{-3}$
42	0,500	3,000	0,500	0,755
43	0,150	0,500	0,200	0,258
44	1,000	10,000	5,000	4,950
45	1,000	10,000	4,000	2,189
46	1,000	10,000	5,000	2,764
47	1,000	10,000	4,000	1,934
48	0,150	1,000	0,500	0,198
49	0,150	1,000	0,500	0,284
50	0,150	1,000	0,500	0,223
51	0,150	1,000	0,500	0,243

No que respeita aos resultados da análise estrutural, apresenta-se na Figura 5.64 a configuração deformada da ponte sujeita a carga permanente correspondente à solução final obtida com a optimização. Como se pode observar esta solução caracteriza-se por valores reduzidos dos deslocamentos dos nós da estrutura que são inferiores aos limites impostos nos objectivos de projecto.

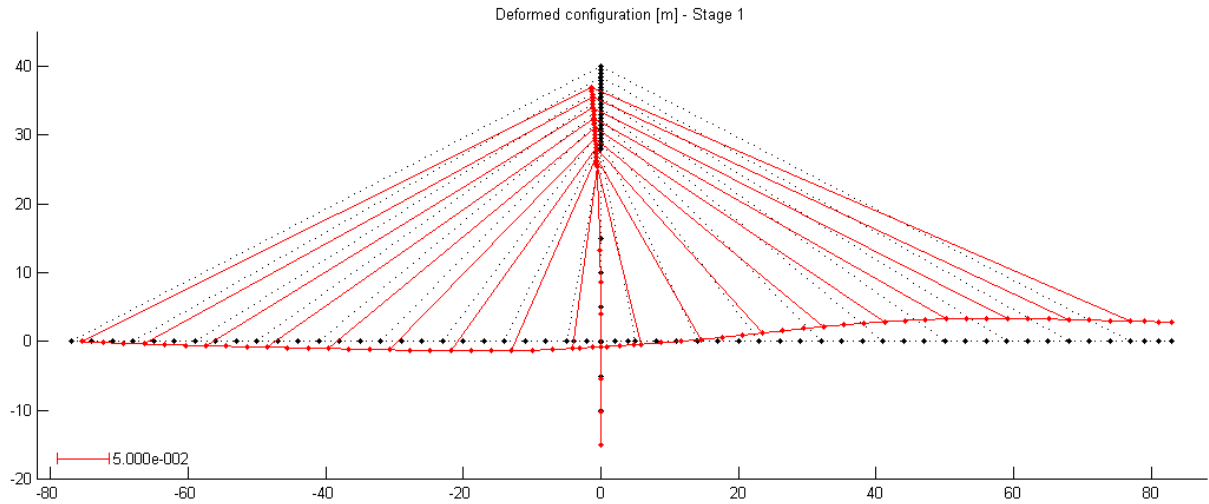


Figura 5.64 – Deformada para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 7)

Nas Figuras 5.65, 5.66 e 5.67 representam-se os diagramas de esforços internos, momento flector, esforço transversal e esforço axial para a ponte sujeita a carga permanente. Como se pode observar tem-se para a solução óptima uma distribuição de momentos flectores no tabuleiro semelhante à que se obteria se o tabuleiro fosse uma viga contínua rigidamente apoiada nos pontos de ancoragem dos tirantes no tabuleiro. Verificam-se também valores reduzidos do momento flector na torre. Como foi referido anteriormente, uma distribuição uniforme de momentos flectores no tabuleiro e a minimização dos esforços de flexão nas torres para a condição de carga permanente são dois aspectos desejáveis e que se pretende alcançar no projecto de uma ponte atirantada.

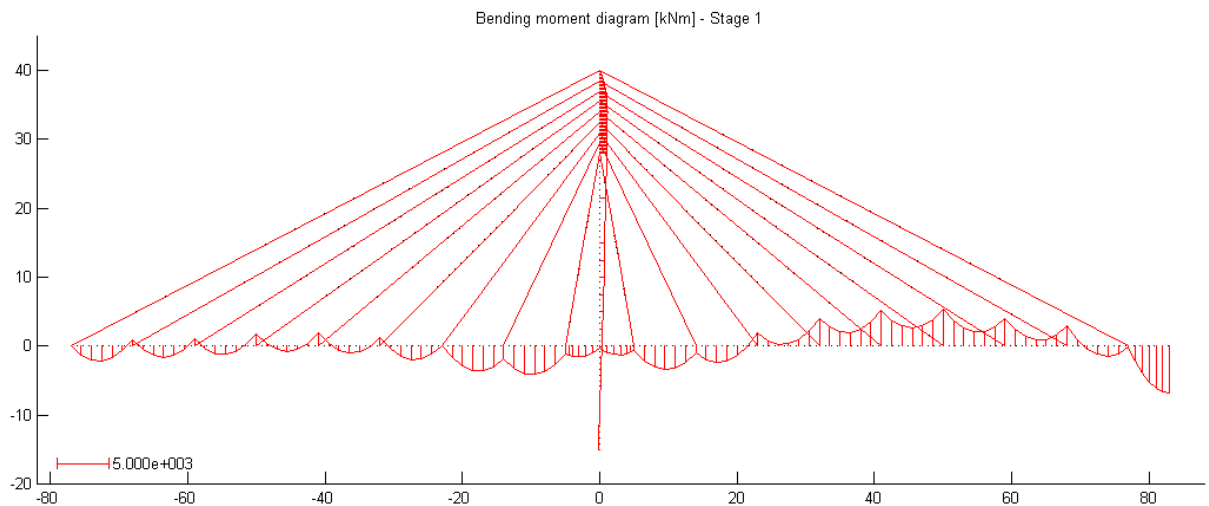


Figura 5.65 – Diagrama de momento flector para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 7)

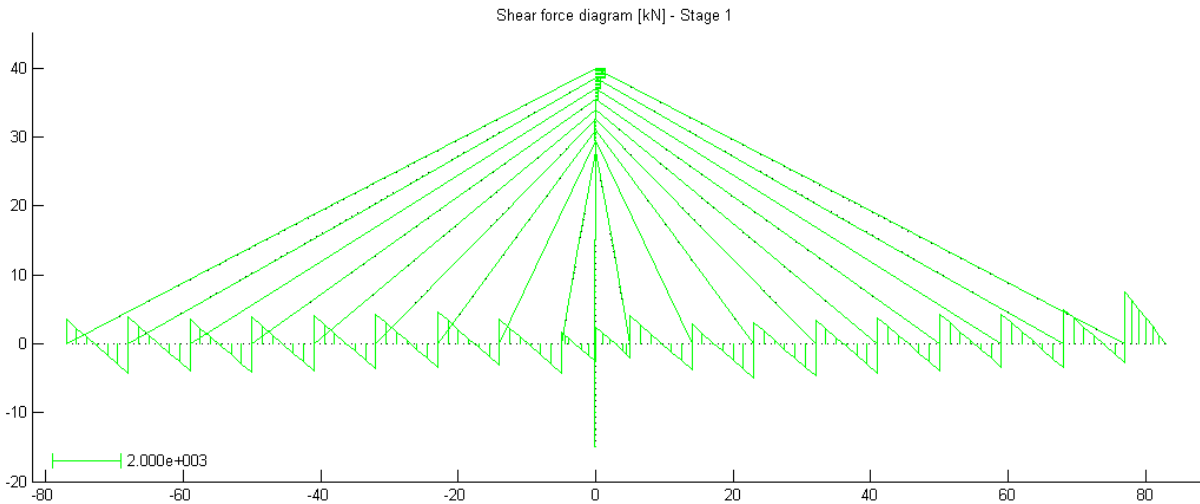


Figura 5.66 – Diagrama de esforço transversal para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 7)

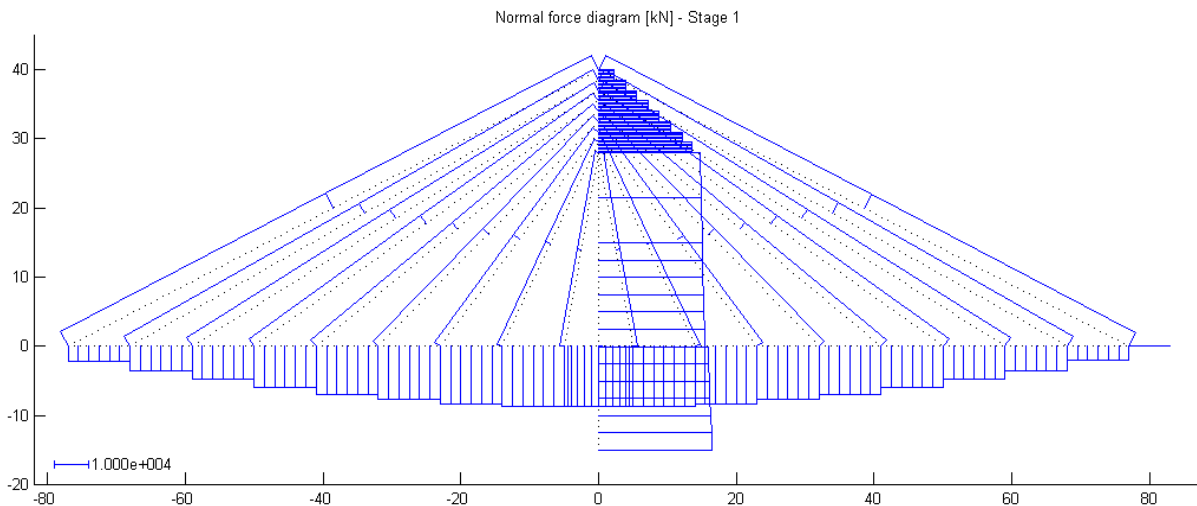


Figura 5.67 – Diagrama de esforço axial para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 7)

Para a mesma condição de ponte completa sujeita a carga permanente apresentam-se nas Figura 5.68 e 5.69 as distribuições de tensões normais ao longo do tabuleiro e das torres, respectivamente. Como se pode constatar, na solução óptima estas distribuições verificam os limites impostos nos objectivos de projecto referentes às tensões no betão em condições de serviço. No caso das torres têm-se unicamente tensões de compressão cujos valores variam, aproximadamente, entre os 2 MPa e os 16 MPa. Verifica-se também que o tabuleiro se encontra quase na totalidade sujeito a tensões de compressão à excepção da fibra inferior no tramo central de fecho a meio-vão e no vão lateral junto ao encontro.

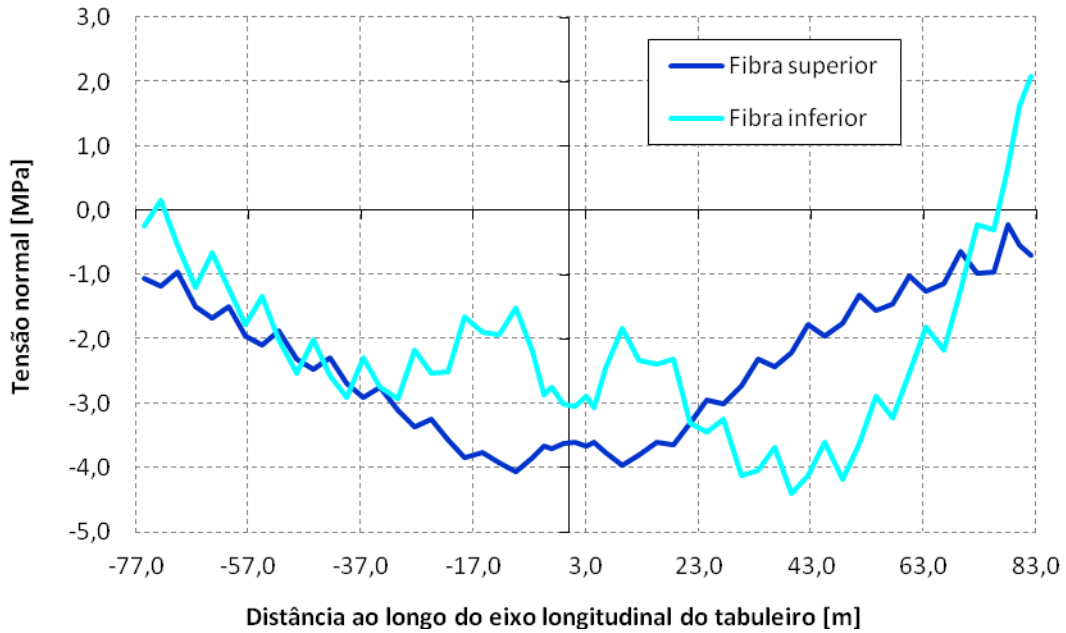


Figura 5.68 – Distribuição de tensões normais no tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 7)

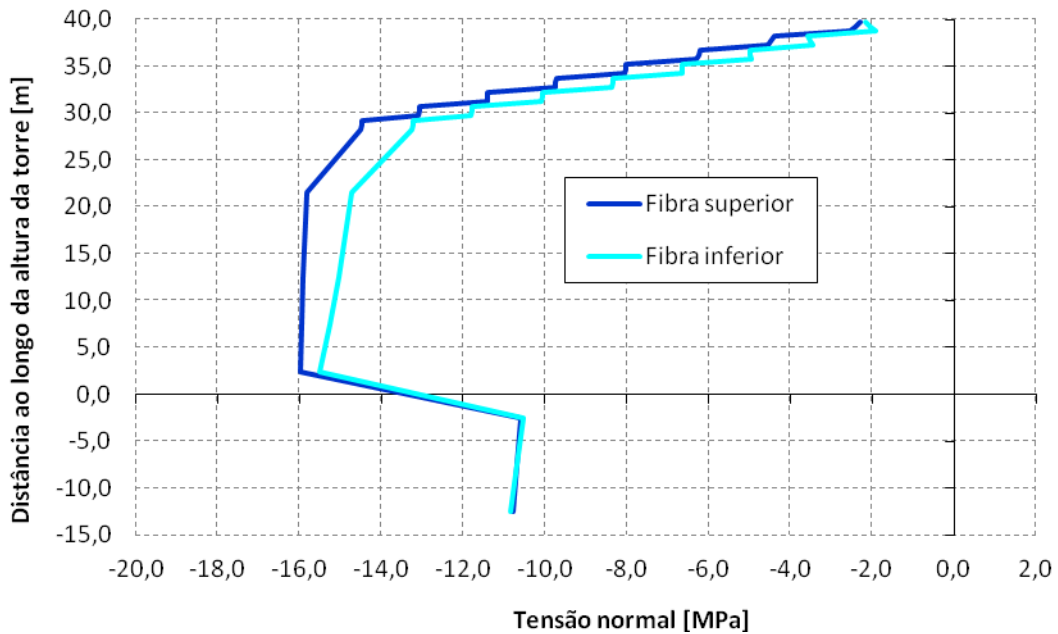


Figura 5.69 – Distribuição de tensões normais na torre para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 7)

Neste exemplo a ponte completa foi analisada para a condição de carga permanente e para os três casos de carga em que se considerou a alternância de sobrecarga rodoviária. Nas Figuras 5.70 a 5.81 apresentam-se a configuração deformada e os diagramas de esforços internos para esses três casos de carga.

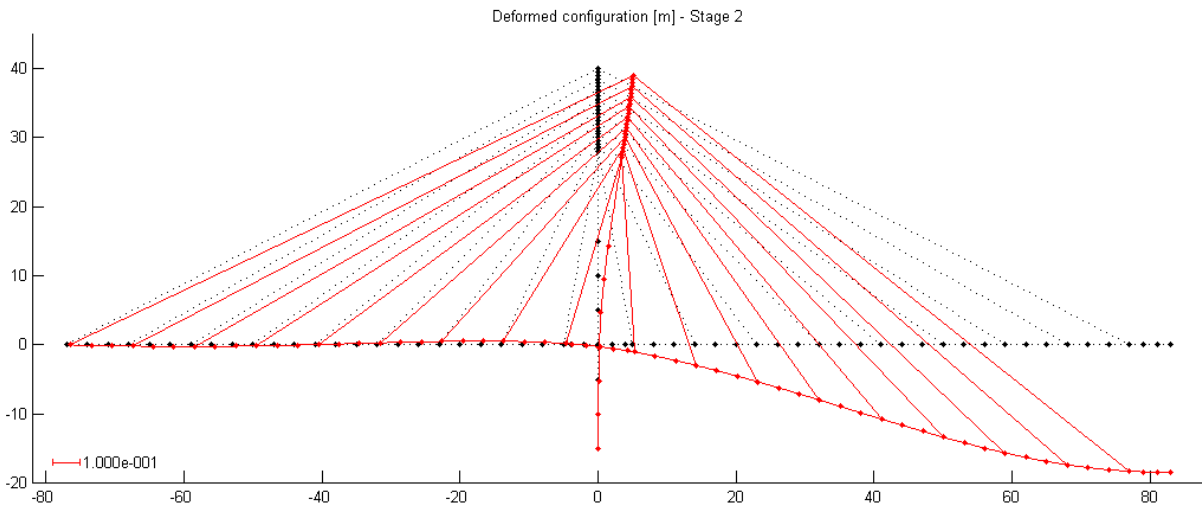


Figura 5.70 – Deformada para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 7)

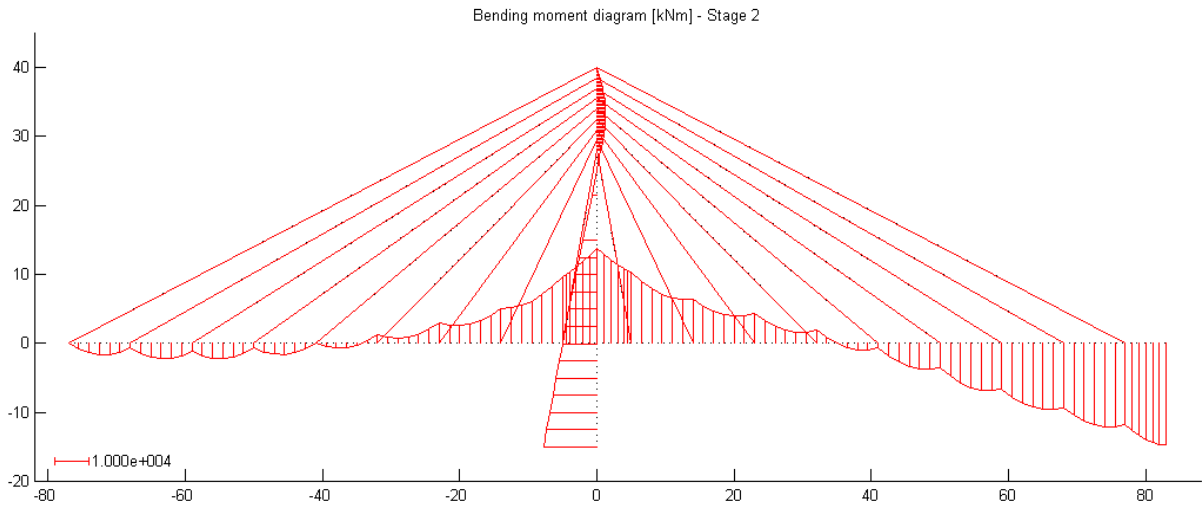


Figura 5.71 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 7)

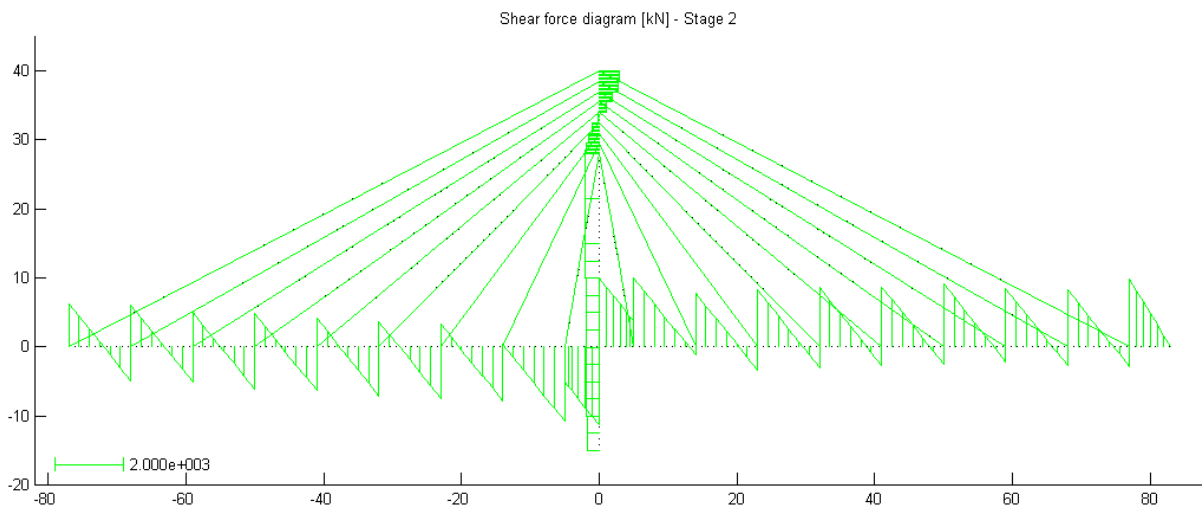


Figura 5.72 – Diagrama de esforço transversal para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 7)

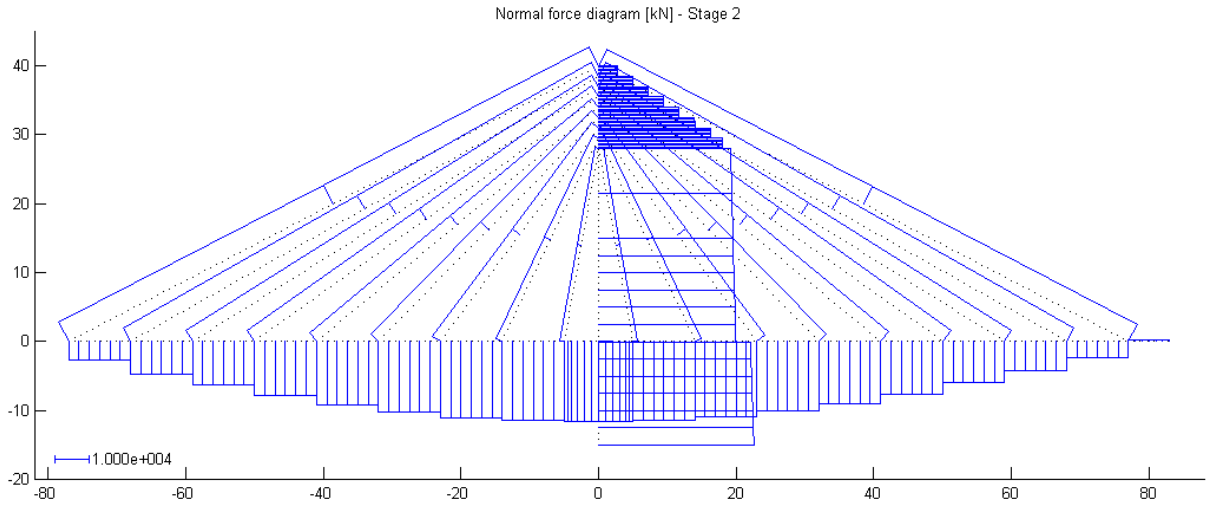


Figura 5.73 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 7)

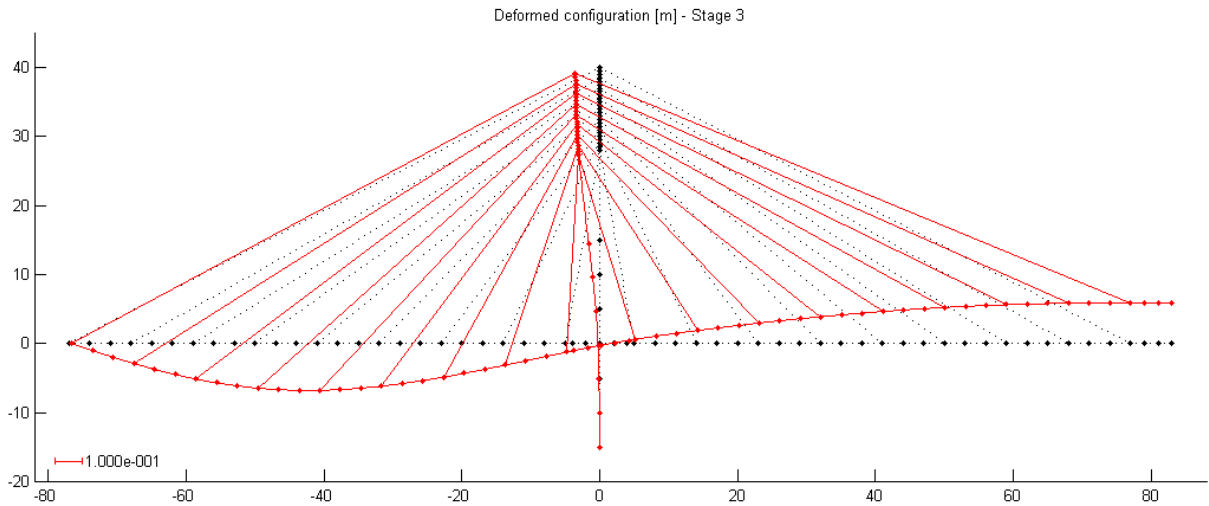


Figura 5.74 – Deformada para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 7)

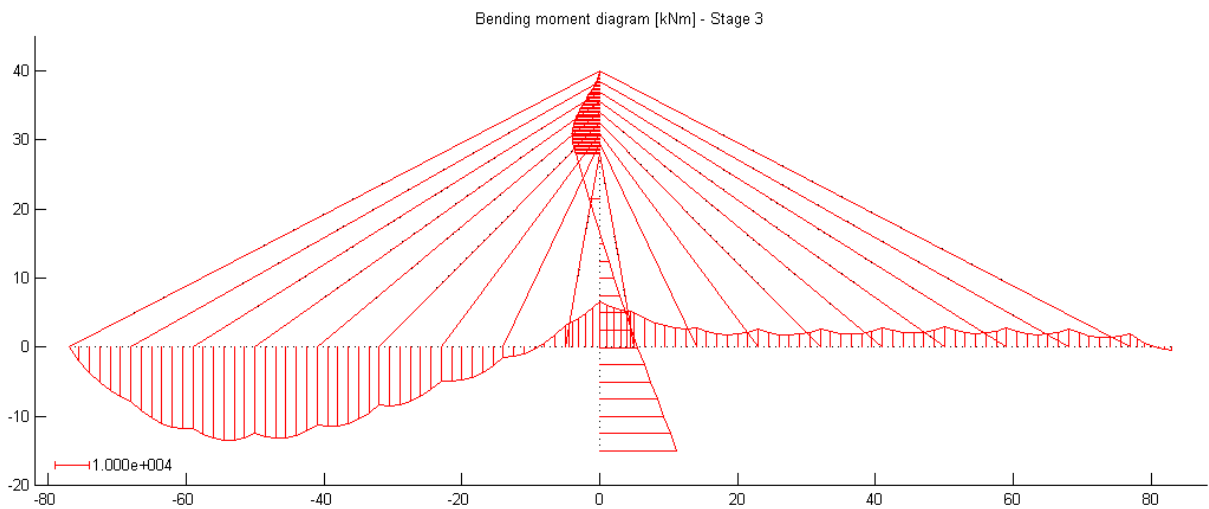


Figura 5.75 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 7)

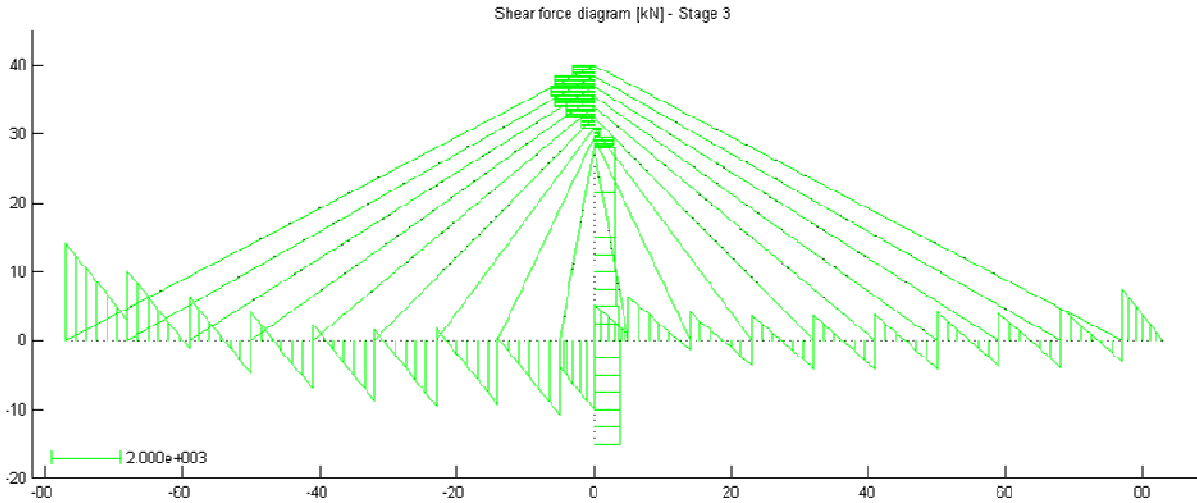


Figura 5.76 – Diagrama de esforço transversal para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 7)

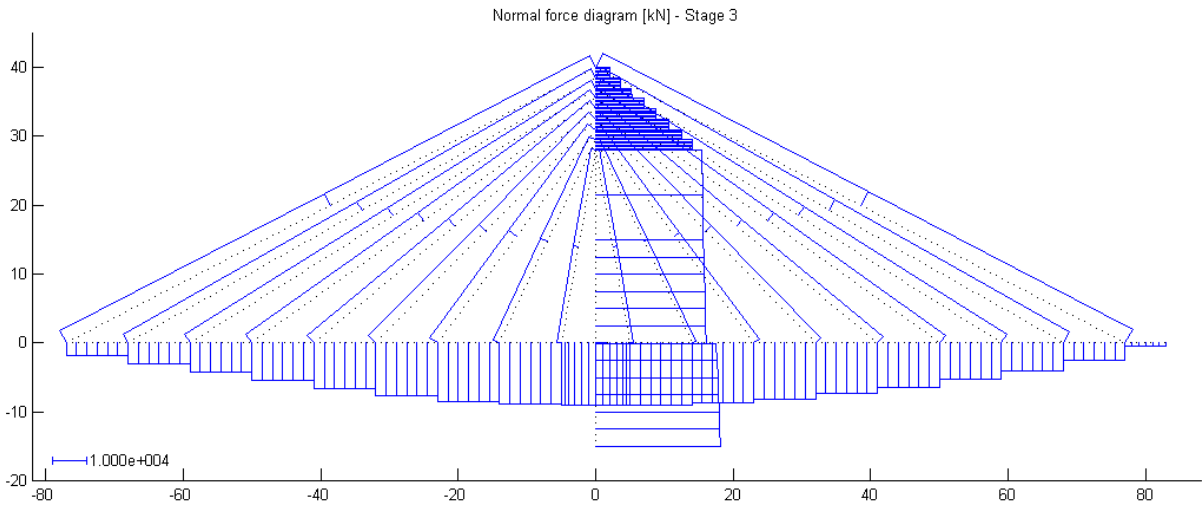


Figura 5.77 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 7)

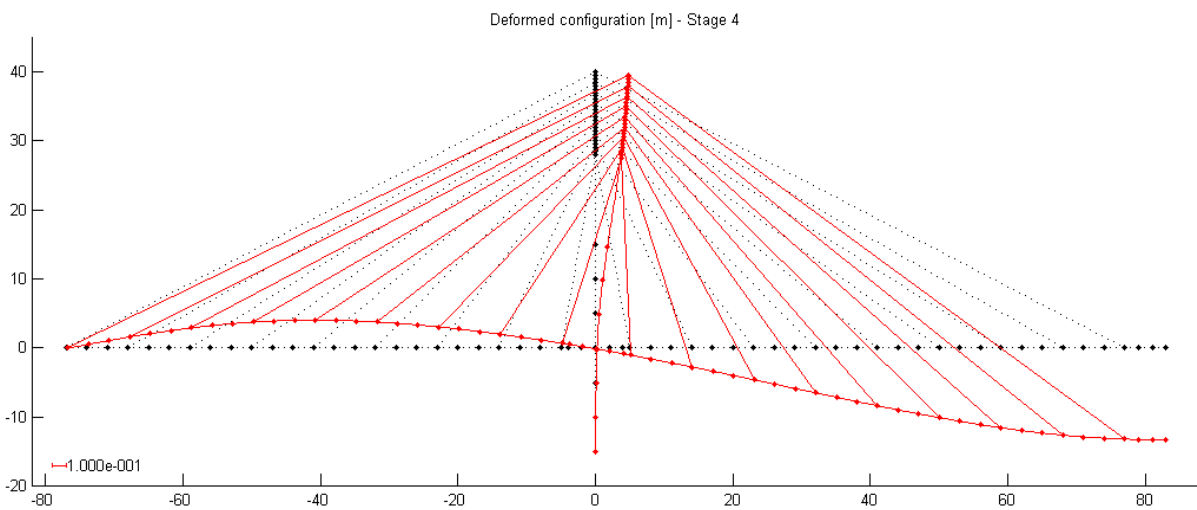


Figura 5.78 – Deformada para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 7)

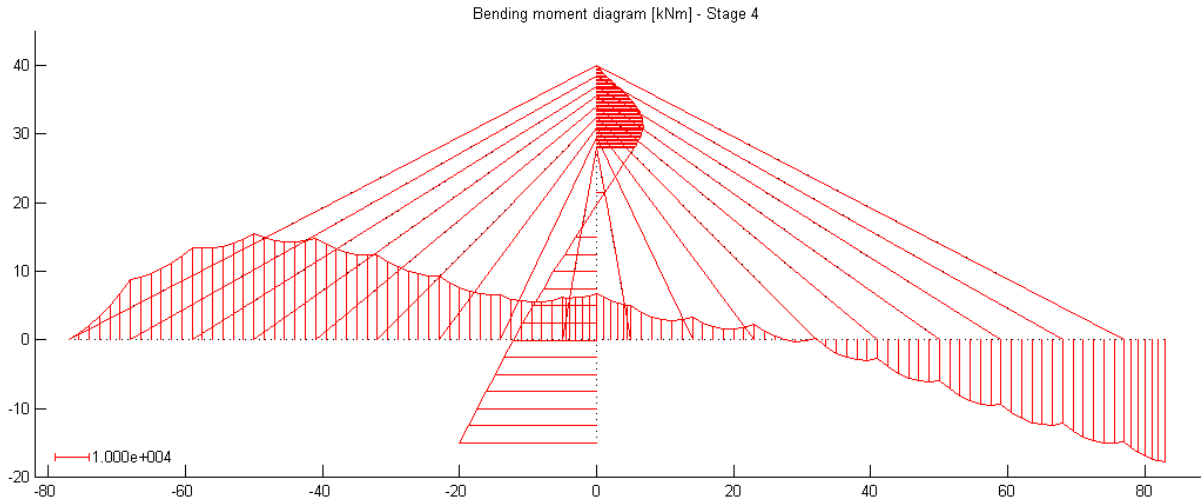


Figura 5.79 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 7)

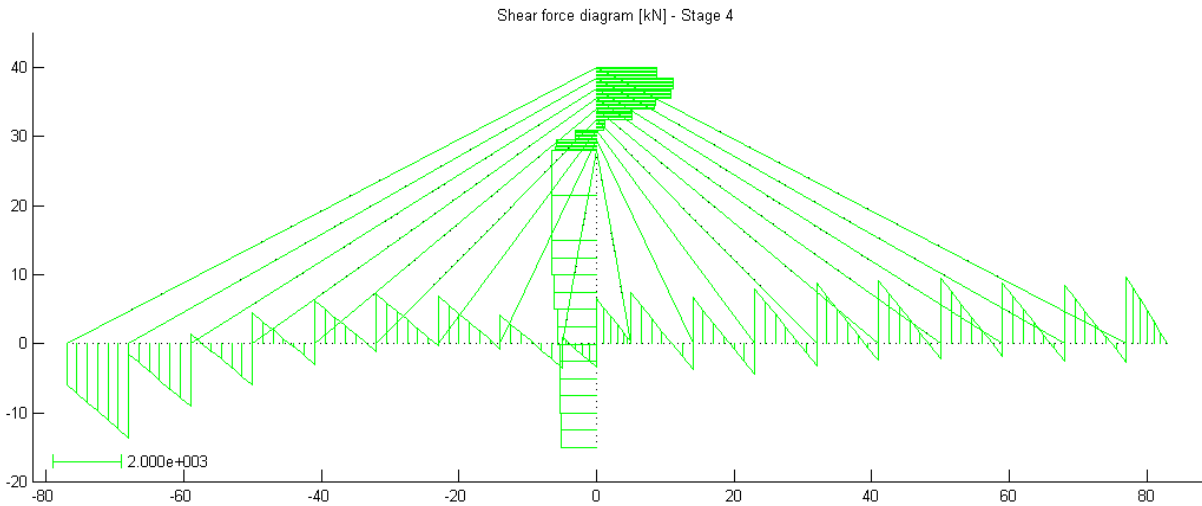


Figura 5.80 – Diagrama de esforço transversal para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 7)

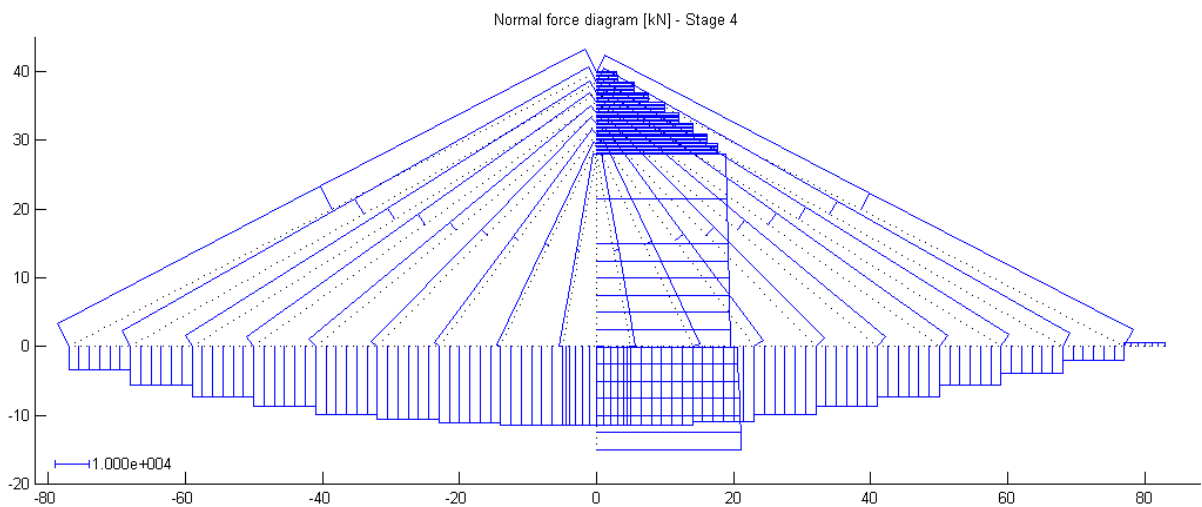


Figura 5.81 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 7)

5.4.2. Optimização considerando o faseamento construtivo

À semelhança do que foi feito para o problema da determinação das forças nos tirantes, também para o problema de minimização do custo se efectuou a optimização considerando o faseamento construtivo. Deste modo, nesta secção apresentam-se os resultados obtidos para o Exemplo 8 que constitui o exemplo geral da minimização do custo de pontes atirantadas de betão. Neste exemplo a análise estrutural contempla a ponte completa sujeita a várias condições de carregamento, as fases construtivas, os efeitos diferidos do comportamento do betão e os efeitos geometricamente não-lineares. Consideraram-se as mesmas fases construtivas que foram apresentadas na secção 5.2 e que se encontram ilustradas na Figura 5.4.

No que respeita às variáveis de decisão deste exemplo consideraram-se, para além das que foram apresentadas no Quadro 5.16 para o problema de optimização da ponte completa, mais 18 variáveis de decisão correspondentes às forças de ajustamento dos tirantes que são aplicadas no final da construção para garantir a geometria de rasante do tabuleiro na condição de carga permanente. Tem-se, desta forma, um total de 69 variáveis de decisão que são descritas no Quadro 5.20.

Para além do objectivo fundamental do custo e dos objectivos de tensões e deslocamentos para a ponte completa já referidos no Exemplo 7, consideram-se agora objectivos adicionais respeitantes às tensões durante as fases construtivas e aos deslocamentos no final da construção que permitam a ligação do tabuleiro aos encontros e o fecho do mesmo a meio-vão. Tal como no Exemplo 2, definiu-se um valor de 2 cm para o deslocamento admissível que se considerou adequado para permitir a ligação do tabuleiro ao encontro (Fase 9) e para a ponte completa sujeita a carga permanente (Fase 11) consideraram-se 2 cm e 5 cm para os valores admissíveis dos deslocamentos horizontais e verticais, respectivamente.

A verificação da resistência dos elementos de betão estrutural através da definição dos correspondentes objectivos de projecto foi descrita em detalhe na secção 4.2.3 e baseia-se na utilização de diagramas de interacção *esforço axial resistente – momento flector resistente* para a secção transversal em causa. Como já foi referido, para o cálculo destes diagramas considerou-se uma área total de armadura passiva igual a 2% da área da secção transversal de betão. Deste modo fixou-se a taxa de armadura, relacionando-a com a área da secção transversal de betão, dadas as dificuldades inerentes à consideração da área de armadura passiva como variável de decisão, podendo esta opção, comprometer inclusive a verosimilhança física da solução tal como se referiu na secção 3.3.5. Neste sentido,

apresentam-se nas Figuras 5.82 e 5.83 os diagramas de interacção adimensional, em que são representados os valores do esforço axial reduzido e do momento flector reduzido, para a secção rectangular oca utilizada nos elementos da torre e para a secção em laje vigada utilizada nos elementos do tabuleiro.

Quadro 5.20 – Descrição das variáveis de decisão utilizadas no Exemplo 8

Variável de decisão	Descrição	Tipo de variável de decisão
1 e 2	Forças de pré-esforço nos tirantes 1 e 2	4
3 e 4	Área da secção transversal dos tirantes 1 e 2	22
5	Altura da secção do tabuleiro em laje vigada	9
6	Largura das vigas laterais da secção em laje vigada – Zona 3	10
7	Espessura da laje da secção em laje vigada – Zona 3	11
8 e 9	Forças de pré-esforço nos tirantes 3 e 4	4
10 e 11	Área da secção transversal dos tirantes 3 e 4	22
12	Largura das vigas laterais da secção em laje vigada – Zona 4	10
13	Espessura da laje da secção em laje vigada – Zona 4	11
14 e 15	Forças de pré-esforço nos tirantes 5 e 6	4
16 e 17	Área da secção transversal dos tirantes 5 e 6	22
18 e 19	Forças de pré-esforço nos tirantes 7 e 8	4
20 e 21	Área da secção transversal dos tirantes 7 e 8	22
22 e 23	Forças de pré-esforço nos tirantes 9 e 10	4
24 e 25	Área da secção transversal dos tirantes 9 e 10	22
26 e 27	Forças de pré-esforço nos tirantes 11 e 12	4
28 e 29	Área da secção transversal dos tirantes 11 e 12	22
30 e 31	Forças de pré-esforço nos tirantes 13 e 14	4
32 e 33	Área da secção transversal dos tirantes 13 e 14	22
34 e 35	Forças de pré-esforço nos tirantes 15 e 16	4
36 e 37	Área da secção transversal dos tirantes 15 e 16	22
38 e 39	Forças de pré-esforço nos tirantes 17 e 18	4
40 e 41	Área da secção transversal dos tirantes 17 e 18	22
42	Largura das vigas laterais da secção em laje vigada – Zona 5	10
43	Espessura da laje da secção em laje vigada – Zona 5	11
44	Altura da secção rectangular oca – Zona 1	5
45	Altura da secção rectangular oca – Zona 2	5
46	Largura da secção rectangular oca – Zona 1	6
47	Largura da secção rectangular oca – Zona 2	6
48	Espessura das paredes de altura h da secção rectangular oca – Zona 1	7
49	Espessura das paredes de altura h da secção rectangular oca – Zona 2	7
50	Espessura das paredes de largura b da secção rectangular oca – Zona 1	8
51	Espessura das paredes de largura b da secção rectangular oca – Zona 2	8
52 a 69	Forças de ajustamento nos tirantes 1 a 18	4

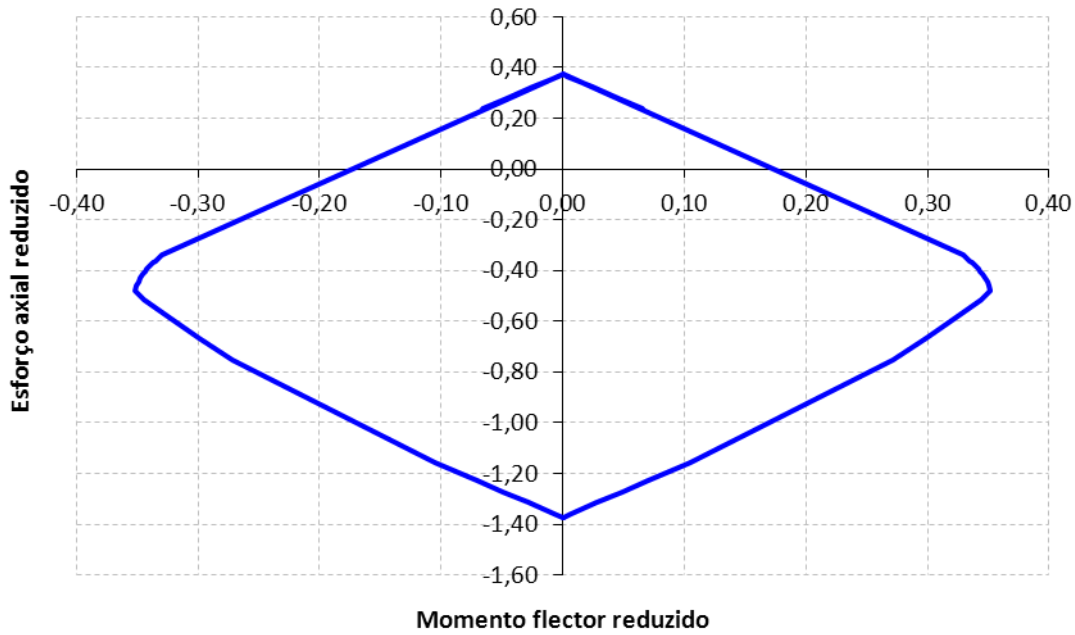


Figura 5.82 – Diagrama de interacção adimensional para secção rectangular oca

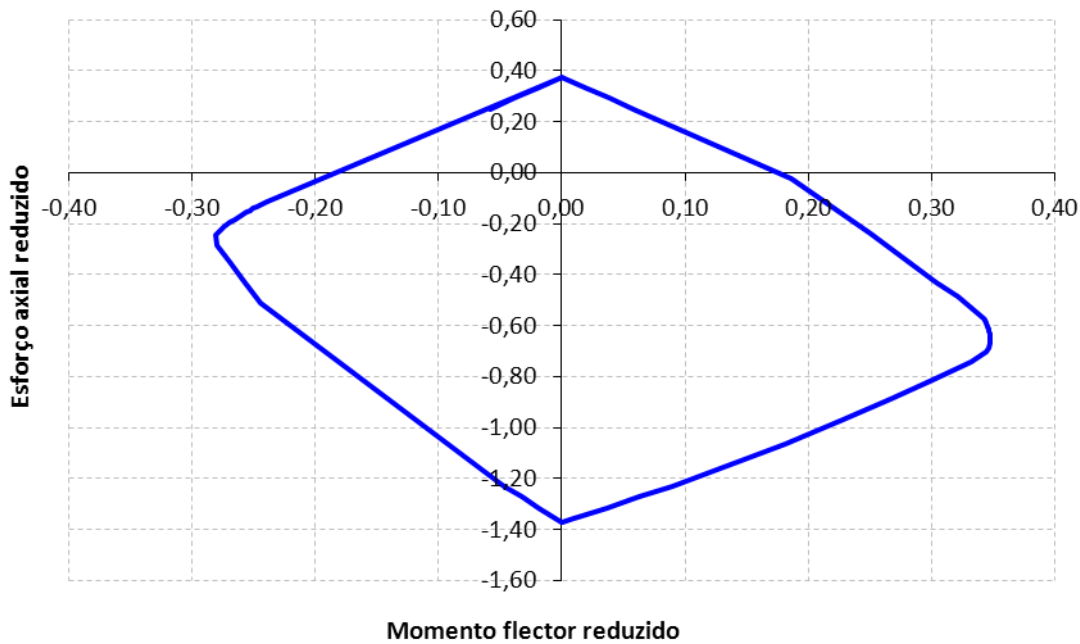


Figura 5.83 – Diagrama de interacção adimensional para secção em laje vigada

Relativamente à definição da solução inicial, já foi anteriormente referida a necessidade de iniciar o processo de análise e optimização com um projecto inicial no interior ou próximo do domínio do problema para que o algoritmo de optimização privilegie a redução de custo. Dada a natureza *multi-objectivo* do problema de optimização, as soluções óptimas obtidas constituem soluções de Pareto que dependem da solução inicial. Para além disso, a escolha do

projecto inicial também condiciona o andamento da solução do problema, podendo nalguns casos não se conseguir atingir convergência.

O problema actual apresenta um domínio complexo dado o número elevado de variáveis de decisão (69) e de objectivos de projecto (cerca de 1500) alguns dos quais em conflito. Este facto associado à elevada não-linearidade da resposta da estrutura face a variações nas variáveis de decisão, que dificulta a previsão da mesma por parte da análise de sensibilidades, traduz-se em dificuldades na resolução do problema. Este aspecto torna-se mais relevante num problema em que se consideram simultaneamente variáveis de decisão seccionais e efeitos diferidos, na medida em que, modificações nessas variáveis traduzem-se em alterações do estado de tensão que, por sua vez, influenciam as deformações devido aos efeitos diferidos.

Para fazer face a estas dificuldades, a estratégia adoptada consistiu na resolução do problema de minimização do custo em duas etapas. Na primeira resolveu-se o problema de optimização das forças nos tirantes e na segunda utilizou-se a solução óptima assim obtida como projecto inicial no problema de minimização do custo. Deste modo, utilizou-se como ponto de partida para a minimização do custo uma solução optimizada para a distribuição de forças e secções dos tirantes. No decorrer do processo de optimização utilizaram-se também valores reduzidos para os limites móveis das variações admissíveis nas variáveis de decisão, de modo a diminuir os erros introduzidos pela aproximação da resposta da estrutura fornecida pela análise de sensibilidades.

Na primeira etapa, ou seja, no problema de optimização das forças nos tirantes consideraram-se as 54 variáveis de decisão correspondentes às forças de instalação e de ajustamento e às áreas dos tirantes. Para o tabuleiro e para a torre consideraram-se secções variáveis ao longo do comprimento, mas constantes ao longo do processo de optimização. No Quadro 5.21 apresentam-se os valores dos parâmetros definidores da geometria das secções destes elementos.

Quadro 5.21 – Dimensões gerais das secções do tabuleiro e das torres na solução inicial do Exemplo 8

	Zona	Dimensões
Torres	Zona 1	$h = 5,00 \text{ m}; b = 5,00 \text{ m}; t_w = 0,50 \text{ m}; t_{fs} = t_{fi} = 0,50 \text{ m}$
	Zona 2	$h = 4,00 \text{ m}; b = 4,00 \text{ m}; t_w = 0,50 \text{ m}; t_{fs} = t_{fi} = 0,50 \text{ m}$
Tabuleiro	Zona 3	$h = 2,00 \text{ m}; b = 19,00 \text{ m}; t_w = 1,20 \text{ m}; t_{fs} = 0,20 \text{ m}$
	Zona 4	$h = 2,00 \text{ m}; b = 19,00 \text{ m}; t_w = 0,80 \text{ m}; t_{fs} = 0,20 \text{ m}$
	Zona 5	$h = 2,00 \text{ m}; b = 19,00 \text{ m}; t_w = 0,50 \text{ m}; t_{fs} = 0,20 \text{ m}$

Na Figura 5.84 apresenta-se a evolução do custo e da respectiva redução para o problema de optimização das forças nos tirantes do Exemplo 8. A solução inicial apresenta um custo de

1.879.997 €, sendo reduzido em 5,22% para 1.781.814 €. No Quadro 5.22 resumem-se os valores iniciais e finais das variáveis de decisão deste problema.

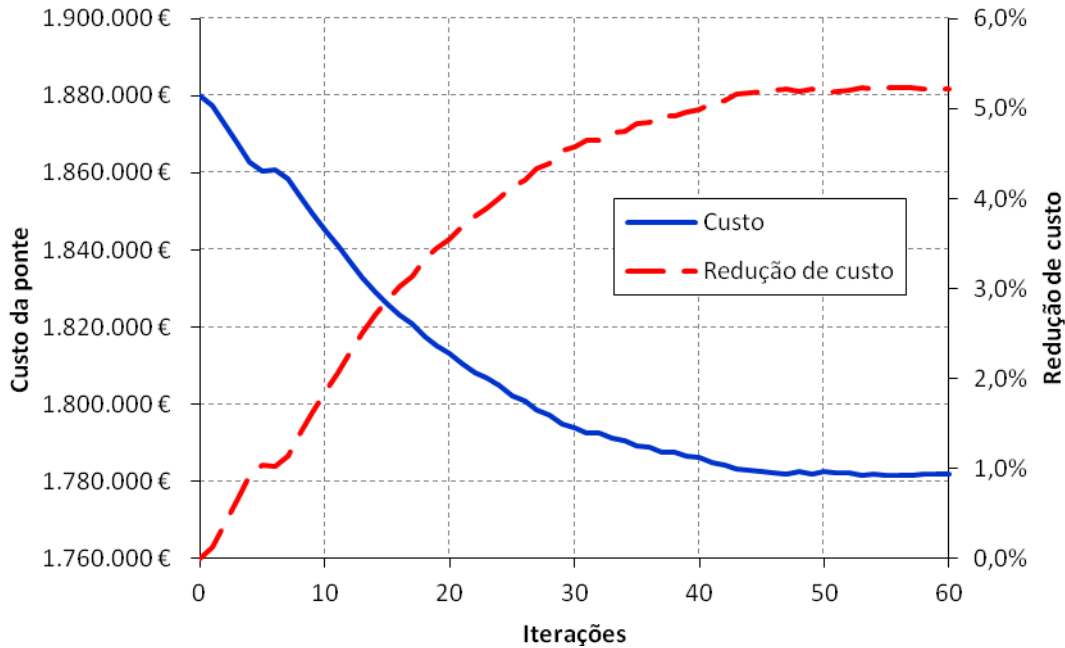


Figura 5.84 – Evolução do custo da ponte e da redução de custo em função do número de iterações para o problema de otimização das forças nos tirantes (Exemplo 8)

Quadro 5.22 – Valores iniciais e finais das variáveis de decisão do problema de otimização das forças nos tirantes (Exemplo 8)

Tirante	Área da secção transversal [m ²]		Forças de instalação [kN]		Forças de ajustamento [kN]	
	Inicial	Final	Inicial	Final	Inicial	Final
1	6,000×10 ⁻³	2,027×10 ⁻³	1000	1002	1500	1497
2	6,000×10 ⁻³	2,115×10 ⁻³	1000	987	1500	1491
3	6,000×10 ⁻³	2,523×10 ⁻³	1500	1515	1800	1806
4	6,000×10 ⁻³	2,255×10 ⁻³	1500	1486	1800	1793
5	6,000×10 ⁻³	2,980×10 ⁻³	1800	1768	2300	2261
6	6,000×10 ⁻³	2,504×10 ⁻³	1800	1800	2300	2305
7	6,000×10 ⁻³	3,385×10 ⁻³	2000	1977	2500	2475
8	6,000×10 ⁻³	2,787×10 ⁻³	2000	2025	2500	2529
9	6,000×10 ⁻³	3,369×10 ⁻³	2200	2188	2700	2695
10	6,000×10 ⁻³	3,050×10 ⁻³	2200	2257	2700	2759
11	7,500×10 ⁻³	3,343×10 ⁻³	2500	2543	3000	3062
12	7,500×10 ⁻³	3,527×10 ⁻³	2500	2601	3000	3102
13	7,500×10 ⁻³	3,097×10 ⁻³	2500	2561	3000	3098
14	7,500×10 ⁻³	3,555×10 ⁻³	2500	2632	3000	3145
15	7,500×10 ⁻³	3,030×10 ⁻³	3000	3078	3500	3634
16	7,500×10 ⁻³	4,354×10 ⁻³	3000	3157	3500	3669
17	7,500×10 ⁻³	5,718×10 ⁻³	3000	3077	5000	5169
18	7,500×10 ⁻³	5,632×10 ⁻³	3000	3160	4500	4697

Definindo como projecto inicial a solução final obtida no problema de optimização das forças nos tirantes, procedeu-se à resolução do problema de minimização do custo da ponte considerando as 69 variáveis de decisão indicadas. No que respeita aos resultados deste problema, apresenta-se na Figura 5.85 a evolução do custo da ponte e a correspondente redução de custo em função do número de iterações de análise e optimização.

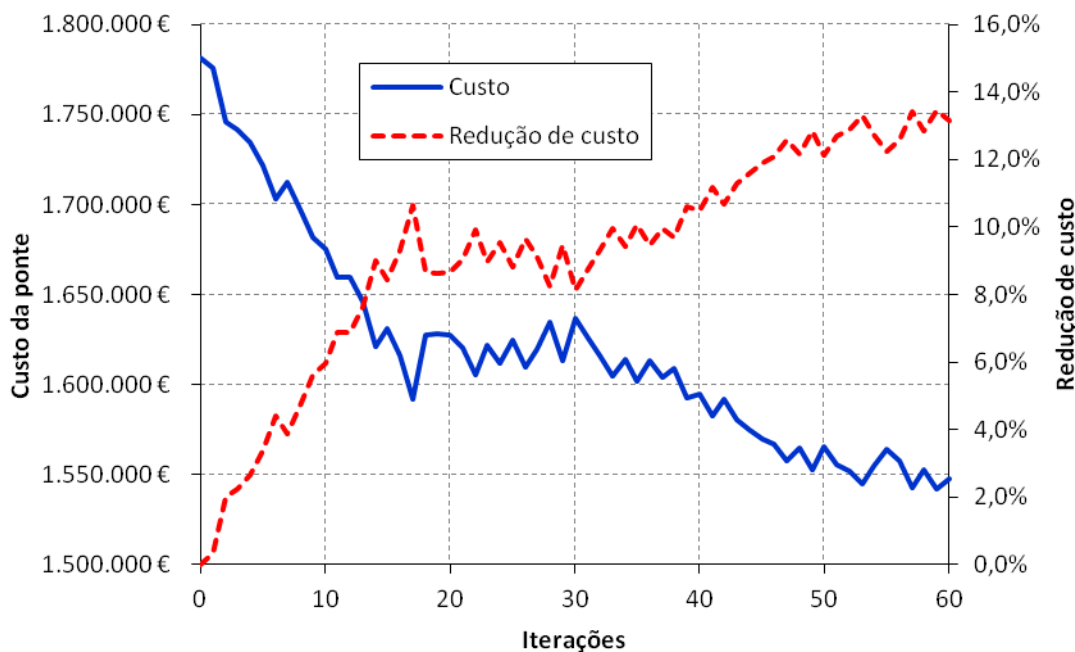


Figura 5.85 – Evolução do custo da ponte e da redução de custo em função do número de iterações (Exemplo 8)

Como se pode observar na Figura 5.85 o processo de optimização permitiu reduzir o custo da ponte para um valor de 1.552.611 €. Relativamente à solução inicial do problema de optimização das forças nos tirantes tem-se uma redução de 17,41% e relativamente à solução inicial do problema de minimização do custo verifica-se uma redução de 12,86%. Em termos de custo por área em planta de tabuleiro tinha-se um valor de cerca de 293 €/m² na solução inicial do problema de minimização do custo, sendo reduzido para, aproximadamente, 255 €/m² na solução óptima. Este valor é 19,9% superior ao obtido no Exemplo 7 em que não se considerou o faseamento construtivo. De referir ainda que a evolução do custo não apresenta um andamento tão uniforme como em exemplos anteriores em virtude da já referida não-linearidade do problema actual. No entanto, verifica-se uma tendência clara de redução ao longo do processo de optimização e de estabilização nas últimas iterações.

No Quadro 5.23 resumem-se os valores iniciais e finais dos custos do tabuleiro, torres e tirantes. Os resultados apresentados mostram que, relativamente à solução inicial do problema de minimização do custo, a optimização permite obter uma redução de 4,7% no custo do tabuleiro e de 49,4% no custo das torres. Para os tirantes obtém-se um ligeiro acréscimo de

0,1% em virtude de se ter partido de uma solução inicial otimizada para a distribuição de forças e secções nos tirantes. Estes resultados mostram ainda que se considerou uma solução inicial sobredimensionada no que respeita às torres. Como se pode verificar, na solução óptima o tabuleiro representa 59,5% do custo total e os tirantes representam 28,3% do custo total, sendo o restante custo, 12,2%, devido às torres.

Quadro 5.23 – Valores iniciais e finais (após optimização) dos custos do tabuleiro, torres e tirantes (Exemplo 8)

	Tabuleiro	Torres	Tirantes	Total
Solução inicial	969.048 €	373.320 €	439.446 €	1.781.814 €
	54,4%	21,0%	24,7%	100,0%
Solução final	923.795 €	188.831 €	439.985 €	1.552.611 €
	59,5%	12,2%	28,3%	100,0%

Comparando os resultados obtidos neste exemplo com os obtidos no Exemplo 7, em que não se consideraram as fases construtivas, pode referir-se que se obteve uma solução com um custo 19,9% superior. Este facto deve-se aos acréscimos de 25,2% e 70,1% nos custos do tabuleiro e torres, respectivamente. Para os tirantes no Exemplo 8 obteve-se uma redução de 1,4%. Neste sentido, pode referir-se que para os exemplos analisados a solução para a ponte completa constitui um limite inferior, em termos de custo, para a solução considerando o faseamento construtivo, o que pode ser justificado pela maior quantidade de objectivos de projecto a verificar no Exemplo 8.

No Quadro 5.24 apresentam-se os valores iniciais e finais das forças de instalação e de ajustamento dos tirantes para o problema de minimização do custo. De acordo com os resultados apresentados pode referir-se que os valores são semelhantes aos obtidos em exemplos anteriores, verificando-se o mesmo padrão para a distribuição de forças nos tirantes. Assim, pode referir-se que os valores das forças aumentam da torre para o vão e são aproximadamente iguais em tirantes dispostos simetricamente relativamente à torre. O tirante de retenção é o que apresenta maior força, de modo a controlar o desequilíbrio de cargas entre o vão lateral e o central e, deste modo, minimizar as deformações e tensões de flexão nas torres, assim como, os deslocamentos verticais do tabuleiro.

Pode ainda referir-se que não se verificam variações significativas nos valores das forças entre a solução inicial e a final. Este aspecto justifica-se pelo facto de se ter resolvido o problema de minimização do custo partindo de uma solução otimizada para a distribuição de forças e áreas dos tirantes. Comparando os valores das forças neste exemplo com os da solução óptima do Exemplo 2 observa-se uma tendência geral de redução que pode ser

justificada pela diminuição de peso do tabuleiro conseguida através da utilização de variáveis de decisão seccionais neste exemplo.

Quadro 5.24 – Valores iniciais e finais (após optimização) das forças nos tirantes (Exemplo 8)

Tirante	Forças de instalação [kN]		Forças de ajustamento [kN]	
	Inicial	Final	Inicial	Final
1	1002	988	1497	1443
2	987	988	1491	1530
3	1515	1454	1806	1697
4	1486	1490	1793	1827
5	1768	1719	2261	2142
6	1800	1801	2305	2378
7	1977	1967	2475	2469
8	2025	2020	2529	2583
9	2188	2162	2695	2749
10	2257	2242	2759	2789
11	2543	2526	3062	3142
12	2601	2573	3102	3107
13	2561	2432	3098	3167
14	2632	2588	3145	3124
15	3078	2880	3634	3670
16	3157	3098	3669	3628
17	3077	2843	5169	5171
18	3160	3095	4697	4645

No Quadro 5.25 apresentam-se os valores iniciais e finais das diversas variáveis de decisão seccionais, indicando-se também os respectivos valores máximos e mínimos. Os valores são apresentados em m^2 e em m , respectivamente, para as áreas dos tirantes e para as dimensões das secções transversais dos elementos do tabuleiro e das torres. Como se pode verificar a redução de custo observada na solução óptima deve-se a reduções nas dimensões das secções transversais dos diversos elementos, em particular nas torres em que se verificam reduções de todas as dimensões das secções transversais. Relativamente à solução inicial do tabuleiro observa-se um aumento da altura, uma diminuição da espessura da laje em todas as zonas e uma diminuição da largura das vigas laterais nas Zonas 3 e 4. A largura das vigas laterais diminui da torre (0,983 m na Zona 3) para o vão (0,727 m e 0,576 m nas Zonas 4 e 5, respectivamente).

Quadro 5.25 – Valores mínimos, máximos, iniciais e finais das variáveis de decisão seccionais (Exemplo 8)

Variável de decisão	Mínimo	Máximo	Inicial	Final
3	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$2,027 \times 10^{-3}$	$1,515 \times 10^{-3}$
4	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$2,115 \times 10^{-3}$	$1,509 \times 10^{-3}$
5	1,000	4,000	2,000	2,336
6	0,500	3,000	1,200	0,983
7	0,150	0,500	0,200	0,152
10	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$2,523 \times 10^{-3}$	$1,856 \times 10^{-3}$
11	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$2,255 \times 10^{-3}$	$1,978 \times 10^{-3}$
12	0,500	3,000	0,800	0,727
13	0,150	0,500	0,200	0,169
16	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$2,980 \times 10^{-3}$	$2,375 \times 10^{-3}$
17	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$2,504 \times 10^{-3}$	$2,383 \times 10^{-3}$
20	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$3,385 \times 10^{-3}$	$3,220 \times 10^{-3}$
21	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$2,787 \times 10^{-3}$	$2,694 \times 10^{-3}$
24	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$3,369 \times 10^{-3}$	$3,537 \times 10^{-3}$
25	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$3,050 \times 10^{-3}$	$2,928 \times 10^{-3}$
28	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$3,343 \times 10^{-3}$	$4,502 \times 10^{-3}$
29	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$3,527 \times 10^{-3}$	$3,392 \times 10^{-3}$
32	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$3,097 \times 10^{-3}$	$3,682 \times 10^{-3}$
33	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$3,555 \times 10^{-3}$	$3,416 \times 10^{-3}$
36	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$3,030 \times 10^{-3}$	$3,333 \times 10^{-3}$
37	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$4,354 \times 10^{-3}$	$4,607 \times 10^{-3}$
40	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$5,718 \times 10^{-3}$	$4,956 \times 10^{-3}$
41	$1,500 \times 10^{-3}$	$7,500 \times 10^{-3}$	$5,632 \times 10^{-3}$	$5,982 \times 10^{-3}$
42	0,500	3,000	0,500	0,576
43	0,150	0,500	0,200	0,195
44	1,000	10,000	5,000	4,459
45	1,000	10,000	4,000	2,722
46	1,000	10,000	5,000	4,154
47	1,000	10,000	4,000	2,544
48	0,150	1,000	0,500	0,354
49	0,150	1,000	0,500	0,330
50	0,150	1,000	0,500	0,369
51	0,150	1,000	0,500	0,326

Neste exemplo considerou-se o faseamento construtivo pelo que seguidamente se apresentam os resultados correspondentes à solução óptima para as diversas fases construtivas. Deste modo, nas Figuras 5.86 e 5.87 apresentam-se as deformadas para as diversas fases construtivas. Posteriormente nas Figuras 5.88 a 5.93 apresentam-se os respectivos diagramas de esforços internos, momento flector, esforço transversal e esforço axial.

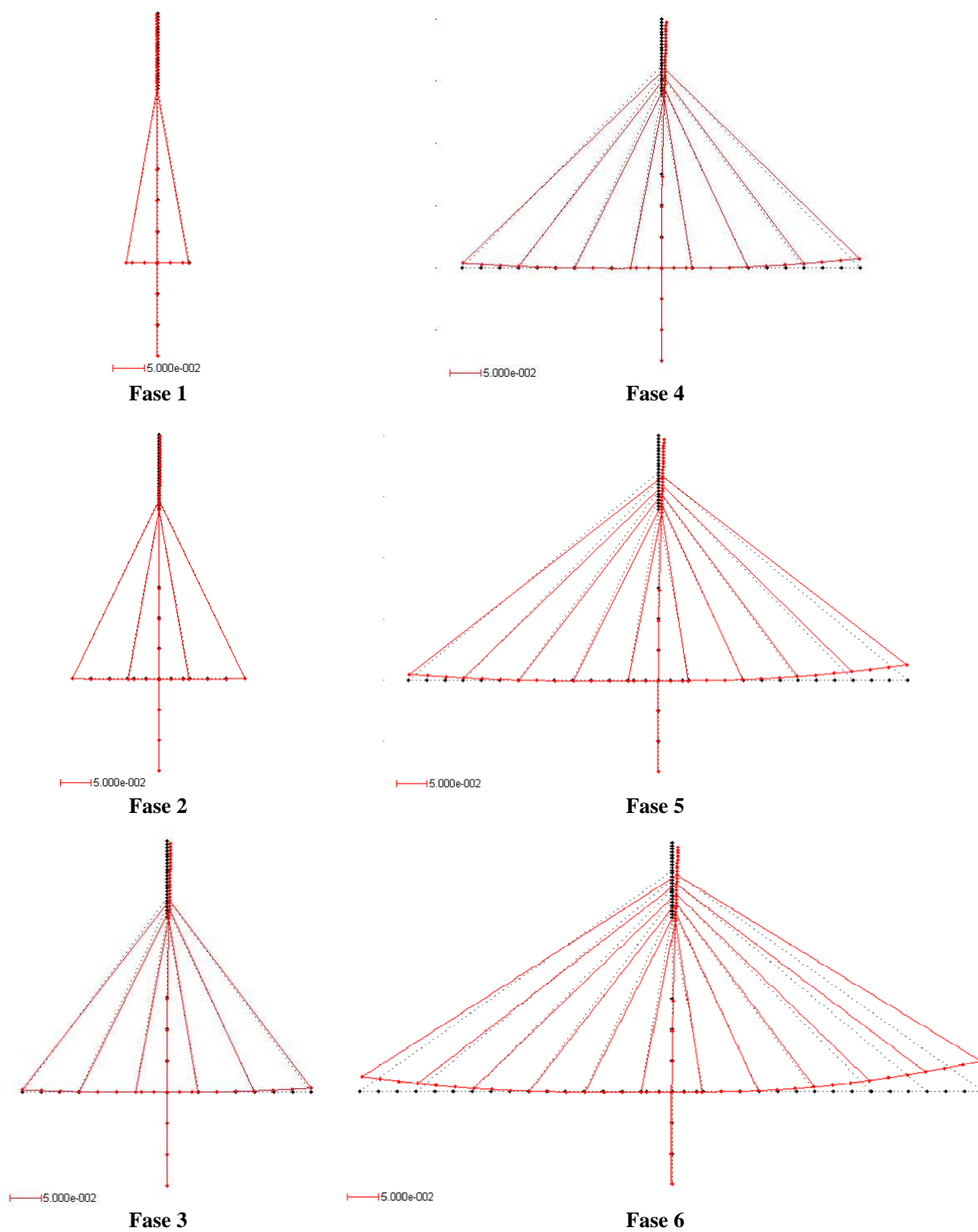


Figura 5.86 – Deformadas das fases 1 a 6 – estrutura otimizada (Exemplo 8)

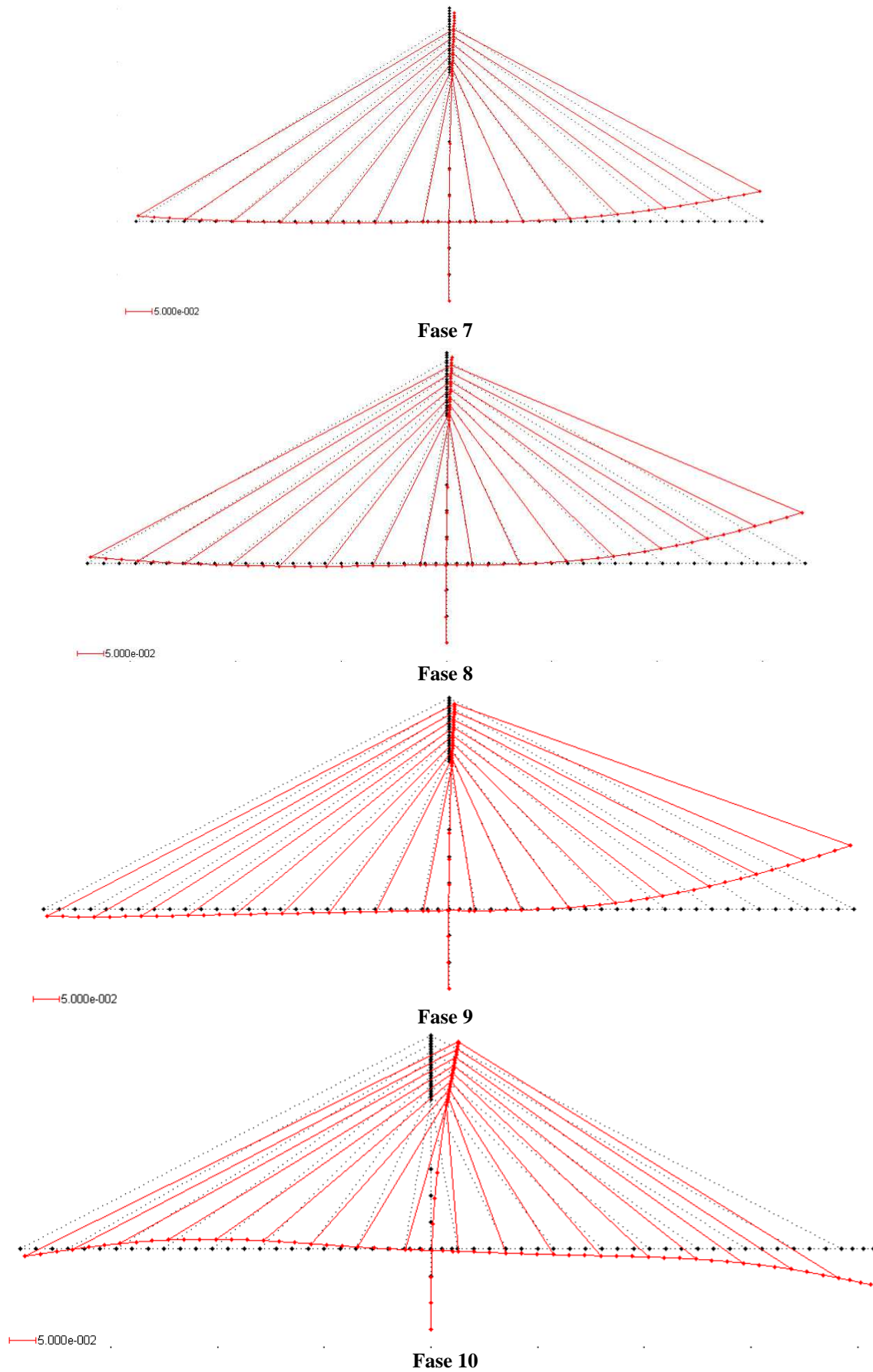


Figura 5.87 – Deformadas das fases 7 a 10 – estrutura otimizada (Exemplo 8)

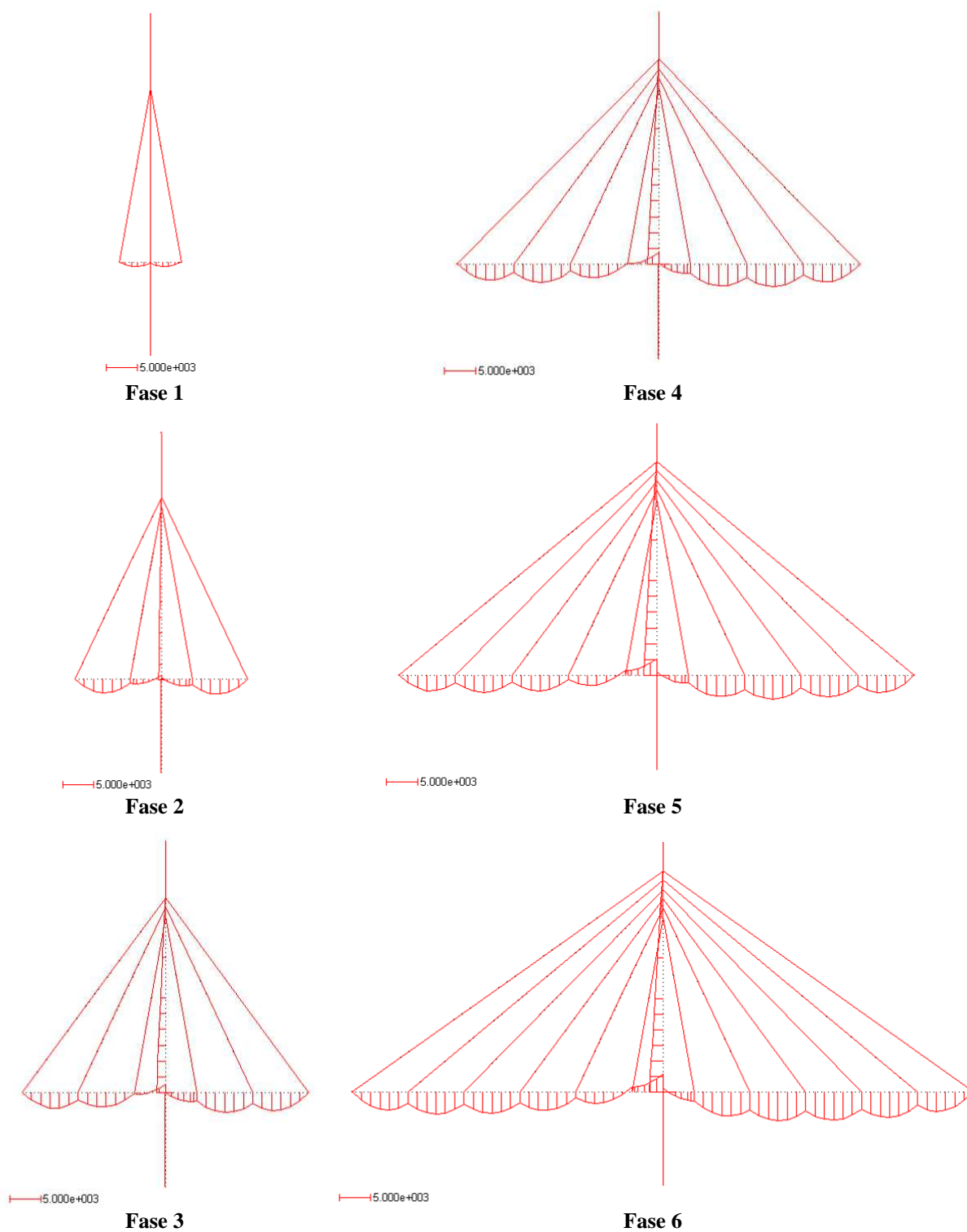


Figura 5.88 – Diagramas de momento flector das fases 1 a 6 – estrutura otimizada (Exemplo 8)

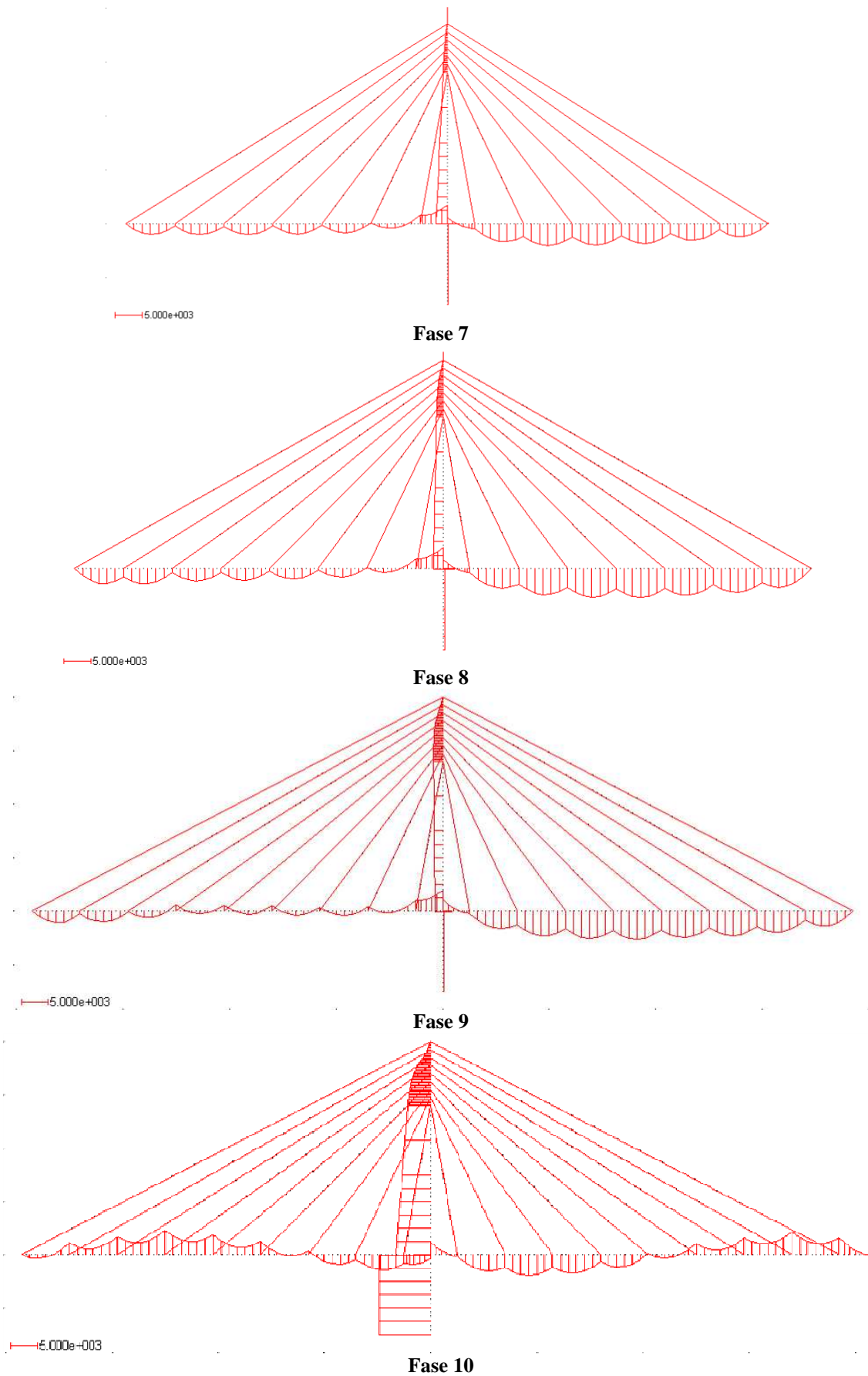


Figura 5.89 – Diagramas de momento flector das fases 7 a 10 – estrutura otimizada (Exemplo 8)

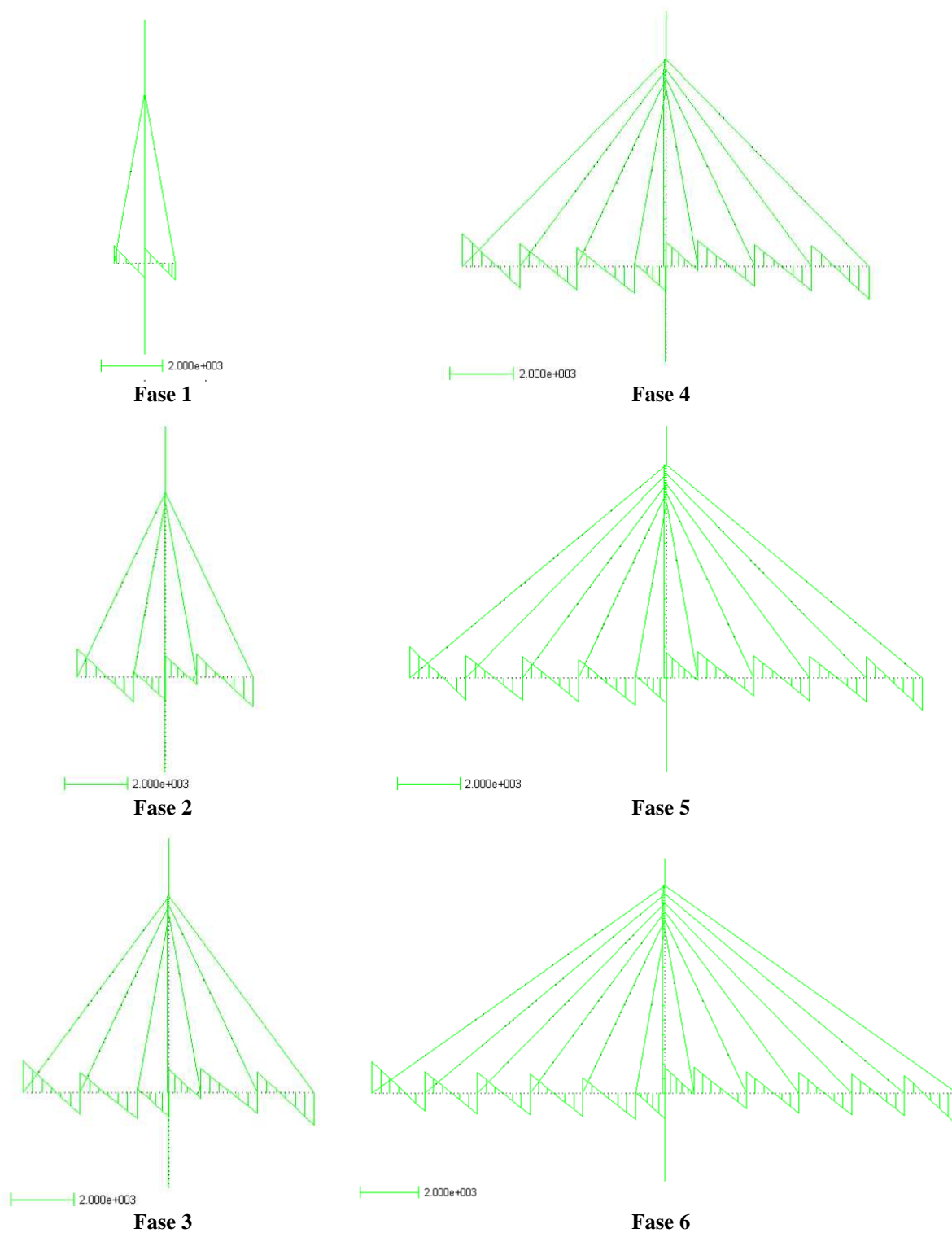


Figura 5.90 – Diagramas de esforço transverso das fases 1 a 6 – estrutura otimizada (Exemplo 8)

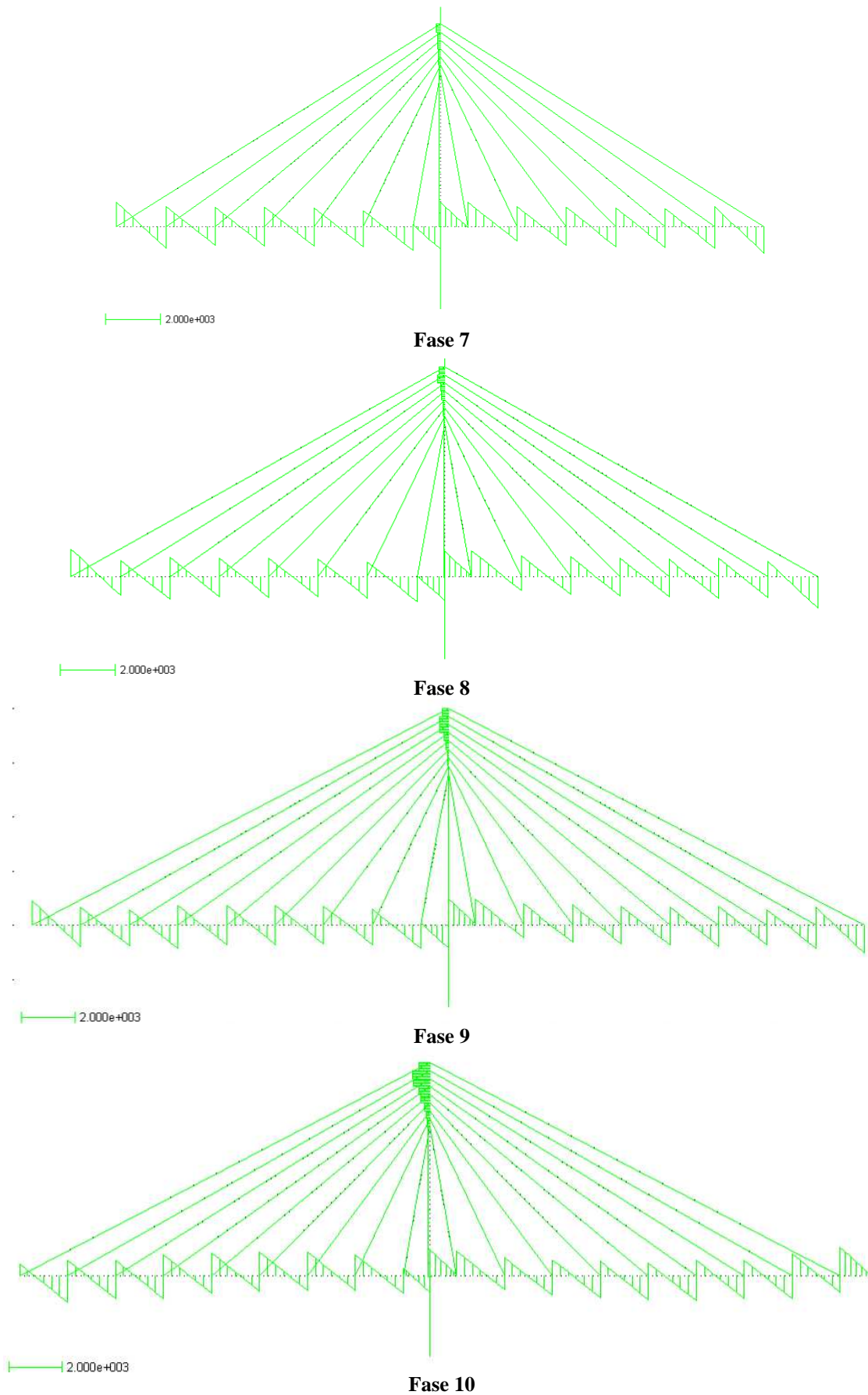


Figura 5.91 – Diagramas de esforço transverso das fases 7 a 10 – estrutura otimizada (Exemplo 8)

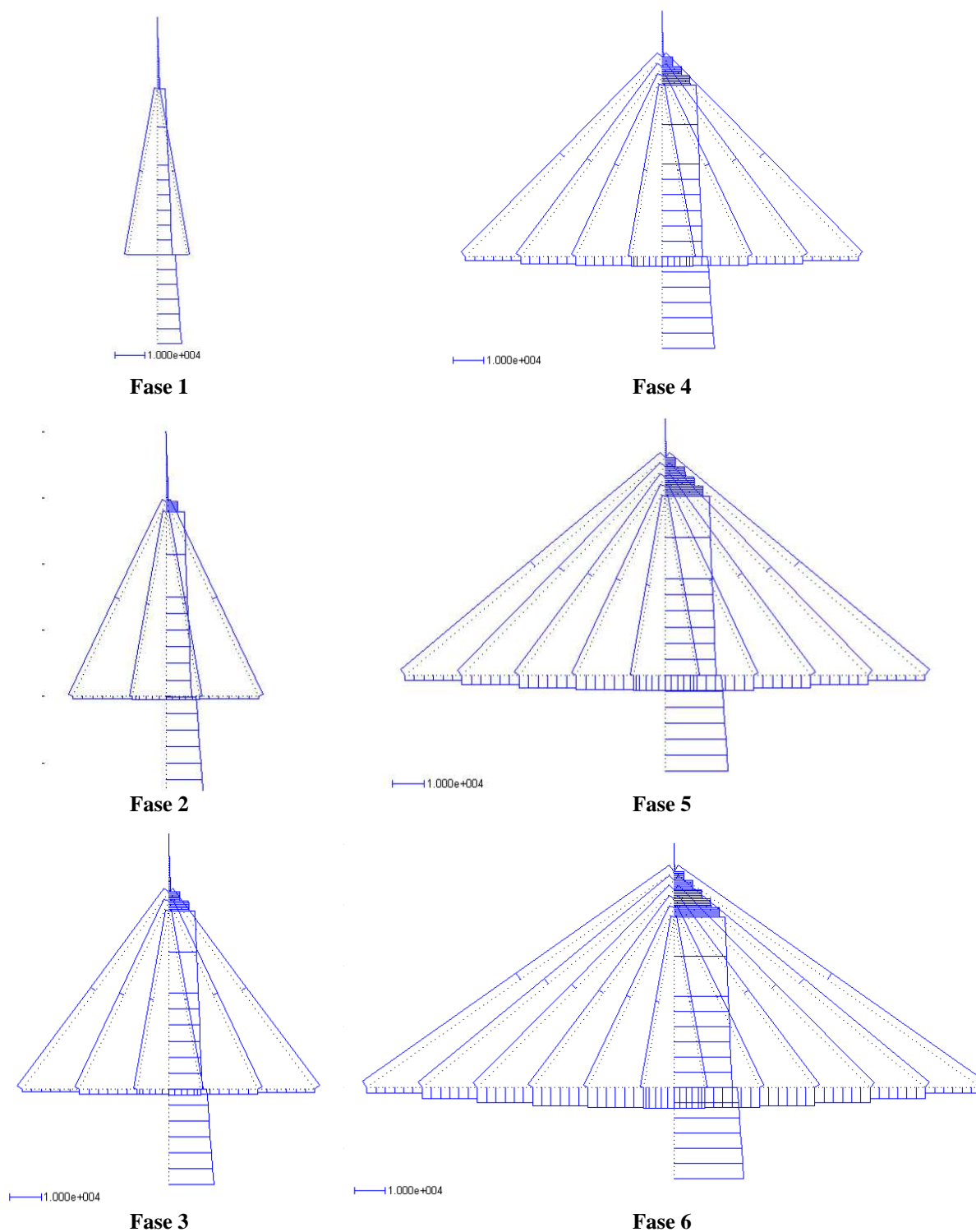


Figura 5.92 – Diagramas de esforço axial das fases 1 a 6 – estrutura otimizada (Exemplo 8)

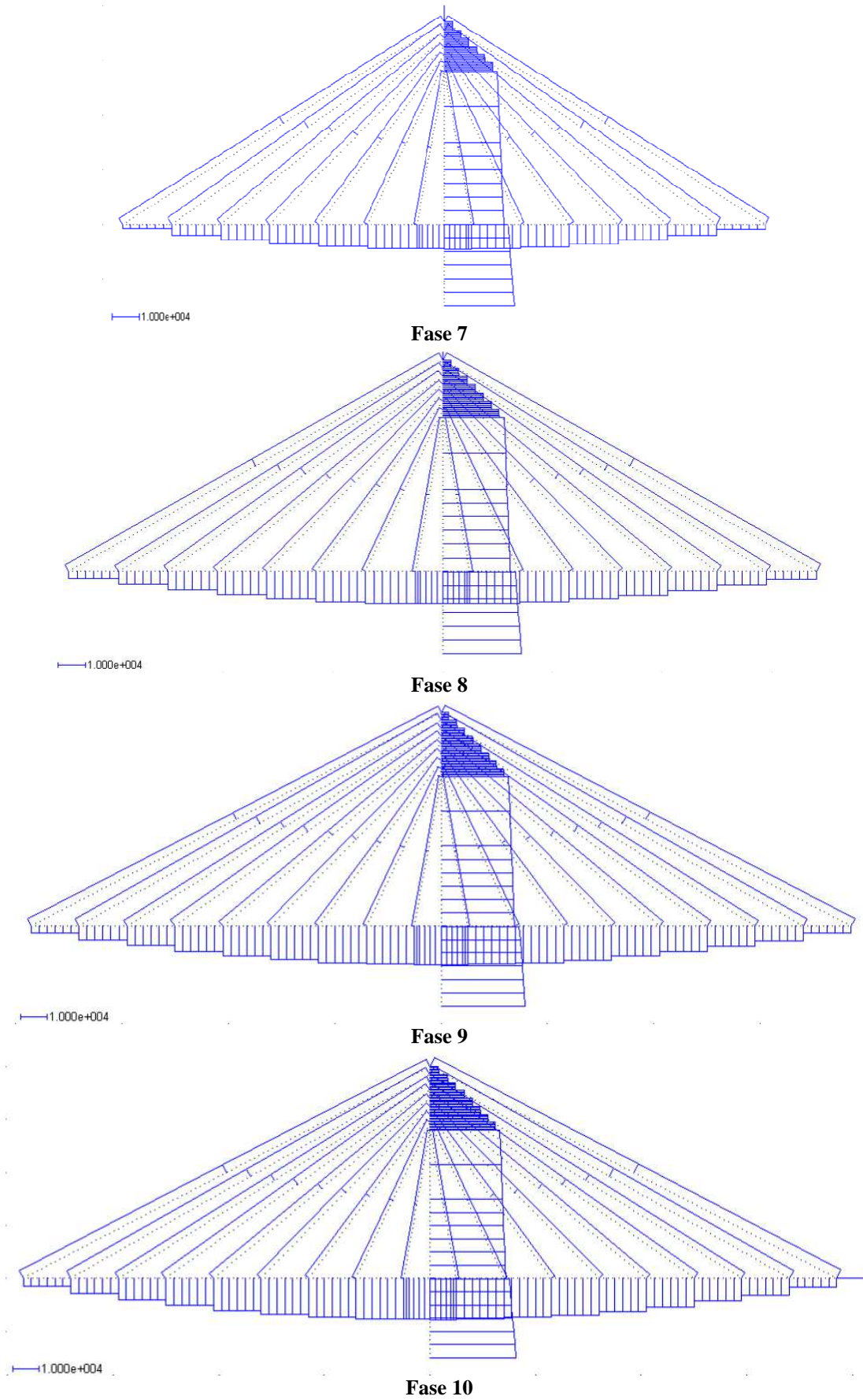


Figura 5.93 – Diagramas de esforço axial das fases 7 a 10 – estrutura otimizada (Exemplo 8)

Relativamente às configurações deformadas para as diversas fases construtivas observa-se, tal como no Exemplo 2, que na Fase 9 o tabuleiro apresenta um deslocamento vertical pequeno (inferior a 2 cm) no nó de extremidade do vão lateral, garantindo o objectivo de projecto correspondente e possibilitando efectuar a ligação ao encontro. Do mesmo modo, obteve-se uma solução óptima para as forças de instalação que se caracteriza por valores mais elevados destas no vão central. Por conseguinte, introduz-se uma contra-flecha no tabuleiro para fazer face ao posterior aumento dos deslocamentos verticais aquando da adição do tramo central de fecho a meio-vão tendo em vista a verificação dos objectivos de deslocamento para a ponte completa (Fase 11).

No que respeita aos resultados da análise estrutural para a ponte completa sujeita a carga permanente (Fase 11) apresentam-se nas Figuras 5.94 a 5.97 a deformada e os diagramas de momento flector, esforço transversal e esforço axial relativos à solução óptima. Relativamente aos resultados apresentados pode referir-se estão em linha com os referentes ao Exemplo 2 e que foram apresentados na secção 5.3.2. Na Figura 5.94 a configuração deformada apresenta pequenos deslocamentos que verificam os limites impostos nos objectivos de projecto. Neste sentido pode referir-se que a norma dos deslocamentos verticais do tabuleiro é de apenas 2,25 cm, apresentando um valor máximo de 2,76 cm na secção de meio-vão. O deslocamento horizontal no topo da torre apresenta um valor de 8,2 mm.

Relativamente ao diagrama de momento flector, apresentado na Figura 5.95, observa-se para o tabuleiro uma distribuição que segue o padrão de viga contínua. O momento flector máximo positivo no tabuleiro verifica-se no vão central e apresenta um valor de 4734 kNm. O momento flector máximo negativo tem um valor de -5341 kNm e ocorre próximo da secção de meio-vão. O momento flector máximo na torre ocorre na base e apresenta um valor de 979 kNm.

No diagrama de esforço axial representado na Figura 5.97 verifica-se que as torres estão sujeitas a elevados esforços de compressão, que aumentam do topo para a base, onde se observa um valor de 40000 kN. O tabuleiro também está sujeito a esforço axial de compressão que aumenta dos vãos para a torre devido às forças de compressão transmitidas pelos tirantes. O valor mais elevado verifica-se na secção junto à torre onde se tem um valor de, aproximadamente, 19580 kN. Tal como já foi referido, no tramo de meio-vão este efeito não se faz sentir, verificando-se aí um esforço axial de compressão de valor reduzido, aproximadamente 3 kN. Nos tirantes tem-se esforço axial de tracção que aumenta das torres para os vãos em virtude das respectivas forças de pré-esforço que também são mais elevadas nos tirantes mais afastados das torres.

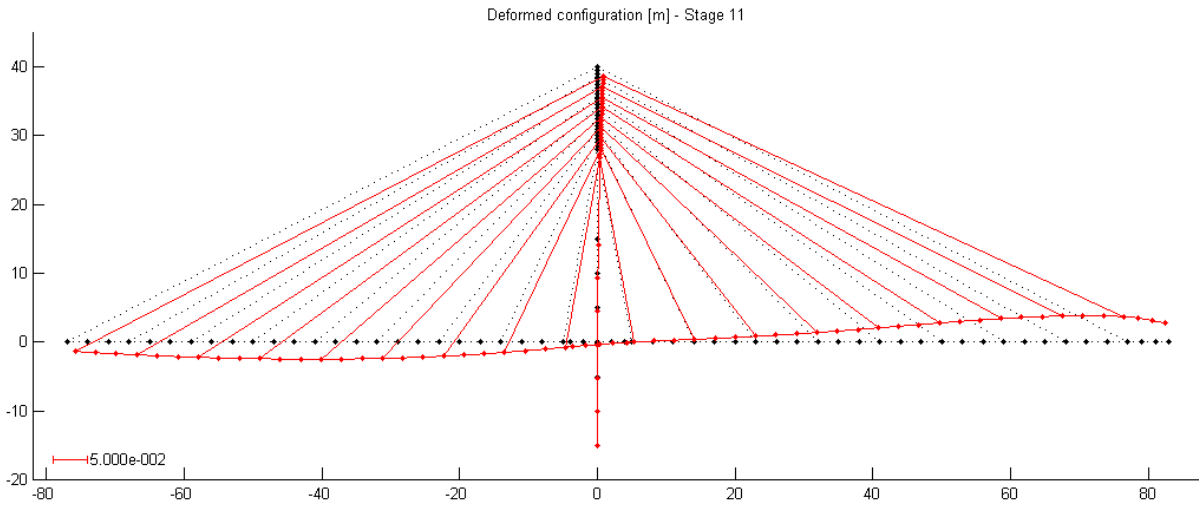


Figura 5.94 – Deformada para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 8)

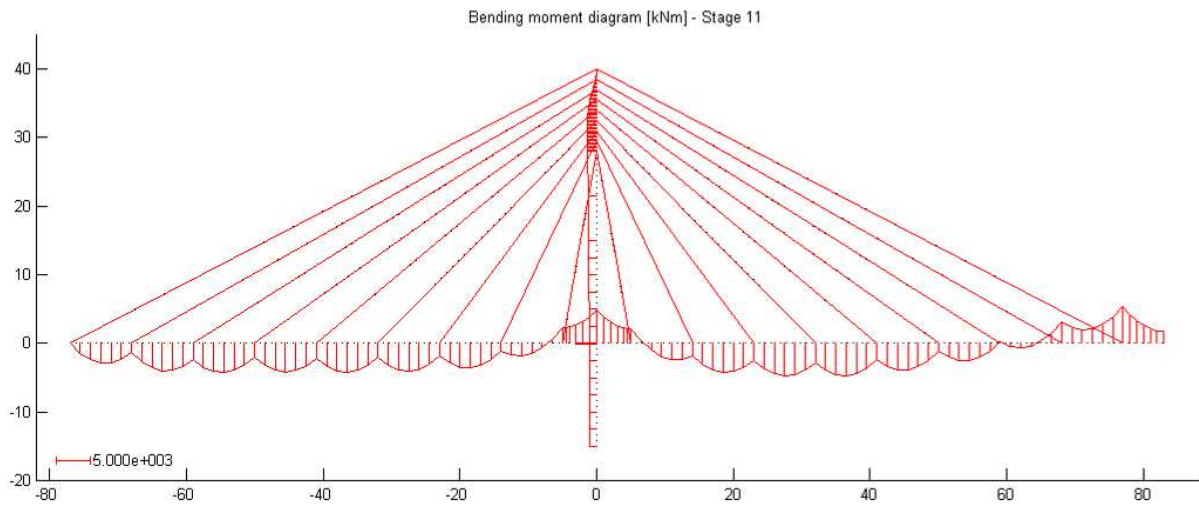


Figura 5.95 – Diagrama de momento flector para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 8)

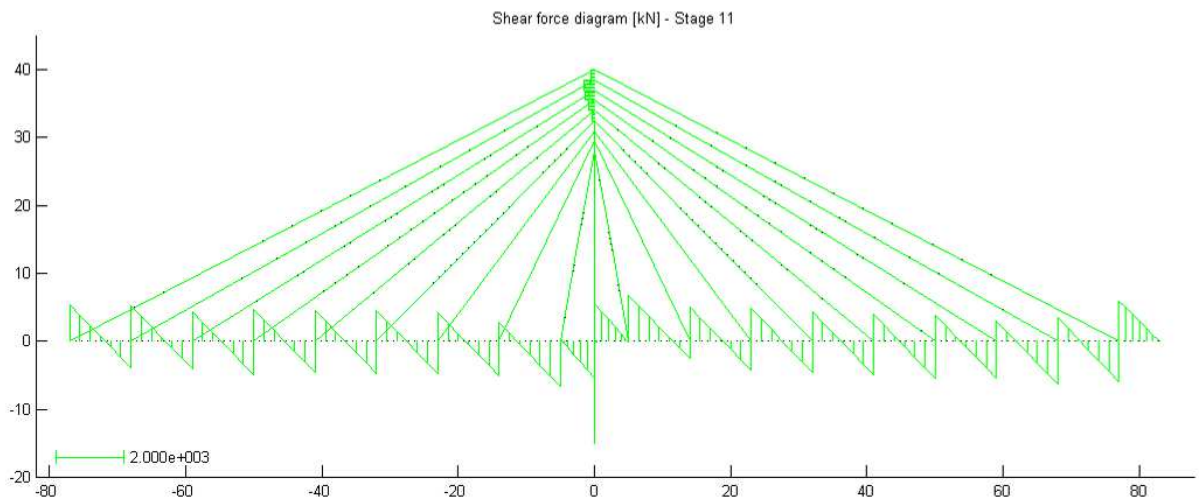


Figura 5.96 – Diagrama de esforço transversal para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 8)

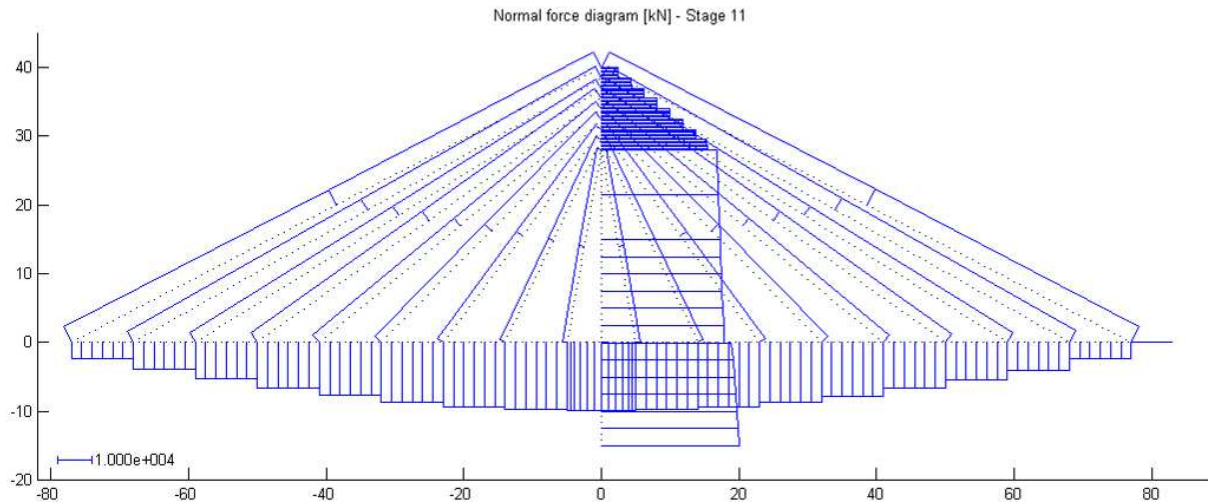


Figura 5.97 – Diagrama de esforço axial para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 8)

Nas Figuras 5.98 e 5.99 apresentam-se as distribuições de tensões normais, respectivamente, ao longo do tabuleiro e das torres, para a ponte completa sujeita a carga permanente (Fase 11). Como se pode verificar as tensões apresentam valores inferiores aos limites impostos nos objectivos de projecto para elementos de betão em condições de serviço. O tabuleiro, em virtude dos elevados esforços axiais de compressão já referidos, encontra-se totalmente comprimido à excepção do vão lateral junto ao encontro e do meio-vão onde se verificam tensões de tracção de valor reduzido, inferior a 1 MPa. As torres estão totalmente sujeitas a tensões de compressão que variam, aproximadamente, entre os 1,5 e 11,7 MPa.

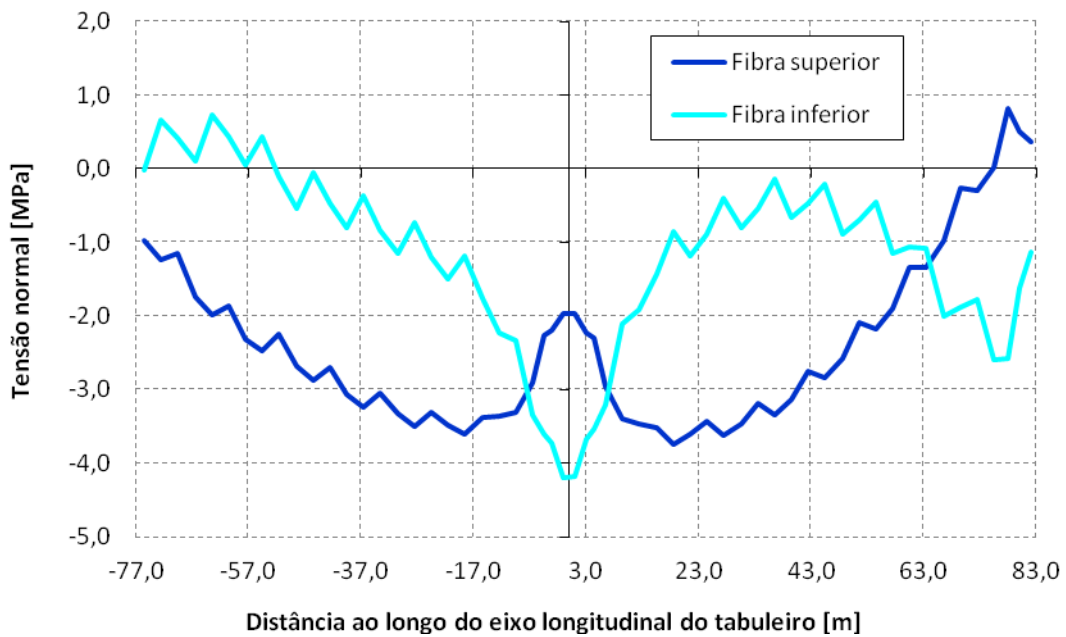


Figura 5.98 – Distribuição de tensões normais no tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 8)

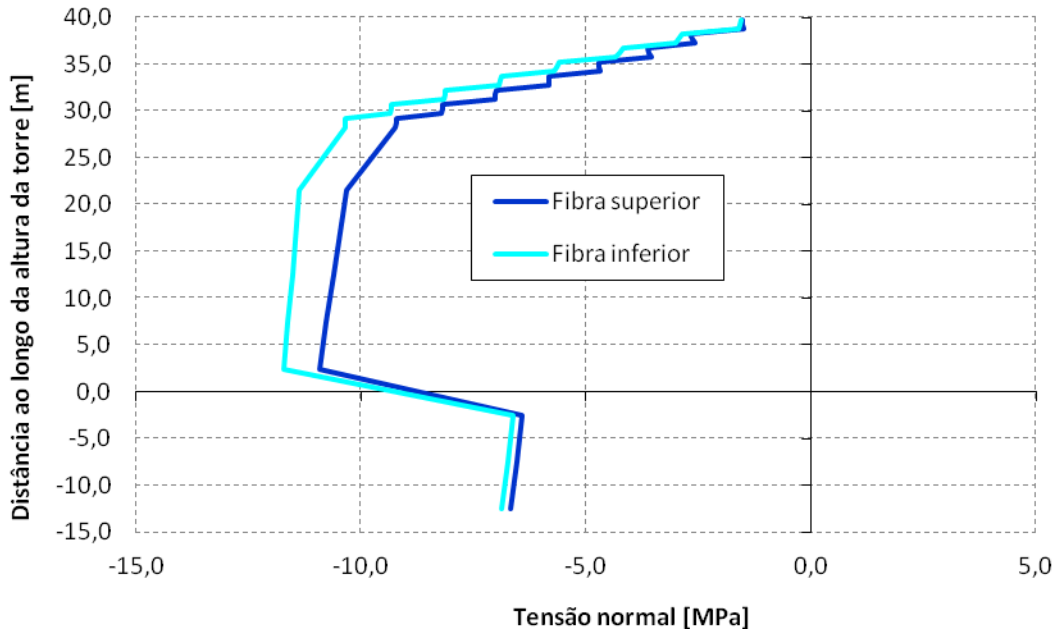


Figura 5.99 – Distribuição de tensões normais na torre para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 8)

Como complemento aos resultados já expostos, apresentam-se de seguida nas Figuras 5.100 a 5.111 as deformadas e os diagramas de momento flector, de esforço transversal e de esforço axial para a solução óptima referentes aos três casos de alternância de sobrecarga.

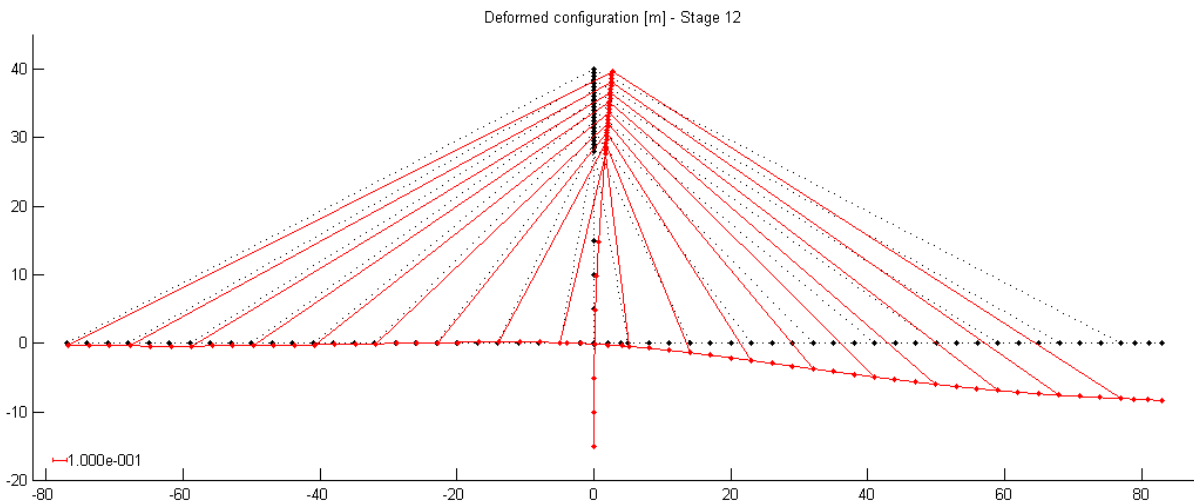


Figura 5.100 – Deformada para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 8)

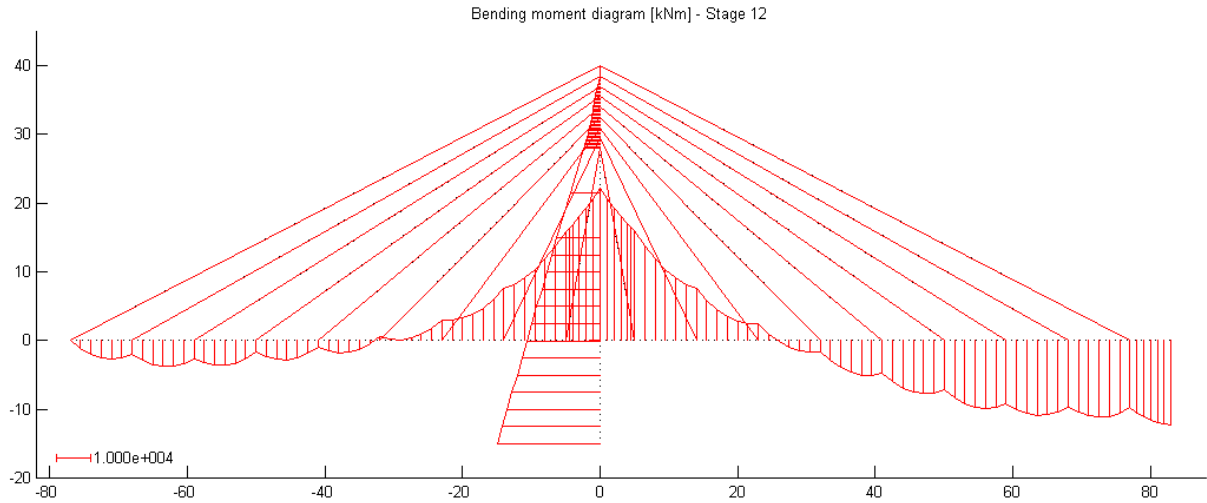


Figura 5.101 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 8)

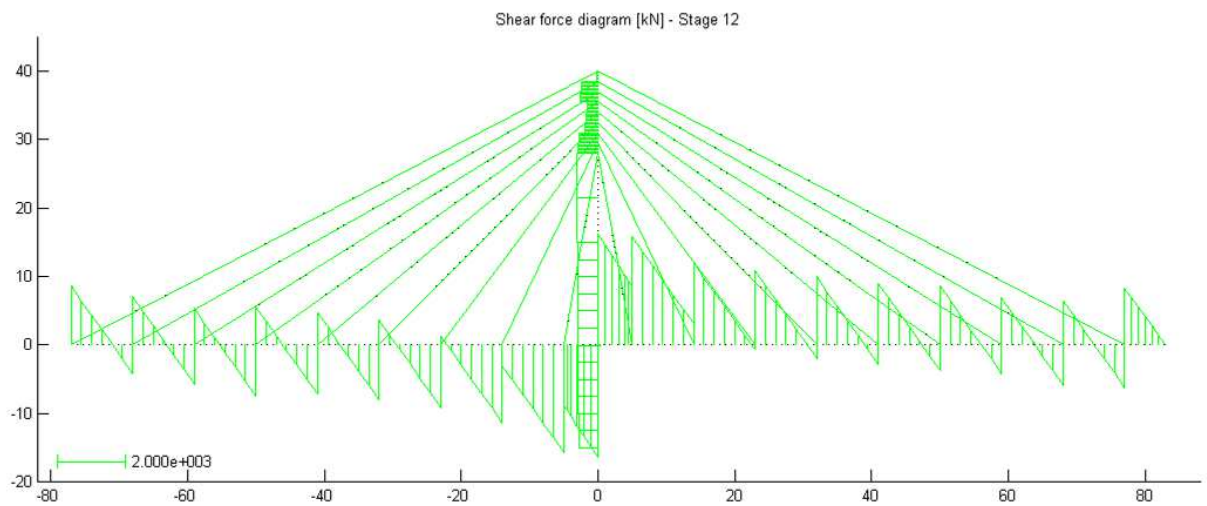


Figura 5.102 – Diagrama de esforço transverso para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 8)

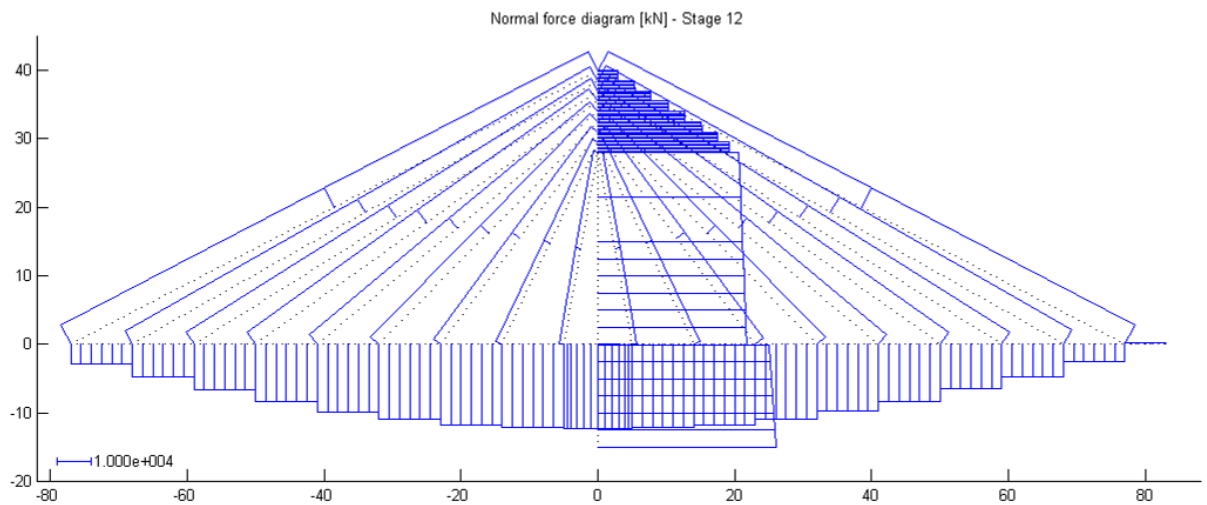


Figura 5.103 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo 8)

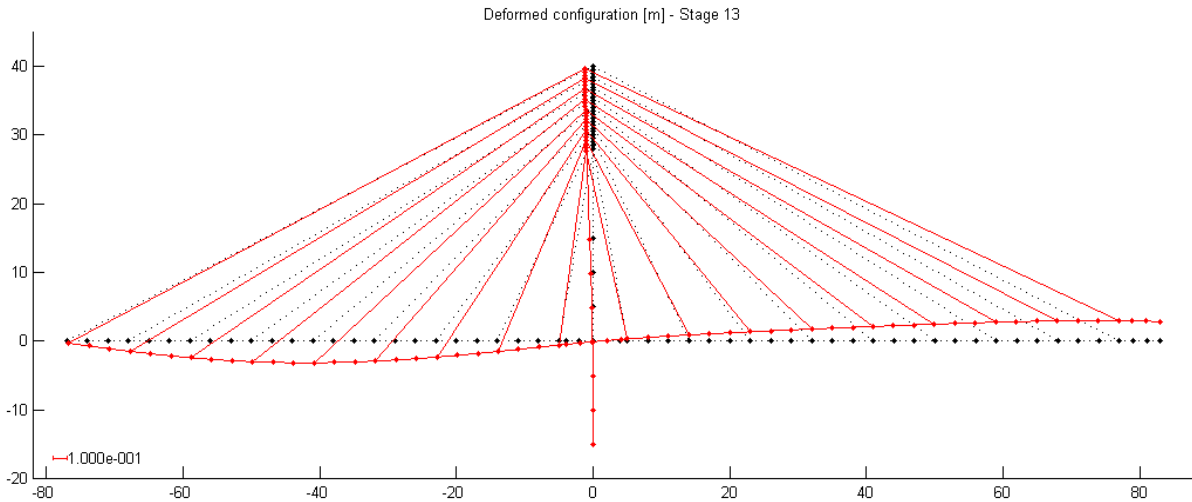


Figura 5.104 – Deformada para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 8)

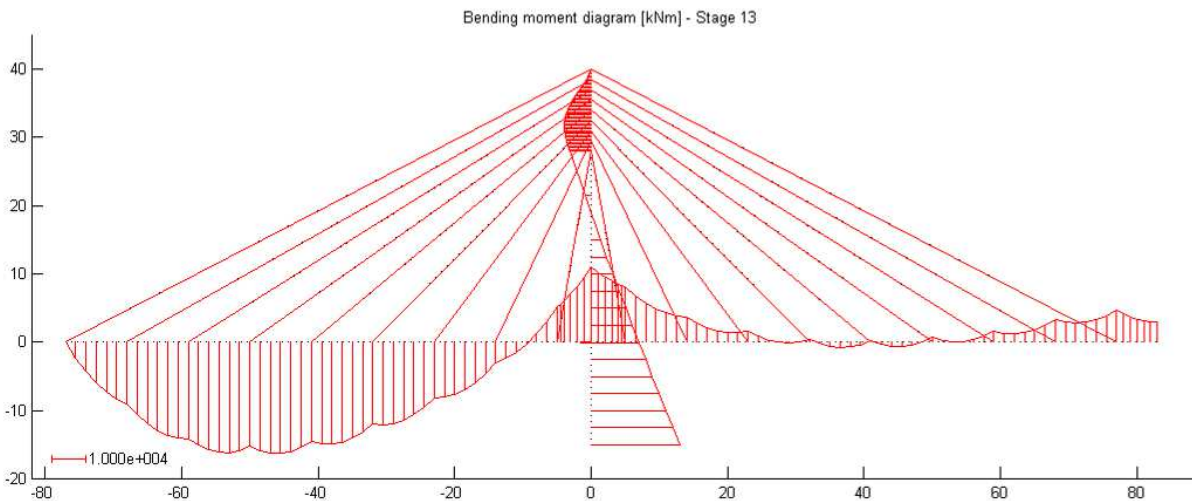


Figura 5.105 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 8)

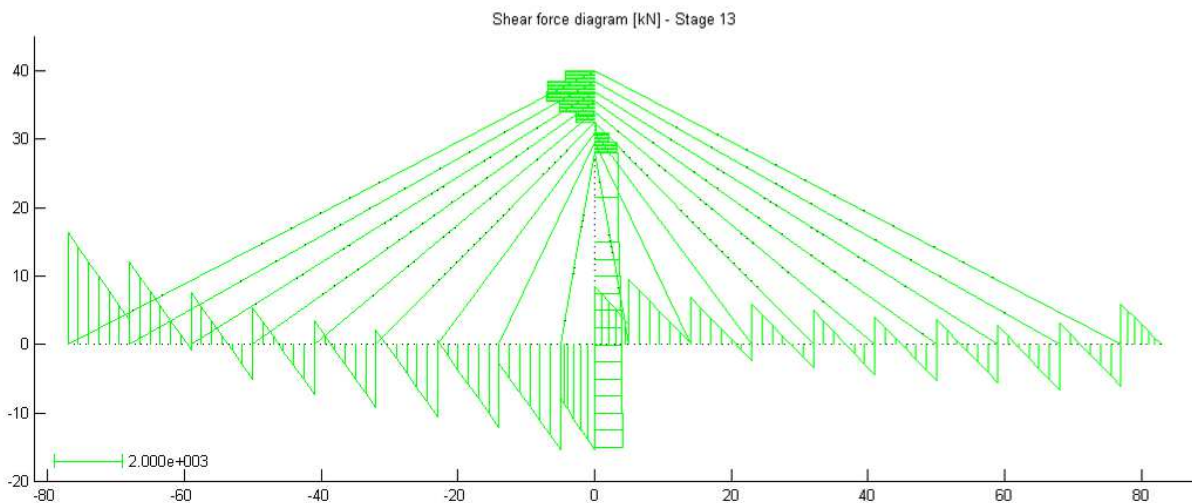


Figura 5.106 – Diagrama de esforço transversal para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 8)

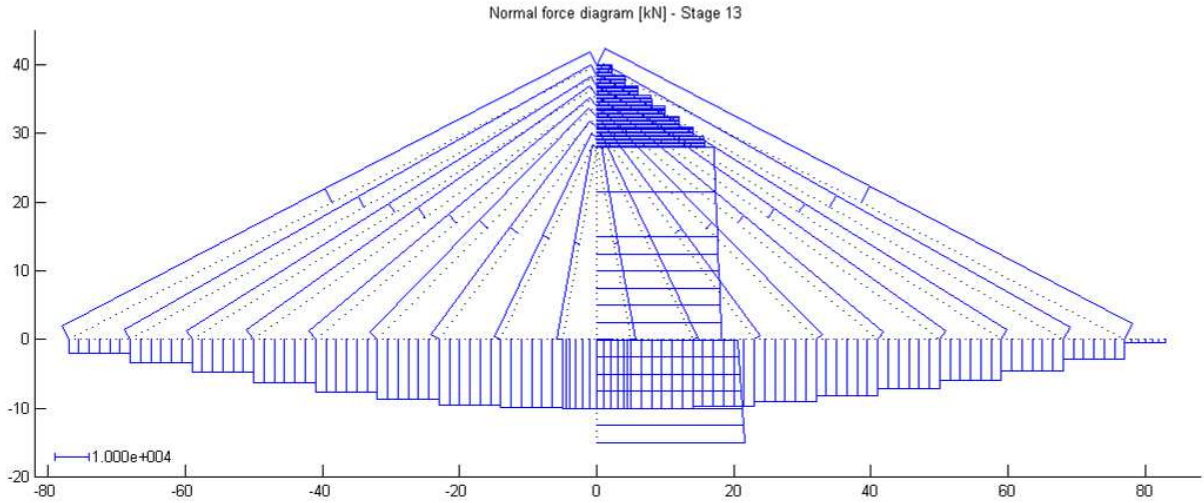


Figura 5.107 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 2 – estrutura otimizada (Exemplo 8)

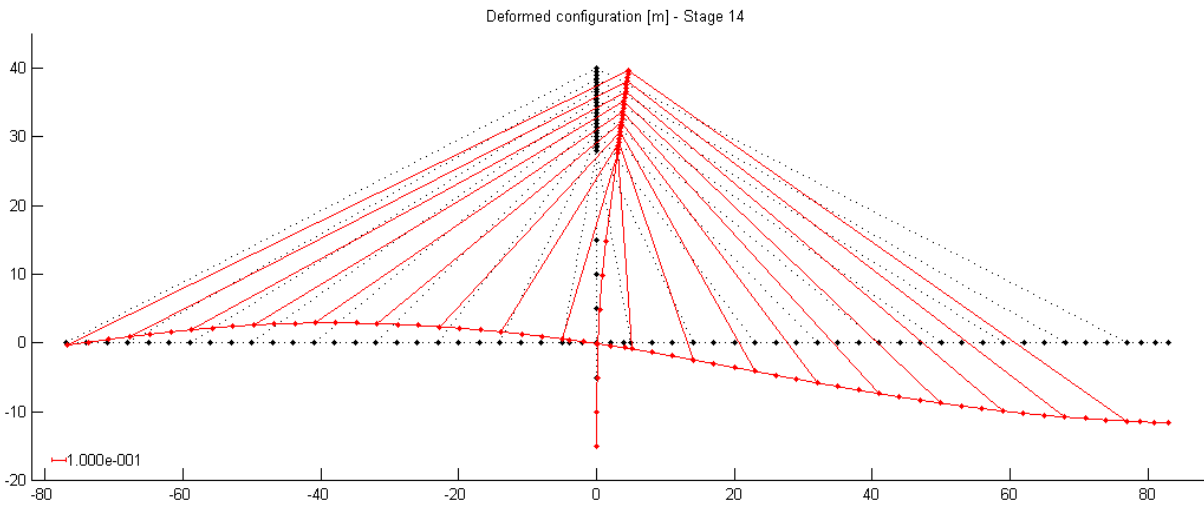


Figura 5.108 – Deformada para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 8)

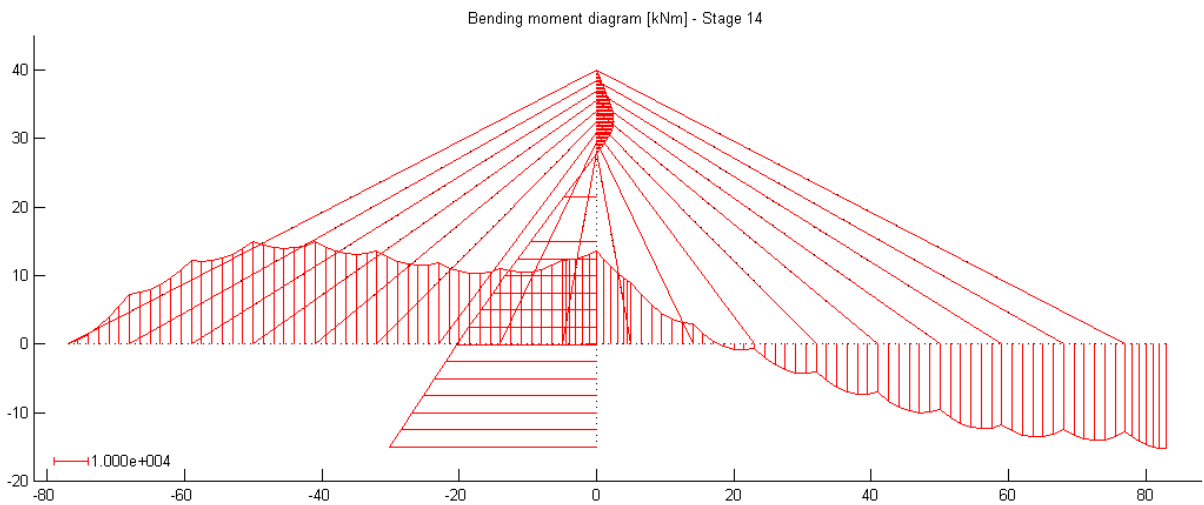


Figura 5.109 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 8)

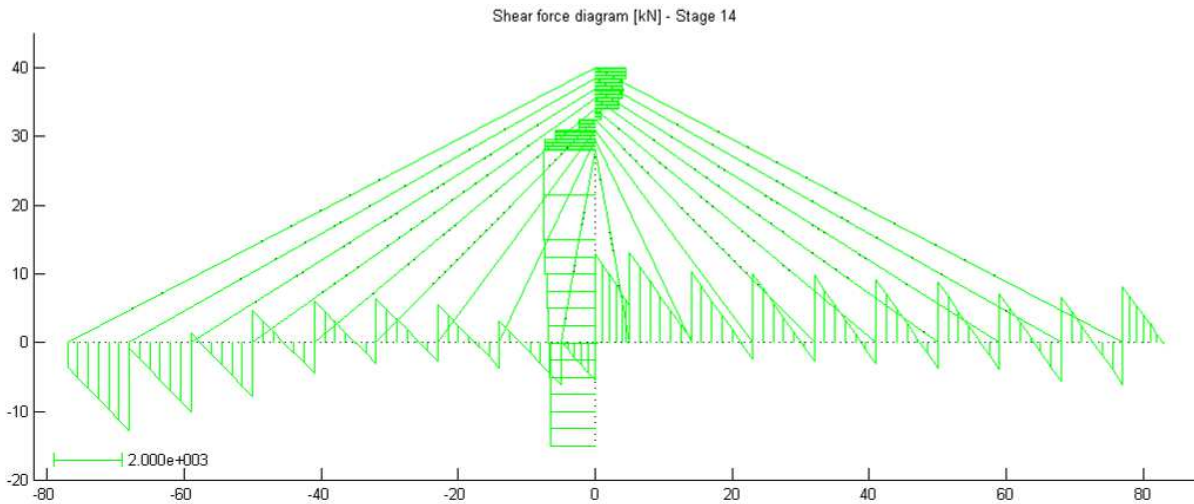


Figura 5.110 – Diagrama de esforço transverso para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 8)

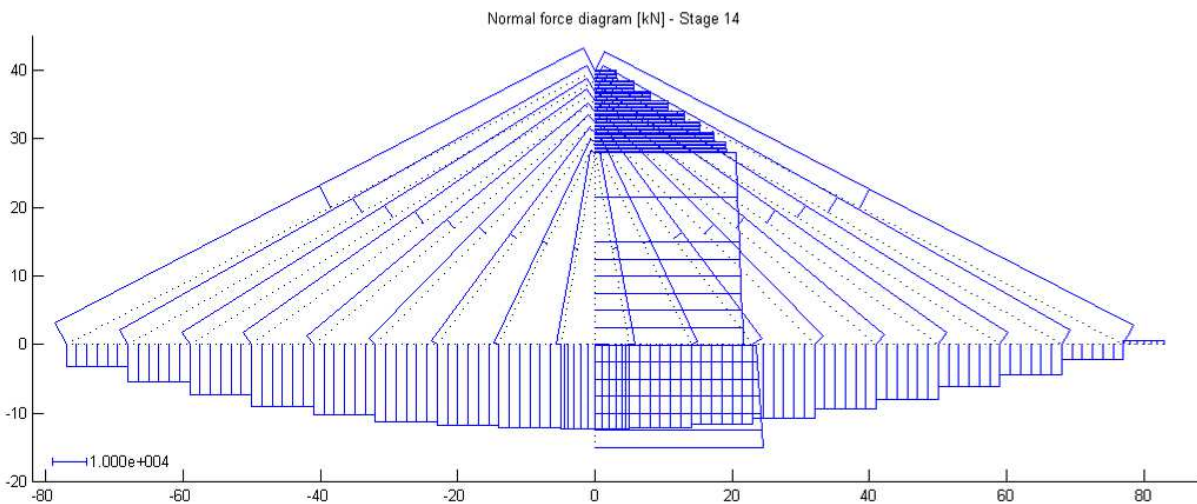


Figura 5.111 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 3 – estrutura otimizada (Exemplo 8)

5.4.3. Análise de soluções estruturais alternativas

Uma das potencialidades do modelo numérico desenvolvido é a de possibilitar uma análise económica de diversas soluções estruturais alternativas. A consideração e implementação de vários tipos de secções transversais para o tabuleiro permite estudar várias soluções estruturais alternativas a adoptar para o mesmo procurando aquela que conduz ao menor custo. Assim, na presente secção estudam-se, para além da secção em laje vigada, a secção em caixão unicelular e a secção em caixão tricelular como soluções estruturais alternativas para a execução do tabuleiro. Para facilitar a apresentação e interpretação dos resultados identificam-se estes dois exemplos como Exemplo 9 e Exemplo 10, respectivamente. Nos Quadros 5.26 e 5.27 descrevem-se as 72 variáveis de decisão

consideradas em cada um destes exemplos. Os objectivos de projecto são exactamente os mesmos que se consideraram para o Exemplo 8 e que foram descritos na secção anterior.

Quadro 5.26 – Descrição das variáveis de decisão utilizadas no Exemplo 9

Variável de decisão	Descrição	Tipo de variável de decisão
1 e 2	Forças de pré-esforço nos tirantes 1 e 2	4
3 e 4	Área da secção transversal dos tirantes 1 e 2	22
5	Altura da secção do tabuleiro em caixão tritelular	12
6	Espessura das almas da secção em caixão unicelular – Zona 3	13
7	Espessura da laje superior da secção em caixão unicelular – Zona 3	14
8	Espessura da laje inferior da secção em caixão unicelular – Zona 3	15
9 e 10	Forças de pré-esforço nos tirantes 3 e 4	4
11 e 12	Área da secção transversal dos tirantes 3 e 4	22
13	Espessura das almas da secção em caixão unicelular – Zona 4	13
14	Espessura da laje superior da secção em caixão unicelular – Zona 4	14
15	Espessura da laje inferior da secção em caixão unicelular – Zona 4	15
16 e 17	Forças de pré-esforço nos tirantes 5 e 6	4
18 e 19	Área da secção transversal dos tirantes 5 e 6	22
20 e 21	Forças de pré-esforço nos tirantes 7 e 8	4
22 e 23	Área da secção transversal dos tirantes 7 e 8	22
24 e 25	Forças de pré-esforço nos tirantes 9 e 10	4
26 e 27	Área da secção transversal dos tirantes 9 e 10	22
28 e 29	Forças de pré-esforço nos tirantes 11 e 12	4
30 e 31	Área da secção transversal dos tirantes 11 e 12	22
32 e 33	Forças de pré-esforço nos tirantes 13 e 14	4
34 e 35	Área da secção transversal dos tirantes 13 e 14	22
36 e 37	Forças de pré-esforço nos tirantes 15 e 16	4
38 e 39	Área da secção transversal dos tirantes 15 e 16	22
40 e 41	Forças de pré-esforço nos tirantes 17 e 18	4
42 e 43	Área da secção transversal dos tirantes 17 e 18	22
44	Espessura das almas da secção em caixão unicelular – Zona 5	13
45	Espessura da laje superior da secção em caixão unicelular – Zona 5	14
46	Espessura da laje inferior da secção em caixão unicelular – Zona 5	15
47	Altura da secção rectangular oca – Zona 1	5
48	Altura da secção rectangular oca – Zona 2	5
49	Largura da secção rectangular oca – Zona 1	6
50	Largura da secção rectangular oca – Zona 2	6
51	Espessura das paredes de altura h da secção rectangular oca – Zona 1	7
52	Espessura das paredes de altura h da secção rectangular oca – Zona 2	7
53	Espessura das paredes de largura b da secção rectangular oca – Zona 1	8
54	Espessura das paredes de largura b da secção rectangular oca – Zona 2	8
55 a 72	Forças de ajustamento nos tirantes 1 a 18	4

Quadro 5.27 – Descrição das variáveis de decisão utilizadas no Exemplo 10

Variável de decisão	Descrição	Tipo de variável de decisão
1 e 2	Forças de pré-esforço nos tirantes 1 e 2	4
3 e 4	Área da secção transversal dos tirantes 1 e 2	22
5	Altura da secção do tabuleiro em caixão tritelular	17
6	Espessura das almas da secção em caixão tritelular – Zona 3	18
7	Espessura da laje superior da secção em caixão tritelular – Zona 3	19
8	Espessura da laje inferior da secção em caixão tritelular – Zona 3	20
9 e 10	Forças de pré-esforço nos tirantes 3 e 4	4
11 e 12	Área da secção transversal dos tirantes 3 e 4	22
13	Espessura das almas da secção em caixão tritelular – Zona 4	18
14	Espessura da laje superior da secção em caixão tritelular – Zona 4	19
15	Espessura da laje inferior da secção em caixão tritelular – Zona 4	20
16 e 17	Forças de pré-esforço nos tirantes 5 e 6	4
18 e 19	Área da secção transversal dos tirantes 5 e 6	22
20 e 21	Forças de pré-esforço nos tirantes 7 e 8	4
22 e 23	Área da secção transversal dos tirantes 7 e 8	22
24 e 25	Forças de pré-esforço nos tirantes 9 e 10	4
26 e 27	Área da secção transversal dos tirantes 9 e 10	22
28 e 29	Forças de pré-esforço nos tirantes 11 e 12	4
30 e 31	Área da secção transversal dos tirantes 11 e 12	22
32 e 33	Forças de pré-esforço nos tirantes 13 e 14	4
34 e 35	Área da secção transversal dos tirantes 13 e 14	22
36 e 37	Forças de pré-esforço nos tirantes 15 e 16	4
38 e 39	Área da secção transversal dos tirantes 15 e 16	22
40 e 41	Forças de pré-esforço nos tirantes 17 e 18	4
42 e 43	Área da secção transversal dos tirantes 17 e 18	22
44	Espessura das almas da secção em caixão tritelular – Zona 5	18
45	Espessura da laje superior da secção em caixão tritelular – Zona 5	19
46	Espessura da laje inferior da secção em caixão tritelular – Zona 5	20
47	Altura da secção rectangular oca – Zona 1	5
48	Altura da secção rectangular oca – Zona 2	5
49	Largura da secção rectangular oca – Zona 1	6
50	Largura da secção rectangular oca – Zona 2	6
51	Espessura das paredes de altura h da secção rectangular oca – Zona 1	7
52	Espessura das paredes de altura h da secção rectangular oca – Zona 2	7
53	Espessura das paredes de largura b da secção rectangular oca – Zona 1	8
54	Espessura das paredes de largura b da secção rectangular oca – Zona 2	8
55 a 72	Forças de ajustamento nos tirantes 1 a 18	4

Na Figura 5.112 resume-se a evolução do custo no decorrer do processo de análise e optimização para os Exemplos 8, 9 e 10. Como se pode observar, verifica-se para os três exemplos uma redução de custo ao longo do processo de optimização, tendendo a estabilizar

nas últimas iterações. Deste modo, obtiveram-se reduções de custo de 12,86%, 14,05% e 13,57%, respectivamente, para as soluções em laje vigada, caixão unicelular e caixão tricelular. Estas reduções devem-se a reduções nas dimensões das secções transversais dos diversos elementos que se verificam na solução óptima, como se pode observar no Quadro 5.30. Verifica-se também que o Exemplo 10 (tabuleiro em caixão tricelular) é o que apresenta maior custo inicial (1.947.592 €) e final (1.683.377 €). O Exemplo 9 (tabuleiro em caixão unicelular) constitui a solução com menor custo, tanto inicialmente (1.720.946 €) como na solução óptima (1.479.165 €). Em termos de custo por área em planta do tabuleiro têm-se nas soluções óptimas 243 €/m² e 277 €/m² para os Exemplos 9 e 10, respectivamente.

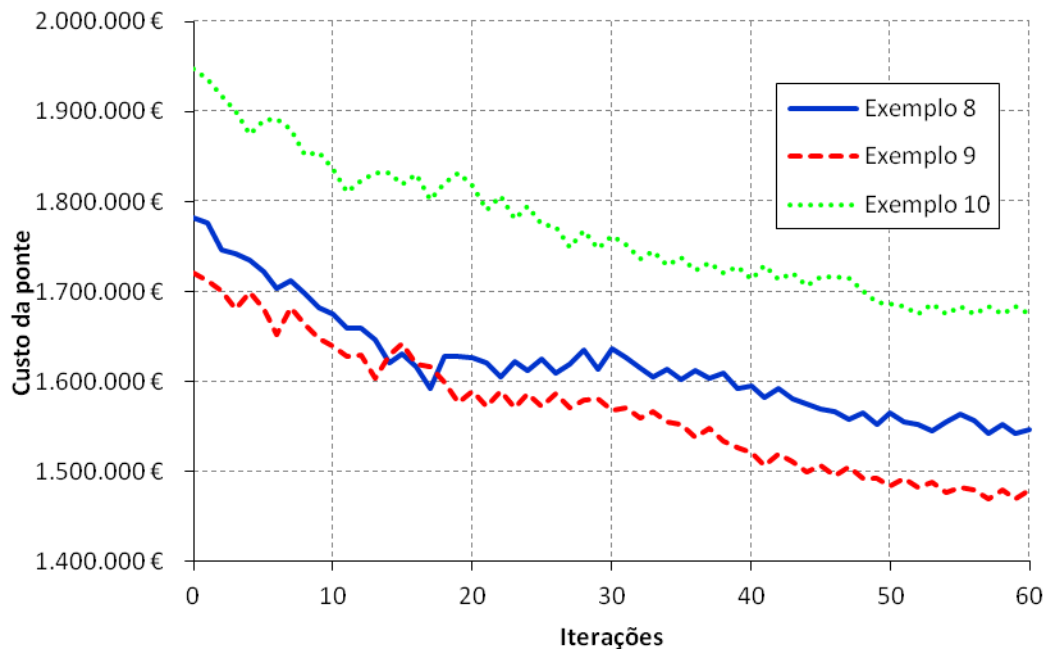


Figura 5.112 – Evolução do custo da ponte e da redução de custo em função do número de iterações (Exemplos 8, 9 e 10)

No Quadro 5.28 resumem-se os valores do custo total e do custo por elemento estrutural (tabuleiro, torres e tirantes) das soluções óptimas obtidas para os Exemplos 8, 9 e 10. Como se pode observar o tabuleiro representa a maior contribuição para o custo da ponte com valores entre 57,0% e 61,6% do custo total. Os tirantes representam aproximadamente 30 % do custo da ponte, sendo a restante parcela do custo relativa à torre.

No que respeita aos resultados obtidos na solução óptima para as diversas variáveis de decisão, apresentam-se no Quadro 5.29 os valores das forças de instalação e de ajustamento para os Exemplos 9 e 10. No Exemplo 9 verificam-se, relativamente à solução inicial, reduções médias de 4,57% e de 1,65% nas forças de instalação e de ajustamento, respectivamente. No Exemplo 10 observa-se este mesmo comportamento mas com reduções

inferiores, neste caso 3,28% e 1,02%, respectivamente. Tal como para o Exemplo 8, estes resultados podem justificar-se pela redução de peso do tabuleiro conseguida através do processo de optimização pela consideração de variáveis de decisão seccionais. Para cada exemplo, na medida em que a carga a suportar é menor as forças nos tirantes podem ser reduzidas. Comparando os valores das forças nos tirantes para os três exemplos verifica-se que o Exemplo 10 apresenta os valores mais elevados em virtude da solução em caixão tritelular constituir a solução com o tabuleiro mais pesado.

Quadro 5.28 – Valores finais do custo total e do custo do tabuleiro, torre e tirantes (Exemplos 8, 9 e 10)

	Tabuleiro	Torres	Tirantes	Total
Exemplo 8	923.795 €	188.831 €	439.985 €	1.552.611 €
	59,5%	12,2%	28,3%	100,0%
Exemplo 9	842.909 €	198.279 €	437.977 €	1.479.165 €
	57,0%	13,4%	29,6%	100,0%
Exemplo 10	1.036.789 €	180.171 €	466.418 €	1.683.377 €
	61,6%	10,7%	27,7%	100,0%

Quadro 5.29 – Valores iniciais e finais das forças nos tirantes (Exemplos 9 e 10)

Tirante	Forças de instalação [kN]				Forças de ajustamento [kN]			
	Exemplo 9		Exemplo 10		Exemplo 9		Exemplo 10	
	Inicial	Final	Inicial	Final	Inicial	Final	Inicial	Final
1	1035	1046	1205	1281	1499	1474	1978	2015
2	966	949	1189	1123	1501	1518	2015	1984
3	1556	1574	1480	1607	1800	1764	2236	2310
4	1450	1376	1495	1423	1805	1790	2340	2328
5	1836	1853	2050	2151	2288	2267	2461	2517
6	1758	1652	2023	1948	2314	2270	2567	2558
7	1977	1937	2291	2303	2477	2462	2798	2818
8	1983	1858	2364	2293	2526	2459	2900	2891
9	2147	2013	2506	2398	2722	2702	3068	3048
10	2212	2074	2609	2528	2742	2655	3138	3107
11	2427	2233	2798	2580	3038	3004	3631	3566
12	2540	2395	2942	2831	3060	2953	3678	3604
13	2413	2178	3024	2710	3058	3008	4194	4078
14	2552	2417	3167	3054	3074	2966	4206	4121
15	2885	2678	3534	3159	3580	3512	4758	4590
16	3069	2964	3692	3531	3588	3506	4727	4587
17	2870	2591	3645	3291	5104	5016	5815	5594
18	3071	2990	3792	3624	4589	4559	4722	4571

No que concerne às variáveis de decisão seccionais apresentam-se no Quadro 5.30 os respectivos valores iniciais e finais para os Exemplos 9 e 10. Nesse mesmo quadro

apresentam-se também os valores iniciais e finais do custo da estrutura para esses dois exemplos. Os valores apresentados mostram reduções nas dimensões das secções transversais do tabuleiro e da torre que se traduzem nas reduções de custo já referidas para as soluções óptimas.

Quadro 5.30 – Valores iniciais e finais do custo e das variáveis de decisão seccionais (Exemplos 9 e 10)

Variável de decisão	Exemplo 9		Exemplo 10	
	Inicial	Final	Inicial	Final
3	$1,935 \times 10^{-3}$	$1,500 \times 10^{-3}$	$2,034 \times 10^{-3}$	$1,615 \times 10^{-3}$
4	$2,171 \times 10^{-3}$	$2,161 \times 10^{-3}$	$2,560 \times 10^{-3}$	$2,579 \times 10^{-3}$
5	2,000	1,796	2,000	1,699
6	0,200	0,150	0,200	0,150
7	0,200	0,150	0,200	0,150
8	0,200	0,157	0,200	0,150
11	$2,076 \times 10^{-3}$	$1,647 \times 10^{-3}$	$2,942 \times 10^{-3}$	1,837E-03
12	$2,444 \times 10^{-3}$	$2,054 \times 10^{-3}$	$2,812 \times 10^{-3}$	3,046E-03
13	0,200	0,180	0,200	0,190
14	0,200	0,190	0,200	0,196
15	0,200	0,188	0,200	0,185
18	$2,396 \times 10^{-3}$	$2,843 \times 10^{-3}$	$3,319 \times 10^{-3}$	$3,972 \times 10^{-3}$
19	$2,607 \times 10^{-3}$	$2,354 \times 10^{-3}$	$2,626 \times 10^{-3}$	$2,547 \times 10^{-3}$
22	$3,214 \times 10^{-3}$	$3,767 \times 10^{-3}$	$3,528 \times 10^{-3}$	$4,585 \times 10^{-3}$
23	$2,738 \times 10^{-3}$	$2,598 \times 10^{-3}$	$3,021 \times 10^{-3}$	$2,935 \times 10^{-3}$
26	$3,510 \times 10^{-3}$	$4,271 \times 10^{-3}$	$3,641 \times 10^{-3}$	$4,097 \times 10^{-3}$
27	$2,967 \times 10^{-3}$	$2,786 \times 10^{-3}$	$3,367 \times 10^{-3}$	$3,672 \times 10^{-3}$
30	$3,682 \times 10^{-3}$	$4,306 \times 10^{-3}$	$3,571 \times 10^{-3}$	$3,728 \times 10^{-3}$
31	$3,485 \times 10^{-3}$	$3,253 \times 10^{-3}$	$3,991 \times 10^{-3}$	$4,944 \times 10^{-3}$
34	$3,104 \times 10^{-3}$	$3,052 \times 10^{-3}$	$3,812 \times 10^{-3}$	$4,435 \times 10^{-3}$
35	$3,452 \times 10^{-3}$	$3,412 \times 10^{-3}$	$4,630 \times 10^{-3}$	$6,210 \times 10^{-3}$
38	$3,222 \times 10^{-3}$	$3,292 \times 10^{-3}$	$3,968 \times 10^{-3}$	$4,671 \times 10^{-3}$
39	$4,277 \times 10^{-3}$	$4,102 \times 10^{-3}$	$5,497 \times 10^{-3}$	$5,971 \times 10^{-3}$
42	$5,474 \times 10^{-3}$	$4,977 \times 10^{-3}$	$7,177 \times 10^{-3}$	$6,633 \times 10^{-3}$
43	$5,619 \times 10^{-3}$	$5,552 \times 10^{-3}$	$5,777 \times 10^{-3}$	$5,913 \times 10^{-3}$
44	0,200	0,187	0,200	0,215
45	0,200	0,194	0,200	0,212
46	0,200	0,191	0,200	0,213
47	5,000	4,540	5,000	4,569
48	4,000	3,022	4,000	2,865
49	5,000	4,186	5,000	4,697
50	4,000	2,851	4,000	2,652
51	0,500	0,325	0,500	0,326
52	0,500	0,328	0,500	0,289
53	0,500	0,341	0,500	0,336
54	0,500	0,331	0,500	0,297
Custo	1.720.946 €	1.479.165 €	1.947.592 €	1.683.377 €

Nas Figuras 5.113 a 5.115 apresentam-se alguns resultados da análise estrutural para a Fase 11 referentes às soluções óptimas obtidas para os Exemplos 8, 9 e 10. Assim, na Figura 5.113, onde se representam os valores dos deslocamentos verticais do tabuleiro para os três exemplos analisados, podem observar-se os valores reduzidos desta grandeza, sendo inferiores ao limite de 5 cm imposto nos objectivos de projecto. Tendo em conta o comprimento do tabuleiro, os valores obtidos garantem uma rasante praticamente horizontal para a ponte sujeita a carga permanente.

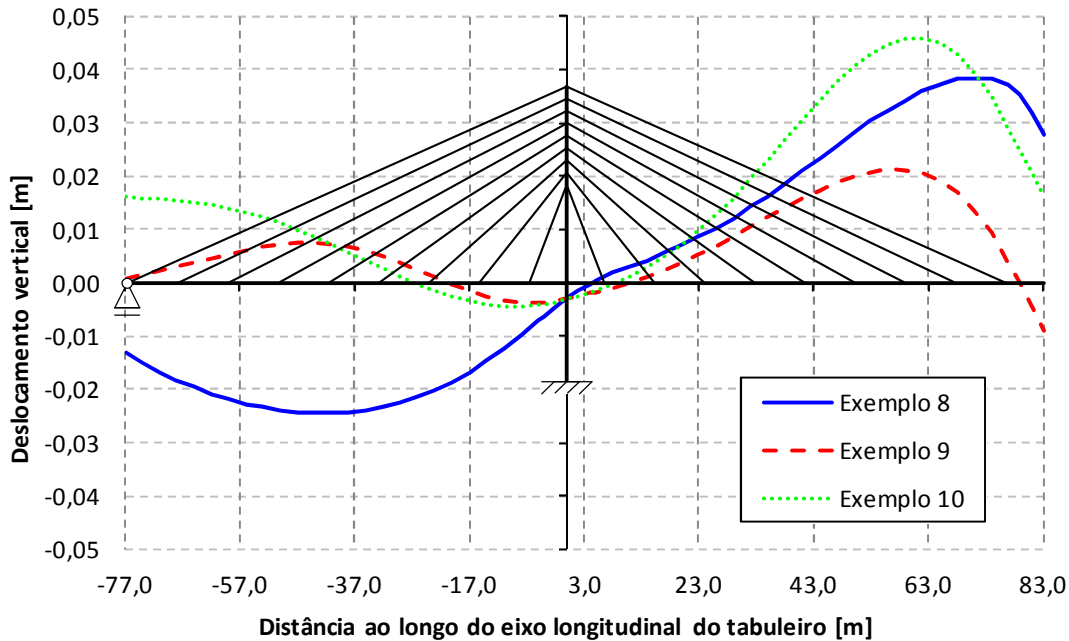


Figura 5.113 – Deslocamentos verticais do tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplos 8, 9 e 10)

Nas Figuras 5.114 e 5.115 representam-se as distribuições de momento flector ao longo do comprimento do tabuleiro e das torres, respectivamente. Os resultados mostram que os momentos flectores nas torres são da mesma ordem de grandeza dos momentos flectores no tabuleiro mas apresentam valores inferiores. A distribuição de momentos flectores no tabuleiro segue o padrão de viga contínua ilustrando o efeito local do espaçamento entre tirantes. Este padrão sofre alguma alteração nas secções junto ao meio-vão onde ocorrem os valores mais elevados do momento flector.

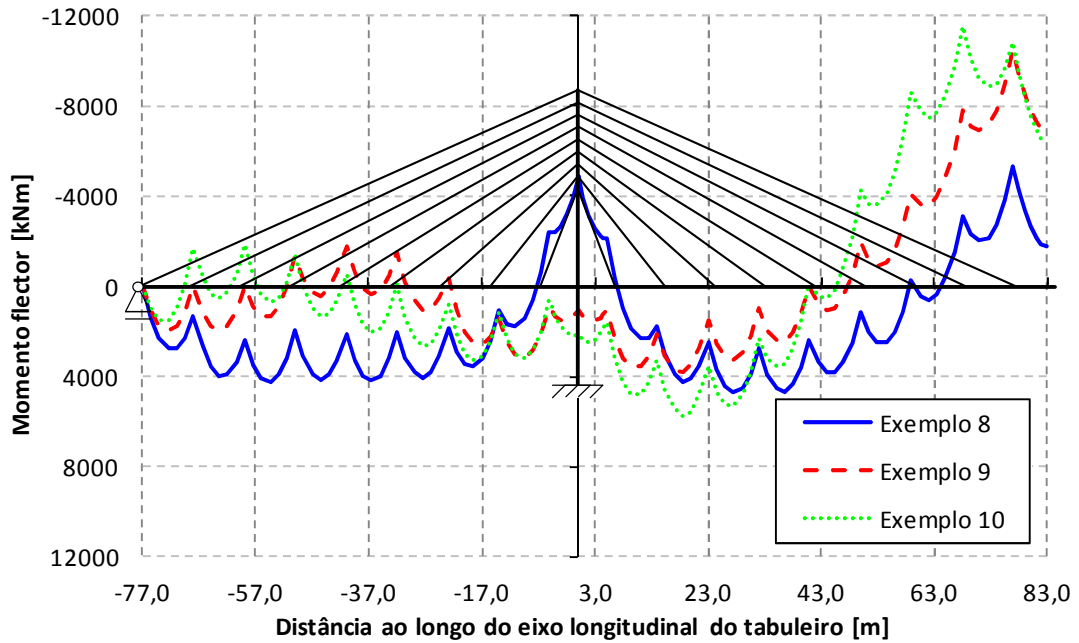


Figura 5.114 – Momentos flectores no tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplos 8, 9 e 10)

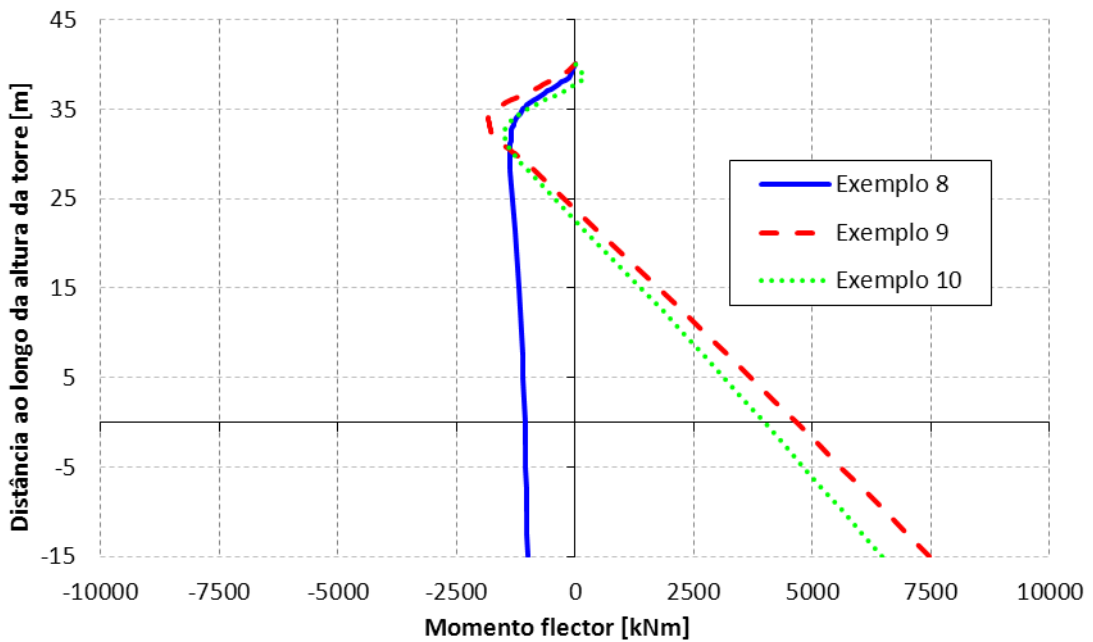


Figura 5.115 – Momentos flectores na torre para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplos 8, 9 e 10)

Na Figura 5.116 representam-se, para os três exemplos, as distribuições de tensões normais ao longo do comprimento do tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente. Como se pode observar, em todos os exemplos o tabuleiro encontra-se quase totalmente sujeito a tensões de compressão que apresentam valores inferiores a 5 MPa,

ocorrendo os valores máximos na secção junto à torre. As tensões de tracção apresentam valor reduzido, inferior a 2 MPa, e ocorrem para todos os exemplos nas secções junto ao meio-vão e, para o Exemplo 8, também no vão lateral junto ao encontro. Os valores apresentados garantem os objectivos de projecto correspondentes.

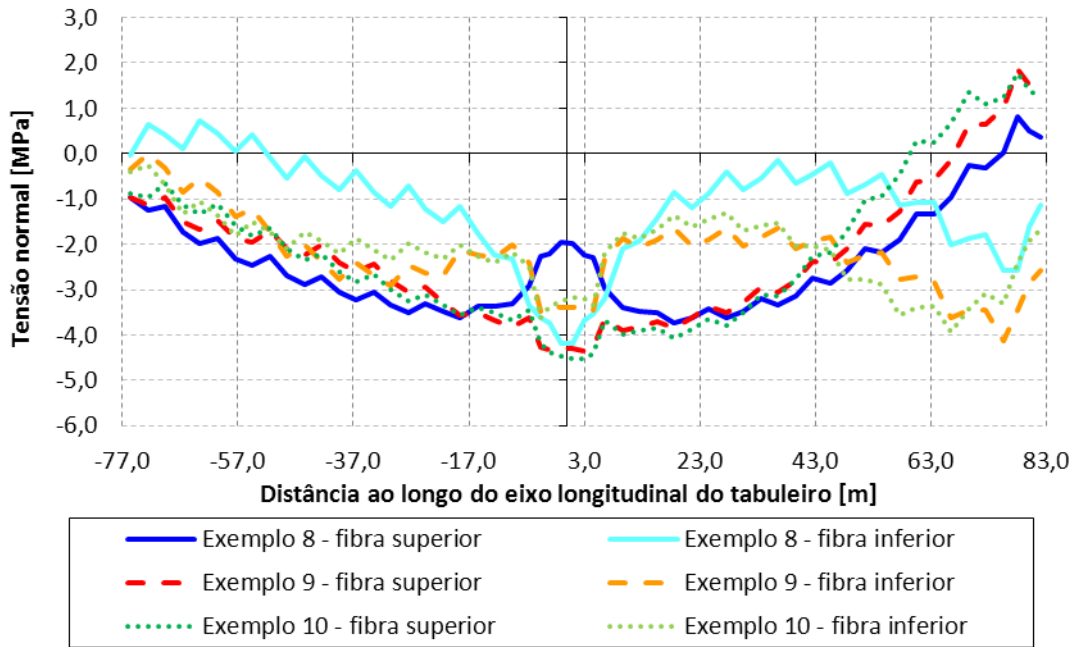


Figura 5.116 – Tensões normais no tabuleiro para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplos 8, 9 e 10)

5.4.4. Otimização considerando tabuleiro pré-esforçado

A utilização de pré-esforço nos tabuleiros de betão em pontes é prática corrente. No caso das pontes atirantadas, os tirantes inclinados introduzem forças de compressão no tabuleiro que funcionam como um pré-esforço natural para o betão. No entanto, a utilização de pré-esforço no tabuleiro é benéfica para fazer face aos momentos flectores negativos nas consolas durante a construção pelo método dos avanços sucessivos e também para fazer face aos momentos flectores positivos que ocorrem no meio-vão da ponte completa. Desta forma, na presente secção apresentam-se os resultados do Exemplo 11, em que se procede à optimização da mesma ponte de tirantes utilizada nos exemplos anteriores, mas considerando agora a utilização de pré-esforço no tabuleiro em laje vigada.

A modelação da estrutura é em tudo idêntica à que foi descrita na secção 5.2 com a diferença de que os elementos do tabuleiro são neste exemplo modelados com elementos de viga com cabo de pré-esforço. Desta forma, considerou-se o tabuleiro pré-esforçado com uma força constante em cada um dos vãos laterais e central. Adoptou-se um traçado do cabo com

uma excentricidade constante, de 0,45 m, relativamente ao centro geométrico da secção transversal de modo a ter o cabo posicionado junto à face superior da secção para fazer face aos momentos negativos que ocorrem durante as fases construtivas.

Relativamente ao exemplo base, em que se tinham 69 variáveis de decisão, consideram-se agora duas variáveis adicionais correspondentes às forças de pré-esforço a aplicar nos elementos do tabuleiro do vão lateral (x_8) e do vão central (x_9). No Quadro 5.31 apresenta-se a descrição das variáveis de decisão consideradas no Exemplo 11.

Neste exemplo consideraram-se os mesmos objectivos de projecto que no exemplo base do problema de minimização do custo (Exemplo 8) e tal como em exemplos anteriores, também se adoptou a estratégia de optimização em duas etapas. Na primeira resolvendo apenas o problema de optimização das forças nos tirantes e na segunda, partindo da solução óptima obtida, resolvendo o problema de minimização do custo. Nesta etapa consideraram-se a totalidade das variáveis de decisão descritas no Quadro 5.31.

No que respeita aos resultados deste exemplo, representa-se na Figura 5.117 a evolução do custo da ponte e a correspondente redução de custo em função do número de iterações de análise e optimização. Como se pode observar na Figura 5.117 o processo de optimização permitiu reduzir o custo da ponte de 1.788.851 € para 1.490.128 €, o que corresponde a uma redução de 16,70%. Desta forma, a solução óptima apresenta um custo por área em planta de tabuleiro de, aproximadamente, 245 €/m². Relativamente à solução óptima do Exemplo 8 tem-se uma redução de 4,02% no custo total da ponte.

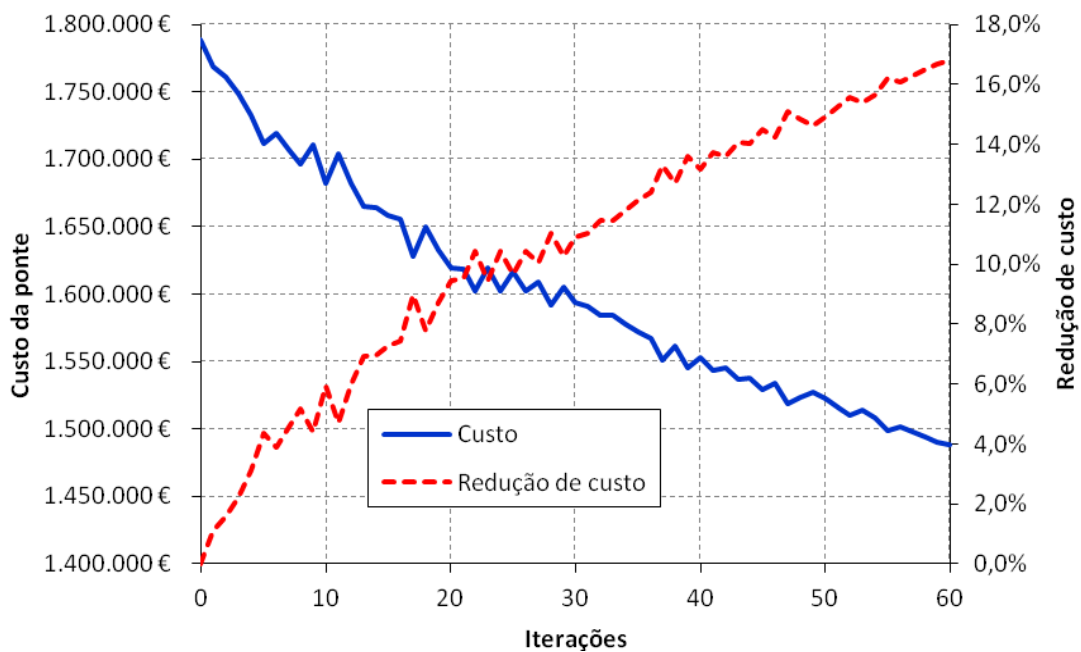


Figura 5.117 – Evolução do custo da ponte e da redução de custo em função do número de iterações (Exemplo 11)

Quadro 5.31 – Descrição das variáveis de decisão utilizadas no Exemplo 11

Variável de decisão	Descrição	Tipo de variável de decisão
1 e 2	Forças de pré-esforço nos tirantes 1 e 2	4
3 e 4	Área da secção transversal dos tirantes 1 e 2	22
5	Altura da secção do tabuleiro em laje vigada	9
6	Largura das vigas laterais da secção em laje vigada – Zona 3	10
7	Espessura da laje da secção em laje vigada – Zona 3	11
8	Força de pré-esforço no tabuleiro – vão lateral	23
9	Força de pré-esforço no tabuleiro – vão central	23
10 e 11	Forças de pré-esforço nos tirantes 3 e 4	4
12 e 13	Área da secção transversal dos tirantes 3 e 4	22
14	Largura das vigas laterais da secção em laje vigada – Zona 4	10
15	Espessura da laje da secção em laje vigada – Zona 4	11
16 e 17	Forças de pré-esforço nos tirantes 5 e 6	4
18 e 19	Área da secção transversal dos tirantes 5 e 6	22
20 e 21	Forças de pré-esforço nos tirantes 7 e 8	4
22 e 23	Área da secção transversal dos tirantes 7 e 8	22
24 e 25	Forças de pré-esforço nos tirantes 9 e 10	4
26 e 27	Área da secção transversal dos tirantes 9 e 10	22
28 e 29	Forças de pré-esforço nos tirantes 11 e 12	4
30 e 31	Área da secção transversal dos tirantes 11 e 12	22
32 e 33	Forças de pré-esforço nos tirantes 13 e 14	4
34 e 35	Área da secção transversal dos tirantes 13 e 14	22
36 e 37	Forças de pré-esforço nos tirantes 15 e 16	4
38 e 39	Área da secção transversal dos tirantes 15 e 16	22
40 e 41	Forças de pré-esforço nos tirantes 17 e 18	4
42 e 43	Área da secção transversal dos tirantes 17 e 18	22
44	Largura das vigas laterais da secção em laje vigada – Zona 5	10
45	Espessura da laje da secção em laje vigada – Zona 5	11
46	Altura da secção rectangular oca – Zona 1	5
47	Altura da secção rectangular oca – Zona 2	5
48	Largura da secção rectangular oca – Zona 1	6
49	Largura da secção rectangular oca – Zona 2	6
50	Espessura das paredes de altura h da secção rectangular oca – Zona 1	7
51	Espessura das paredes de altura h da secção rectangular oca – Zona 2	7
52	Espessura das paredes de largura b da secção rectangular oca – Zona 1	8
53	Espessura das paredes de largura b da secção rectangular oca – Zona 2	8
54 a 71	Forças de ajustamento nos tirantes 1 a 18	4

No Quadro 5.32 resumem-se os valores dos custos do tabuleiro, das torres e dos tirantes para as soluções inicial e final do Exemplo 11. Como se pode observar a solução óptima apresenta uma distribuição de custo por elemento estrutural semelhante à de outros exemplos.

Assim, o tabuleiro representa 59,8% do custo total, as torres 10,1% e os tirantes 29,8%. Neste exemplo tem-se ainda a contribuição do pré-esforço no tabuleiro que representa 0,2% do custo total. Relativamente à solução óptima do Exemplo 8 (Quadro 5.23) têm-se reduções de 3,5% e de 19,9% nos custos do tabuleiro e das torres, respectivamente. Para os tirantes tem-se um ligeiro acréscimo de custo de 1,1%. Estes resultados podem justificar-se pelo efeito benéfico na resistência à flexão proporcionado pela introdução do pré-esforço no tabuleiro, o que possibilita uma redução das secções do tabuleiro e das torres com a consequente redução de custo.

Quadro 5.32 – Valores iniciais e finais (após optimização) dos custos do tabuleiro, do pré-esforço, das torres e dos tirantes (Exemplo 11)

	Tabuleiro	Pré-esforço	Torres	Tirantes	Total
Solução inicial	969.048 €	2.553 €	373.320 €	443.930 €	1.788.851 €
	54,2%	0,1%	20,9%	24,8%	100,0%
Solução final	891.682 €	2.549 €	151.168 €	444.728 €	1.490.128 €
	59,8%	0,2%	10,1%	29,8%	100,0%

No Quadro 5.33 resumem-se os valores iniciais e finais das forças de instalação e de ajustamento para o Exemplo 11. Comparando estes valores com os obtidos para o Exemplo 8 (Quadro 5.24) verifica-se uma redução média de 1,19% nos valores das forças de instalação e um aumento médio de 0,38% nas forças de ajustamento. A redução das forças de instalação justifica-se pelo efeito do pré-esforço na introdução de uma contra-flecha nos diversos tramos de tabuleiro aquando da construção dos mesmos. Por conseguinte, não serão necessários valores tão elevados das forças nos tirantes para garantir a geometria da estrutura no final da construção. Apesar de, em termos médios, não se terem diferenças significativas entre as distribuições de forças nos Exemplos 8 e 11, analisando os valores individualmente têm-se para alguns tirantes diferenças relevantes. Assim, observam-se variações máximas de 11,32% e de 8,28% nas forças de instalação e de ajustamento, respectivamente. Estes resultados sugerem, tal como na análise dos efeitos diferidos e dos efeitos geometricamente não-lineares, a necessidade de considerar todos os efeitos relevantes para a determinação dos valores adequados das forças nos tirantes que garantem a verificação dos diversos objectivos de projecto.

Quadro 5.33 – Valores iniciais e finais (após otimização) das forças nos tirantes (Exemplo 11)

Tirante	Forças de instalação [kN]		Forças de ajustamento [kN]	
	Inicial	Final	Inicial	Final
1	1046	1047	1503	1476
2	949	949	1490	1516
3	1576	1599	1807	1767
4	1406	1396	1768	1811
5	1883	1914	2312	2319
6	1705	1673	2269	2304
7	2010	2029	2486	2512
8	1967	1909	2507	2524
9	2164	2106	2741	2762
10	2255	2180	2779	2761
11	2446	2296	3086	3082
12	2678	2596	3194	3137
13	2488	2259	3139	3109
14	2717	2630	3233	3146
15	3015	2693	3703	3630
16	3185	3101	3748	3642
17	3055	2688	5269	5153
18	3278	3152	4810	4703

Relativamente aos valores das forças de pré-esforço no tabuleiro definiu-se uma solução inicial de 1000 kN para as variáveis x_8 e x_9 . Na solução óptima obtiveram-se valores de 993 kN e 1004 kN para as variáveis x_8 e x_9 , respectivamente. Deste modo, verifica-se que para o exemplo analisado os valores das forças de pré-esforço no tabuleiro praticamente não sofrem alteração. Assim, pode referir-se que a consideração de variáveis de decisão relativas ao pré-esforço no tabuleiro permite melhorar o comportamento da estrutura possibilitando a redução de custos do tabuleiro e das torres. No entanto, para este exemplo são as variáveis de decisão associadas às forças de pré-esforço nos tirantes e às dimensões das secções transversais dos diversos elementos que desempenham o papel fundamental no comportamento de uma ponte atirantada de betão.

No Quadro 5.34 apresentam-se os valores iniciais e finais para as variáveis de decisão seccionais deste exemplo. Como se pode observar as reduções de custo referidas anteriormente devem-se à redução das dimensões dos elementos do tabuleiro e principalmente à redução das dimensões das secções das torres. No caso do tabuleiro, apesar de se verificar um aumento da altura relativamente à solução inicial, tem-se uma redução da largura das vigas laterais e da espessura da laje em todo o comprimento deste, à excepção da Zona 5. As secções das torres apresentam reduções significativas, tanto nas dimensões exteriores como na

espessura das paredes. No caso das secções dos tirantes, e como o ponto de partida corresponde a uma solução óptima para as mesmas, as variações são pequenas traduzindo-se, como foi referido, num um ligeiro acréscimo de custo de 1,1% relativamente à solução inicial.

Quadro 5.34 – Valores iniciais e finais (após optimização) das variáveis de decisão seccionais (Exemplo 11)

Variável de decisão	Inicial	Final	Variável de decisão	Inicial	Final
3	$2,243 \times 10^{-3}$	$1,522 \times 10^{-3}$	34	$3,168 \times 10^{-3}$	$3,258 \times 10^{-3}$
4	$2,988 \times 10^{-3}$	$2,600 \times 10^{-3}$	35	$3,622 \times 10^{-3}$	$3,557 \times 10^{-3}$
5	2,000	2,755	38	$3,467 \times 10^{-3}$	$3,016 \times 10^{-3}$
6	1,200	0,879	39	$4,230 \times 10^{-3}$	$4,832 \times 10^{-3}$
7	0,200	0,150	42	$5,800 \times 10^{-3}$	$5,130 \times 10^{-3}$
12	$2,237 \times 10^{-3}$	$1,894 \times 10^{-3}$	43	$5,613 \times 10^{-3}$	$5,847 \times 10^{-3}$
13	$2,901 \times 10^{-3}$	$2,671 \times 10^{-3}$	44	0,500	0,586
14	0,800	0,610	45	0,200	0,214
15	0,200	0,152	46	5,000	4,346
18	$2,128 \times 10^{-3}$	$2,444 \times 10^{-3}$	47	4,000	2,580
19	$3,105 \times 10^{-3}$	$2,427 \times 10^{-3}$	48	5,000	4,077
22	$3,672 \times 10^{-3}$	$4,811 \times 10^{-3}$	49	4,000	2,394
23	$2,775 \times 10^{-3}$	$2,530 \times 10^{-3}$	50	0,500	0,297
26	$3,880 \times 10^{-3}$	$4,772 \times 10^{-3}$	51	0,500	0,276
27	$3,113 \times 10^{-3}$	$2,820 \times 10^{-3}$	52	0,500	0,304
30	$3,790 \times 10^{-3}$	$4,099 \times 10^{-3}$	53	0,500	0,280
31	$3,516 \times 10^{-3}$	$3,341 \times 10^{-3}$			

No que respeita aos resultados apresentam-se ainda, a título de exemplo, as Figuras 5.118 e 5.119 onde se representam a deformada e o diagrama de momento flector para a ponte completa sujeita a carga permanente. Como se pode observar, para a solução óptima têm-se valores dos deslocamentos verticais do tabuleiro e horizontal no topo da torre inferiores aos correspondentes limites, de 5 cm e 2 cm, definidos no algoritmo de optimização. Na distribuição de momento flector é possível observar o efeito local do espaçamento entre tirantes, sendo também notório o efeito do pré-esforço no tabuleiro, principalmente junto ao meio-vão, com a introdução de momentos flectores negativos. Este efeito permite fazer face ao incremento de momentos flectores positivos no meio-vão para os casos de sobrecarga rodoviária aplicada em todo o vão e apenas no vão central.

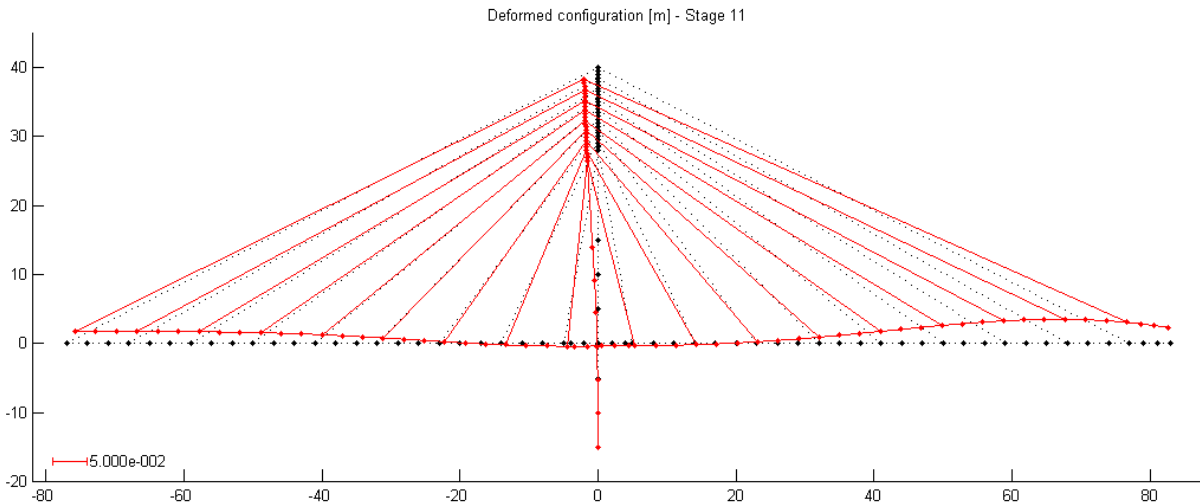


Figura 5.118 – Deformada para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 11)

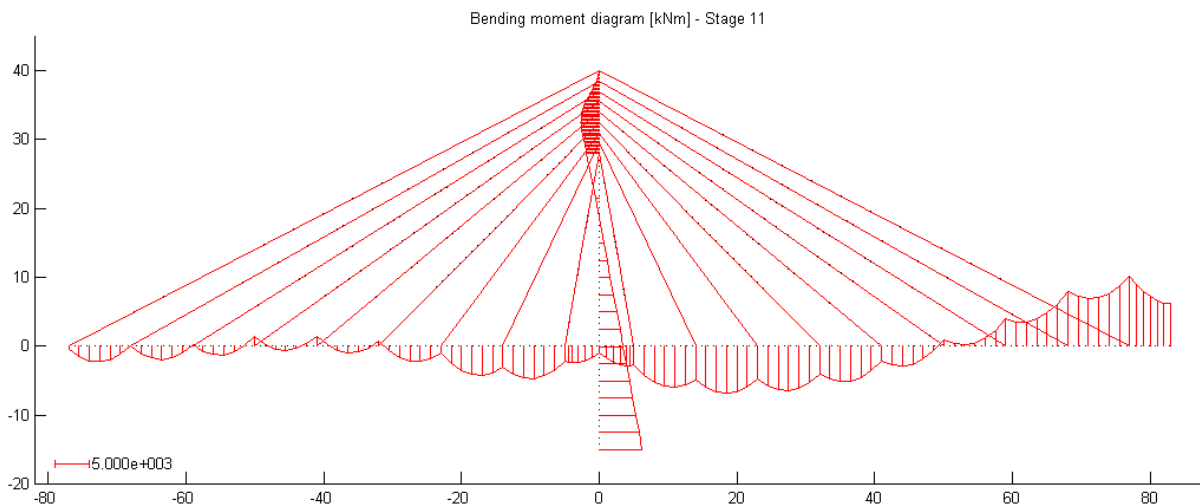


Figura 5.119 – Diagrama de momento flector para a ponte completa sujeita a carga permanente – estrutura otimizada (Exemplo 11)

Tendo em conta os resultados obtidos pode referir-se que a consideração de variáveis de decisão relativas ao pré-esforço em elementos de betão, apesar de não ser essencial para a análise e otimização de pontes atirantadas de betão permite melhorar o comportamento da estrutura. Para além disso este tipo de variável de decisão possibilita a aplicação do modelo numérico desenvolvido à otimização de outras estruturas de betão estrutural, nomeadamente pontes em arco, em viga ou em pórtico. Para estas estruturas os valores das forças de pré-esforço nas armaduras activas desempenham um papel crucial, não apenas no comportamento da estrutura completa, como também no controlo da geometria e das tensões durante o processo construtivo.

5.4.5. Optimização utilizando valores discretos para as variáveis de decisão

Como se referiu na secção 4.2.2, na resolução da maioria dos problemas de optimização é usual não considerar a natureza discreta das variáveis de decisão. Esta opção justifica-se pelo facto de a resolução de um problema de optimização com variáveis de decisão discretas ser habitualmente bastante mais difícil que a resolução do mesmo problema com variáveis contínuas. Esta dificuldade advém da natureza combinatória do problema com variáveis discretas, tendo-se um problema de dimensão considerável mesmo para uma estrutura simples.

A resolução rigorosa de um problema de optimização com variáveis discretas constitui um problema NP-completo pois nos algoritmos para programação discreta o tempo de computação cresce exponencialmente com o número de variáveis de decisão (Simões, 2008). Para fazer face a este aspecto e na medida em que a solução contínua constitui um limite inferior para a solução discreta, habitualmente, o problema é resolvido considerando variáveis de decisão contínuas e, para a solução óptima obtida, os valores das variáveis são arredondados para os valores discretos mais próximos. Os métodos sugeridos na literatura são do tipo *enumerativo* ou *branch-and-bound* mas também são exigentes em termos de tempo de computação. O *método segmental* fornece bons resultados quando o número de secções discretas é reduzido. Este método utiliza a programação linear (contínua) como algoritmo de minimização e conduz a um limite superior da solução próximo do mínimo global (Templeman e Yates, 1983; Simões, 1996; Simões *et al.*, 2009).

No caso particular dos problemas de optimização resolvidos no âmbito desta tese consideraram-se todos os tipos de variáveis de decisão como sendo de natureza contínua. Para as variáveis de decisão mecânicas trata-se de uma abordagem adequada pois as forças de pré-esforço podem variar dentro de uma gama de valores contínuos. Já no que respeita às variáveis seccionais estas poderão considerar-se como discretas. As áreas das secções dos tirantes, que são constituídas pelo agrupamento de cordões de 7 fios de aço de alta resistência, apresentam uma variação discreta de valores. Contudo, como essa variação é pequena assumiu-se também a variação contínua destas variáveis de decisão. Relativamente aos elementos de betão poderá ser mais adequado considerar as respectivas variáveis de decisão seccionais como discretas. De facto, tratando-se de uma estrutura especial, estes elementos terão secções cujas dimensões se encontram fora da gama de valores usuais, sendo concebidas especificamente para a obra em questão e de acordo com as dimensões definidas em projecto. No entanto, não se tem em rigor uma variação contínua para as dimensões das peças de betão,

pois na execução das cofragens e no processo de betonagem apenas se poderá garantir uma precisão para as mesmas da ordem dos centímetros. Assim, considerou-se importante resolver o problema de optimização considerando valores discretos para as variáveis de decisão seccionais associadas aos elementos de betão.

Nesta secção apresentam-se os resultados do problema de minimização do custo de uma ponte atirantada de betão considerando valores discretos para as variáveis de decisão seccionais. Para fazer face às desvantagens referidas anteriormente no que respeita aos métodos habituais de optimização discreta propõe-se uma metodologia alternativa, tendo em conta que a solução contínua constitui um limite inferior para a solução discreta e que fornece um bom ponto de partida para uma solução discreta de custo mínimo. Deste modo, partindo da solução óptima contínua procede-se ao arredondamento dos valores das variáveis de decisão seccionais relativas aos elementos de betão. Considerou-se que os valores das dimensões das secções podem variar em múltiplos de 5 cm, constituindo assim, o conjunto de secções discretas disponíveis. Desta forma, obtém-se uma solução discreta que poderá ser não admissível. Posteriormente esta solução é melhorada fixando os valores das variáveis discretas e procedendo à optimização contínua das forças e das áreas dos tirantes.

Neste exemplo (Exemplo 12) procede-se à optimização com variáveis discretas da ponte com tabuleiro em laje vigada (Exemplo 8). Na Figura 5.120 apresenta-se o gráfico com a evolução do custo da ponte e da respectiva variação no decorrer do processo de optimização das forças e áreas dos tirantes considerando valores discretos para as variáveis seccionais.

O arredondamento efectuado nos valores das variáveis seccionais respeitantes ao tabuleiro e às torres conduz a uma solução inicial não admissível pelo que, durante uma primeira fase do processo de optimização, o algoritmo procura melhorar a solução tornando-a admissível. Durante essa fase verifica-se um aumento do custo da estrutura. Após a obtenção de uma solução admissível o algoritmo procura a redução de custo pesquisando no interior do domínio. A solução discreta inicial, não admissível, apresenta um custo de 1.653.240 €. Com a optimização das forças e das secções dos tirantes chega-se a uma solução óptima discreta com um custo de 1.662.201 €, apenas 0,54% superior. Relativamente à solução óptima contínua, com um custo de 1.552.611 €, a solução óptima discreta apresenta um custo 7,06% superior. O aumento de custo na solução discreta deve-se ao processo de arredondamento que conduziu a um aumento do volume de material utilizado no tabuleiro e nas torres.

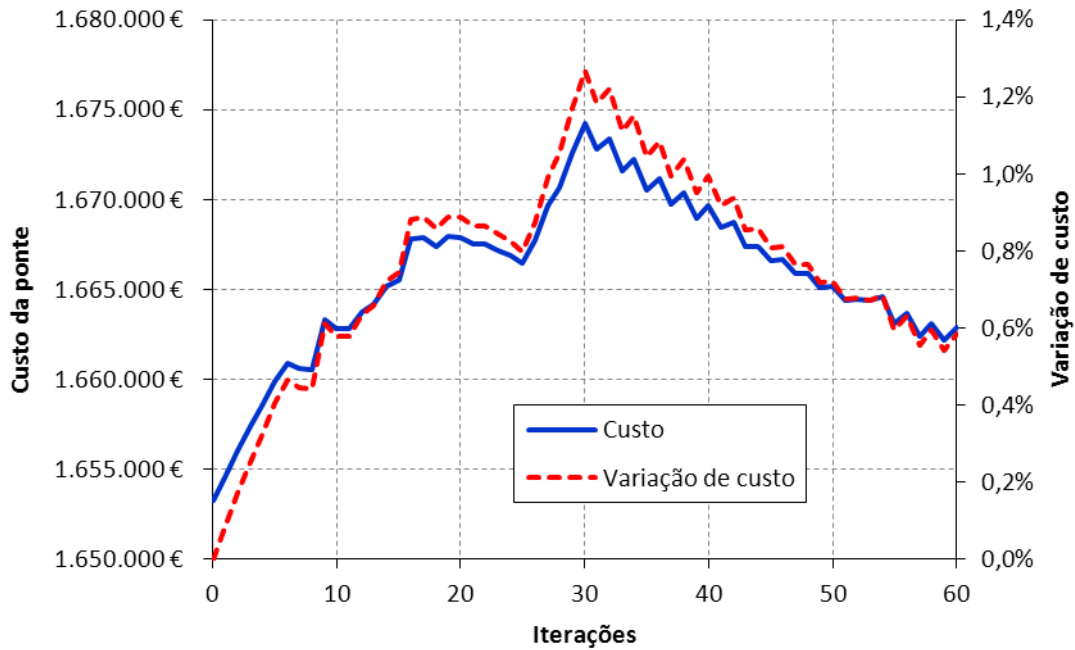


Figura 5.120 – Evolução do custo da ponte e da sua variação em função do número de iterações (Exemplo 12)

No que respeita aos valores das forças nos tirantes apresentam-se no Quadro 5.35 os valores das forças de instalação e ajustamento referentes às soluções óptimas contínua e discreta. Como se pode observar a solução discreta apresenta, em geral, valores mais elevados das forças nos tirantes. Para as forças de instalação tem-se um aumento médio de 5,72% e um aumento máximo de 13,51% (tirante 15). Nas forças de ajustamento verifica-se um aumento médio de 5,37% e um aumento máximo de 15,09% (tirante 15). Estes resultados devem-se à necessidade de fazer face ao aumento de peso do tabuleiro que se verifica com o arredondamento para secções discretas.

Quadro 5.35 – Valores óptimos das forças nos tirantes (solução contínua vs solução discreta)

Tirante	Forças de instalação [kN]		Forças de ajustamento [kN]	
	Contínua	Discreta	Contínua	Discreta
1	988	959	1443	1414
2	988	979	1530	1536
3	1454	1431	1697	1658
4	1490	1513	1827	1894
5	1719	1741	2142	2133
6	1801	1869	2378	2485
7	1967	2046	2469	2531
8	2020	2137	2583	2727
9	2162	2394	2749	2925
10	2242	2404	2789	2961
11	2526	2862	3142	3468
12	2573	2771	3107	3287
13	2432	2754	3167	3623
14	2588	2779	3124	3290
15	2880	3269	3670	4223
16	3098	3259	3628	3771
17	2843	3147	5171	5951
18	3095	3189	4645	4751

Relativamente às variáveis de decisão seccionais apresentam-se no Quadro 5.36 os respectivos valores iniciais e finais para as soluções contínua e discreta. Como se pode verificar o processo de arredondamento conduz a um aumento do custo da ponte em virtude do aumento do volume de material utilizado não tabuleiro e nas torres. A optimização das forças e das secções dos tirantes permite obter uma solução óptima com variáveis seccionais discretas na qual se verifica também um aumento das áreas das secções dos tirantes. Em termos médios tem-se um aumento de 6,39% com um máximo de 30,61% (tirante 17).

Quadro 5.36 – Valores iniciais e finais das variáveis de decisão seccionais (solução contínua vs solução discreta)

Variável de decisão	Solução contínua		Solução discreta	
	Inicial	Final	Inicial	Final
3	$2,027 \times 10^{-3}$	$1,515 \times 10^{-3}$	$1,515 \times 10^{-3}$	$1,504 \times 10^{-3}$
4	$2,115 \times 10^{-3}$	$1,509 \times 10^{-3}$	$1,509 \times 10^{-3}$	$1,500 \times 10^{-3}$
5	2,000	2,336	2,35	2,35
6	1,200	0,983	1,00	1,00
7	0,200	0,152	0,20	0,20
10	$2,523 \times 10^{-3}$	$1,856 \times 10^{-3}$	$1,856 \times 10^{-3}$	$1,953 \times 10^{-3}$
11	$2,255 \times 10^{-3}$	$1,978 \times 10^{-3}$	$1,978 \times 10^{-3}$	$1,851 \times 10^{-3}$
12	0,800	0,727	0,75	0,75
13	0,200	0,169	0,20	0,20
16	$2,980 \times 10^{-3}$	$2,375 \times 10^{-3}$	$2,375 \times 10^{-3}$	$2,013 \times 10^{-3}$
17	$2,504 \times 10^{-3}$	$2,383 \times 10^{-3}$	$2,383 \times 10^{-3}$	$2,516 \times 10^{-3}$
20	$3,385 \times 10^{-3}$	$3,220 \times 10^{-3}$	$3,220 \times 10^{-3}$	$2,944 \times 10^{-3}$
21	$2,787 \times 10^{-3}$	$2,694 \times 10^{-3}$	$2,694 \times 10^{-3}$	$2,916 \times 10^{-3}$
24	$3,369 \times 10^{-3}$	$3,537 \times 10^{-3}$	$3,537 \times 10^{-3}$	$4,265 \times 10^{-3}$
25	$3,050 \times 10^{-3}$	$2,928 \times 10^{-3}$	$2,928 \times 10^{-3}$	$3,257 \times 10^{-3}$
28	$3,343 \times 10^{-3}$	$4,502 \times 10^{-3}$	$4,502 \times 10^{-3}$	$4,914 \times 10^{-3}$
29	$3,527 \times 10^{-3}$	$3,392 \times 10^{-3}$	$3,392 \times 10^{-3}$	$3,800 \times 10^{-3}$
32	$3,097 \times 10^{-3}$	$3,682 \times 10^{-3}$	$3,682 \times 10^{-3}$	$3,954 \times 10^{-3}$
33	$3,555 \times 10^{-3}$	$3,416 \times 10^{-3}$	$3,416 \times 10^{-3}$	$3,821 \times 10^{-3}$
36	$3,030 \times 10^{-3}$	$3,333 \times 10^{-3}$	$3,333 \times 10^{-3}$	$4,242 \times 10^{-3}$
37	$4,354 \times 10^{-3}$	$4,607 \times 10^{-3}$	$4,607 \times 10^{-3}$	$4,581 \times 10^{-3}$
40	$5,718 \times 10^{-3}$	$4,956 \times 10^{-3}$	$4,956 \times 10^{-3}$	$6,473 \times 10^{-3}$
41	$5,632 \times 10^{-3}$	$5,982 \times 10^{-3}$	$5,982 \times 10^{-3}$	$5,871 \times 10^{-3}$
42	0,500	0,576	0,60	0,60
43	0,200	0,195	0,20	0,20
44	5,000	4,459	4,50	4,50
45	4,000	2,722	2,75	2,75
46	5,000	4,154	4,15	4,15
47	4,000	2,544	2,55	2,55
48	0,500	0,354	0,35	0,35
49	0,500	0,330	0,35	0,35
50	0,500	0,369	0,40	0,40
51	0,500	0,326	0,35	0,35
Custo	1.781.814 €	1.552.611 €	1.653.240 €	1.662.201 €

No Quadro 5.37 resumem-se os valores dos custos do tabuleiro, torres e tirantes para as soluções óptimas contínua e discreta. Como se pode observar o arredondamento conduz a um aumento de 10,2% no custo do tabuleiro e de 3,5% no custo das torres, relativamente à solução contínua. No que respeita aos tirantes tem-se um aumento de custo de 2,0% na

solução discreta. Nesta solução o tabuleiro, as torres e os tirantes representam, respectivamente, 61,2%, 11,8% e 27,0% do custo total da ponte. Deste modo, verifica-se que o aumento de custo observado na solução discreta se deve principalmente ao aumento de custo do tabuleiro. Este aumento poderia ser menor caso se considerassem secções discretas mais próximas das secções da solução contínua.

Quadro 5.37 – Valores dos custos do tabuleiro, torres e tirantes (solução contínua vs solução discreta)

	Tabuleiro	Torres	Tirantes	Total
Solução Contínua	923.795 €	188.831 €	439.985 €	1.552.611 €
	59,5%	12,2%	28,3%	100,0%
Solução discreta	1.017.792 €	195.463 €	448.946 €	1.662.201 €
	61,2%	11,8%	27,0%	100,0%

De acordo com os resultados apresentados pode referir-se que a metodologia adoptada se mostrou eficiente para a resolução do problema de minimização do custo com variáveis discretas. Este método aproximado de resolução permite obter rapidamente uma solução óptima discreta relativamente próxima da óptima contínua. No exemplo analisado tem-se um acréscimo de custo de, aproximadamente, 7%, que poderá ser inferior caso se utilizem secções discretas mais próximas das secções da solução contínua. O método proposto evita a natureza combinatoria da optimização discreta através do arredondamento da solução óptima contínua e posterior ajuste das forças nos tirantes, revelando-se mais eficiente em termos de tempo de computação do que algoritmos combinatorios ou genéticos.

5.4.6. Análise da influência de parâmetros geométricos e topológicos

No modelo numérico desenvolvido e, tal como já se justificou oportunamente, não foram implementadas variáveis de decisão de natureza geométrica, apesar do algoritmo de optimização utilizado possibilitar a utilização das mesmas. Por outro lado, este algoritmo não permite a consideração directa de variáveis de decisão topológicas. No entanto, tal como foi referido na secção 4.2.2, o modelo numérico desenvolvido pode também ser utilizado para estudar a influência de parâmetros geométricos e topológicos no projecto óptimo de pontes atirantadas de betão.

Na presente secção apresentam-se os resultados de quatro exemplos em que se variaram parâmetros geométricos e topológicos da ponte atirantada analisada anteriormente. Deste modo, tendo por base o Exemplo 7 correspondente à optimização da ponte completa, estudaram-se os seguintes parâmetros:

- a) altura das torres (Exemplo 13a);

- b) razão entre os comprimentos dos vãos laterais e do vão central (Exemplo 13b);
- c) número de tirantes (Exemplo 13c);
- d) ligação tabuleiro-torre (Exemplo 13d).

No primeiro exemplo a altura das torres acima do tabuleiro foi reduzida de 40,0 m (24,1% do comprimento do vão central) para 34,0 m (20,5% do comprimento do vão central) mantendo-se o espaçamento de 1,5 m entre ancoragens dos tirantes. No segundo exemplo manteve-se o comprimento total da ponte (320,0 m) mas reduziu-se o comprimento dos vãos laterais. Na solução original têm-se vãos laterais de 77,0 m (46,4% do comprimento do vão central), sendo reduzidos para 72,5 m, o que representa 41,4% do novo comprimento do vão central, ou seja, 175,0 m. No terceiro exemplo mantiveram-se os comprimentos dos vãos laterais e central e consideraram-se 44 tirantes, o que levou à alteração do espaçamento entre estes no tabuleiro. Deste modo, considerou-se uma distância de 3,0 m desde a torre até ao primeiro par de tirantes e espaçamentos entre estes de 7,4 m. No último exemplo removeu-se a ligação vertical entre o tabuleiro e a torre passando a ter-se um tabuleiro com suspensão total.

De referir ainda que para todos os exemplos se consideraram os mesmos objectivos de projecto que para o Exemplo 7. O mesmo se passa com as variáveis de decisão, à excepção do Exemplo 13c, em que a consideração de um maior número de tirantes implicou um acréscimo de 8 variáveis de decisão, representando as forças e as áreas da secção transversal desses elementos.

No Quadro 5.38 resumem-se os valores das forças nos tirantes correspondentes às soluções óptimas para cada um dos exemplos analisados.

Quadro 5.38 – Forças nos tirantes na solução ótima (análise da influência de parâmetros geométricos e topológicos)

	Exemplo 7	Exemplo 13a	Exemplo 13b	Exemplo 13c	Exemplo 13d
Tirante	Força [kN]	Força [kN]	Força [kN]	Força [kN]	Força [kN]
1	1497	1489	1560	1008	1497
2	1500	1497	1415	987	1477
3	1794	1776	1752	1517	1818
4	1802	1800	1699	1444	1765
5	2295	2282	2319	1814	2341
6	2310	2333	2192	1692	2264
7	2502	2519	2449	2011	2563
8	2526	2617	2478	1862	2483
9	2716	2799	2736	2514	2778
10	2749	2891	2802	2329	2725
11	3041	3225	3134	2827	3083
12	3075	3247	3228	2621	3075
13	3075	3265	3138	3052	3081
14	3075	3306	3273	2847	3102
15	3587	3824	3598	3088	3549
16	3587	3926	3828	2972	3639
17	5125	5460	6188	3134	5041
18	4612	5135	4932	3191	4681
19	–	–	–	3388	–
20	–	–	–	3481	–
21	–	–	–	4244	–
22	–	–	–	3524	–

No Quadro 5.39 apresentam-se, em resumo, o custo e os valores ótimos das diversas variáveis de decisão seccionais para os diversos exemplos analisados. Os valores são apresentados em m^2 e em m , respectivamente, para as áreas dos tirantes e para as dimensões das secções transversais dos elementos do tabuleiro e da torre. No Quadro 5.40 resumem-se os valores do custo total e dos custos do tabuleiro, torres e tirantes para as soluções ótimas obtidas para os vários diversos exemplos analisados.

Quadro 5.39 – Valores ótimos das variáveis de decisão seccionais (análise da influência de parâmetros geométricos e topológicos)

Variável de decisão	Exemplo 7	Exemplo 13a	Exemplo 13b	Exemplo 13c	Exemplo 13d
3	$3,421 \times 10^{-3}$	$4,776 \times 10^{-3}$	$4,139 \times 10^{-3}$	$1,579 \times 10^{-3}$	$7,376 \times 10^{-3}$
4	$3,096 \times 10^{-3}$	$3,255 \times 10^{-3}$	$2,945 \times 10^{-3}$	$1,929 \times 10^{-3}$	$5,420 \times 10^{-3}$
5	2,308	1,956	2,161	2,837	1,842
6	0,511	0,714	0,633	0,567	0,766
7	0,152	0,150	0,150	0,152	0,150
10	$3,654 \times 10^{-3}$	$5,418 \times 10^{-3}$	$4,482 \times 10^{-3}$	$1,627 \times 10^{-3}$	$5,017 \times 10^{-3}$
11	$3,936 \times 10^{-3}$	$5,480 \times 10^{-3}$	$2,915 \times 10^{-3}$	$2,241 \times 10^{-3}$	$3,354 \times 10^{-3}$
12	0,508	0,500	0,500	0,500	0,640
13	0,150	0,150	0,150	0,150	0,164
16	$3,593 \times 10^{-3}$	$6,436 \times 10^{-3}$	$4,096 \times 10^{-3}$	$1,753 \times 10^{-3}$	$3,065 \times 10^{-3}$
17	$3,597 \times 10^{-3}$	$5,758 \times 10^{-3}$	$3,474 \times 10^{-3}$	$2,404 \times 10^{-3}$	$3,354 \times 10^{-3}$
20	$3,065 \times 10^{-3}$	$5,167 \times 10^{-3}$	$4,345 \times 10^{-3}$	$1,942 \times 10^{-3}$	$2,601 \times 10^{-3}$
21	$3,151 \times 10^{-3}$	$5,590 \times 10^{-3}$	$3,437 \times 10^{-3}$	$2,552 \times 10^{-3}$	$2,801 \times 10^{-3}$
24	$2,727 \times 10^{-3}$	$3,724 \times 10^{-3}$	$3,725 \times 10^{-3}$	$2,893 \times 10^{-3}$	$2,801 \times 10^{-3}$
25	$3,096 \times 10^{-3}$	$4,705 \times 10^{-3}$	$3,215 \times 10^{-3}$	$3,828 \times 10^{-3}$	$2,809 \times 10^{-3}$
28	$3,522 \times 10^{-3}$	$3,282 \times 10^{-3}$	$3,495 \times 10^{-3}$	$4,319 \times 10^{-3}$	$3,097 \times 10^{-3}$
29	$3,541 \times 10^{-3}$	$4,147 \times 10^{-3}$	$4,305 \times 10^{-3}$	$4,848 \times 10^{-3}$	$3,199 \times 10^{-3}$
32	$3,501 \times 10^{-3}$	$3,320 \times 10^{-3}$	$3,214 \times 10^{-3}$	$4,864 \times 10^{-3}$	$3,149 \times 10^{-3}$
33	$3,501 \times 10^{-3}$	$5,964 \times 10^{-3}$	$5,131 \times 10^{-3}$	$4,221 \times 10^{-3}$	$3,171 \times 10^{-3}$
36	$4,227 \times 10^{-3}$	$4,289 \times 10^{-3}$	$5,733 \times 10^{-3}$	$3,989 \times 10^{-3}$	$4,290 \times 10^{-3}$
37	$3,909 \times 10^{-3}$	$5,289 \times 10^{-3}$	$4,961 \times 10^{-3}$	$4,999 \times 10^{-3}$	$3,775 \times 10^{-3}$
40	$5,362 \times 10^{-3}$	$6,081 \times 10^{-3}$	$6,243 \times 10^{-3}$	$4,274 \times 10^{-3}$	$5,577 \times 10^{-3}$
41	$4,815 \times 10^{-3}$	$5,451 \times 10^{-3}$	$5,317 \times 10^{-3}$	$4,015 \times 10^{-3}$	$4,909 \times 10^{-3}$
42	0,755	0,732	0,824	–	0,847
43	0,258	0,263	0,222	–	0,246
44	4,950	3,348	3,446	$4,367 \times 10^{-3}$	4,139
45	2,189	2,689	2,757	$3,798 \times 10^{-3}$	2,907
46	2,764	3,314	3,079	–	3,323
47	1,934	2,925	2,238	–	2,405
48	0,198	0,345	0,342	$4,420 \times 10^{-3}$	0,250
49	0,284	0,390	0,292	$3,744 \times 10^{-3}$	0,235
50	0,223	0,335	0,294	0,731	0,239
51	0,243	0,401	0,291	0,213	0,252
52	–	–	–	3,328	–
53	–	–	–	2,570	–
54	–	–	–	3,297	–
55	–	–	–	2,242	–
56	–	–	–	0,295	–
57	–	–	–	0,273	–
58	–	–	–	0,285	–
59	–	–	–	0,266	–
Custo	1.294.844 €	1.343.869 €	1.332.793 €	1.487.073 €	162.056 €

Quadro 5.40 – Valores finais do custo total e do custo do tabuleiro, torres e tirantes (análise da influência de parâmetros geométricos e topológicos)

	Tabuleiro	Torres	Tirantes	Total
Exemplo 7	737.595 €	111.011 €	446.238 €	1.294.844 €
	47,5%	8,6%	34,5%	100,0%
Exemplo 13a	697.298 €	176.886 €	469.685 €	1.343.869 €
	51,9%	13,2%	35,0%	100,0%
Exemplo 13b	719.585 €	146.618 €	466.591 €	1.332.793 €
	54,0%	11,0%	35,0%	100,0%
Exemplo 13c	814.906 €	134.161 €	538.006 €	1.487.073 €
	54,8%	9,0%	36,2%	100,0%
Exemplo 13d	779.552 €	133.977 €	448.527 €	1.362.056 €
	57,2%	9,8%	32,9%	100,0%

Tendo em conta os resultados apresentados pode referir-se que o custo do tabuleiro representa entre 47,5% e 57,2% do custo total da ponte. As torres representam entre 8,6% e 13,2% e os tirantes representam entre 32,9% e 36,2% do custo total da ponte. Os custos mais elevados do tabuleiro e dos tirantes observam-se no Exemplo 13c e o Exemplo 13a apresenta o custo mais elevado das torres. O Exemplo 7 apresenta os custos mais baixos dos tirantes e das torres e o Exemplo 13a apresenta o custo mais baixo para o tabuleiro. Em termos de custo total o exemplo base (Exemplo 7) é o que apresenta o valor mais baixo e o Exemplo 13c é o que apresenta o valor mais elevado.

No que respeita ao Exemplo 13a, em que se reduziu a altura das torres, verifica-se relativamente ao Exemplo 7 um aumento do custo das torres e dos tirantes. Este facto poderá ser justificado pela menor eficiência do sistema de atirantamento devido à menor inclinação dos tirantes, em virtude da redução da altura das torres. Deste modo, têm-se também maiores valores das forças e das áreas dos tirantes. No Exemplo 13a obteve-se para o tabuleiro uma secção de menores dimensões, o que se traduz numa redução do custo deste elemento estrutural relativamente ao Exemplo 7.

No Exemplo 13b reduziu-se a razão entre os comprimentos dos vãos laterais e do vão central, tendo-se obtido uma solução óptima com um ligeiro (2,93%) aumento de custo relativamente ao Exemplo 7. Este resultado deve-se ao aumento do custo das torres (32,08%) e dos tirantes (4,56%), apesar de se verificar uma redução (2,44%) no custo do tabuleiro. A redução do comprimento do vão lateral relativamente ao vão central traduz-se num maior desequilíbrio entre estes em virtude das cargas aplicadas, em particular nos casos de alternância de sobrecarga rodoviária. Este facto conduz a maiores deformações e esforços de flexão nas torres pelo que são necessárias secções transversais de maiores dimensões nestes

elementos. Para fazer face a esse desequilíbrio, e para garantir a rasante na condição de carga permanente, tem-se no tirante de retenção o valor mais elevado da força para os diversos exemplos estudados.

No que respeita aos parâmetros topológicos analisados, pode referir-se que o aumento do número de tirantes conduziu a um aumento do custo total, tendo-se obtido a solução com maior custo do tabuleiro e dos tirantes para os diversos exemplos analisados. Com o aumento do número de tirantes reduziu-se o espaçamento entre ancoragens destes no tabuleiro, tendo-se mantido o espaçamento na torre. Deste modo, obteve-se a solução com os menores valores médios de forças e de áreas da secção dos tirantes, contudo, o custo fixo associado a cada tirante representa uma parcela importante do custo dos mesmos sendo responsável pelo aumento verificado. De referir ainda que, em virtude da redução do espaçamento entre tirantes seria expectável a obtenção de uma solução com um tabuleiro mais esbelto. Na medida em que as soluções obtidas representam óptimos de Pareto, a consideração de diferentes pontos de partida poderia conduzir a soluções óptimas distintas.

No Exemplo 13d removeu-se a ligação vertical entre o tabuleiro e as torres passando a ter-se um tabuleiro com suspensão total. Relativamente ao Exemplo 7 em que se tem suspensão parcial verifica-se um ligeiro (5,19%) aumento do custo total. Este deve-se fundamentalmente ao aumento do custo das torres (20,69%), verificando-se também um aumento de 5,69% no custo do tabuleiro e de 0,51% no custo dos tirantes. No Exemplo 13d obteve-se uma solução com um tabuleiro de menor altura do que no Exemplo 7 mas com maior largura das vigas laterais em todo o comprimento, sendo a solução com maior largura das vigas laterais de todos os exemplos analisados. Da mesma forma, é a solução que apresenta maiores valores das áreas dos tirantes 1 e 2 para fazer face à ausência do apoio vertical na torre do tramo de tabuleiro adjacente à mesma.

5.5. Sumário

No capítulo que agora se conclui apresentaram-se os resultados de diversos exemplos de aplicação do modelo numérico desenvolvido no âmbito desta tese e destinado à análise e optimização de pontes atirantadas de betão. Nesta secção apresenta-se um sumário dos principais resultados e conclusões a que se chegou com os exemplos de aplicação apresentados. Em termos gerais pode referir-se que o modelo numérico desenvolvido se mostrou adequado para resolução dos problemas de determinação das forças nos tirantes e de minimização do custo da estrutura, considerando todas as acções e efeitos relevantes. O

algoritmo de otimização mostrou também ser eficiente pois permite obter soluções ótimas num reduzido número de iterações.

No que respeita ao problema de determinação das forças nos tirantes podem referir-se os seguintes aspectos mais relevantes:

- O modelo numérico permite determinar os valores das forças de instalação e de ajustamento nos tirantes que garantem as condições pretendidas no final da construção, possibilitando ainda minimizar o custo dos tirantes.
- Para os exemplos analisados o algoritmo de otimização permite reduzir o custo dos tirantes em cerca de 5%, não se verificando diferença significativa entre a análise para a ponte completa e a análise considerando o faseamento construtivo. No entanto, a primeira apresenta a desvantagem de não possibilitar o cálculo das forças de instalação e de fornecer valores das forças nos tirantes para a ponte completa em média 13% superiores.
- A não consideração dos efeitos diferidos do betão não alterou significativamente a solução óptima em termos de custo, tendo-se obtido uma redução de 5,18% relativamente à solução inicial. Da mesma forma, e em termos gerais não se observaram diferenças significativas nas distribuições de forças nos tirantes. No entanto, dadas as diferenças verificadas para alguns tirantes individualmente, torna-se necessário considerar estes efeitos no problema de otimização de modo a obter valores adequados das forças de instalação e de ajustamento, assim como das áreas dos tirantes.
- Em termos gerais os parâmetros intervenientes nos modelos de fluência e retracção não exercem influência significativa na solução do problema de otimização, contudo, a análise individual dos resultados para cada tirante mostra, nalguns casos, variações significativas dos valores das variáveis de decisão. Por conseguinte, na resolução do problema de otimização das forças nos tirantes devem utilizar-se valores apropriados dos parâmetros intervenientes nos modelos de fluência e retracção de modo a evitar discrepâncias entre o comportamento previsto e o comportamento real da ponte.
- Para os exemplos analisados os efeitos geometricamente não-lineares não alteraram significativamente a solução óptima em termos de distribuição de forças nos tirantes, mas conduzem a algumas alterações nos valores das áreas dos mesmos. Assim, tal como os efeitos diferidos, também os efeitos geometricamente não-lineares devem ser tidos em conta no problema de otimização das forças nos tirantes, de modo a

determinar valores adequados das variáveis de decisão que garantam os objectivos de projecto.

- Os resultados sugerem ainda a necessidade de monitorizar a resposta da estrutura a longo prazo de modo a avaliar a necessidade de ajustar as forças nos tirantes alguns anos após a construção para controlar os valores das tensões e dos deslocamentos.

Relativamente ao problema de minimização do custo de pontes atirantadas de betão podem indicar-se as seguintes conclusões principais:

- O modelo numérico desenvolvido permite minimizar o custo de pontes atirantadas de betão, obtendo-se soluções óptimas para a distribuição de forças nos tirantes e para as dimensões das secções transversais dos elementos que verificam objectivos de tensões e deslocamentos durante o processo construtivo e para a ponte completa sujeita a vários casos de carga.
- Para a ponte com tabuleiro em laje vigada, a consideração de variáveis de decisão seccionais nos elementos do tabuleiro e das torres em conjunto com as variáveis de decisão das forças e secções nos tirantes permite reduzir o custo da ponte em 17,4%.
- A solução óptima não considerando o faseamento construtivo apresenta um custo 19,9% menor pelo que pode ser considerada como um limite inferior, em termos de custo, para a solução considerando o faseamento construtivo. Este facto pode ser justificado pela maior quantidade de objectivos de projecto a verificar na solução em que se consideram as fases construtivas.
- Para os exemplos analisados verifica-se que o tabuleiro representa a maior contribuição para o custo total da ponte, com valores entre os 55% e os 60%. Os tirantes representam entre 20% a 30% do custo total, sendo o restante custo devido às torres.
- Para os exemplos analisados a solução em caixão unicelular mostrou ser a mais económica, seguida da solução em laje vigada e da solução em caixão tricelular.
- A consideração de variáveis de decisão representando o pré-esforço no tabuleiro permite melhorar o comportamento da estrutura, obtendo-se uma solução óptima de custo inferior à solução sem pré-esforço. Este tipo de variável de decisão possibilita a futura aplicação do modelo à optimização de outros tipos de pontes em betão.
- A abordagem proposta para a optimização com variáveis discretas, baseada no arredondamento da solução contínua e posterior ajustamento das forças e secções dos tirantes, possibilita a obtenção de soluções óptimas com valores discretos para as variáveis de decisão seccionais com um acréscimo de custo de, aproximadamente, 7%.

Trata-se de uma metodologia eficiente na medida em que a solução discreta é obtida num tempo reduzido, evitando-se a aplicação de algoritmos com variáveis discretas que, para o tipo de problema em estudo, exigiriam um elevado esforço de cálculo.

- Mostrou-se ainda que o modelo numérico pode ser aplicado para a optimização considerando variáveis de decisão geométricas ou topológicas. Para tal, resolveu-se indirectamente o problema de optimização considerando diferentes soluções iniciais em que se variaram parâmetros geométricos e topológicos. A diminuição da altura das torres ou a diminuição dos vão laterais não alteraram significativamente o custo total da ponte, tendo-se obtido aumentos de 3,79% e 2,93%, respectivamente. O aumento do número de tirantes e a utilização de um tabuleiro com suspensão total levou a aumentos no custo da ponte de 14,85% e de 5,19%, respectivamente.

Capítulo 6 - Conclusões e Recomendações para Estudos Futuros

6.1. Conclusões

O projecto de estruturas de Engenharia Civil é um processo iterativo de análise e dimensionamento em que se procura uma solução que satisfaça requisitos de segurança, funcionalidade e exequibilidade construtiva. No caso de uma ponte de tirantes envolve a definição da geometria global, a determinação da distribuição de forças nos tirantes e das dimensões das secções transversais dos diversos elementos. A solução obtida deve garantir a verificação de limites nos valores dos deslocamentos e das tensões, não só para a ponte completa em utilização, mas também durante as fases construtivas. Dada a natureza repetitiva deste processo e a enorme quantidade de informação com que é necessário lidar no caso de uma estrutura complexa e de grandes dimensões, como uma ponte atirantada, a utilização de algoritmos de optimização surge naturalmente como uma ferramenta de apoio de modo a automatizar este processo, tendo em vista a obtenção de soluções económicas e estruturalmente eficientes. Apesar da aplicação de algoritmos de optimização no âmbito do projecto de pontes atirantadas constituir uma temática que tem suscitado o interesse de diversos investigadores, a grande maioria dos trabalhos diz respeito a pontes metálicas ou mistas aço-betão.

Deste modo, desenvolveu-se um modelo numérico de análise estrutural e optimização para a resolução de problemas no âmbito do projecto de pontes atirantadas de betão. Tendo em conta o que foi apresentado em capítulos anteriores considera-se terem sido cumpridos os objectivos inicialmente propostos, assim como aqueles que em virtude do desenvolvimento do trabalho, foram considerados relevantes.

No Capítulo 2 apresentou-se a revisão bibliográfica efectuada no âmbito desta tese, fazendo-se referência à evolução histórica da construção de pontes de tirantes, às características do seu comportamento estrutural, aos aspectos essenciais do projecto e aos métodos construtivos utilizados. Apresentou-se também uma revisão de trabalhos anteriores de acordo com as duas temáticas centrais deste trabalho, a análise estrutural e a optimização de pontes de tirantes. Neste sentido, prestou-se especial atenção aos diversos métodos de determinação das forças nos tirantes e à análise considerando o faseamento construtivo e os

efeitos diferidos do comportamento do betão. Prestou-se também atenção ao comportamento não-linear face a acções estáticas e ao comportamento face às acções dinâmicas do vento ou dos sismos. Os trabalhos de optimização têm sido aplicados, fundamentalmente, na resolução de dois problemas, o da determinação das forças nos tirantes e o da minimização do custo da estrutura. Da revisão bibliográfica efectuada há a salientar o facto de que, apesar do comportamento deste tipo de estruturas se encontrar bastante estudado, existe ainda uma lacuna na aplicação de algoritmos de optimização, em particular no caso de pontes atirantadas de betão.

Os Capítulos 3 e 4 foram dedicados à descrição detalhada do modelo numérico desenvolvido que é composto por dois módulos: o módulo de análise estrutural e o módulo de análise de sensibilidades e optimização. No Capítulo 3 descreveu-se o desenvolvimento e implementação do módulo de análise estrutural, justificando-se as diversas opções tomadas e apresentando-se exemplos de verificação para validação dos resultados obtidos. Este módulo é baseado no Método dos Elementos Finitos, permite modelar o faseamento construtivo pelo método dos avanços sucessivos e tem em conta os efeitos diferidos da maturação, fluência e retracção do betão e os efeitos geometricamente não-lineares.

A análise das fases construtivas é efectuada seguindo a montagem da estrutura, o que possibilita a consideração directa dos efeitos diferidos e permite dispor, no final de cada fase, de toda a informação relativa às tensões e aos deslocamentos e suas respectivas sensibilidades para posterior utilização no algoritmo de optimização. Na modelação dos efeitos diferidos admitiu-se o comportamento viscoelástico linear para o betão e utilizaram-se os modelos propostos no EC2 (EN 1992-1-1, 2010). Para a modelação dos efeitos viscoelásticos do betão sob tensão variável adoptou-se a metodologia baseada na aproximação da função de fluência por uma série de Dirichlet. Os efeitos geometricamente não-lineares foram considerados através de uma *análise de segunda ordem aproximada*. Para tal, implementou-se em cada fase uma análise iterativa, modelando os tirantes como elementos de barra com módulo de elasticidade equivalente e utilizando o *método das forças laterais equivalentes* para considerar os efeitos de segunda ordem devido aos grandes deslocamentos e ao efeito de viga-coluna.

A descrição pormenorizada do módulo de análise de sensibilidades e optimização foi efectuada no Capítulo 4, tendo-se apresentado algumas considerações gerais acerca dos problemas de optimização estrutural. Referiram-se também as metodologias habituais para efectuar a análise de sensibilidades e salientou-se a importância desta tarefa na resolução de um problema de optimização.

Apresentaram-se as variáveis de decisão e os objectivos de projecto intervenientes na definição do problema de optimização de pontes atirantadas de betão. Consideraram-se 23 tipos de variáveis de decisão que representam as dimensões das secções transversais dos diversos elementos e as forças de pré-esforço a aplicar nos tirantes e nos elementos de betão. Definiram-se objectivos de projecto relativos ao custo da estrutura, aos valores dos deslocamentos e das tensões nos tirantes e nos elementos de betão durante a construção, em serviço e para verificação da resistência. O problema de optimização foi formulado como um problema *multi-objectivo* em que se procura a minimização do custo da estrutura e a verificação de objectivos de deslocamentos e tensões. Aplicando o *Princípio da Máxima Entropia* foi possível transformar o problema original, descontínuo e não diferenciável, na minimização de uma função objectivo escalar convexa, a partir da qual são obtidas soluções óptimas de Pareto do problema *multi-objectivo*.

Tendo em conta a natureza discreta das pontes de tirantes, dada a disponibilidade do código-fonte e uma vez que o número de objectivos é muito superior ao número de variáveis de decisão implementou-se uma análise de sensibilidades através do *método analítico discreto directo*. De salientar que uma grande parcela do esforço de desenvolvimento do modelo computacional incidiu sobre a inclusão, nas sub-rotinas das matrizes elementares, das respectivas derivadas a respeito de cada um dos tipos de variáveis de decisão referidos em 4.2.2. No desenvolvimento do programa computacional procurou-se criar uma estrutura modular para facilitar posteriores melhoramentos, quer na análise estrutural quer na análise de sensibilidades e optimização.

No Capítulo 5 apresentaram-se os resultados de diversos exemplos de aplicação de modo a ilustrar as capacidades do modelo numérico desenvolvido como ferramenta de apoio ao projecto de pontes atirantadas de betão. Os exemplos foram divididos em dois subcapítulos em que se abordou a resolução dos problemas de determinação das forças nos tirantes e da minimização do custo da estrutura. Tendo em conta os resultados obtidos podem referir-se as seguintes conclusões:

- Mostrou-se que os referidos problemas podem ser formulados e resolvidos como problemas de optimização *multi-objectivo*, obtendo-se soluções óptimas para as variáveis de decisão que garantem os objectivos de projecto durante a construção e para a ponte completa sujeita a várias condições de carregamento.
- Para o problema de determinação das forças nos tirantes obtêm-se distribuições óptimas para as forças de instalação e de ajustamento que garantem as condições

- pretendidas no final da construção. A otimização permite ainda minimizar os custos dos tirantes através da minimização da quantidade de aço de alta resistência a utilizar.
- A consideração de variáveis de decisão seccionais nos elementos do tabuleiro e das torres, em conjunto com as variáveis associadas às forças e secções dos tirantes, possibilita a minimização do custo da estrutura e permite estudar soluções estruturais alternativas para a secção transversal do tabuleiro. O algoritmo utilizado, associado a múltiplos pontos de partida, fornece soluções óptimas e adequadas do ponto de vista da engenharia rearranjando a rigidez dos apoios providenciados pelos tirantes e a distribuição de massas entre o tabuleiro e as torres.
 - O algoritmo mostrou ser eficiente pois, tendo em conta o elevado número de objectivos e de variáveis de decisão, permite obter soluções óptimas num reduzido número de iterações. Mostrou também ser robusto, na medida em que, tem em conta todas as acções e efeitos relevantes (fases construtivas, efeitos diferidos e efeitos geometricamente não-lineares) e permite a verificação de critérios de resistência e de serviço durante a construção e para a ponte completa.
 - Apesar do investimento inicial em programação, o método adoptado para a análise de sensibilidades, requerendo apenas uma análise estrutural por cada ciclo de análise e optimização, mostrou ser eficiente e adequado para prever a resposta da estrutura face a variações nas variáveis de decisão. A consideração de valores reduzidos para os limites móveis dessas variações permitiu minimizar os erros introduzidos pela aproximação dada pela análise de sensibilidades, garantindo a estabilidade do processo de análise e optimização.
 - Os resultados mostram a necessidade de considerar as fases construtivas, os efeitos geometricamente não-lineares e os efeitos diferidos, com valores apropriados dos modelos de fluência e retracção, para a obtenção de valores adequados das variáveis de decisão que garantam os objectivos de projecto. Salienta-se também a necessidade de monitorizar a resposta da estrutura a longo prazo para avaliar a necessidade de ajustar as forças nos tirantes alguns anos após a construção.
 - Apesar de se ter utilizado uma modelação simplificada, a consideração de variáveis de decisão associadas ao pré-esforço no tabuleiro permitiu melhorar o comportamento da estrutura com a consequente redução de custo relativamente à solução sem pré-esforço.
 - A metodologia proposta para a optimização com variáveis discretas revelou-se eficiente pois permite obter rapidamente soluções óptimas, usando valores discretos

das variáveis de decisão seccionais, com um custo próximo da solução contínua. O arredondamento da solução contínua e posterior ajuste das forças nos tirantes evita a aplicação de algoritmos de programação discreta que, dado o elevado número de variáveis de decisão, exigiriam um elevado esforço de cálculo.

- A consideração de diferentes valores de parâmetros geométricos, como a altura das torres e os comprimentos dos vãos laterais e central, dentro da gama de valores correntes, não altera significativamente o custo da ponte. O mesmo se verifica para a consideração do tabuleiro com suspensão parcial ou suspensão total. O número de tirantes mostrou ser o parâmetro topológico que exerce maior influência no custo da ponte.

O problema da minimização do custo de uma ponte atirantada é um problema não convexo com múltiplas soluções pelo que o ponto de partida é importante para a obtenção da solução óptima. Em virtude das cada vez maiores capacidades dos computadores tornou-se habitual a utilização de algoritmos genéticos na resolução dos problemas de optimização estrutural. Estes algoritmos efectuam uma pesquisa exaustiva da solução óptima, contudo, não se consegue garantir que a solução obtida corresponda ao mínimo global. Para além disso, a consideração de um elevado número de variáveis de decisão encarece excessivamente o custo computacional da aplicação destes algoritmos.

No projecto de pontes de tirantes a solução inicial continua a ser definida com base na experiência dos projectistas. Deste modo, com a aplicação do modelo numérico desenvolvido procura-se um melhoramento dessa solução, visando a redução de custo e a verificação dos diversos objectivos de projecto. Dada a eficiência do algoritmo é possível testar e ajustar diferentes soluções iniciais de modo a obter soluções óptimas adequadas do ponto de vista da engenharia.

6.2. Recomendações para estudos futuros

A investigação levada a cabo neste trabalho, envolvendo a análise estrutural, a análise de sensibilidades e a optimização de pontes atirantadas de betão, constitui um campo de estudo bastante vasto pelo que se justifica a realização de futuros trabalhos de investigação. Assim, considera-se relevante melhorar o modelo numérico desenvolvido no sentido de aperfeiçoar as suas capacidades e o seu potencial de aplicação como ferramenta de apoio ao projecto destas estruturas. Para tal, poderão ser introduzidas melhorias tanto no módulo de análise como no módulo de optimização. Para além disso deve procurar-se desenvolver o modelo tendo em

vista a sua aplicação na optimização de outros tipos de estruturas executadas em betão nomeadamente pontes em viga, em pórtico e em arco.

Neste sentido, considera-se importante melhorar a modelação do pré-esforço nos elementos de betão para uma representação mais adequada do traçado real dos cabos utilizado na construção de pontes. Neste trabalho apresentaram-se as formulações gerais do elemento de cabo de pré-esforço e da força de pré-esforço como variável de decisão, tendo-se considerado o elemento de cabo associado a um elemento de viga. Deverá considerar-se uma modelação com discretizações independentes para os dois elementos de modo a que um elemento de cabo possa atravessar vários elementos de viga, podendo estes conter mais do que um elemento de cabo.

Outro desenvolvimento a efectuar no modelo actual prende-se com a consideração do fenómeno de *shear lag*. Este pode ser mais ou menos relevante e traduz-se em distribuições não uniformes das tensões normais ao longo da largura do tabuleiro, em virtude das elevadas tensões de corte que podem ocorrer nas secções adjacentes aos apoios. Quando se utiliza um modelo plano de análise, este fenómeno pode ser tido em conta no dimensionamento através da consideração de uma largura efectiva para as lajes do tabuleiro. Assim, considera-se relevante estudar a importância do fenómeno de *shear lag* em tabuleiros de pontes atirantadas de betão. Este estudo poderá ser feito com recurso a programas comerciais de elementos finitos que possibilitem uma modelação tridimensional da estrutura e a análise da distribuição de tensões normais no tabuleiro, a fim de se definirem valores para a largura efectiva. Estes valores deverão ser confirmados e comparados com os propostos na bibliografia. Posteriormente, o cálculo da largura efectiva e a consideração da mesma no algoritmo de optimização deverão ser implementados no modelo numérico.

No que respeita ao módulo de análise estrutural considera-se também importante aperfeiçoar a consideração dos efeitos de segunda ordem, implementando uma análise geometricamente não-linear. Neste trabalho adoptou-se uma *análise de segunda ordem aproximada* que se mostrou adequada para contabilizar estes efeitos. No entanto, os efeitos geometricamente não-lineares tornam-se mais significativos para pontes de grande vão ou quando ocorrem grandes deslocamentos que conduzem a tirantes pouco traccionados, nomeadamente, durante as fases construtivas ou para determinadas condições de carregamento. A implementação de uma análise geometricamente não-linear implicará uma adaptação do módulo de análise, alterando em cada fase, o ciclo iterativo para um ciclo iterativo e incremental de resolução do sistema de equações de equilíbrio não-linear. Os tirantes poderão ser modelados usando bielas múltiplas ou elementos de cabo-catenária. Para

os elementos de viga utilizados na modelação do tabuleiro e das torres será necessário adicionar à matriz de rigidez elástica a parcela de rigidez geométrica, usando funções de estabilidade exactas ou aproximadas. A análise de sensibilidades requer a derivação das equações de equilíbrio não-linear. No entanto, para fazer face às dificuldades inerentes a este processo, sugere-se a utilização da análise geometricamente não-linear em conjunto com uma análise de sensibilidades linear. Para limitar os eventuais erros na previsão da resposta da estrutura devem adoptar-se limites móveis apertados para as variações nas variáveis de decisão. Dado que as pontes de tirantes exibem um comportamento moderadamente não-linear não é expectável que os erros decorrentes da aproximação referida sejam significativos.

O modelo actual possibilita a contabilização da acção dinâmica dos sismos, de forma aproximada, através de forças laterais equivalentes. Para tal, basta implementar o cálculo das mesmas com base nos valores das propriedades dinâmicas, frequências e modos de vibração da estrutura. Contudo, o modelo apenas permite captar a resposta da estrutura no plano.

Neste sentido, a evolução natural do presente trabalho passará pelo desenvolvimento de um modelo tridimensional de análise. Esta modelação permitirá, por exemplo, considerar cargas assimétricas no tabuleiro, a análise de sistemas de atirantamento com suspensão lateral ou suspensão central, a utilização de pré-esforço transversal e a obtenção da resposta tridimensional da estrutura face à acção sísmica. No desenvolvimento deste modelo considerar-se-ão primeiro elementos de viga e de barra com módulo de elasticidade equivalente. Posteriormente poderão implementar-se elementos de placa-membrana para uma modelação mais adequada dos tabuleiros em caixão. Na modelação tridimensional o fenómeno de *shear lag* poderá ser tido em conta automaticamente. A resposta da estrutura face à acção sísmica poderá ser obtida através do método da sobreposição modal ou através de integração passo-a-passo das equações de equilíbrio dinâmico. Esta resposta deverá ser incluída na verificação dos objectivos de projecto dos problemas optimização. Neste âmbito considera-se também relevante estudar a resposta tendo em conta a variabilidade espacial e temporal da acção sísmica e a interacção solo-estrutura.

Relativamente ao módulo de análise de sensibilidades e optimização pensa-se ser relevante incluir mais casos de carga e objectivos de projecto que traduzam disposições regulamentares e especificidades do projecto e construção deste tipo de estruturas. A consideração de diversos casos de carga poderá ser efectuada definindo diferentes fases com as condições de carregamento pretendidas. Os valores de cálculo das acções poderão ser contabilizados directamente aplicando às cargas os respectivos coeficientes parciais de segurança e os valores de cálculo das propriedades dos materiais deverão ser considerados nos

correspondentes objectivos de projecto. Com a modelação tridimensional, a consideração de mais casos de carga e de mais objectivos de projecto procura-se que as soluções obtidas com o algoritmo de optimização estejam o mais próximo possível das soluções finais a adoptar na execução da estrutura.

Apesar dos resultados obtidos confirmarem que as variáveis de natureza mecânica e seccional são as mais relevantes para o projecto óptimo deste tipo de estruturas, considera-se importante alargar o estudo efectuado acerca da influência de parâmetros geométricos e topológicos. Desta forma, o modelo tridimensional também possibilitará estudar mais detalhadamente a influência na resposta estática e dinâmica da estrutura de parâmetros como: altura das torres; comprimentos dos vãos laterais e central; espaçamento das ancoragens no tabuleiro e nas torres; número de tirantes; forma das torres; ligação tabuleiro-torre e suspensão lateral vs suspensão central. Poder-se-á elaborar uma base de dados acerca da influência de parâmetros geométricos e topológicos no projecto óptimo de pontes atirantadas de betão.

Nos exemplos apresentados considerou-se o final da construção como referência para efectuar o ajustamento das forças nos tirantes e o dimensionamento dos diversos elementos estruturais de modo a controlar os deslocamentos do tabuleiro e das torres. Para ter em conta a influência dos efeitos diferidos a médio prazo, considera-se relevante resolver novamente os problemas de optimização mas prolongando a análise até dois ou cinco anos após a construção. A solução óptima deverá verificar os objectivos de projecto no final da construção, bem como objectivos adicionais de tensões e deslocamentos a médio prazo.

Como foi referido, o algoritmo de optimização poderá também ser aplicado para resolver o problema de ajuste das forças nos tirantes a longo prazo. Assim, partindo da solução óptima obtida anteriormente e efectuando uma análise a longo prazo, resolver-se-ia um problema de optimização considerando como variáveis de decisão as forças de ajustamento nos tirantes e como objectivos os valores das tensões e deslocamentos a longo prazo.

O modelo numérico poderá ser igualmente utilizado para resolução do problema de correcção de desvios nos deslocamentos durante a fase construtiva. Introduzindo alterações no modelo de análise, de acordo com medições efectuadas em obra, e através da resolução de um problema de optimização podem determinar-se as correcções a efectuar nas forças nos tirantes. Desta forma, é possível corrigir os desvios observados e garantir a geometria pretendida no final da construção.

Ainda no que respeita à optimização, considera-se relevante aprofundar a resolução de problemas com variáveis discretas, quer alargando o estudo com a metodologia adoptada neste trabalho, quer utilizando o método segmental ou algoritmos genéticos.

A determinação do projecto óptimo considerando fiabilidade, ou seja, o comportamento aleatório das acções e das características dos materiais, também poderá ser abordada em trabalhos futuros. Outro aspecto que poderá ser incluído no problema do projecto óptimo é a consideração do ciclo de vida da estrutura. Assim, o objectivo da optimização será obter um projecto que minimize o custo global dado pelos custos de construção mais os custos de manutenção e reparação. Para tal, deverão considerar-se aspectos relacionados com a fiabilidade, a variação das condições de utilização e a degradação dos materiais.

Tendo em vista a generalização do uso de algoritmos de optimização, no âmbito do projecto de estruturas, pensa-se ser relevante proceder à integração do módulo de análise de sensibilidades e optimização com programas comerciais de elementos finitos. Deste modo, utiliza-se uma potente ferramenta de análise estrutural em conjunto com os algoritmos de optimização disponíveis, por exemplo, no programa *MATLAB*. Recorrendo à *Open Application Programming Interface* do programa *SAP2000* é possível estabelecer esta ligação. Assim, pode escrever-se um código fonte no programa *MATLAB* que controle o processo geral. Este irá executar o programa de análise, procederá à análise de sensibilidades e optimização e actualizará os valores das variáveis de decisão. O ciclo de análise e optimização será repetido até se atingir a solução óptima. A maior dificuldade neste processo prende-se com o cálculo das sensibilidades a respeito das variáveis seccionais pelo *método analítico discreto directo*, uma vez que este requer o cálculo das derivadas da matriz de rigidez e dos vectores de forças, cujos respectivos valores elementares não estão disponíveis. No entanto, a formulação geral é a que foi apresentada nesta tese e, dependendo do tipo de problema a resolver e dos elementos finitos a utilizar, podem também adoptar-se alguns dos resultados apresentados.

A generalidade do modelo numérico desenvolvido permite a sua aplicação à optimização de outros tipos de estruturas. Assim, outro aspecto relevante a ter em conta em trabalhos futuros é o da aplicação do modelo desenvolvido para a análise e optimização de outras pontes executadas em betão como pontes em arco, em viga ou em pórtico.

Como nota final, de referir ainda a importância da validação e ajustamento do modelo numérico através da aplicação a casos reais de pontes atirantadas de betão.

Referências Bibliográficas

- Abdel-Ghaffar, A. M., Khalifa, M. A. (1991). "Importance of cable vibration in dynamics of cable-stayed bridges". *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 117 (11): 2571-2589.
- Abdel-Ghaffar, A. M., Nazmy, A. S. (1991). "3-D Nonlinear seismic behavior of cable-stayed bridges". *Journal of Structural Engineering, ASCE* 117 (11): 3456-3476.
- Adeli, H., Zhang, J. (1995). "Fully nonlinear analysis of composite girder cable-stayed bridges". *Computers & Structures* 54 (2): 267-277.
- Ali, H. M., Abdel-Ghaffar, A. M. (1995a). "Modeling of rubber and lead passive-control bearings for seismic analysis". *Journal of Structural Engineering, ASCE* 121 (7): 1134-1144.
- Ali, H. M., Abdel-Ghaffar, A. M. (1995b). "Modeling the nonlinear seismic behavior of cable-stayed bridges with passive control bearings". *Computers & Structures* 54 (3): 461-492.
- Allam, S. M., Datta, T. K. (1999). "Seismic behaviour of cable-stayed bridges under multi-component random ground motion". *Engineering Structures* 21: 62-74.
- Almeida, João C. O. F. (1989). "Comportamento não linear e verificação da segurança de pontes atirantadas de betão". Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa.
- Arora, Jasbir S. (2004). "Introduction to optimum design". 2ª edição, Waltham, MA, EUA: Elsevier Academic Press.
- Au, F. T. K., Si X. T. (2012). "Time-dependent effects on dynamic properties of cable-stayed-bridges". *Structural Engineering and Mechanics* 41 (1): 139-155.
- Au, F. T. K., Cheng, Y. S., Cheung, Y. K., Zheng, D. Y. (2001). "On the determination of natural frequencies and mode shapes of cable-stayed bridges". *Applied Mathematical Modelling* 25: 1099-1115.
- Baldomir, A., Hernandez, S., Nieto, F., Jurado, J. A. (2010). "Cable optimization of a long span cable stayed bridge in La Coruña (Spain)". *Advances in Engineering Software* 41: 931-938.
- Bazant, Z. P. (1988). "Material models for structural creep analysis". In *Mathematical modelling of creep and shrinkage of concrete*, editado por Z. P. Bazant, 99-215. Chichester: John Wiley and Sons, Ltd.

- Bhatti, M. A., Raza, S. M. N., Rajan, S. D. (1985). “Preliminary optimal design of cable-stayed bridges”. *Engineering Optimization* 8: 265-289.
- Billington, David P., Nazmy, A. (1990). “History and aesthetics of cable-stayed bridges”. *Journal of Structural Engineering* 17 (10): 3103–3134.
- Caetano, E., Cunha, A., Gattulli, V., Lepidi, M. (2008). “Cable-deck dynamic interactions at the International Guadiana Bridge: On-site measurements and finite element modelling”. *Structural Control and Health Monitoring* 29: 499-521.
- Caetano, E., Cunha, A., Taylor, C. A. (2000a). “Investigation of dynamic cable-deck interaction in a physical model of a cable-stayed bridge. Part I: modal analysis”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 29: 481-498.
- Caetano, E., Cunha, A., Taylor, C. A. (2000b). “Investigation of dynamic cable-deck interaction in a physical model of a cable-stayed bridge. Part II: seismic response”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 29: 499-521.
- Caetano, Elsa de Sá (2007). “Cable vibrations in cable-stayed bridges”. Structural Engineering Documents 9, IABSE – International Association for Bridge and Structural Engineering, Switzerland.
- Câncio Martins, J. L. (1996), “Folhas da disciplina de Pontes”. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, 1996.
- Casado, Alfredo Cámara (2011). “Seismic behaviour of cable-stayed bridges: design, analysis and seismic devices”. Tese de Doutoramento, Universidad Politécnica de Madrid.
- Cassis, J. H., Schmit Jr., L. A. (1976). “Optimum structural design with dynamic constraints”. *Journal of the Structural Division, ASCE* 102 (10): 2053-2071.
- CEB (1993). “Bulletin d’Information N° 215 – Structural effects of time-dependent behaviour of concrete”. CEB – Comité Euro-International du Béton, Lausanne.
- Chen, D. W., Au, F. T. K., Tham, L. G., Lee, P. K. K. (2000). “Determination of initial cable forces in prestressed concrete cable-stayed bridges for given design deck profiles using the force equilibrium method”, *Computers & Structures*, 74: 1-9.
- Chen, W. F., Lui, E. M. (1991). “Stability design of steel frames”. Boca Raton: CRC Press.
- Chen, Wai-Fah, Duan, Lian (2000). “Bridge Engineering Handbook”. Boca Raton: CRC Press.
- Cheung, Y. K., Yeo, M. F. (1979). “A practical introduction to finite element analysis”. Pitman Publishing Limited, London.
- Cluley, N. C., Shepherd, R. (1996). “Analysis of concrete cable-stayed bridges for creep, shrinkage and relaxation effects”. *Computers & Structures* 58 (2): 337-350.

- Coutinho, A. de Sousa, Gonçalves, A. (1994). “Fabrico e propriedades do betão – Volume III”. Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.
- Cremer, J. M. (1990). “Advanced methods for cable-stayed bridge erection (Belgium)”. *IABSE Structures C-51*, 4-5.
- Cruz, João S. N. D. (1997). “Controlo da fase construtiva de pontes atirantadas”. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa.
- EN 1991-1-1 (2009). *NP EN 1991-1-1 Eurocódigo 1 – Acções em estruturas, Parte 1-1: Acções gerais, Pesos volúmicos, pesos próprios e sobrecargas em edifícios*. IPQ – Instituto Português da Qualidade.
- EN 1991-1-6 (2005). *EN 1991-1-6 Eurocode 1 – Actions on structures, Part 1-6: General actions – Actions during execution*. CEN – Comité Européen de Normalisation.
- EN 1992-1-1 (2010). *NP EN 1992-1-1 Eurocódigo 2 – Projecto de estruturas de betão, Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios*. IPQ – Instituto Português da Qualidade.
- EN 1993-1-11 (2006). *EN 1993-1-11 Eurocode 3 – Design of steel structures, Part 1-11: Design of structures with tension components*. CEN – Comité Européen de Normalisation.
- Ernst J. H. (1965). “Der E-Modul von Seilen unter berucksichtigung des Durchhanges.” *Der Bauingenieur* 40 (2): 52-55.
- Félix, Carlos M. S. (2004). “Monitorização e análise do comportamento de obras de arte”. Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Ferraz, Miguel (2001). “Um modelo de análise para o estudo de pontes como estruturas evolutivas”. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Ferraz, Miguel (2010). “Modelo de avaliação do comportamento estrutural de obras de arte”. Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Ferreira, F. L. S., Simões, L. M. C. (2012). “Optimum cost design of controlled cable-stayed footbridges”. *Computers & Structures* 106-107: 135-143.
- Ferreira, F., Simões, L. (2011). “Optimum design of a controlled cable stayed bridge subject to earthquakes”. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 44: 517-528.
- Ferreira, Miguel C. P. (2004). “Efeito da variabilidade espacial da acção sísmica em pontes atirantadas”. Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.
- FIB (1999). “Bulletin 1, Volume 1 – Structural Concrete: Textbook on behaviour, design and performance”. FIB – Federation International du Béton, Lausanne.
- Fleming, John F. (1979). “Nonlinear static analysis of cable-stayed bridge structures”. *Computers & Structures* 10 (4): 621-635.

- Freire, A. M. S., Negrão, J. H. O., Lopes, A. V. (2006). “Geometrical nonlinearities on the static analysis of highly flexible steel cable-stayed bridges”. *Computers & Structures* 84: 2128-2140.
- Freire, António M. S. (2002). “Análise pseudo-linear e não-linear de pontes atirantadas metálicas”. Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.
- Furukawa, K., Sakai, I., Kumagai, S., Arai, H., Kasuga, A. (1987a). “Optimization of cable forces in cable-stayed prestressed concrete bridges based on minimum strain energy criterion”. International Conference on Cable-Stayed Bridges, Bangkok, Thailand, pp. 711-722.
- Furukawa, K., Sugimoto, H., Egusa, T., Inoue, K., Yamada, Y. (1987b) Studies on the optimization of cable prestressing for cable-stayed bridges, International Conference on Cable-Stayed Bridges, Bangkok, Thailand, pp. 723-734.
- GATTEL (1999). “Ponte Vasco da Gama Bridge”. Ministério do Equipamento, do Planeamento e da Administração do Território, Secretaria de Estado das Obras Públicas, Lisboa.
- Ghali, A., Favre, A., Elbadry, M. (2002). “Concrete Structures. Stresses and Deformations”. London: E & FN Spon.
- Gimsing, Niels J. (1997). “Cable supported bridges: concept and design”. 2ª edição, John Wiley and Sons, England.
- Grabow, Marko (2004). “Construction stage analysis of cable-stayed bridges”. Diplom Ingenieur Thesis, Technical University of Hamburg Harburg.
- Grid (2015). “Grid International – Consulting Engineers”. <http://www.grid.pt/>. Acedido a 20 de Julho de 2015.
- Haftka, R. T., Gürdal, Z. (1992). “Elements of structural optimization”, 3ª edição. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Hassan, M. M. (2013). “Optimization of stay cables in cable-stayed bridges using finite element, genetic algorithm, and B-spline combined technique”. *Engineering Structures* 49, pp. 643-654.
- Hassan, M. M., El Damatty, A. A., Nassef, A. O. (2015). “Database for the optimum design of semi-fan composite cable-stayed bridges based on genetic algorithms”. *Structure and Infrastructure Engineering* 11 (8): 1054-1068.

- Hassan, M. M., Nassef, A. O., El Damatty, A. A. (2012). "Determination of optimum post-tensioning cable forces of cable-stayed bridges". *Engineering Structures* 44, pp. 248-259.
- Hassan, M. M., Nassef, A. O., El Damatty, A. A., (2013). "Optimal design of semi-fan cable-stayed bridges". *Canadian Journal of Civil Engineering* 40: 285-297.
- Henriques, António A. R. (1991). "Análise não-linear de estrutura planas de betão pré-esforçado". Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Hewson, Nigel R. (2003). "Prestressed concrete bridges: design and construction". London: Thomas Telford Publishing.
- Kanok-Nukulchai, W., Hong, Guan (1993). "Nonlinear modeling of cable-stayed bridges". *Journal of Constructional Steel Research* 26, pp. 249-266.
- Kanok-Nukulchai, W., Yiu, Po K. A., Brotton, Derick M. (1992). "Mathematical modelling of cable-stayed bridges". *Structural Engineering International* 2 (2): 108-113.
- Karoumi, Raid (1999). "Some modelling aspects in the nonlinear finite element analysis of cable supported bridges". *Computers & Structures* 71: 397-412.
- Kasuga, A., Arai, H., Breen, J. E., Furukawa, K. (1995). "Optimum cable-force adjustments in concrete cable-stayed bridges". *Journal of Structural Engineering* 121 (4): 685-694.
- Khalil, M. S., Dilger, W. H., Ghali, A. (1983). "Time-dependent analysis of PC cable-stayed bridges". *Journal of Structural Engineering* 109 (8): 1980-1996.
- Kirsch, Uri (1981). "Optimum structural design. Concepts, methods and applications". McGraw-Hill, Inc.
- Kwon, Y. W., Bang, H. (1997). "The finite element method using MATLAB". Boca Raton: CRC Press.
- Lee, T.-Y., Kim, Y.-H., Kang, S.-W. (2008). "Optimization of tensioning strategy for asymmetric cable-stayed bridge and its effect on construction process". *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 35: 623-629.
- Leonhardt, Fritz (1987). "Cable stayed bridges with prestressed concrete". *Journal of Prestressed Concrete Institute* 32 (5), 1-30.
- Long, W., Troitsky, M. S. e Zielinski, Z. A. (1999). "Optimum design of cable stayed bridges". *Journal of Structural Engineering and Mechanics* 7 (3): 241-257.
- Lute, V., Upadhyay, A., Singh, K.K. (2009). "Computationally efficient analysis of cable-stayed bridge for GA-based optimization". *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 22: 750-758.

- Martins, A. M. B., Simões, L. M. C., Negrão, J. H. J. O. (2011) “Time-dependent analysis and cable stretching force optimization of concrete cable-stayed bridges”. Artigo apresentado na International Conference on Recent Advances on Nonlinear Models – Structural Concrete Applications (CoRAN 2011), Novembro 24-25, Coimbra, Portugal.
- Martins, A. M. B., Simões, L. M. C., Negrão, J. H. J. O. (2013) “Optimization of cable forces for concrete cable-stayed bridges”. Artigo apresentado na Fourteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing, Cagliari, Sardenha, Itália.
- Martins, A. M. B., Simões, L. M. C., Negrão, J. H. J. O. (2015a). “Cable stretching force optimization of concrete cable-stayed bridges including construction stages and time-dependent effects”. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 51 (3), 757-772.
- Martins, A. M. B., Simões, L. M. C., Negrão, J. H. J. O. (2015b). “Optimization of cable forces on concrete cable-stayed bridges including geometrical nonlinearities”. *Computers & Structures* 155: 18-27.
- Martins, A. M. B., Simões, L. M. C., Negrão, J. H. J. O. (2015c). “Optimum design of concrete cable-stayed bridges”. *Engineering Optimization*, doi: 10.1080/0305215X.2015.1057057.
- Martins, A. M. B., Simões, L. M. C., Negrão, J. H. J. O. (2015d). “Sizing optimization of concrete cable-stayed bridges”. Artigo apresentado na SYMCOMP 2015 – 2nd International Conference on Numerical and Symbolic Computation Developments and Applications, Faro, Algarve, Portugal.
- Mathivat, J. (1984). “The cantilever construction of prestressed concrete bridges”. Chichester: John Wiley and Sons, Ltd.
- Morgenthal, Guido (1999). “Cable-stayed bridges – Earthquake response and passive control”. MSc Dissertation, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London.
- Moses, F., Onoda, S. (1969). “Minimum weight design of structures with application to elastic grillages”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1 (4): 311-331.
- Mozos, C. M., Aparicio, A. C. (2010a). “Parametric study on the dynamic response of cable-stayed bridges to the sudden failure of a stay, Part I: Bending moment acting on the deck”. *Engineering Structures* 32: 3288-3300.

- Mozos, C. M., Aparicio, A. C. (2010b). “Parametric study on the dynamic response of cable-stayed bridges to the sudden failure of a stay, Part II: Bending moment acting on the pylons and stress on the stays”. *Engineering Structures* 32: 3301-3312.
- Mueller-Haagen, Svenja (2005). “Analysis strategies for the construction stages of cable-stayed bridges”, Diplom Ingenieur Thesis, Technical University of Hamburg Harburg.
- Nazmy, A. S, Abdel-Ghaffar, A. M. (1992). “Effects of ground motion spatial variability on the response of cable-stayed bridges”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 21: 62-74.
- Nazmy, Aly S., Abdel-Ghaffar, Ahmed M. (1990). “Three-dimensional nonlinear static analysis of cable-stayed bridges”. *Computers & Structures* 34 (2): 257-271.
- Negrão, J. H. J. O., Simões, L. M. C. (1997). “Cable stretching force optimization in cable-stayed bridges”. WCSMO-2, Zakopane, Poland.
- Negrão, J. H. O. e Simões, L. M. C. (1997). “Optimization of cable-stayed bridges with three-dimensional modeling”. *Computers & Structures* 64 (1-4): 741-758.
- Negrão, J. H. O. e Simões, L. M. C. (2004). “Reliability-based optimum design of cable-stayed bridges”. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 28: 214-220.
- Negrão, João H. J. O. (1996). “Análise de sensibilidades e otimização de pontes atirantadas metálicas”. Tese de Doutorado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.
- Ohkubo, S., Taniwaki, K. (1991). “Shape and sizing optimization of steel cable-stayed bridges”. In *Proceedings of OPTI 91 – Optimization of Structural Systems and Industrial Applications*, editado por S. Hernandez e C.A. Brebbia, 529-540. Cambridge, MA, EUA: Elsevier Applied Sciences.
- Oñate, E. (1995). “Cálculo de estructuras por el método de los elementos finitos. Analisis estático lineal”, 2ª edição. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), Barcelona.
- Oñate, E. (2009). “Structural analysis with the finite element method, linear statics, volume 1: basis and solids”. International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), Barcelona.
- Osoo, Y., Toshimori, N., Suzuki, Y. (1987). “A calculation method of shim thickness to adjust cable lengths at erection of cable-stayed bridge”. International Conference on Cable-Stayed Bridges, Bangkok, Thailand, pp. 891-902.

- Panoramio (2013). <http://www.panoramio.com/photo/1055752>. Acedido a 24 de Julho de 2013.
- Pedro, J. O., Reis, A. J. (2010). “Nonlinear analysis of composite steel concrete cable-stayed bridges”. *Engineering Structures*, 32: 2702–2716.
- Pedro, José J. O. (2010). “Pontes de tirantes. Conceção, dimensionamento e construção”. Apontamentos do Diploma de Formação Avançada em Engenharia de Estruturas, Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa.
- Pedro, José J. O. (2007). “Pontes atirantadas mistas, estudo do comportamento estrutural”. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa.
- Podolny, W., Scalzy, J. (1986). “Construction and design of cable-stayed bridges”. 2ª edição, New York: John Wiley and Sons, Ltd.
- Póvoas, Rui (1991). “Modelos não-lineares de análise e dimensionamento de estruturas laminares de betão incluindo efeitos diferidos”. Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Qin, Chen (1992). “Optimization of cable-stretching planning in the construction of cable-stayed bridges”. *Engineering Optimization* 19: 1-20.
- Reis, A., Camotim, D. (2001). “Estabilidade Estrutural”. McGraw-Hill.
- Rusbridge (2015). “Construction of a cable-stayed bridge to the Russky Island across the Eastern Bosphorus Strait in Vladivostok”. <http://rusbridge.net/>. Acedido a 20 de Julho de 2015.
- Sanpaolesi, Luca, Croce, Pietro (2005). “Handbook 4 – Design of bridges”. Leonardo da Vinci Pilot Project CZ/02/B/F-134007.
- Santos, Luís M. P. O. (2002). “Observação e análise do comportamento diferido de pontes de betão”. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa.
- Santos, Teresa O. (2007). “Retracção do betão em pontes”. Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa
- Simões, L. M. C. (1987). “Search for the global optimum of least volume structures”. *Engineering Optimization* 11, 49-67.
- Simões, L. M. C. (1989). “Isolated global optimality in truss sizing problems”. *Computers & Structures* 33 (2), 375-384.
- Simões, L. M. C. (1991). “Information entropy applications in structural optimization”. In *Proceedings of OPTI 91 – Optimization of Structural Systems and Industrial Applications*,

- editado por S. Hernandez e C.A. Brebbia, 15-26. Cambridge, MA, EUA: Elsevier Applied Sciences.
- Simões, L. M. C. (1996). "Optimization of frames with semi-rigid connections". *Computers & Structures* 60 (4), 531-539.
- Simões, L. M. C., Negrão, J. H. J. O. (2000). "Optimization of cable-stayed bridges with box-girder decks". *Advances in Engineering Software* 31: 417-423.
- Simões, L. M. C., Negrão, J. H. O. (1994). "Sizing and geometry optimization of cable-stayed bridges". *Computers & Structures* 52 (2): 309-321.
- Simões, L. M. C., Negrão, J. H. O. (1999). "Optimization of cable-stayed bridges subjected to earthquakes with non-linear behaviour". *Engineering Optimization* 31: 457-478.
- Simões, L. M. C., Templeman, A. B. (1989). "Entropy-based synthesis of pretensioned cable net structures". *Engineering Optimization* 15: 121-140.
- Simões, L. M. C., Martins, A. M. B., Monteiro, S. R. S. (2009) "Discrete optimum design of cable-stayed bridges". Artigo apresentado no WCSMO-8, 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, Junho 1-5, Lisboa, Portugal.
- Simões, Luís M. C. (2008). "Optimização de estruturas". 1^a edição, Coimbra: ST-Artes Gráficas, Lda.
- Somja, H., de Ville de Goyet, V. (2008). "A new strategy for analysis of erection stages including an efficient method for creep analysis". *Engineering Structures* 30: 2871–2883.
- Soneji, B. B., Jangid, R. S. (2008). "Influence of soil-structure interaction on the response of seismically isolated cable-stayed bridge". *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 28: 245-257.
- Soyluk, K., Dumanoglu, A. A. (2004). "Effects of ground motion spatial variability on the response of cable-stayed bridges". *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 24: 241-250.
- Stipanic, B. (1987). "Some specific analysis problems related to design of cable-stayed bridges". International Conference on Cable-Stayed Bridges, Bangkok, Thailand, pp. 150-163.
- Structurae (2013). "International Database and Gallery of Structures". <http://en.structurae.de/>. Acedido a 24 de Julho de 2013.
- Sung, Y. C., Chang, D. W., Teo, E. H. (2006). "Optimum post-tensioning cable forces of Mau-Lo Hsi cable-stayed bridge". *Engineering Structures*, 28: 1407–1417.
- Sved, G., Ginos Z. (1968). "Structural optimization under multiple loading". *International Journal of Mechanical Sciences* 10 (10): 803-805.

- Templeman A. B. e Yates, D. F. (1983) “A segmental method for the discrete optimum design of structures”. *Engineering Optimization* 6, 145-155.
- Templeman, A. B. (1989). “Entropy-based minimax applications in shape-optimal design”. In *Proceedings of GAMM Seminar on Discretization Methods and Structural Optimization – Procedures and Applications*, editado por H. A. Eschenauer e G. Thierauf. Lecture Notes in Engineering, Series No. 42, 335-342. Berlin: Springer-Verlag.
- Templeman, A. B. (1993). “Entropy-based optimization methods for engineering design”. In *Advanced techniques in the optimum design of structures*, editado por S. Hernandez, 109-139 Southampton, UK: Computational Mechanics.
- Templeman, A. B. e Xingsi, Li (1987). “A maximum entropy approach to constrained non-linear programming”. *Engineering Optimization* 12: 191-205.
- Torii, K., Ikeda, K. (1987). “A study of the optimum design method for cable-stayed bridges”. International Conference on Cable-Stayed Bridges, Bangkok, Thailand, pp. 682-693.
- Troitsky, M. S. (1988). “Cable-stayed bridges: theory and design”. 2nd edition. Oxford, Great Britain: BSP Professional Books.
- Vanderplaats, Garret N. (1984). “Numerical optimization techniques for engineering design”, McGraw-Hill, Inc.
- Vasconcelos, Graça (1999). “Análise de estruturas executadas por fases tendo em conta os efeitos diferidos”. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Virlogeux, M. (1994). “Erection of cable-stayed bridges, The control of the desired geometry”. International Conference AIPC-FIP, Deauville.
- Virlogeux, M. (1999). “Recent evolution of cable-stayed bridges”. *Engineering Structures* 21: 737-755.
- Virtuoso, Francisco B. E. (1991). “Análise de pontes curvas em caixão, influência dos efeitos diferidos”. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa.
- VSL (2014). “VSL Post-tensioning solutions”. VSL International Ltd., Switzerland.
- Walther, R., Houriet, B., Isler, W., Moia, P., Klein, J. F. (1999). “Cable-stayed bridges”. 2nd edition. London: Thomas Telford Publishing.
- Wang, P. H., Tseng, T. C., Yang, C. G. (1993a). “Initial shape of cable-stayed bridges”. *Computers & Structures* 46 (6): 1095-1106.
- Wang, P. H., Tseng, T. C., Yang, C. G. (1993b). “Initial shape of cable-stayed bridges”. *Computers & Structures* 47 (1): 111-123.

- Wang, Pao-Hsii, Lin, Hung-Ta, Tang, Tzu-Yang (2002). “Study on nonlinear analysis of a highly redundant cable-stayed bridge”. *Computers & Structures* 80: 165-182.
- Wang, Pao-Hsii, Tang, Tzu-Yang, Zheng, Hou-Nong (2004). “Analysis of cable-stayed bridges during construction by cantilever methods”. *Computers & Structures* 82: 329-346.
- Wang, Pao-Hsii, Yang, Chiung-Guei (1996). “Parametric studies on cable-stayed bridges”. *Computers & Structures* 60 (2): 243-260.
- Wikimedia (2013). <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Friedrich-Ebert-Bruecke.jpg>. Acedido a 24 de Julho de 2013.
- Wikimedia (2015). https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/9d/Puente_Internacional_397.jpg. Acedido a 20 de Julho de 2015.
- Wu, Q., Takahashi, K., Nakamura, S. (2003). “The effect of cable loosening on seismic response of a prestressed concrete cable-stayed bridge”. *Journal of Sound and Vibration* 268: 71-84.
- Zheng, J., Takeda, T. (1995). “Effects of soil-structure interaction on seismic response of PC cable-stayed bridge”. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 14: 427-437.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (2000). “The finite element method. Volume 1: The basis”, 5ª edição. Butterworth-Heinemann.

Anexo

Introdução

No presente anexo apresentam-se as expressões das derivadas dos parâmetros intervenientes no cálculo das derivadas das matrizes de rigidez, vectores de forças e matrizes $\underline{D} \cdot \underline{B}^e$ elementares relativas às variáveis de decisão seccionais definidas para as secções em caixão unicelular e caixão tricelular. Deste modo, indicam-se separadamente para cada tipo de variável de decisão, as derivadas do momento de inércia, da posição da fibra superior, da posição da fibra inferior, do quociente entre o momento estático e a largura da secção, do expressão $(A \cdot h_{CG})/h$ e de I_z/h . As derivadas da área, por conduzirem a expressões mais simples, já foram apresentadas no corpo principal da Tese.

Secção em caixão unicelular

Derivadas a respeito da variável de decisão tipo 12

$$\frac{dI_z}{dx_{12}} = \frac{dI_z}{dh} = \frac{1}{60} \left(15 \sqrt{5} h^2 t_w + 30 h (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - \sqrt{5} (t_{fi} + t_{fs}) t_w) + \frac{\sqrt{5} (-3 (b_{fi} t_{fi} - b_{fs} t_{fs})^2 - 6 \sqrt{5} (b_{fi} + b_{fs}) t_{fi} t_{fs} t_w + 15 (t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2 + t_w^4)}{t_w} + (3 (\sqrt{5} b_{fi}^4 t_{fi}^4 - 10 b_{fi}^3 t_{fi}^4 t_w + 10 b_{fi} b_{fs} t_{fi}^2 t_{fs}^2 t_w (b_{fs} - \sqrt{5} t_w) + b_{fs}^2 t_{fs}^4 (\sqrt{5} b_{fs}^2 - 10 b_{fs} t_w + 5 \sqrt{5} t_w^2) + b_{fi}^2 t_{fi}^2 (-2 b_{fs} t_{fs}^2 (\sqrt{5} b_{fs} - 5 t_w) + 5 \sqrt{5} t_{fi}^2 t_w^2))) / (t_w (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - \sqrt{5} (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^2) \right)$$

$$\frac{dy_{fs}}{dx_{12}} = \frac{dy_{fs}}{dh} = (-2 b_{fi}^2 t_{fi}^2 + t_w (\sqrt{5} b_{fs} t_{fs} (-2 h + 2 t_{fi} + t_{fs}) - 5 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w) + b_{fi} t_{fi} (-2 b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (-2 h + 3 t_{fi} + 2 t_{fs}) t_w)) / (2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2)$$

$$\frac{dy_{fi}}{dx_{12}} =$$

$$\frac{dy_{fi}}{dh} = (2 b_{fs} t_{fs} (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs}) + \sqrt{5} (b_{fs} (2 h - 2 t_{fi} - 3 t_{fs}) t_{fs} - b_{fi} t_{fi} (-2 h + t_{fi} + 2 t_{fs})) t_w + 5 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2) / (2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2)$$

$$\frac{d}{dx_{12}} \left(\frac{S}{b} \right) =$$

$$\frac{d}{dh} \left(\frac{S}{b} \right) = - \left((2 b_{fi} t_{fi} (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs}) + \sqrt{5} (b_{fi} t_{fi} (2 h - 3 t_{fi} - 2 t_{fs}) + b_{fs} (2 h - 2 t_{fi} - t_{fs}) t_{fs}) t_w + \right.$$

$$5 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2) (b_{fs}^2 t_{fs}^2 - b_{fi} t_{fi} ((-2 h + t_{fs}) t_w + t_w t_{fi} + (t_w - b_{fs}) t_{fs}) +$$

$$\sqrt{5} t_w (h - t_{fs} - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w - b_{fs} t_{fs} (t_{fs} t_w + \sqrt{5} (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)) /$$

$$\left. (4 t_w (-b_{fi} t_{fi} - b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^3) \right)$$

$$\frac{d}{dx_{12}} \left(\frac{A.h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{dh} \left(\frac{A.h_{CG}}{h} \right) = \frac{-b_{fi} t_{fi}^2 + b_{fs} t_{fs}^2 + \sqrt{5} (h^2 + t_{fi}^2 - t_{fs}^2) t_w}{2 h^2}$$

$$\frac{d}{dx_{12}} \left(\frac{I_z}{h} \right) =$$

$$\frac{d}{dh} \left(\frac{I_z}{h} \right) = - \frac{1}{96 h^2} \left(8 b_{fi} t_{fi}^3 + 8 b_{fs} t_{fs}^3 + 5 \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs})^3 t_w + 4 \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w^3 + \right.$$

$$\frac{24 \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2 t_w}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} +$$

$$\frac{24 b_{fs} t_{fs} (b_{fi} t_{fi} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - \sqrt{5} (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} +$$

$$\frac{24 b_{fi} t_{fi} (b_{fs} t_{fs} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - \sqrt{5} (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} +$$

$$\frac{3 (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w (5 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 - 4 t_w^2)}{\sqrt{5}} - \frac{1}{5} h \left(75 \sqrt{5} (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w + 20 \sqrt{5} t_w^3 + \right.$$

$$\frac{120 \sqrt{5} (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2 t_w}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} + 3 \sqrt{5} t_w (15 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 - 4 t_w^2) -$$

$$(240 \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs}) t_w (-b_{fi}^2 t_{fi}^2 + \sqrt{5} b_{fi} t_{fi}^2 t_w +$$

$$b_{fs} t_{fs}^2 (b_{fs} - \sqrt{5} t_w))) / (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3 +$$

$$(240 b_{fi} t_{fi} (b_{fs} t_{fs} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - \sqrt{5} (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) (-2 b_{fs}^2 t_{fs}^2 +$$

$$\sqrt{5} b_{fs} t_{fs} (-2 h + 2 t_{fi} + 3 t_{fs}) t_w - 5 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2 + b_{fi} t_{fi} (-2 b_{fs} t_{fs} +$$

$$\sqrt{5} (-2 h + t_{fi} + 2 t_{fs}) t_w)) / (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3 +$$

$$(240 b_{fs} t_{fs} (b_{fi} t_{fi} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - \sqrt{5} (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) (-2 b_{fi}^2 t_{fi}^2 +$$

$$t_w (\sqrt{5} b_{fs} t_{fs} (-2 h + 2 t_{fi} + t_{fs}) - 5 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w) + b_{fi} t_{fi} (-2 b_{fs} t_{fs} +$$

$$\sqrt{5} (-2 h + 3 t_{fi} + 2 t_{fs}) t_w)) / (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3 \Bigg)$$

Derivadas a respeito da variável de decisão tipo 13

$$\begin{aligned} \frac{dI_z}{dx_{13}} &= \frac{dI_z}{dt_w} = \frac{5}{96} \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs})^3 + \\ &\frac{1}{8} \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w^2 - \frac{5(-h + t_{fi} + t_{fs})^2 (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2 t_w}{2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3} + \\ &\frac{\sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2}{4 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} + (\sqrt{5} b_{fs} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_{fs} \\ &(b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (-2h + t_{fi} + t_{fs}) - \sqrt{5} (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)) / \\ &(2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3) + (\sqrt{5} b_{fi} t_{fi} (-h + t_{fi} + t_{fs}) \\ &(b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs}) (b_{fs} t_{fs} (-2h + t_{fi} + t_{fs}) - \sqrt{5} (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)) / \\ &(2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3) + \frac{(h - t_{fi} - t_{fs}) (5(-h + t_{fi} + t_{fs})^2 - 12 t_w^2)}{32 \sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\frac{dy_{fs}}{dx_{13}} = \frac{dy_{fs}}{dt_w} = \frac{\sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})}{2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2}$$

$$\frac{dy_{fi}}{dx_{13}} = \frac{dy_{fi}}{dt_w} = \frac{\sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})}{2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_{13}} \left(\frac{S}{b} \right) &= \\ \frac{d}{dt_w} \left(\frac{S}{b} \right) &= (2 b_{fs} t_{fs} (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2 (b_{fi} t_{fi} (-2h + t_{fi} + t_{fs}) - \sqrt{5} \\ &(h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) + t_w (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) \\ &(b_{fi} (2h - 2 t_{fs} - t_{fi}) t_{fi} + b_{fs} t_{fs} (-2 t_{fs} + t_{fs}) + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) (h - 2 t_{fs} - t_{fi} + t_{fs}) t_w) \\ &(b_{fs} t_{fs}^2 + b_{fi} t_{fi} (-2h + t_{fi} + 2 t_{fs}) - \sqrt{5} (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w) - 2 \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) \\ &(b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs}) t_w (b_{fs}^2 t_{fs}^2 - b_{fi} t_{fi} ((-2h + t_{fs}) t_w + t_w t_{fi} + (t_w - b_{fs}) t_{fs}) + \\ &\sqrt{5} t_w (h - t_{fs} - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w - b_{fs} t_{fs} (t_{fs} t_w + \sqrt{5} (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w))) / \\ &(8 t_w^2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx_{13}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{dt_w} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{\sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) (h + t_{fi} - t_{fs})}{2 h}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_{13}} \left(\frac{I_z}{h} \right) &= \frac{d}{dt_w} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{1}{h} \left(\frac{5}{96} \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs})^3 + \right. \\ &\frac{1}{8} \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w^2 - \frac{5(-h + t_{fi} + t_{fs})^2 (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2 t_w}{2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3} + \\ &\frac{\sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2}{4 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} + \\ &(\sqrt{5} b_{fs} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_{fs} (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (-2h + t_{fi} + t_{fs}) - \\ &\sqrt{5} (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) / (2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3) + \\ &(\sqrt{5} b_{fi} t_{fi} (-h + t_{fi} + t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs}) \\ &(b_{fs} t_{fs} (-2h + t_{fi} + t_{fs}) - \sqrt{5} (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) / \\ &\left. (2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3) + \frac{(h - t_{fi} - t_{fs}) (5 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 - 12 t_w^2)}{32 \sqrt{5}} \right) \end{aligned}$$

Derivadas a respeito da variável de decisão tipo 14

$$\begin{aligned} \frac{dI_z}{dx_{14}} &= \frac{dI_z}{dt_{fs}} = \frac{1}{480} \left(120 b_{fs} t_{fs}^2 - 75 \sqrt{5} (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w - \right. \\ &20 \sqrt{5} t_w^3 - \frac{120 \sqrt{5} (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2 t_w}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} + \\ &\frac{120 b_{fs} (b_{fi} t_{fi} (-2h + t_{fi} + t_{fs}) - \sqrt{5} (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} + \\ &3 \sqrt{5} t_w (-15 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 + 4 t_w^2) + \\ &(240 b_{fi} t_{fi} (b_{fs} t_{fs} (-2h + t_{fi} + t_{fs}) - \sqrt{5} (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) \\ &(b_{fs}^2 t_{fs}^2 - \sqrt{5} b_{fs} ((h - t_{fi})^2 - 2 (h - t_{fi}) t_{fs} + 2 t_{fs}^2) t_w + 5 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2 + \\ &b_{fi} t_{fi} (-2h + t_{fi} + 2 t_{fs}) (b_{fs} - \sqrt{5} t_w)) / (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3 - \\ &(240 b_{fs} t_{fs} (b_{fi} t_{fi} (-2h + t_{fi} + t_{fs}) - \sqrt{5} (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) \\ &(-b_{fi}^2 t_{fi}^2 - \sqrt{5} b_{fs} (h - t_{fi})^2 t_w + b_{fi} t_{fi} (b_{fs} (-2h + t_{fi}) + \sqrt{5} t_{fi} t_w)) / \\ &(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3 - \\ &(240 \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs}) t_w (b_{fi}^2 t_{fi}^2 + \sqrt{5} b_{fs} (h - t_{fi})^2 t_w + \\ &b_{fi} t_{fi} (2h b_{fs} - t_{fi} (b_{fs} + \sqrt{5} t_w))) / (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3 \left. \right) \end{aligned}$$

$$\frac{dy_{fs}}{dx_{14}} = \frac{dy_{fs}}{dt_{fs}} = -(b_{fs}^2 t_{fs}^2 - \sqrt{5} b_{fs} ((h - t_{fi})^2 - 2(h - t_{fi}) t_{fs} + 2 t_{fs}^2) t_w + 5(-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2 + b_{fi} t_{fi} (-2h + t_{fi} + 2 t_{fs}) (b_{fs} - \sqrt{5} t_w)) / (2(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2)$$

$$\frac{dy_{fi}}{dx_{14}} = \frac{dy_{fi}}{dt_{fs}} = -(b_{fs}^2 t_{fs}^2 - \sqrt{5} b_{fs} ((h - t_{fi})^2 - 2(h - t_{fi}) t_{fs} + 2 t_{fs}^2) t_w + 5(-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2 + b_{fi} t_{fi} (-2h + t_{fi} + 2 t_{fs}) (b_{fs} - \sqrt{5} t_w)) / (2(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_{14}} \left(\frac{S}{b} \right) &= \frac{d}{dt_{fs}} \left(\frac{S}{b} \right) = -(-2 b_{fs} (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2 \\ &\quad (-b_{fi} t_{fi} (-2h + t_{fi} + t_{fs}) + \sqrt{5} (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) + \\ &\quad t_w (b_{fs} - \sqrt{5} t_w) (b_{fs} t_{fs}^2 + b_{fi} t_{fi} (-2h + t_{fi} + 2 t_{fs}) - \sqrt{5} (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w)^2 + \\ &\quad t_w (b_{fi} (2h - 2 t_{fs} - t_{fi}) t_{fi} + b_{fs} t_{fs} (-2 t_{fs} + t_{fs}) + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) (h - 2 t_{fs} - t_{fi} + t_{fs}) t_w) \\ &\quad (2 b_{fi}^2 t_{fi}^2 + b_{fs}^2 t_{fs}^2 + \sqrt{5} b_{fs} ((h - t_{fi})^2 + 2(h - t_{fi}) t_{fs} - 2 t_{fs}^2) t_w + \\ &\quad 5(-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2 + b_{fi} t_{fi} (b_{fs} (-t_{fi} + 2(h + t_{fs})) + \sqrt{5} (2h - 3 t_{fi} - 2 t_{fs}) t_w)) + \\ &\quad 2 b_{fs} t_{fs} (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) \\ &\quad (b_{fi}^2 t_{fi}^2 + \sqrt{5} b_{fs} (h - t_{fi})^2 t_w + b_{fi} t_{fi} (2h b_{fs} - t_{fi} (b_{fs} + \sqrt{5} t_w)))) / \\ &\quad (8 t_w (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx_{14}} \left(\frac{A.h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{dt_{fs}} \left(\frac{A.h_{CG}}{h} \right) = \frac{(h - t_{fs}) (b_{fs} - \sqrt{5} t_w)}{h}$$

$$\frac{d}{dx_{14}} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{d}{dt_{fs}} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{1}{480 h} \left(120 b_{fs} t_{fs}^2 - 75 \sqrt{5} (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w - \right.$$

$$20 \sqrt{5} t_w^3 - \frac{120 \sqrt{5} (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2 t_w}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} +$$

$$\frac{120 b_{fs} (b_{fi} t_{fi} (-2h + t_{fi} + t_{fs}) - \sqrt{5} (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} +$$

$$3 \sqrt{5} t_w (-15 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 + 4 t_w^2) +$$

$$(240 b_{fi} t_{fi} (b_{fs} t_{fs} (-2h + t_{fi} + t_{fs}) - \sqrt{5} (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)$$

$$(b_{fs}^2 t_{fs}^2 - \sqrt{5} b_{fs} (h^2 + t_{fi}^2 - 2 t_{fi} (h - t_{fs}) - 2 h t_{fs} + 2 t_{fs}^2) t_w + 5(-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2 + b_{fi} t_{fi} (-2h + t_{fi} + 2 t_{fs}) (b_{fs} - \sqrt{5} t_w))) / (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3 -$$

$$(240 \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs}) t_w (b_{fi}^2 t_{fi}^2 + \sqrt{5} b_{fs} (h - t_{fi})^2 t_w - b_{fi} t_{fi} (b_{fs} (-2h + t_{fi}) + \sqrt{5} t_{fi} t_w))) / (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3 -$$

$$(240 b_{fs} t_{fs} (b_{fi} t_{fi} (-2h + t_{fi} + t_{fs}) - \sqrt{5} (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)$$

$$(-b_{fi}^2 t_{fi}^2 - \sqrt{5} b_{fs} (h - t_{fi})^2 t_w + b_{fi} t_{fi} (b_{fs} (-2h + t_{fi}) + \sqrt{5} t_{fi} t_w))) /$$

$$(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3 \Big)$$

Derivadas a respeito da variável de decisão tipo 15

$$\begin{aligned} \frac{dI_z}{dx_{15}} = \frac{dI_z}{dt_{fi}} = \frac{1}{480} & \left(120 b_{fi} t_{fi}^2 - 75 \sqrt{5} (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w - \right. \\ & 20 \sqrt{5} t_w^3 - \frac{120 \sqrt{5} (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2 t_w}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} + \\ & \frac{120 b_{fi} (b_{fs} (2h - t_{fi} - t_{fs}) t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} + \\ & 3 \sqrt{5} t_w (-15 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 + 4 t_w^2) - \\ & (240 b_{fi} t_{fi} (b_{fs} t_{fs} (-2h + t_{fi} + t_{fs}) - \sqrt{5} (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) (b_{fs} t_{fs}^2 (-b_{fs} + \sqrt{5} t_w) + \\ & \quad b_{fi} (b_{fs} t_{fs} (-2h + t_{fs}) - \sqrt{5} (h - t_{fs})^2 t_w))) / (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3 + \\ & (240 \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs}) t_w (b_{fs} t_{fs}^2 (b_{fs} - \sqrt{5} t_w) + \\ & \quad b_{fi} (b_{fs} (2h - t_{fs}) t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fs})^2 t_w))) / (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3 + \\ & (240 b_{fs} t_{fs} (b_{fi} t_{fi} (-2h + t_{fi} + t_{fs}) - \sqrt{5} (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) \\ & \quad (b_{fi}^2 t_{fi}^2 + b_{fi} (b_{fs} t_{fs} (-2h + 2t_{fi} + t_{fs}) - \sqrt{5} (2t_{fi}^2 - 2t_{fi} (h - t_{fs}) + (h - t_{fs})^2) t_w) + \\ & \quad t_w (-\sqrt{5} b_{fs} t_{fs} (-2h + 2t_{fi} + t_{fs}) + 5 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w))) / \\ & \left. (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_{fs}}{dx_{15}} = \frac{dy_{fs}}{dt_{fi}} = & (b_{fi}^2 t_{fi}^2 + b_{fi} (b_{fs} t_{fs} (-2h + 2t_{fi} + t_{fs}) - \sqrt{5} (2t_{fi}^2 - 2t_{fi} (h - t_{fs}) + (h - t_{fs})^2) t_w) + \\ & t_w (-\sqrt{5} b_{fs} t_{fs} (-2h + 2t_{fi} + t_{fs}) + 5 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w)) / \\ & (2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_{fi}}{dx_{15}} = \frac{dy_{fi}}{dt_{fi}} = & (b_{fi}^2 t_{fi}^2 + b_{fi} (b_{fs} t_{fs} (-2h + 2t_{fi} + t_{fs}) - \sqrt{5} (2t_{fi}^2 - 2t_{fi} (h - t_{fs}) + (h - t_{fs})^2) t_w) + \\ & t_w (-\sqrt{5} b_{fs} t_{fs} (-2h + 2t_{fi} + t_{fs}) + 5 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w)) / \\ & (2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_{15}} \left(\frac{S}{b} \right) = \frac{d}{dt_{fi}} \left(\frac{S}{b} \right) = \\ & ((b_{fs}^2 t_{fs}^2 - b_{fi} t_{fi} ((-2h + t_{fs}) t_w + t_w t_{fi} + (t_w - b_{fs}) t_{fs}) + \sqrt{5} t_w (h - t_{fs} - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w - \\ & \quad b_{fs} t_{fs} (t_{fs} t_w + \sqrt{5} (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)) \\ & \quad (-b_{fi}^2 t_{fi}^2 + b_{fi} (b_{fs} (2h - 2t_{fi} - t_{fs}) t_{fs} + \sqrt{5} (2t_{fi}^2 - 2t_{fi} (h - t_{fs}) + (h - t_{fs})^2) t_w) + \\ & \quad t_w (\sqrt{5} b_{fs} t_{fs} (-2h + 2t_{fi} + t_{fs}) - 5 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w))) / \\ & (4 t_w (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx_{15}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{dt_{fi}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{t_{fi} (b_{fi} - \sqrt{5} t_w)}{h}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_{15}} \left(\frac{I_z}{h} \right) &= \frac{d}{dt_{fi}} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{1}{480 h} \left(120 b_{fi} t_{fi}^2 - 75 \sqrt{5} (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w - \right. \\ & 20 \sqrt{5} t_w^3 - \frac{120 \sqrt{5} (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2 t_w}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} + \\ & \frac{120 b_{fi} (b_{fs} (2 h - t_{fi} - t_{fs}) t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} + \\ & 3 \sqrt{5} t_w (-15 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 + 4 t_w^2) - \\ & (240 b_{fi} t_{fi} (b_{fs} t_{fs} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - \sqrt{5} (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) (b_{fs} t_{fs}^2 (-b_{fs} + \sqrt{5} t_w) - \\ & b_{fi} (b_{fs} (2 h - t_{fs}) t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fs})^2 t_w))) / (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3 + \\ & (240 \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs}) t_w (b_{fs} t_{fs}^2 (b_{fs} - \sqrt{5} t_w) + \\ & b_{fi} (b_{fs} (2 h - t_{fs}) t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fs})^2 t_w))) / (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3 + \\ & (240 b_{fs} t_{fs} (b_{fi} t_{fi} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - \sqrt{5} (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) \\ & (b_{fi}^2 t_{fi}^2 - b_{fi} (b_{fs} (2 h - 2 t_{fi} - t_{fs}) t_{fs} + \sqrt{5} (2 t_{fi}^2 - 2 t_{fi} (h - t_{fs}) + (h - t_{fs})^2) t_w) + \\ & t_w (\sqrt{5} b_{fs} (2 h - 2 t_{fi} - t_{fs}) t_{fs} + 5 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w))) / \\ & \left. (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3 \right) \end{aligned}$$

Derivadas a respeito da variável de decisão tipo 16

$$\frac{dI_z}{dx_{16}} =$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_z}{db_{fi}} &= (t_{fi} (b_{fi}^2 t_{fi}^4 + b_{fs}^2 t_{fs}^2 (4 t_{fi}^2 + 6 t_{fi} (-2 h + t_{fs}) + 3 (-2 h + t_{fs})^2) - 2 \sqrt{5} b_{fs} t_{fs} (-h + t_{fi} + t_{fs}) \\ & (6 h^2 + t_{fi}^2 - 3 t_{fi} (h - t_{fs}) + 3 t_{fs} (-3 h + t_{fs})) t_w + 5 (t_{fi}^2 + 3 (h - t_{fs})^2) (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2 + \\ & 2 b_{fi} t_{fi}^3 (b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)) / (12 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2) \end{aligned}$$

$$\frac{dy_{fs}}{dx_{16}} = \frac{dy_{fs}}{db_{fi}} = \frac{t_{fi} (b_{fs} t_{fs} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - \sqrt{5} (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)}{2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2}$$

$$\frac{dy_{fi}}{dx_{16}} = \frac{dy_{fi}}{db_{fi}} = \frac{t_{fi} (b_{fs} t_{fs} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - \sqrt{5} (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)}{2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2}$$

$$\frac{d}{dx_{16}} \left(\frac{S}{b} \right) = \frac{d}{db_{f_i}} \left(\frac{S}{b} \right) = (t_{f_i} (b_{f_s} t_{f_s} (-2h + t_{f_i} + t_{f_s}) - \sqrt{5} (h - t_{f_s}) (h - t_{f_i} - t_{f_s}) t_w) - (b_{f_s}^2 t_{f_s}^2 + b_{f_i} t_{f_i} ((-2h + t_{f_s}) t_w + t_w t_{f_i} + (t_w - b_{f_s}) t_{f_s}) - \sqrt{5} t_w (h - t_{f_s} - t_{f_i}) (h - t_{f_i} - t_{f_s}) t_w + b_{f_s} t_{f_s} (t_{f_s} t_w + \sqrt{5} (-h + t_{f_i} + t_{f_s}) t_w))) / (4 t_w (b_{f_i} t_{f_i} + b_{f_s} t_{f_s} + \sqrt{5} (h - t_{f_i} - t_{f_s}) t_w)^3)$$

$$\frac{d}{dx_{16}} \left(\frac{A.h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{db_{f_i}} \left(\frac{A.h_{CG}}{h} \right) = \frac{t_{f_i}^2}{2h}$$

$$\frac{d}{dx_{16}} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{d}{db_{f_i}} \left(\frac{I_z}{h} \right) = (t_{f_i} (b_{f_i}^2 t_{f_i}^4 + b_{f_s}^2 t_{f_s}^2 (4 t_{f_i}^2 + 6 t_{f_i} (-2h + t_{f_s}) + 3 (-2h + t_{f_s})^2) - 2 \sqrt{5} b_{f_s} t_{f_s} (t_{f_i}^3 - 4 t_{f_i}^2 (h - t_{f_s}) - 3 (h - t_{f_s})^2 (2h - t_{f_s}) + 3 t_{f_i} (3h^2 - 5h t_{f_s} + 2 t_{f_s}^2)) t_w + 5 (t_{f_i}^2 + 3 (h - t_{f_s})^2) (-h + t_{f_i} + t_{f_s})^2 t_w^2 + 2 b_{f_i} t_{f_i}^3 (b_{f_s} t_{f_s} + \sqrt{5} (h - t_{f_i} - t_{f_s}) t_w))) / (12 h (b_{f_i} t_{f_i} + b_{f_s} t_{f_s} + \sqrt{5} (h - t_{f_i} - t_{f_s}) t_w)^2)$$

Secção em caixão tricelular

Derivadas a respeito da variável de decisão tipo 17

$$\frac{dI_z}{dx_{17}} = \frac{dI_z}{dh} =$$

$$\frac{1}{96} \left(15 \sqrt{5} (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w + 4 \sqrt{5} t_w^3 + \frac{24 \sqrt{5} (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2 t_w}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^2} - \right. \\ \left. (48 \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs}) \right. \\ \left. t_w (-b_{fi}^2 t_{fi}^2 + b_{fs}^2 t_{fs}^2 + (2 + \sqrt{5}) (b_{fi} t_{fi}^2 - b_{fs} t_{fs}^2) t_w) \right) / \\ \left. (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^3 + \frac{3 t_w (15 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 - 4 t_w^2)}{\sqrt{5}} + \right. \\ \left. (48 b_{fs} t_{fs} (b_{fi} t_{fi} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) \right. \\ \left. (-2 b_{fi} t_{fi} (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs}) + (2 + \sqrt{5}) (b_{fs} t_{fs} (-2 h + 2 t_{fi} + t_{fs}) + \right. \\ \left. b_{fi} t_{fi} (-2 h + 3 t_{fi} + 2 t_{fs})) t_w - (9 + 4 \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2) \right) / \\ \left. (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^3 + (48 b_{fi} t_{fi} \right. \\ \left. (b_{fs} t_{fs} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) (-2 b_{fs} t_{fs} (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs}) + \right. \\ \left. (2 + \sqrt{5}) (b_{fi} t_{fi} (-2 h + t_{fi} + 2 t_{fs}) + b_{fs} t_{fs} (-2 h + 2 t_{fi} + 3 t_{fs})) t_w - \right. \\ \left. (9 + 4 \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2) \right) / (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^3 + 48 \\ \left. t_w \left(h^2 + (t_{fi} + t_{fs}) (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) + \frac{2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs}) (b_{fs} (h - t_{fi}) t_{fs} + b_{fi} t_{fi} (-h + t_{fs}))^2}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^3} + \right. \right. \\ \left. \left. ((b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - 2 t_{fi} - t_{fs}) + b_{fs} t_{fs} (-h + t_{fi} + 2 t_{fs}))) / \right. \right. \\ \left. \left. (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^2 \right) \right)$$

$$\frac{dy_{fs}}{dx_{17}} = \frac{dy_{fs}}{dh} =$$

$$(-2 b_{fi} t_{fi} (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs}) + (2 + \sqrt{5}) (b_{fs} t_{fs} (-2 h + 2 t_{fi} + t_{fs}) + b_{fi} t_{fi} (-2 h + 3 t_{fi} + 2 t_{fs})) t_w - \\ (9 + 4 \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2) / (2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^2)$$

$$\frac{dy_{fi}}{dx_{17}} = \frac{dy_{fi}}{dh} =$$

$$(2 b_{fs} t_{fs} (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (b_{fi} t_{fi} (-2 h + t_{fi} + 2 t_{fs}) + b_{fs} t_{fs} (-2 h + 2 t_{fi} + 3 t_{fs})) t_w + \\ (9 + 4 \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2) / (2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^2)$$

$$\frac{d}{dx_{17}} \left(\frac{S}{b} \right) =$$

$$\frac{d}{dh} \left(\frac{S}{b} \right) = \left((-b_{fi} t_{fi} (3(-2h + t_{fs}) t_w + 3 t_w t_{fi} + (3 t_w - 2 b_{fs}) t_{fs}) + b_{fs} t_{fs} (-3 t_{fs} t_w + 2 b_{fs} t_{fs}) + (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) (-3 h t_w + 3 t_{fs} t_w + 3 t_w t_{fi} - 2 b_{fs} t_{fs}) t_w) \right.$$

$$\left. (2 b_{fi} t_{fi} (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (b_{fs} t_{fs} (-2 h + 2 t_{fi} + t_{fs}) + b_{fi} t_{fi} (-2 h + 3 t_{fi} + 2 t_{fs})) t_w + (9 + 4 \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2) \right) /$$

$$(12 t_w (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^3)$$

$$\frac{d}{dx_{17}} \left(\frac{A.h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{dh} \left(\frac{A.h_{CG}}{h} \right) = \frac{-b_{fi} t_{fi}^2 + b_{fs} t_{fs}^2 + (2 + \sqrt{5}) (h^2 + t_{fi}^2 - t_{fs}^2) t_w}{2 h^2}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dx_{17}} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \\
 & \frac{d}{dh} \left(\frac{I_z}{h} \right) = -\frac{1}{480 h^2} \left(40 b_{fi} t_{fi}^3 + 40 b_{fs} t_{fs}^3 + 25 \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs})^3 t_w + 20 \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w^3 + \right. \\
 & \quad \frac{120 \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2 t_w}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} + \\
 & \quad \frac{120 b_{fs} t_{fs} (b_{fi} t_{fi} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} + \\
 & \quad \frac{120 b_{fi} t_{fi} (b_{fs} t_{fs} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} + \\
 & \quad 3 \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w (5 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 - 4 t_w^2) + \\
 & \quad \left. 80 (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w \left((-h + t_{fi} + t_{fs})^2 + \frac{3 (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} \right) - \right. \\
 & \quad h \left(75 \sqrt{5} (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w + 20 \sqrt{5} t_w^3 + \right. \\
 & \quad \frac{120 \sqrt{5} (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2 t_w}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} + 3 \sqrt{5} t_w (15 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 - 4 t_w^2) - \\
 & \quad (240 \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs}) t_w (-b_{fi}^2 t_{fi}^2 + (2 + \sqrt{5}) b_{fi} t_{fi}^2 \\
 & \quad \quad t_w + b_{fs} t_{fs}^2 (b_{fs} - (2 + \sqrt{5}) t_w))) / (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3 + \\
 & \quad (240 b_{fi} t_{fi} (b_{fs} t_{fs} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) \\
 & \quad \quad (-2 b_{fs}^2 t_{fs}^2 - (2 + \sqrt{5}) b_{fs} (2 h - 2 t_{fi} - 3 t_{fs}) t_{fs} t_w - (9 + 4 \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2 + \\
 & \quad \quad b_{fi} t_{fi} (-2 b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (2 h - t_{fi} - 2 t_{fs}) t_w))) / \\
 & \quad (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3 + \\
 & \quad (240 b_{fs} t_{fs} (b_{fi} t_{fi} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) \\
 & \quad \quad (-2 b_{fi}^2 t_{fi}^2 + b_{fi} t_{fi} (-2 b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (2 h - 3 t_{fi} - 2 t_{fs}) t_w) + \\
 & \quad \quad t_w (- (2 + \sqrt{5}) b_{fs} (2 h - 2 t_{fi} - t_{fs}) t_{fs} - (9 + 4 \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w))) / \\
 & \quad (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3 + \\
 & \quad \left. 240 t_w \left((-h + t_{fi} + t_{fs})^2 + \frac{(b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. (2 (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs}) (b_{fi}^2 t_{fi}^2 - (2 + \sqrt{5}) b_{fi} t_{fi}^2 t_w + b_{fs} \right. \right. \\
 & \quad \quad \left. \left. t_{fs}^2 (-b_{fs} + (2 + \sqrt{5}) t_w))) / (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3 \right) \right) \Bigg)
 \end{aligned}$$

Derivadas a respeito da variável de decisão tipo 18

$$\frac{dI_z}{dx_{18}} =$$

$$\frac{dI_z}{dt_w} = \frac{1}{96} \left(5\sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs})^3 + 12\sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w^2 - (48\sqrt{5} (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 \right.$$

$$\left. (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2 t_w \right) / (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^3 +$$

$$(48 (2 + \sqrt{5}) b_{fs} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_{fs} (b_{fs} (h - t_{fi}) t_{fs} + b_{fi} t_{fi} (-h + t_{fs}))$$

$$(-b_{fi} t_{fi} (-2h + t_{fi} + t_{fs}) + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) /$$

$$(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^3 +$$

$$(48 (2 + \sqrt{5}) b_{fi} t_{fi} (-h + t_{fi} + t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})$$

$$(b_{fs} t_{fs} (-2h + t_{fi} + t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) /$$

$$(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^3 +$$

$$\frac{24\sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^2} +$$

$$\frac{3 (h - t_{fi} - t_{fs}) (5 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 - 12 t_w^2)}{\sqrt{5}} + 16 (h - t_{fi} - t_{fs})$$

$$\left((-h + t_{fi} + t_{fs})^2 - \frac{6 (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2 t_w}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^3} + \right.$$

$$\left. \left. \frac{3 (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^2} \right) \right)$$

$$\frac{dy_{fs}}{dx_{18}} = \frac{dy_{fs}}{dt_w} = \frac{(2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})}{2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^2}$$

$$\frac{dy_{fi}}{dx_{18}} = \frac{dy_{fi}}{dt_w} = \frac{(2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})}{2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_{18}} \left(\frac{S}{b} \right) &= \frac{d}{dt_w} \left(\frac{S}{b} \right) = (4 b_{fs} t_{fs} (b_{fi} t_{fi} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) \\ &\quad (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^2 - \\ &\quad 3 t_w (b_{fi} (2 h - 2 t_{fs} - t_{fi}) t_{fi} + b_{fs} t_{fs} (-2 t_{fs} + t_{fs}) + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) \\ &\quad (h - 2 t_{fs} - t_{fi} + t_{fs}) t_w) (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w) \\ &\quad (-b_{fs} t_{fs}^2 - b_{fi} t_{fi} (-2 h + t_{fi} + 2 t_{fs}) + (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w) - \\ &\quad 2 (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs}) t_w \\ &\quad (-b_{fi} t_{fi} (3 (-2 h + t_{fs}) t_w + 3 t_w t_{fi} + (3 t_w - 2 b_{fs}) t_{fs}) + b_{fs} t_{fs} (-3 t_{fs} t_w + 2 b_{fs} t_{fs}) + \\ &\quad (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) (-3 h t_w + 3 t_{fs} t_w + 3 t_w t_{fi} - 2 b_{fs} t_{fs}) t_w) / \\ &\quad (24 t_w^2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^3) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx_{18}} \left(\frac{A.h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{dt_w} \left(\frac{A.h_{CG}}{h} \right) = \frac{(2 + \sqrt{5}) (-t_{fi}^2 + (h - t_{fs})^2)}{2 h}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_{18}} \left(\frac{I_z}{h} \right) &= \frac{d}{dt_w} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{1}{96 h} \left(5 \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs})^3 + 12 \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w^2 - \right. \\ &\quad \frac{48 \sqrt{5} (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2 t_w}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3} + \\ &\quad \frac{24 \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} + \\ &\quad (48 (2 + \sqrt{5}) b_{fs} (h - t_{fi} - t_{fs}) t_{fs} (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - \\ &\quad (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) / (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3 + \\ &\quad (48 (2 + \sqrt{5}) b_{fi} t_{fi} (-h + t_{fi} + t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs}) \\ &\quad (b_{fs} t_{fs} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) / \\ &\quad (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3 + \\ &\quad \left. \frac{3 (h - t_{fi} - t_{fs}) (5 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 - 12 t_w^2)}{\sqrt{5}} + 16 (h - t_{fi} - t_{fs}) \right. \\ &\quad \left((-h + t_{fi} + t_{fs})^2 - \frac{6 (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2 t_w}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3} + \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{3 (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} \right) \right) \end{aligned}$$

Derivadas a respeito da variável de decisão tipo 19

$$\frac{dy_{fs}}{dx_{19}} = \frac{dy_{fs}}{dt_{fs}} =$$

$$\frac{(-b_{fs}^2 t_{fs}^2 + (2 + \sqrt{5}) b_{fs} ((h - t_{fi})^2 - 2(h - t_{fi}) t_{fs} + 2 t_{fs}^2) t_w - (9 + 4\sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2 + b_{fi} t_{fi} (2h - t_{fi} - 2 t_{fs}) (b_{fs} - (2 + \sqrt{5}) t_w)) / (2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^2)}{}$$

$$\frac{dy_{fi}}{dx_{19}} = \frac{dy_{fi}}{dt_{fs}} =$$

$$\frac{(-b_{fs}^2 t_{fs}^2 + (2 + \sqrt{5}) b_{fs} ((h - t_{fi})^2 - 2(h - t_{fi}) t_{fs} + 2 t_{fs}^2) t_w - (9 + 4\sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2 + b_{fi} t_{fi} (2h - t_{fi} - 2 t_{fs}) (b_{fs} - (2 + \sqrt{5}) t_w)) / (2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^2)}{}$$

$$\frac{d}{dx_{19}} \left(\frac{S}{b} \right) =$$

$$\frac{d}{dt_{fs}} \left(\frac{S}{b} \right) = -(4 b_{fs} t_{fs} (b_{fi} t_{fi} (b_{fs} (2h - t_{fi}) + b_{fi} t_{fi}) + (2 + \sqrt{5}) (b_{fs} (h - t_{fi})^2 - b_{fi} t_{fi}^2) t_w) - (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w) - 4 b_{fs} (-b_{fi} t_{fi} (-2h + t_{fi} + t_{fs}) + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^2 + 3 t_w (b_{fs} - (2 + \sqrt{5}) t_w) (b_{fs} t_{fs}^2 + b_{fi} t_{fi} (-2h + t_{fi} + 2 t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w)^2 + 3 t_w (b_{fi} (2h - 2 t_{fs} - t_{fi}) t_{fi} + b_{fs} t_{fs} (-2 t_{fs} + t_{fs}) + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) (h - 2 t_{fs} - t_{fi} + t_{fs}) t_w) (2 b_{fi}^2 t_{fi}^2 + b_{fs}^2 t_{fs}^2 + (2 + \sqrt{5}) b_{fs} ((h - t_{fi})^2 + 2(h - t_{fi}) t_{fs} - 2 t_{fs}^2) t_w + (9 + 4\sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2 - b_{fi} t_{fi} (b_{fs} (t_{fi} - 2(h + t_{fs})) + (2 + \sqrt{5}) (-2h + 3 t_{fi} + 2 t_{fs}) t_w))) / (24 t_w (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^3)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dI_z}{dx_{19}} = \frac{dI_z}{dt_{fs}} = \frac{1}{96} & \left(24 b_{fs} t_{fs}^2 - 15 \sqrt{5} (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w - \right. \\
 & 4 \sqrt{5} t_w^3 - (48 \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs}) t_w \\
 & \quad (b_{fi} t_{fi} (b_{fs} (2h - t_{fi}) + b_{fi} t_{fi}) + (2 + \sqrt{5}) (b_{fs} (h - t_{fi})^2 - b_{fi} t_{fi}^2) t_w)) / \\
 & \quad (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^3 - \\
 & (48 b_{fs} t_{fs} (-b_{fi} t_{fi} (b_{fs} (2h - t_{fi}) + b_{fi} t_{fi}) - (2 + \sqrt{5}) (b_{fs} (h - t_{fi})^2 - b_{fi} t_{fi}^2) t_w) \\
 & \quad (b_{fi} t_{fi} (-2h + t_{fi} + t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)) / \\
 & \quad (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^3 - \\
 & \quad \frac{24 \sqrt{5} (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2 t_w}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^2} + \\
 & \quad \frac{24 b_{fs} (b_{fi} t_{fi} (-2h + t_{fi} + t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^2} + \\
 & \quad \frac{3 t_w (-15 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 + 4 t_w^2)}{\sqrt{5}} + \\
 & (48 b_{fi} t_{fi} (b_{fs} t_{fs} (-2h + t_{fi} + t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) \\
 & \quad (b_{fs}^2 t_{fs}^2 - (2 + \sqrt{5}) b_{fs} ((h - t_{fi})^2 - 2 (h - t_{fi}) t_{fs} + 2 t_{fs}^2) t_w + \\
 & \quad (9 + 4 \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2 + b_{fi} t_{fi} (-2h + t_{fi} + 2 t_{fs}) (b_{fs} - (2 + \sqrt{5}) t_w))) / \\
 & \quad (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^3 + 48 t_w \left(-h^2 - (t_{fi} + t_{fs}) (-2h + t_{fi} + t_{fs}) - \right. \\
 & \quad \left. \frac{2 (b_{fs} (h - t_{fi}) + b_{fi} t_{fi}) (b_{fs} (h - t_{fi}) t_{fs} + b_{fi} t_{fi} (-h + t_{fs}))^2}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^3} + \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{(b_{fi} t_{fi} (h - 2 t_{fi} - t_{fs}) + b_{fs} (h - t_{fi}) (2h - 2 t_{fi} - t_{fs})) (b_{fs} (h - t_{fi}) t_{fs} + b_{fi} t_{fi} (-h + t_{fs}))}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^2} \right) \right) \\
 \frac{d}{dx_{19}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{dt_{fs}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = & \frac{(h - t_{fs}) (b_{fs} - (2 + \sqrt{5}) t_w)}{h}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx_{19}} \left(\frac{I_z}{h} \right) &= \frac{d}{dt_{fs}} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{1}{96 h} \left(24 b_{fs} t_{fs}^2 - 15 \sqrt{5} (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w - \right. \\
 &4 \sqrt{5} t_w^3 - \frac{24 \sqrt{5} (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2 t_w}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} + \\
 &\frac{24 b_{fs} (b_{fi} t_{fi} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} + \\
 &\frac{3 t_w (-15 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 + 4 t_w^2)}{\sqrt{5}} + \\
 &\left. \left(48 b_{fi} t_{fi} (b_{fs} t_{fs} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left(b_{fs}^2 t_{fs}^2 - (2 + \sqrt{5}) b_{fs} (h^2 + t_{fi}^2 - 2 t_{fi} (h - t_{fs}) - 2 h t_{fs} + 2 t_{fs}^2) t_w + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. (9 + 4 \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2 + b_{fi} t_{fi} (-2 h + t_{fi} + 2 t_{fs}) (b_{fs} - (2 + \sqrt{5}) t_w) \right) \right) / \\
 &\quad \left(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w \right)^3 - \\
 &\left(48 \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs}) t_w \right. \\
 &\quad \left. \left(b_{fi}^2 t_{fi}^2 + (2 + \sqrt{5}) b_{fs} (h - t_{fi})^2 t_w - b_{fi} t_{fi} (b_{fs} (-2 h + t_{fi}) + (2 + \sqrt{5}) t_{fi} t_w) \right) \right) / \\
 &\quad \left(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w \right)^3 - \\
 &\left(48 b_{fs} t_{fs} (b_{fi} t_{fi} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) \right. \\
 &\quad \left. \left(-b_{fi}^2 t_{fi}^2 - (2 + \sqrt{5}) b_{fs} (h - t_{fi})^2 t_w + b_{fi} t_{fi} (b_{fs} (-2 h + t_{fi}) + (2 + \sqrt{5}) t_{fi} t_w) \right) \right) / \\
 &\quad \left. \left(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w \right)^3 + \right. \\
 &48 t_w \left(-(-h + t_{fi} + t_{fs})^2 - \frac{(b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} - \right. \\
 &\quad \left. \left(2 (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left(b_{fi}^2 t_{fi}^2 + (2 + \sqrt{5}) b_{fs} (h - t_{fi})^2 t_w - b_{fi} t_{fi} (b_{fs} (-2 h + t_{fi}) + (2 + \sqrt{5}) t_{fi} t_w) \right) \right) \right) / \\
 &\quad \left. \left. \left(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w \right)^3 \right) \right) \Bigg)
 \end{aligned}$$

Derivadas a respeito da variável de decisão tipo 20

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_{fs}}{dx_{20}} &= \frac{dy_{fs}}{dt_{fi}} = (b_{fi} (b_{fi} t_{fi}^2 + b_{fs} t_{fs} (-2 h + 2 t_{fi} + t_{fs})) - \\
 &(2 + \sqrt{5}) (b_{fi} (h^2 + 2 t_{fi} (-h + t_{fi})) - 2 (b_{fi} + b_{fs}) (h - t_{fi}) t_{fs} + (b_{fi} + b_{fs}) t_{fs}^2) t_w + \\
 &(9 + 4 \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2) / (2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^2)
 \end{aligned}$$

$$\frac{dy_{f\bar{i}}}{dx_{20}} = \frac{dy_{f\bar{i}}}{dt_{f\bar{i}}} = (b_{f\bar{i}}(b_{f\bar{i}}t_{f\bar{i}}^2 + b_{f\bar{s}}t_{f\bar{s}}(-2h + 2t_{f\bar{i}} + t_{f\bar{s}})) - (2 + \sqrt{5})(b_{f\bar{i}}(h^2 + 2t_{f\bar{i}}(-h + t_{f\bar{i}})) - 2(b_{f\bar{i}} + b_{f\bar{s}})(h - t_{f\bar{i}})t_{f\bar{s}} + (b_{f\bar{i}} + b_{f\bar{s}})t_{f\bar{s}}^2)t_w + (9 + 4\sqrt{5})(-h + t_{f\bar{i}} + t_{f\bar{s}})^2t_w^2) / (2(b_{f\bar{i}}t_{f\bar{i}} + b_{f\bar{s}}t_{f\bar{s}} - (2 + \sqrt{5})(-h + t_{f\bar{i}} + t_{f\bar{s}})t_w)^2)$$

$$\frac{d}{dx_{20}} \left(\frac{S}{b} \right) =$$

$$\frac{d}{dt_{f\bar{i}}} \left(\frac{S}{b} \right) = ((-b_{f\bar{i}}t_{f\bar{i}}(3(-2h + t_{f\bar{s}})t_w + 3t_w t_{f\bar{i}} + (3t_w - 2b_{f\bar{s}})t_{f\bar{s}}) + b_{f\bar{s}}t_{f\bar{s}}(-3t_{f\bar{s}}t_w + 2b_{f\bar{s}}t_{f\bar{s}}) + (2 + \sqrt{5})(-h + t_{f\bar{i}} + t_{f\bar{s}})(-3ht_w + 3t_{f\bar{s}}t_w + 3t_w t_{f\bar{i}} - 2b_{f\bar{s}}t_{f\bar{s}})t_w) - (-b_{f\bar{i}}(b_{f\bar{i}}t_{f\bar{i}}^2 + b_{f\bar{s}}t_{f\bar{s}}(-2h + 2t_{f\bar{i}} + t_{f\bar{s}})) + (2 + \sqrt{5})(b_{f\bar{i}}(h^2 + 2t_{f\bar{i}}(-h + t_{f\bar{i}})) - 2(b_{f\bar{i}} + b_{f\bar{s}})(h - t_{f\bar{i}})t_{f\bar{s}} + (b_{f\bar{i}} + b_{f\bar{s}})t_{f\bar{s}}^2)t_w - (9 + 4\sqrt{5})(-h + t_{f\bar{i}} + t_{f\bar{s}})^2t_w^2)) / (12t_w(b_{f\bar{i}}t_{f\bar{i}} + b_{f\bar{s}}t_{f\bar{s}} - (2 + \sqrt{5})(-h + t_{f\bar{i}} + t_{f\bar{s}})t_w)^3)$$

$$\frac{dI_z}{dx_{20}} = \frac{dI_z}{dt_{fi}} = \frac{1}{96} \left(24 b_{fi} t_{fi}^2 - 15 \sqrt{5} (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w - \right. \\
4 \sqrt{5} t_w^3 - \frac{24 \sqrt{5} (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2 t_w}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^2} + \\
\frac{24 b_{fi} (b_{fs} (2 h - t_{fi} - t_{fs}) t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^2} + \\
(48 \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs}) t_w \\
(b_{fs} t_{fs} (b_{fi} (2 h - t_{fs}) + b_{fs} t_{fs}) + (2 + \sqrt{5}) (b_{fi} (h - t_{fs})^2 - b_{fs} t_{fs}^2) t_w) / \\
(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^3 + \frac{3 t_w (-15 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 + 4 t_w^2)}{\sqrt{5}} + \\
(48 b_{fs} t_{fs} (b_{fi} t_{fi} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) \\
(b_{fi} (b_{fi} t_{fi}^2 + b_{fs} t_{fs} (-2 h + 2 t_{fi} + t_{fs})) - \\
(2 + \sqrt{5}) (b_{fi} (h^2 + 2 t_{fi} (-h + t_{fi})) - 2 (b_{fi} + b_{fs}) (h - t_{fi}) t_{fs} + (b_{fi} + b_{fs}) t_{fs}^2) t_w + \\
(9 + 4 \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2) / (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^3 - \\
(48 b_{fi} t_{fi} (b_{fs} t_{fs} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) \\
(b_{fs} t_{fs}^2 (-b_{fs} + (2 + \sqrt{5}) t_w) + b_{fi} (b_{fs} t_{fs} (-2 h + t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fs})^2 t_w))) / \\
(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^3 + 48 t_w \left(-h^2 - (t_{fi} + t_{fs}) (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - \right. \\
\left. \frac{2 (b_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^3} + \right. \\
\left. \frac{(b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs}) (b_{fi} (2 h - t_{fi} - 2 t_{fs}) (h - t_{fs}) + b_{fs} (h - t_{fi} - 2 t_{fs}) t_{fs})}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^2} \right) \\
\left. \right)$$

$$\frac{d}{dx_{20}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{dt_{fi}} \left(\frac{A \cdot h_{CG}}{h} \right) = \frac{t_{fi} (b_{fi} - (2 + \sqrt{5}) t_w)}{h}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx_{20}} \left(\frac{I_z}{h} \right) &= \frac{d}{dt_{fi}} \left(\frac{I_z}{h} \right) = \frac{1}{96 h} \left(24 b_{fi} t_{fi}^2 - 15 \sqrt{5} (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w - \right. \\
 & 4 \sqrt{5} t_w^3 - \frac{24 \sqrt{5} (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2 t_w}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} + \\
 & \frac{24 b_{fi} (b_{fs} (2 h - t_{fi} - t_{fs}) t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} + \\
 & \left. \frac{3 t_w (-15 (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 + 4 t_w^2)}{\sqrt{5}} - \right. \\
 & \left. \frac{(48 b_{fi} t_{fi} (b_{fs} t_{fs} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)}{(b_{fs} t_{fs}^2 (-b_{fs} + (2 + \sqrt{5}) t_w) - b_{fi} (b_{fs} (2 h - t_{fs}) t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fs})^2 t_w))} \right. \\
 & \left. \frac{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3}{+} \right. \\
 & \left. \frac{(48 \sqrt{5} (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs}) t_w}{(b_{fs} t_{fs}^2 (b_{fs} - (2 + \sqrt{5}) t_w) + b_{fi} (b_{fs} (2 h - t_{fs}) t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fs})^2 t_w))} \right. \\
 & \left. \frac{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3}{+} \right. \\
 & \left. \frac{(48 b_{fs} t_{fs} (b_{fi} t_{fi} (-2 h + t_{fi} + t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)}{(b_{fi}^2 t_{fi}^2 - b_{fi} (b_{fs} (2 h - 2 t_{fi} - t_{fs}) t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (2 t_{fi}^2 - 2 t_{fi} (h - t_{fs}) + (h - t_{fs})^2) t_w) +} \right. \\
 & \left. \frac{t_w ((2 + \sqrt{5}) b_{fs} (2 h - 2 t_{fi} - t_{fs}) t_{fs} + (9 + 4 \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w)}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3} \right. \\
 & \left. \frac{+}{+} \right. \\
 & \left. \frac{48 t_w \left(-(-h + t_{fi} + t_{fs})^2 - \frac{(b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})^2}{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2} + \right. \right. \\
 & \left. \frac{(2 (h - t_{fi} - t_{fs}) (b_{fi} t_{fi} (h - t_{fs}) + b_{fs} (-h + t_{fi}) t_{fs})}{(b_{fs} t_{fs}^2 (b_{fs} - (2 + \sqrt{5}) t_w) + b_{fi} (b_{fs} (2 h - t_{fs}) t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fs})^2 t_w))} \right. \\
 & \left. \left. \frac{(b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3}{+} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Derivadas a respeito da variável de decisão tipo 21

$$\begin{aligned}
 \frac{dI_z}{dx_{21}} &= \frac{dI_z}{db_{fi}} = \\
 & (t_{fi} (b_{fi}^2 t_{fi}^4 + b_{fs}^2 t_{fs}^2 (4 t_{fi}^2 + 6 t_{fi} (-2 h + t_{fs}) + 3 (-2 h + t_{fs})^2) - 2 (2 + \sqrt{5}) b_{fs} t_{fs} (-h + t_{fi} + t_{fs}) \\
 & (6 h^2 + t_{fi}^2 - 3 t_{fi} (h - t_{fs}) + 3 t_{fs} (-3 h + t_{fs})) t_w + (9 + 4 \sqrt{5}) (t_{fi}^2 + 3 (h - t_{fs})^2) \\
 & (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2 + 2 b_{fi} t_{fi}^3 (b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)) / \\
 & (12 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^2)
 \end{aligned}$$

$$\frac{dy_{fs}}{dx_{21}} = \frac{dy_{fs}}{db_{fi}} = \frac{t_{fi} (b_{fs} t_{fs} (-2h + t_{fi} + t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)}{2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^2}$$

$$\frac{dy_{fi}}{dx_{21}} = \frac{dy_{fi}}{db_{fi}} = \frac{t_{fi} (b_{fs} t_{fs} (-2h + t_{fi} + t_{fs}) - (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)}{2 (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} - (2 + \sqrt{5}) (-h + t_{fi} + t_{fs}) t_w)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_{21}} \left(\frac{S}{b} \right) &= \frac{d}{db_{fi}} \left(\frac{S}{b} \right) = (t_{fi} (b_{fs} (2h - t_{fi} - t_{fs}) t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fs}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w) \\ &\quad (2 b_{fs}^2 t_{fs}^2 + b_{fi} t_{fi} (6 h t_w - 3 t_{fs} t_w - 3 t_w t_{fi} + (-3 t_w + 2 b_{fs}) t_{fs}) + 3 (2 + \sqrt{5}) t_w \\ &\quad (h - t_{fs} - t_{fi}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w - b_{fs} t_{fs} (3 t_{fs} t_w - 2 (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w))) / \\ &\quad (12 t_w (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^3) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx_{21}} \left(\frac{A.h_{CG}}{h} \right) = \frac{d}{db_{fi}} \left(\frac{A.h_{CG}}{h} \right) = \frac{t_{fi}^2}{2h}$$

$$\frac{d}{dx_{21}} \left(\frac{I_z}{h} \right) =$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{db_{fi}} \left(\frac{I_z}{h} \right) &= (t_{fi} (b_{fi}^2 t_{fi}^4 + b_{fs}^2 t_{fs}^2 (4 t_{fi}^2 + 6 t_{fi} (-2h + t_{fs}) + 3 (-2h + t_{fs})^2) - 2 (2 + \sqrt{5}) b_{fs} t_{fs} \\ &\quad (t_{fi}^3 - 4 t_{fi}^2 (h - t_{fs}) - 3 (h - t_{fs})^2 (2h - t_{fs}) + 3 t_{fi} (3 h^2 - 5 h t_{fs} + 2 t_{fs}^2)) t_w + (9 + 4 \sqrt{5}) \\ &\quad (t_{fi}^2 + 3 (h - t_{fs})^2) (-h + t_{fi} + t_{fs})^2 t_w^2 + 2 b_{fi} t_{fi}^3 (b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w))) / \\ &\quad (12 h (b_{fi} t_{fi} + b_{fs} t_{fs} + (2 + \sqrt{5}) (h - t_{fi} - t_{fs}) t_w)^2) \end{aligned}$$