



A Astronomia na Ajuda à Arqueologia. A Possibilidade de uma Representação Rupestre de um Cometa

Tiago José Nogueira Pessoa

2013

Agradecimentos

Muito obrigado ao meu orientador, Dr. João Fernandes, por toda a ajuda que me deu e pela disponibilidade que sempre teve para esclarecimento de dúvidas.

Quero agradecer aos meus pais, à minha irmã e aos meus amigos por todo o apoio que sempre me deram.

Também agradeço aos meus professores por tudo o que aprendi com eles.

Agradeço ao arqueólogo Paulo Lima pelos dados fornecidos para a realização desta tese.

Conteúdo

1	Introdução	3
2	O problema dos n-corpos	7
2.1	O problema de 1 e 2 corpos	8
2.2	Aplicar o problema dos n-corpos. O programa PLASYS	10
3	Sistemas de coordenadas celestes	17
3.1	Sistema de coordenadas equatoriais uranográficas	17
3.1.1	Anomalias	18
3.1.2	Coordenadas eclípticas heliocêntricas	20
3.1.3	Coordenadas equatoriais geocêntricas	20
3.1.4	Ascensão recta e declinação	21
3.2	Sistema de coordenadas horizontais locais	21
3.2.1	Tempo sideral médio	22
3.2.2	Equação dos equinócios	22
3.2.3	Tempo sideral aparente local e ângulo horário	23
3.2.4	Altura e azimute	23
3.2.5	O código MATLAB	24
4	Magnitude de um cometa	26
5	Resultados	27
5.1	Características dos cometas	28
6	Discussão e Conclusões	36
7	Anexo	37
8	Referências	47

1 Introdução

Desde sempre que o Homem tenta perceber tudo o que o rodeia, nomeadamente o céu. Assim, a Astronomia terá nascido devido à necessidade de medir com exatidão o tempo, permitindo determinar as estações, a época das sementeiras e das colheitas por exemplo, mas também como tentativa de explicar os fenómenos na natureza.

Este fascínio dos povos pré-históricos pela Astronomia chega até nós através de monumentos construídos a partir da observação de astros e através de pinturas. Stonehenge, por exemplo, é um observatório pré-histórico que mostra bem o interesse do Homem primitivo pelos fenómenos celestes.



Figura 1: Vista aérea de Stonehenge (National Geographic)

Fazendo a junção da Astronomia e da Arqueologia podemos tentar perceber melhor até que ponto os povos da pré-história se interessavam pelo céu. No ramo da Arqueoastronomia, muitos trabalhos tentam perceber a relação de monumentos com alinhamentos de estrelas e com o movimento do Sol e da Lua no céu. Também foram descobertas algumas pinturas rupestres com o que se supõe serem representações de astros.

Um bom exemplo do trabalho da Arqueoastronomia são os dólmenes do Mondego. Trata-se de um conjunto de 35 monumentos megalíticos com cerca de 6.000 anos, espalhados por vários locais mas, todos eles, a apontar para a Serra da Estrela. O artigo "Landscape and Astronomy in Megalithic Portugal: the Carregal do Sal nucleus and Star Mountain Range" (Silva, 2010), mostra, num estudo mais pormenorizado, que existe uma zona na Serra da Estrela de

onde é possível avistar todos os dólmenes. Ora, nesse local, há 6.000 anos, nascia a estrela Aldebaran, a estrela mais brilhante da constelação de Touro, em finais de Abril. Este seria, eventualmente, o sinal para os povos primitivos começarem as sementeiras e levarem os rebanhos para o alto da Serra, uma vez que o tempo começava a ficar mais ameno e o gelo começava a derreter pondo os pastos a descoberto.

Mas não é só nos monumentos pré-históricos que encontramos relações com a Astronomia. Em Carlão, concelho de Alijó (figura 2), encontra-se um abrigo rochoso com pinturas rupestres. Depois de estudadas estas pinturas, o arqueólogo Paulo Lima, do Centro de Estudos Arqueológicos da Universidade de Coimbra e do Porto (CEAUCP), sugere que a trajetória no céu de um cometa esteja ali representada.

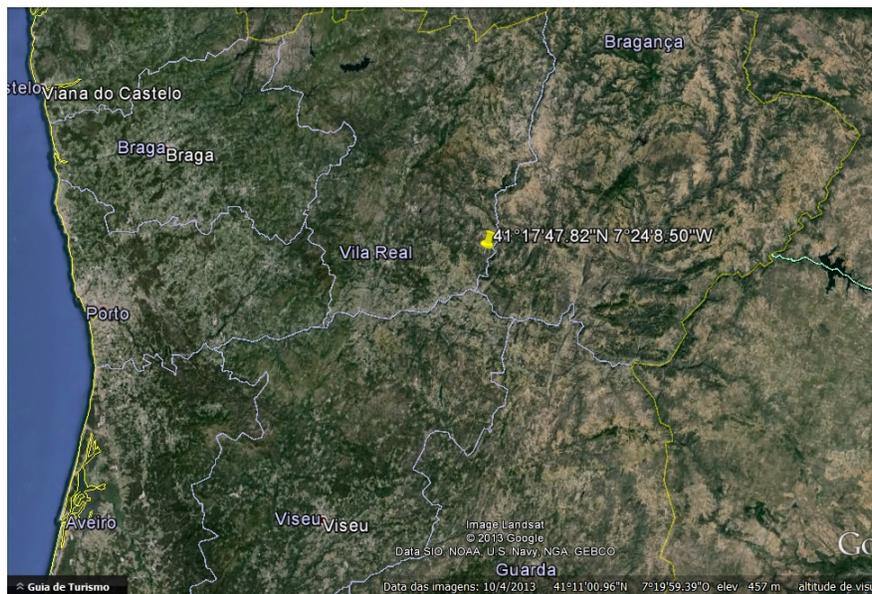


Figura 2: Localização das pinturas rupestres em Carlão (imagem do "Google Earth")

No abrigo rupestre as pinturas estão localizadas em dois sítios da rocha, designados por painéis, como se verifica nas figuras a baixo.

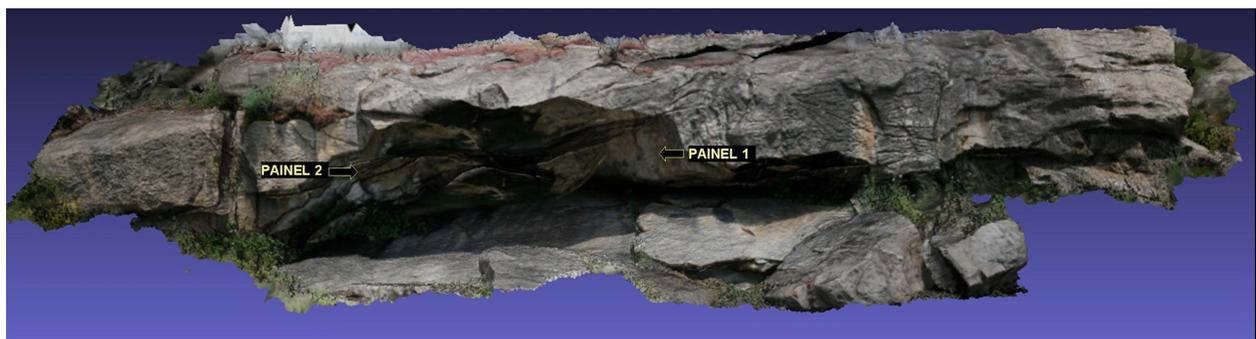


Figura 3: Abrigo rochoso onde se encontram as pinturas (Lima, 2013)

As pinturas em questão pertencem a um estilo que na arqueologia se convencionou de "Arte Esquemática", que está entre o quinto milénio a.C. e o primeiro milénio d.C. Uma datação precisa torna-se difícil, pois foram usados pigmentos de origem mineral, óxidos de ferro, o que exclui a possibilidade de se fazer uma estimativa directa por carbono-14.

Na figura 4 está representada a imagem dos dois painéis, resultantes do tratamento informático de fotografias multi-espectrais e com algumas anotações sobrepostas. A cor das pinturas é semelhante ao original.

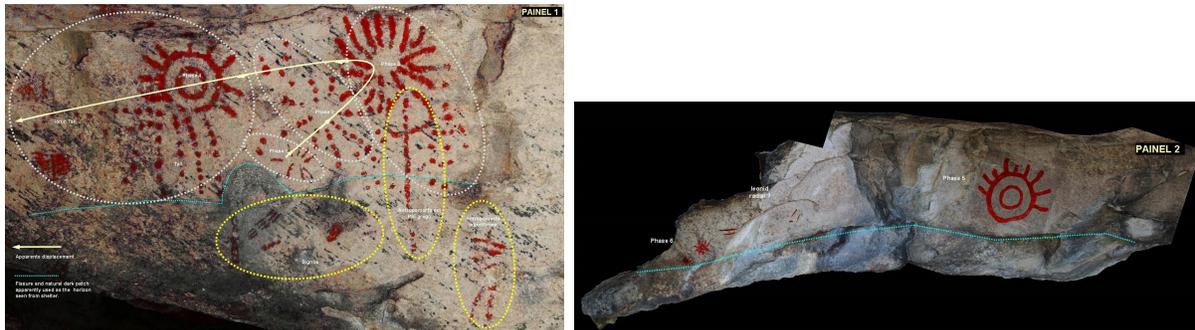


Figura 4: Painéis 1 e 2 das pinturas rupestres (Lima, 2013)

A figura 5 corresponde à panorâmica que se avista do abrigo rochoso com as pinturas sobrepostas.

Nestas pinturas verifica-se que alguns objectos parecem estar representados como sendo brilhantes e as suas disposições parecem indicar a trajetória de um corpo celeste. Se estiver de facto representado um corpo celeste, o mais óbvio será que este seja um cometa.

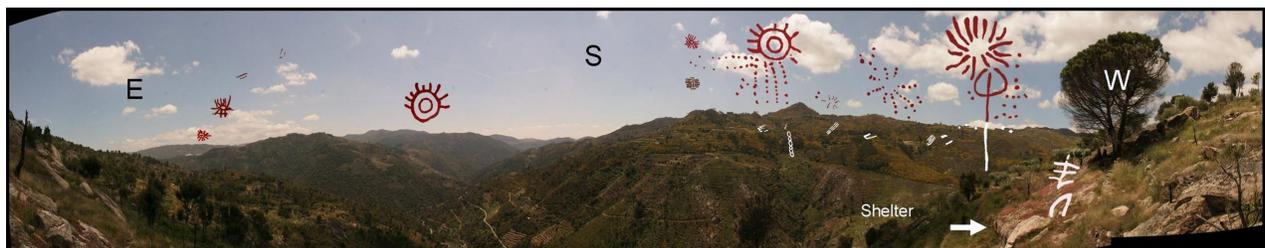


Figura 5: Figuras sobrepostas na paisagem (Lima, 2013)

Todos estes estudos foram realizados e cedidos pelo arqueólogo Paulo Lima do CEAUCP, com a datação destas pinturas entre 5.500 a.C. e 1 a.C.

O objectivo deste trabalho será o de verificar se de facto é possível que estas pinturas rupestres representem a órbita de um cometa. Para tal, através de uma lista de cometas

com os seus respectivos dados ir-se-á procurar as suas posições entre 5.500 a.C. e 1 a.C. e comparar com as posições representadas nas pinturas.

Este texto é composto pelos seguintes capítulos: capítulo 1, introdução; capítulo 2, abordagem do problema dos n-corpos e do programa que calcula os elementos orbitais do Sistema Solar ao longo do tempo; capítulo 3, coordenadas celestes que vão ser necessárias para a resolução deste problema; capítulo 4, definição de magnitude de um cometa; capítulo 5, abordagem feita ao problema e os resultados obtidos; capítulo 6 discussão e conclusões.

2 O problema dos n-corpos

O problema dos n-corpos consiste em tentar perceber o movimento de um certo número de corpos em que estes estão sujeitos à interacção gravítica de todos eles. Os oito planetas principais mais o Sol formam um problema de 9 corpos, sendo impossível analisar os seus movimentos com métodos analíticos.

Para este estudo é preciso ter em consideração as três leis de Newton e a *Lei da Atracção Universal* (Collins, 2004):

- 1ª Lei de Newton: Princípio de Inércia de Galileu → Todo o corpo permanece no seu estado de repouso ou de movimento rectilíneo uniforme, salvo se a existência de forças aplicadas sobre ele o obrigarem a mudar esse estado
- 2ª Lei de Newton: Princípio Fundamental da Dinâmica → Existe um sistema de referência em relação ao qual a aceleração do movimento de qualquer partícula é proporcional à força que o produz

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (1)$$

- 3ª Lei de Newton: Princípio da Acção e da Reacção → As acções que dois corpos exercem, um sobre o outro, são simétricas, isto é, as forças com que P_2 actua sobre P_1 (\vec{F}_{12}) e P_1 actua sobre P_2 (\vec{F}_{21}) relacionam-se tal que $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$
- Lei da Atracção Universal → Sejam P e Q duas partículas quaisquer do Universo, a partícula Q exerce sobre a partícula P uma força cuja expressão é

$$\vec{F}_{PQ} = -G \frac{m_P m_Q}{d_{PQ}^2} \frac{\overrightarrow{QP}}{d_{PQ}} \quad (2)$$

Sejam n corpos, P_1, \dots, P_n , com as respectivas massas, m_1, \dots, m_n , d_{ij} a distância entre P_i e P_j , com $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e G a constante gravitacional. Com as três leis de Newton e a *Lei da Atracção Universal*, o movimento dos n corpos, sujeitos à força gravítica entre eles, em relação a um referencial inercial $OXYZ$, vai ter como expressão:

$$\frac{d^2 \overrightarrow{OP_i}}{dt^2} = -G \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{m_j}{d_{ij}^3} \overrightarrow{P_j P_i} \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

Podemos escrever de forma equivalente, representando as coordenadas cartesianas, o seguinte sistema de três equações diferenciais de 2ª ordem com $3n$ incógnitas (que se torna impossível de resolver usando métodos analíticos):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -G \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{m_j (x_j - x_i)}{d_{ij}^3} \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} = -G \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{m_j (y_j - y_i)}{d_{ij}^3} \\ \frac{d^2 z_i}{dt^2} = -G \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{m_j (z_j - z_i)}{d_{ij}^3} \end{array} \right. \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Se houver um corpo, P_0 , de massa M , que domina todas outras massas (no caso do Sistema Solar, M será a massa do Sol) faz sentido usar um sistema de equações para descrever o movimento do sistema relativamente ao ponto P_0 . Para tal define-se \mathbf{r}_i como sendo a posição heliocêntrica, que é dada por

$$\mathbf{r}_i = P_i - P_0 \quad i \in \{1, \dots, n-1\} \quad (4)$$

Colocando M e \mathbf{r}_i no sistema (3), chega-se à formulação de Newton-Euler, que corresponde às equações de movimento para a posição heliocêntrica dos vectores r_i (Beutler, 2005):

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = G(M + m_i) \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^3} + G \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n m_j \left(\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} + \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \right) \quad i \in \{1, \dots, n-1\} \quad (5)$$

Ao interpretar estas equações como matrizes para as equações de coordenadas, repara-se que o sistema de coordenadas cartesiano heliocêntrico é paralelo ao sistema de coordenadas cartesiano inercial. No entanto, o sistema heliocêntrico não é inercial, pois a sua origem segue a trajectória do ponto de massa M .

2.1 O problema de 1 e 2 corpos

O problema de n -corpos torna-se impossível de resolver usando métodos analíticos, mas se estivermos a falar de um problema de 1 ou de 2 corpos já é possível resolvê-los analiticamente.

O problema de 1 corpo que estuda o movimento de um ponto material, P , de massa m em relação ao referencial inercial, produzido pela atracção exercida por O , de massa M , é

descrito pela *Lei da Atracção Universal*, supondo desprezável a acção dos restantes corpos do Universo. Assim sendo, este problema, apesar de ser teoricamente abordado, na prática torna-se impossível de resolver com grande rigor. Podemos falar deste caso apenas quando M é muito superior a m , como por exemplo o movimento de um planeta em torno do Sol ou o movimento de um satélite sob a acção gravítica do planeta hospedeiro.

O problema dos 2 corpos vai ser um caso particular do problema de n-corpos, com $n = 2$, assim as equações de movimento para duas partículas, P_1 e P_2 , de massa m_1 e m_2 respectivamente vão ser (Collins, 2004)

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{OP_1}}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{d_{12}^3} \overrightarrow{P_2 P_1} \\ m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{OP_2}}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{d_{12}^3} \overrightarrow{P_1 P_2} \end{array} \right.$$

Cada uma das partículas move-se em torno do centro de massa comum G como se fosse atraída por uma massa fictícia M_i , colocada em G .

$$M_i = \frac{m_j^3}{m_1 + m_2} \quad i, j = 1, 2 \quad i \neq j \quad (6)$$

Assim podemos escrever o sistema de equações diferenciais que definem o movimento das partículas em relação ao referencial com origem no centro de massa G :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{GP_1}}{dt^2} = -G \frac{m_1 \frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}}{d^3(G, P_1)} \overrightarrow{GP_1} \\ m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{GP_2}}{dt^2} = -G \frac{m_2 \frac{m_1^3}{(m_1+m_2)^2}}{d^3(G, P_2)} \overrightarrow{GP_2} \end{array} \right.$$

O problema dos dois corpos em torno do centro de massa G , pode ser descrito como dois problemas de um corpo.

2.2 Aplicar o problema dos n-corpos. O programa PLASYS

Para determinar a órbita de um cometa ao longo de 5.500 anos tem-se um problema de 10 corpos: oito planetas, o Sol e o cometa. Não se tem em consideração os restantes cometas e todos os asteroides por estes terem uma massa desprezável, apenas os planetas e o Sol vão influenciar as órbitas de cada cometa.

Para se analisar a órbita de um corpo, é necessário conhecer os seus elementos orbitais. As órbitas encontradas na Natureza são normalmente elipses e os seus elementos são:

- Semi-eixo maior da órbita, a ;
- Excentricidade da elipse, e ;
- Inclinação, i , que é o ângulo formado pelo plano da órbita do corpo com o plano da órbita da Terra (plano da eclíptica);
- Longitude do nodo ascendente, Ω , que é o ângulo entre o ponto Vernal (local da Terra no equinócio da Primavera) e o nodo ascendente (ponto de intersecção da órbita do corpo com o plano da órbita da Terra, que se encontra a seguir ao ponto Vernal);
- Argumento do periélio, ω , que é o ângulo entre o nodo ascendente e o periélio;
- Instante da passagem do corpo pelo periélio, τ .

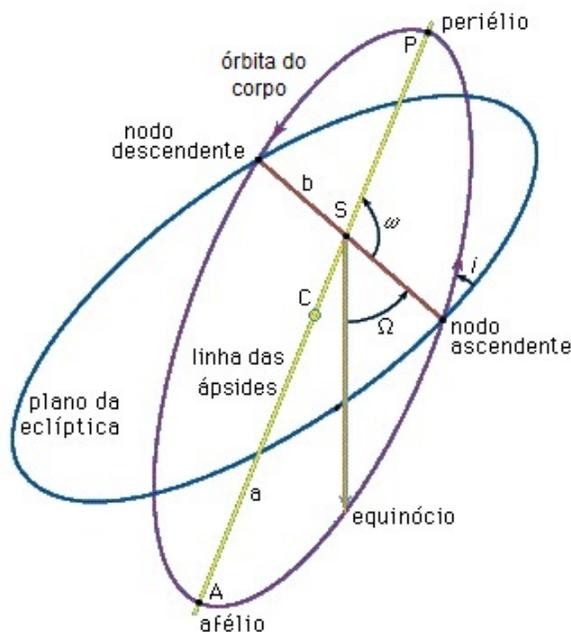


Figura 6: Representação dos elementos orbitais (http://www.feiradeciencias.com.br/sala24/24_faq01.asp)

Como veremos mais à frente, com uma escala de tempo elevada os elementos orbitais apresentam uma oscilação considerável. Para se encontrar os elementos orbitais dos planetas e dos cometas ao longo do tempo, recorre-se ao programa PLASYS (Beutler, 2005). Este programa vai ter em conta o problema dos n-corpos em que a integração é feita através da formulação de Newton-Euler.

Para estes cálculos é preciso colocar a época inicial pretendida, o intervalo de tempo pretendido, que pode ser antes ou depois da época inicial, e tem que se seleccionar, de entre os planetas do Sistema Solar, os que se pretende que façam parte dos cálculos. É possível escolher apenas alguns dos planetas e o programa vai fazer os cálculos como se o Sistema Solar tivesse apenas esses planetas. Por exemplo pode-se fazer um estudo das órbitas dos planetas interiores seleccionando assim apenas os planetas Mercúrio, Vénus, Terra e Marte.

Pode-se escolher se se pretende estudar um cometa ou um planeta anão cujos dados são introduzidos para que o programa faça os cálculos que são pretendidos. Os dados que o programa pede são os elementos orbitais, com duas excepções: o período de revolução, que se obtém através da 3ª lei de Kepler, P^2 [anos] = a^3 [AU], e a longitude do periélio (soma do argumento do periélio com a longitude do nodo ascendente) com referência ao da Terra, que é diferença entre a longitude do periélio do cometa e a longitude do periélio da Terra.

PLASYS 2: Integration Specifications and Output Definition

Numerical Integration:

Use DE-200 Initial Values

Initial Epoch (Approximate Values) 2013 01 01

Integration Specification:

Length of Integration Interval -7500 Years

Integration Order 14

Initial Step Size 5 Days

Fixed or Automatic Step Size FIXED

Max. local Error for Velocity 1.0e-17 AU/Day

Number of Iterations per Step 1

Tabular Interval for Output Files

20 Days

Sampling for File with Invariants 1000000

^Top ^Prev ^Next Cancel Save^As ^Save ^Run

Figura 7: Janela de input do PLASYS (Beutler, 2005)

Como não se tem acesso ao código fonte deste programa, para se fazer os cálculos dos elementos orbitais de vários cometas, só se pode corrê-lo para um cometa de cada vez. A

época inicial escolhida foi 1 de Janeiro de 2013 com o intervalo de tempo de 7.500 anos antes da época inicial. Depois do programa corrido, escolhe-se o gráfico da variação do elemento orbital que se pretende analisar. Em relação ao gráfico do instante de passagem pelo periélio, este é substituído pelo gráfico da variação da anomalia média (estes dois elementos estão relacionados, ver §3.1).

PLASYS 5: Initial Osc. Elements for Minor Planet(MP), MP-Specific Options

Reference Planet EARTH

Elements of Minor Planet:

Revolution Period	<input type="text" value="75.3"/>	in Units of Ref-Planet's Revolutions
Eccentricity	<input type="text" value="0.9671"/>	---
Inclination	<input type="text" value="162.26"/>	Degrees
Longitude of Node	<input type="text" value="58.42"/>	Degrees
Longitude of Perihelion	<input type="text" value="67.7119"/>	Degrees (rel. Ref. Planet's Perih.)
Perihelion Passing Time	<input type="text" value="-26.902396"/>	Rev (rel. to Ref. Planet's P.P.T.)

Include Variational Equations

Histogram of Conjunctions

Variational Equations MINOR VAR

File Name of Histograms MINOR HST

^Top ^Prev ^Next Cance^l Save^As ^Save ^Run

Figura 8: Input dos dados do cometa Halley.

Vejamos alguns exemplos de gráficos que se obtêm com este programa. Começemos pelo planeta Terra. O zero das abcissas representa a época inicial enquanto que os números negativos representam o número de anos antes da época inicial.

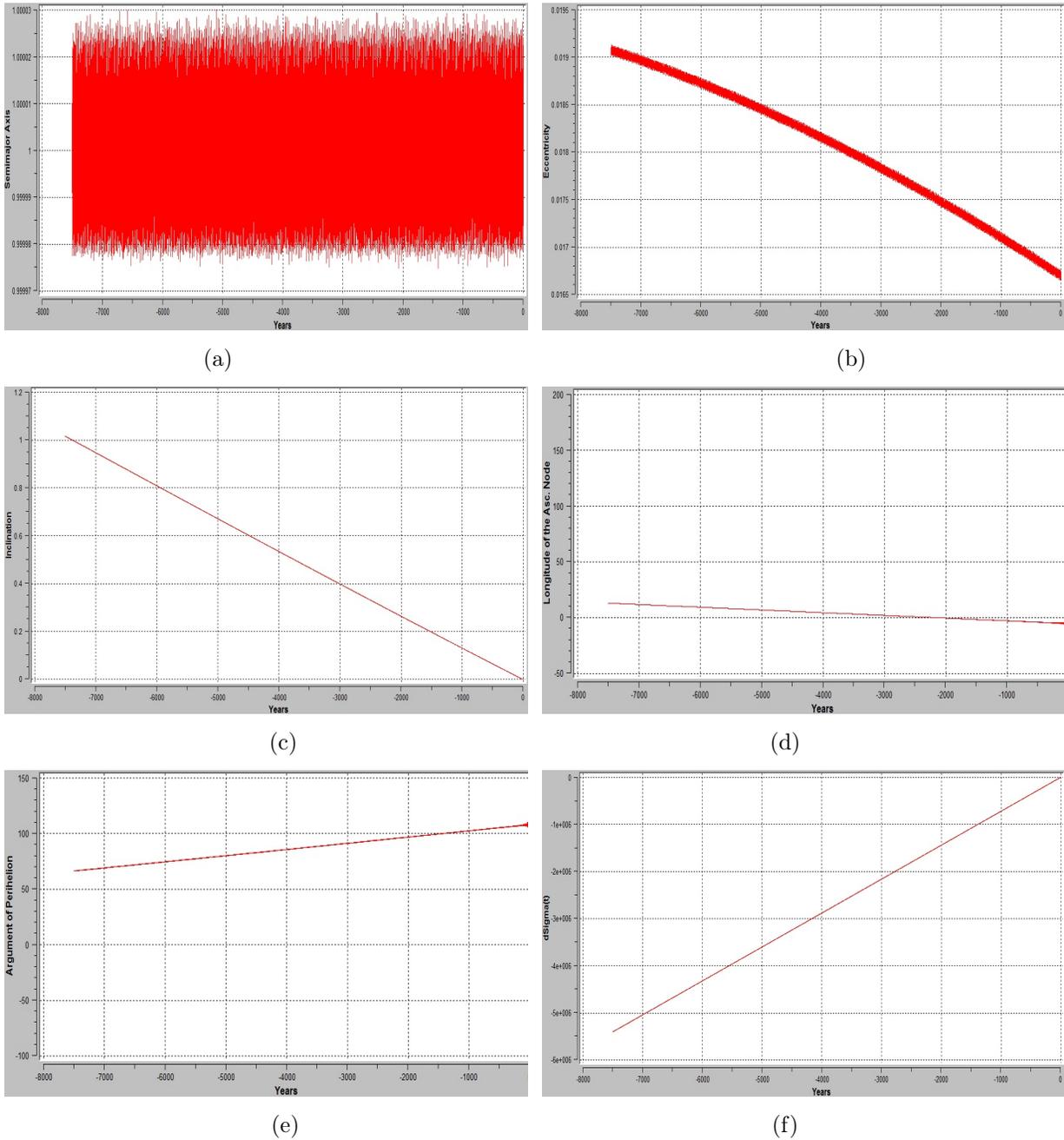


Figura 9: Planeta Terra. (a) semi-eixo maior (AU); (b) excentricidade; (c) inclinação; (d) longitude do nodo ascendente; (e) argumento do periélio; (f) variação da anomalia média

De reparar que os elementos orbitais apresentam uma curta e constante variação. A diferença do semi-eixo maior é de apenas 5×10^{-5} AU (7.500 Km).

Vejam de seguida o comportamento do semi-eixo maior e da excentricidade de Júpiter e Saturno, os dois maiores planetas do Sistema Solar.

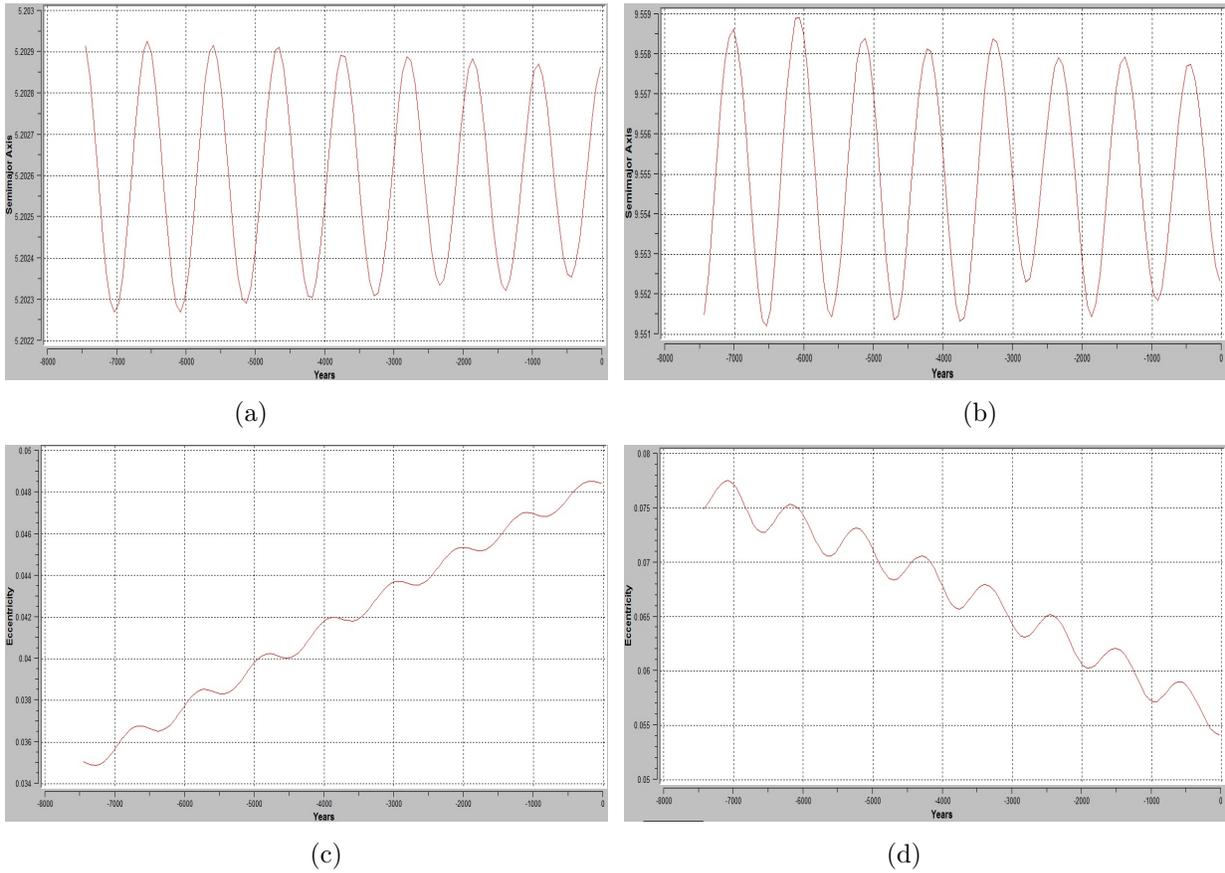


Figura 10: (a) semi-eixo maior de Júpiter (AU); (b) semi-eixo maior de Saturno; (c) excentricidade de Júpiter; (d) excentricidade de Saturno

Este dois gráficos apresentam uma menor densidade de pontos quando comparados com os da Terra, isto deve-se ao facto de Júpiter e Saturno terem períodos de revolução maiores.

A variação dos elementos de Júpiter e Saturno têm um comportamento semelhante. Em ambos, o semi-eixo maior apresenta uma periodicidade de aproximadamente 1.000 anos e enquanto num dos planetas aumenta o semi-eixo maior o do outro diminui. Relativamente às excentricidades, a de Júpiter é tendencialmente crescente, enquanto que a de Saturno é decrescente. Estes gráficos mostram uma forte ligação entre as órbitas de Júpiter e Saturno. Isto deve-se ao facto de estes planetas serem muito massivos levando a uma grande interação gravítica entre ambos.

Depois de vistos exemplos do comportamento dos elementos orbitais de planetas, vejamos como se comportam os elementos de dois cometas, Halley e Encke.

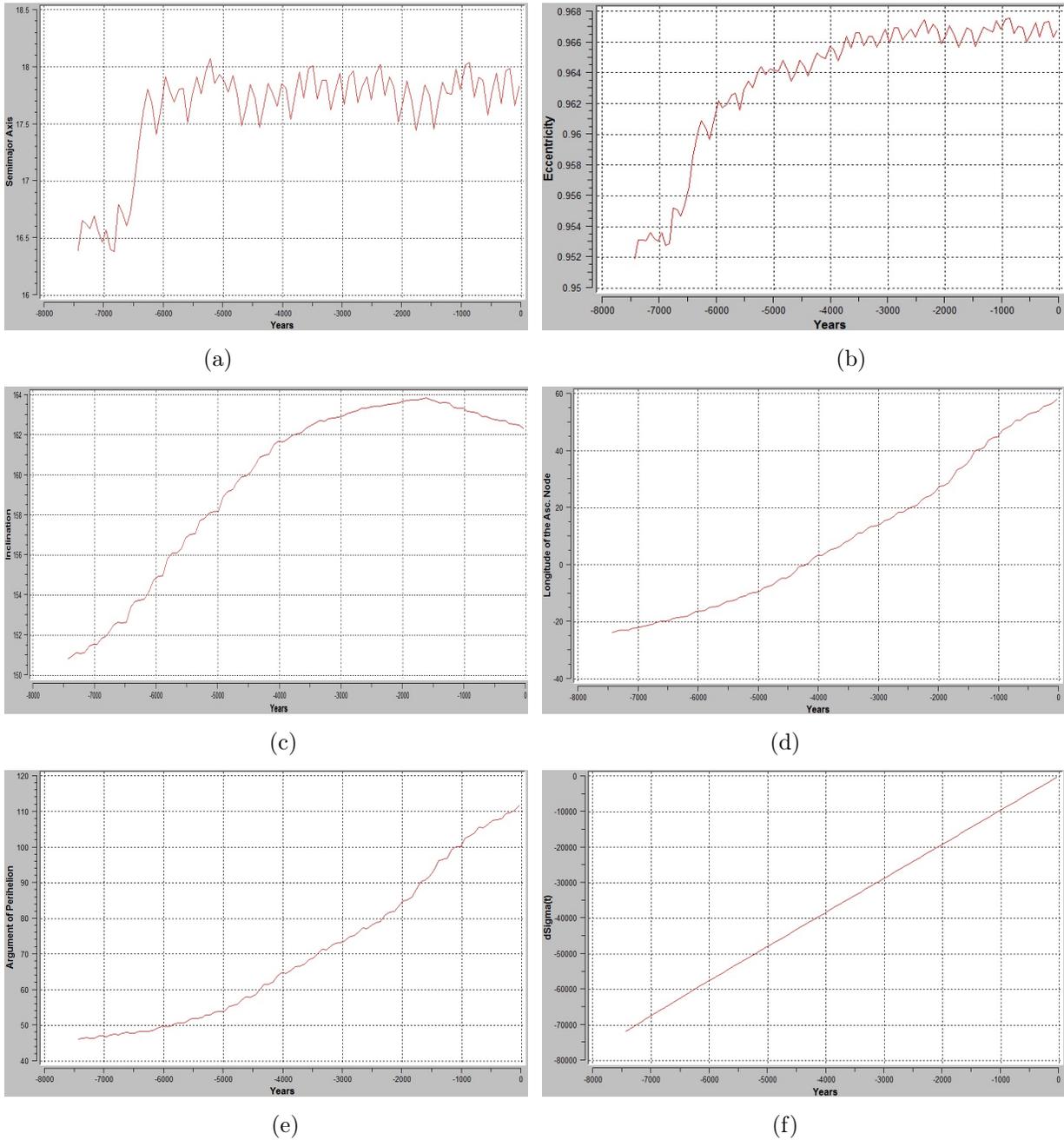


Figura 11: Cometa Halley. (a) semi-eixo maior (AU); (b) excentricidade; (c) inclinação; (d) longitude do nodo ascendente; (e) argumento do periélio; (f) variação da anomalia média

Entre 4.500 a.C. e 4.000 a.C. o semi-eixo maior e a excentricidade apresentam uma grande variação, comparando com os restantes valores do gráfico. O semi-eixo maior, neste intervalo de tempo apresenta uma diferença de 1,2 AU, enquanto que entre 4.000 a.C. e 2013 d.C. apresenta uma diferença de 0,5 AU; a excentricidade entre 4.500 a.C e 4.000 a.C. apresenta uma diferença de 0,005, entre 4.000 a.C e 2013d.C. a excentricidade tem tendência para ir aumentando, mas a um ritmo muito mais baixo (em 6.000 anos apresenta uma diferença de 0.008).

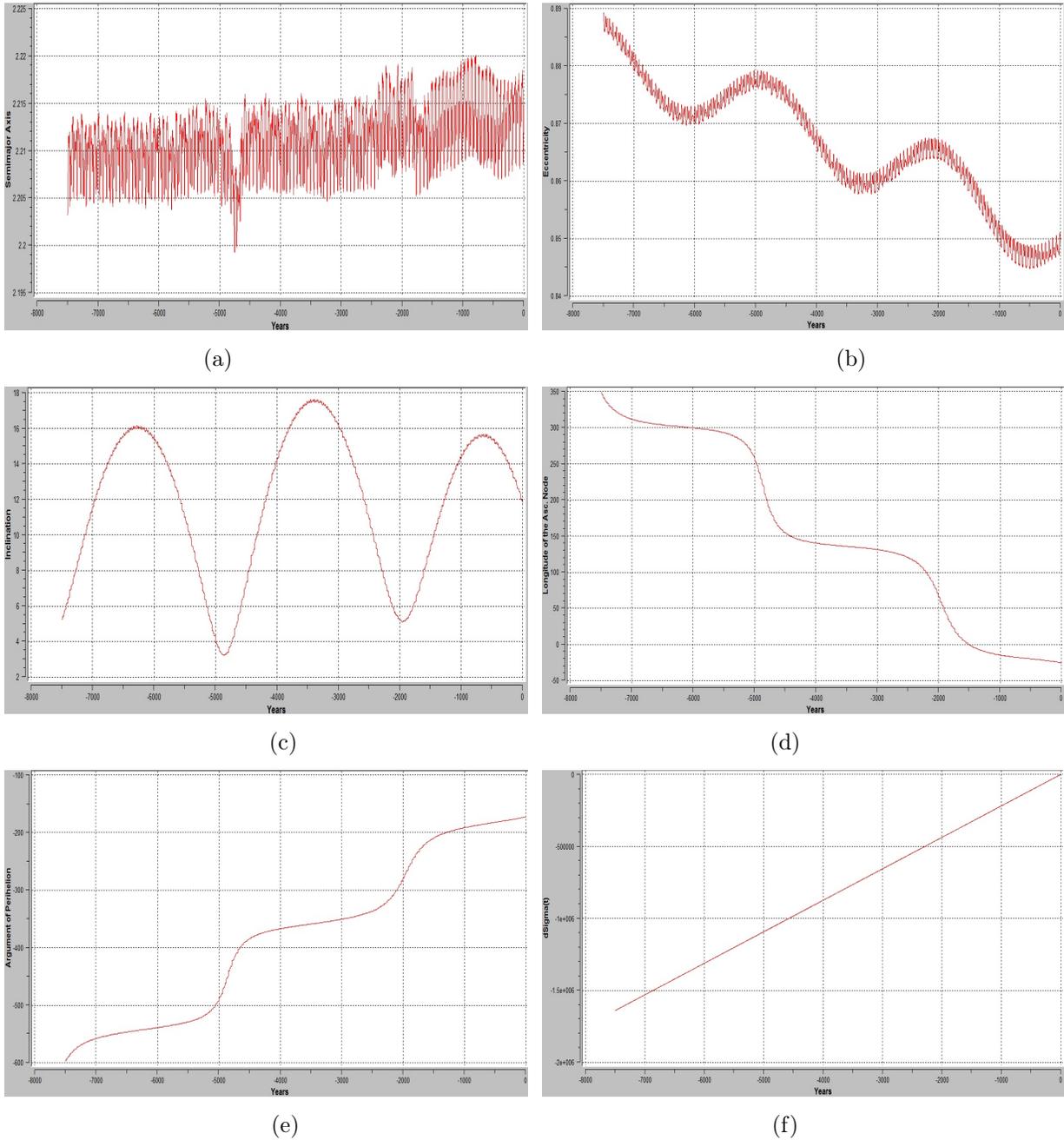


Figura 12: Cometa Encke. (a) semi-eixo maior (AU); (b) excentricidade; (c) inclinação; (d) longitude do nodo ascendente; (e) argumento do periélio; (f) variação da anomalia média

Comparado com o cometa Halley, o cometa Encke apresenta uma maior densidade de pontos, isto é devido ao período ser muito mais pequeno que o do Halley (período do Halley de 75 anos, período do Encke de 3 anos). O semi-eixo maior apresenta uma diferença de apenas 0,02 AU ao longo dos 7.500 anos e uma diferença da excentricidade de 0,04. A inclinação aparece com uma periodicidade de aproximadamente 3.000 anos com uma diferença de 12° .

3 Sistemas de coordenadas celestes

Para se conseguir saber as posições dos cometas relativamente ao abrigo rupestre onde se encontram as pinturas é preciso chegar às suas coordenadas horizontais locais. Para tal, a partir dos elementos orbitais de um cometa, chega-se às coordenadas equatoriais uranográficas, fazendo-se de seguida uma transformação de coordenadas.

3.1 Sistema de coordenadas equatoriais uranográficas

Sistema de coordenadas que tem como referência o equador celeste (plano que coincide com o equador terrestre) e o vertical do ponto vernal. Este sistema tem como coordenadas a declinação e a ascensão recta, tendo a grande vantagem de não depender do local de observação.

Declinação(δ): Amplitude do ângulo entre o equador e o paralelo do astro. A declinação toma valores entre $[-90^\circ, 90^\circ]$.

Ascensão Recta(α): Amplitude do ângulo, medido no equador celeste, entre o vertical do ponto vernal e o vertical do astro. A ascensão recta toma valores entre $[0^\circ, 360^\circ]$, podendo também ser expresso em horas.

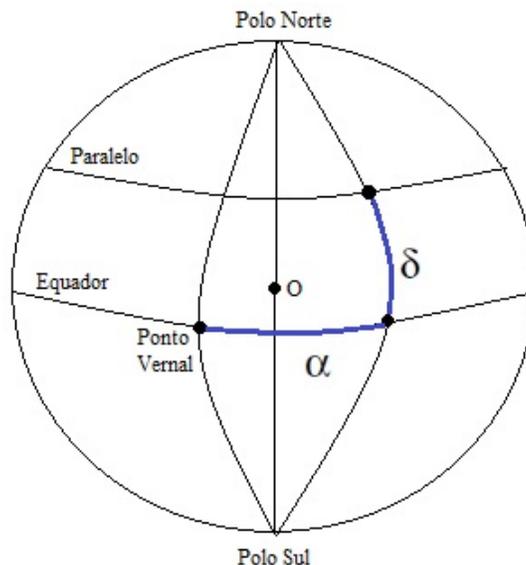


Figura 13: Sistema de coordenadas equatoriais uranográficas

Para se obter as coordenadas equatoriais uranográficas de um astro é necessário saber as anomalias média (é necessário calcular porque o programa PLASYS (Beutler, 2005) não

a dá directamente), excêntrica e verdadeira, as coordenadas eclípticas heliocêntricas e as coordenadas equatoriais geocêntricas.

3.1.1 Anomalias

A anomalia verdadeira, ϕ , da partícula P no instante t é a amplitude do ângulo descrito no intervalo $[\tau, t]$, em que τ é o instante da passagem pelo periélio. Supondo um ponto imaginário com uma órbita circular, em que o centro coincide com o centro da elipse, e de raio igual ao semi-eixo maior da elipse, em que o movimento é uniforme, ao ângulo descrito no intervalo $[\tau, t]$ chama-se anomalia média, M . O ângulo descrito no mesmo intervalo que vai desde o periélio até à projecção do corpo na mesma circunferência designa-se por anomalia excêntrica, E .

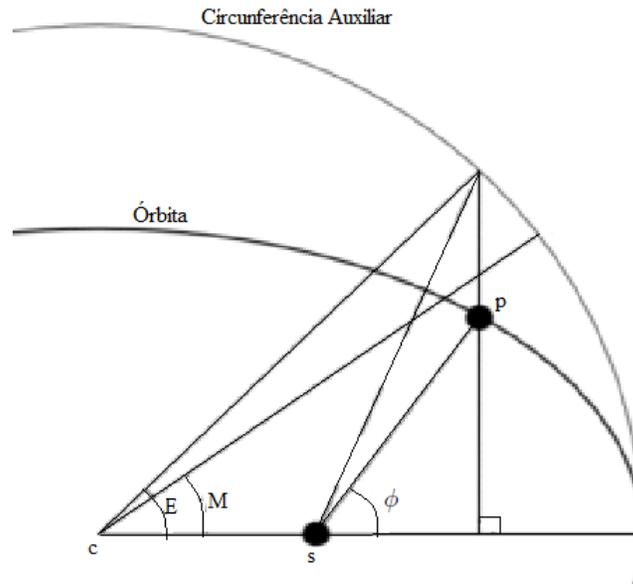


Figura 14: Representação das anomalias verdadeira (ϕ), média (M) e excêntrica (E) (alterada de uma imagem da Wikipedia)

Sendo T o período de revolução e n o movimento angular médio, a expressão para a anomalia média é:

$$M(t) = n(t - \tau), \quad n = \frac{2\pi}{T} \quad (7)$$

A anomalia excêntrica só é possível de calcular usando um método iterativo. A expressão é dada pela equação de Kepler:

$$M = E - e \sin E \quad (8)$$

O melhor método a usar é o de Newton-Raphson (Green, 1985), que vai permitir aproximar a raiz real de uma equação tal que $f(x) = 0$. Então

$$f(E) = E - e \sin E - M \quad (9)$$

$$f(E) = 0$$

Seja E_0 uma aproximação do verdadeiro valor de E , tem-se

$$E = E_0 + \Delta E \quad (10)$$

Usando a série de Taylor

$$f(E_0 + \Delta E) \approx f(E_0) + \Delta E f'(E_0) = 0 \quad (11)$$

Daqui sai a fórmula de Newton-Raphson:

$$\Delta E \approx \Delta E_0 = -\frac{f(E_0)}{f'(E_0)} \quad (12)$$

Aplicando esta fórmula tem-se

$$E_{n+1} = \frac{M - E_n + e \sin E_n}{1 - e \cos E_n} \quad (13)$$

sendo $E_0 = M + e \sin M$ a melhor escolha para o valor inicial.

Neste trabalho, no cálculo da anomalia excêntrica de todos os cometas, a partir da 8ª iteração o erro é inferior a 10^{-4} . Foram usadas 15 iterações para se ter a certeza de que o erro seja bastante pequeno .

Para calcular a anomalia verdadeira usa-se o seguinte:

$$\phi = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{E}{2} \right) \quad (14)$$

Esta expressão apresenta uma ambiguidade. Para a tirar basta considerar que a anomalia excêntrica e a anomalia verdadeira se encontram sempre no mesmo semi-plano.

3.1.2 Coordenadas eclípticas heliocêntricas

Sendo a distância radial entre o Sol e o astro

$$r = a \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \phi} \quad (15)$$

chega-se às coordenadas eclípticas heliocêntricas (Newhouse, 2010):

$$\begin{cases} x = r[\cos(\Omega) \cos(\omega + \phi) - \sin(\Omega) \sin(\omega + \phi) \cos(i)] \\ y = r[\sin(\Omega) \cos(\omega + \phi) + \cos(\Omega) \sin(\omega + \phi) \cos(i)] \\ z = r[\sin(\omega + \phi) \sin(i)] \end{cases} \quad (16)$$

3.1.3 Coordenadas equatoriais geocêntricas

Com as coordenadas anteriores para um astro e para a Terra, chega-se às coordenadas geocêntricas:

$$\begin{cases} x_{geo} = x_{cometa} - x_{Terra} \\ y_{geo} = y_{cometa} - y_{Terra} \\ z_{geo} = z_{cometa} - z_{Terra} \end{cases} \quad (17)$$

A partir destas coordenadas, fazendo uma rotação de eixos em torno de x_{geo} , chega-se às coordenadas equatoriais geocêntricas. A rotação feita é igual à obliquidade da eclíptica ϵ .

$$\begin{cases} x_{eq} = x_{geo} \\ y_{eq} = y_{geo} \cos(\epsilon) - z_{geo} \sin(\epsilon) \\ z_{eq} = y_{geo} \sin(\epsilon) + z_{geo} \cos(\epsilon) \end{cases} \quad (18)$$

Para todos os cálculos a obliquidade da eclíptica considerada foi a actual, $\epsilon = 23^\circ, 439281$. Sendo T_U o intervalo medido em séculos julianos desde 1 de Janeiro de 2000, a expressão para

ϵ é (Green, 1985):

$$\epsilon = 23^{\circ}26'21'',448 - 46'',815 T_U - 0'',001 T_U^2 + 0'',002 T_U^3 \quad (19)$$

$$T_U = \frac{DJ-2451545}{3625}, \quad \text{DJ é a Data Juliana}$$

A diferença da obliquidade da eclíptica actual com a de há 7.500 anos é de apenas $0^{\circ},7394$, o que torna o erro desprezável.

3.1.4 Ascensão recta e declinação

Já se pode agora calcular a ascensão recta e a declinação de um astro:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \arctan\left(\frac{y_{eq}}{x_{eq}}\right) \rightarrow \text{Ascensão recta} \\ \delta = \arctan\left(\frac{z_{eq}}{\sqrt{x_{eq}^2 + y_{eq}^2}}\right) \rightarrow \text{Declinação} \end{array} \right. \quad (20)$$

A distância entre um astro e a Terra é dada por

$$R = \sqrt{x_{eq}^2 + y_{eq}^2 + z_{eq}^2} \quad (21)$$

3.2 Sistema de coordenadas horizontais locais

Este sistema de coordenadas tem como referência o plano do horizonte e é composto pelo azimute e pela altura. Este sistema é o mais indicado para a localização de um astro no local de observação.

Azimute(A): Amplitude do ângulo, medido no horizonte, entre o meridiano do lugar e o vertical do astro. O azimute toma valores entre $[0^{\circ}, 360^{\circ}]$, podendo também ser expresso em horas.

Altura(h): Amplitude do ângulo entre o horizonte e o paralelo do astro. A altura toma valores entre $[-90^{\circ}, 90^{\circ}]$.

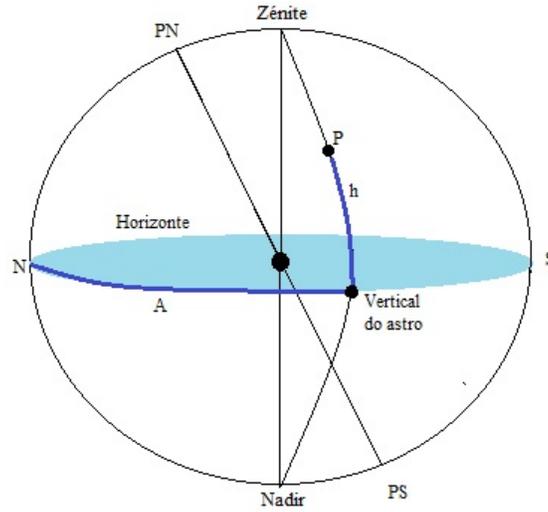


Figura 15: Sistema de coordenadas horizontais locais

Com a ascensão recta e a declinação, de um astro e as coordenadas geográficas do local (latitude, φ , longitude, λ) chega-se às coordenadas horizontais locais. Para tal é preciso ter em consideração algumas expressões: tempo sideral médio, equação dos equinócios, tempo sideral aparente local e ângulo horário.

3.2.1 Tempo sideral médio

Começa-se pelo cálculo do tempo sideral médio em Greenwich às $0h$ de tempo universal (Fernandes, 2009):

$$\text{TSMG}_{0T_u} = 6^{\text{h}}41^{\text{m}}50^{\text{s}}.54841 + 8640184^{\text{s}}.812866 T_u + 0^{\text{s}}.093104 T_u^2 - 6^{\text{s}}.2 \times 10^{-6} T_u^3 \quad (22)$$

De seguida tem-se o tempo sideral médio:

$$\text{TSM} = \text{TSMG} + \lambda \quad (23)$$

3.2.2 Equação dos equinócios

A expressão da equação dos equinócios aparece através da nutação da longitude celeste (Green, 1985):

$$\Delta\psi = -17'',1996 \sin(C) - 1'',3187 \sin(2F - 2D + 2C) - 0'',0927 \cos(2F - 2G) \quad (24)$$

$$C = 55^\circ,204723 - 0^\circ,05295378 d$$

$$D = 98^\circ,640537 + 12^\circ,19074913 d$$

$$F = 323^\circ,05 + 13^\circ,22935 d$$

d é o número de dias passados desde 1 de Janeiro de 1985.

Esta expressão pode ser aproximada (Fernandes, 2009):

$$\Delta\psi = -17''.2 \sin(125^\circ.045 - 1934^\circ.136 \times T_u) \quad (25)$$

Sendo ϵ a obliquidade da eclíptica, a equação dos equinócios é:

$$\text{EqEq} = \Delta\psi \cdot \cos(\epsilon) \quad (26)$$

3.2.3 Tempo sideral aparente local e ângulo horário

Com o cálculo da equação dos equinócios chega-se ao tempo sideral aparente local:

$$\text{TS} = \text{TSM} + \text{EqEq} \quad (27)$$

O ângulo horário é dado por

$$\text{H} = \text{TS} - \alpha \quad (28)$$

3.2.4 Altura e azimute

A altura sai da seguinte expressão

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H \quad (29)$$

e o azimute sai do seguinte sistema

$$\begin{cases} \sin A = \frac{\cos \delta \sin H}{\cos h} \\ \cos A = \frac{\sin \delta - \sin h \sin \varphi}{\cos h \cos \varphi} \end{cases} \quad (30)$$

São usadas duas equações porque há uma ambiguidade no cálculo de A.

3.2.5 O código MATLAB

Foi construído um programa no MATLAB (algoritmo no anexo A) para calcular a altura e o azimute ao longo dos 5.500 anos. Este programa começa por ir buscar os dados iniciais dos cometas, a uma tabela previamente criada, e vai introduzi-los, um a um, no programa PLASYS (Beutler, 2005).

Para verificar se os resultados obtidos estão correctos, fez-se uma comparação entre a ascensão recta e a declinação dos cometas Halley e Encke, obtidos pela NASA através do "*JPL Small-Body Database Browser*", com o que foi obtido pelo programa MATLAB construído neste trabalho. Os dados disponibilizados pela NASA têm início no ano de 1600 pelo que foi utilizado um intervalo de tempo de 413 anos no programa PLASYS.

Dessa comparação foram elaborados os gráficos que se seguem com as diferenças das coordenadas.

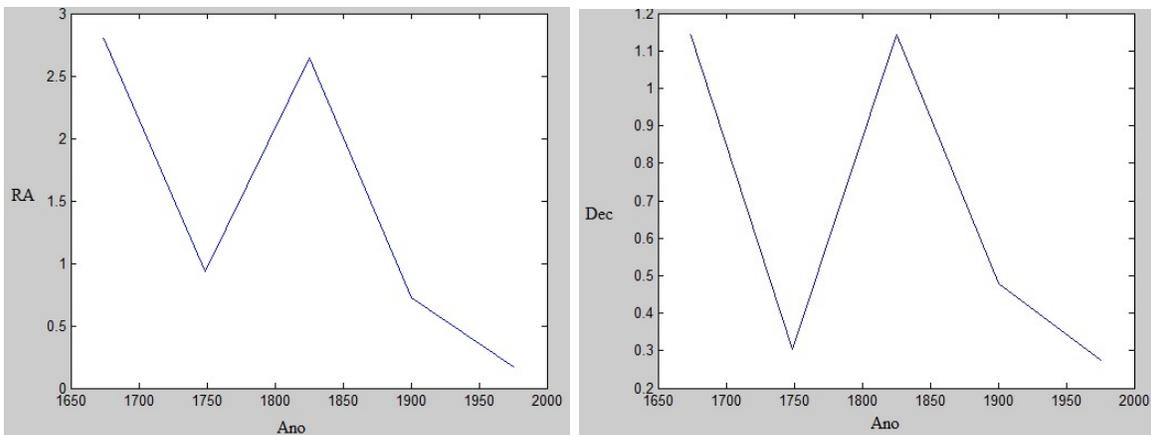


Figura 16: Diferença (em graus) da ascensão recta e da declinação do cometa Halley

Como se pode ver nestes gráficos das diferenças das coordenadas equatoriais uranográficas do cometa Halley, a diferença máxima para a ascensão recta é de menos de 3° e diferença máxima da declinação é de 1°, 1.

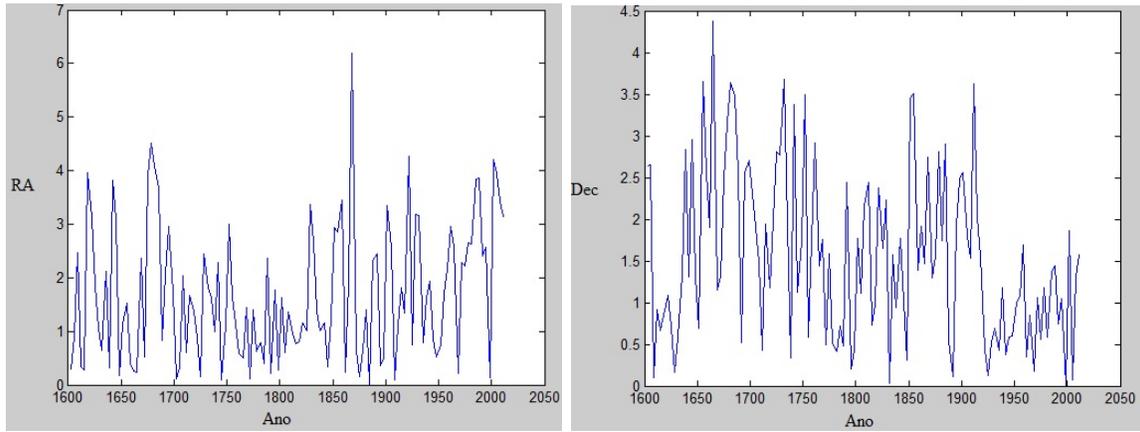


Figura 17: Diferença (em graus) da ascensão recta e da declinação do cometa Encke

Nestes gráficos do cometa Encke, a diferença também não é muito grande, máximo de 6° para a ascensão recta apenas num ponto sendo a restante entre $[0, 4]$ e de $4, 5^\circ$ para a declinação.

4 Magnitude de um cometa

Com as coordenadas horizontais locais tem-se a posição dos cometas ao longo dos 5.500 anos. É agora necessário saber quais os que seriam visíveis no abrigo rupestre. Para tal vai se ter em conta o brilho dos cometas.

A magnitude aparente serve precisamente para medir esse brilho. Relacionado com a magnitude aparente tem-se a magnitude absoluta, que mede a luminosidade.

Para um cometa a definição de magnitude absoluta (M) é o brilho que o cometa teria a uma distância de 1 AU da Terra e a 1 AU do Sol. A magnitude aparente é definida pela seguinte expressão:

$$m = M + 5 \log d_T + 10 \log d_S \quad (31)$$

$d_T \rightarrow$ distância do cometa à Terra em AU

$d_S \rightarrow$ distância do cometa ao Sol em AU

Quanto maior for a magnitude de um cometa, menos brilhante é. A magnitude aparente máxima para que qualquer astro seja visível a olho nu é 6.

Os últimos "grandes" cometas a passar perto da Terra foram o cometa Halley em 1986, com uma magnitude aparente mínima de 2.6, e o cometa Hale-Bopp em 1997 que teve uma magnitude mínima de 0.



Figura 18: Fotografias do cometa Halley (http://en.wikipedia.org/wiki/Halley's_Comet) e do cometa Hale-Bopp (http://www.rocketroberts.com/astro/halebopp_gallery.htm), respectivamente

5 Resultados

Neste trabalho, para escolher os cometas possíveis, foram usados os seguintes critérios: intervalo da altura e azimute possíveis de onde o suposto cometa estaria, magnitude aparente menor que 6 e período de revolução menor que 7.500 anos.

Os dados iniciais dos cometas foram retirados do "*JPL Small-Body Database Search Engine*" da NASA. De todos os cometas registados (mais de 3.000), foram considerados aqueles onde há informação sobre a magnitude absoluta. Desses cometas, como o registo mais antigo de passagem pelo periélio data de 1832, considerou-se aqueles cujo período de revolução é inferior a 7.500 anos. Chegou-se a uma lista de 665 cometas onde foram usados os seguintes dados: semi-eixo maior, excentricidade, inclinação, longitude do nodo ascendente, argumento do periélio, instante de passagem pelo periélio, período de revolução e magnitude absoluta.

Depois de corrido o programa PLASYS obtém-se a variação dos elementos orbitais ao longo dos 7.500 anos necessária para calcular a altura e o azimute para cada cometa para cada instante entre 5.500 a.C. e 1 a.C e as respectivas magnitudes aparentes.

Através da imagem da figura 5 e do programa Stellarium, chegou-se a um intervalo para o azimute e para a altura, de onde o suposto cometa estaria:

$$80^\circ < A < 280^\circ \qquad 20^\circ < h < 60^\circ$$

Comparando estes dois intervalos com as coordenadas locais de todos os cometas e considerando apenas aqueles com magnitude aparente inferior a 6, foi construída a Tabela 1 que tem os seguintes dados: data (sinal negativo significa a.C.), altura, azimute, distância do cometa ao Sol, distância do cometa à Terra e magnitude aparente.

Cometa	Data	Altura	Azimute	Dist. ao Sol	Dist. à Terra	Mag.
3D/Biela	-2365, 70	29°, 65	262°, 71	1, 26 AU	0, 35 AU	5, 80
40P/Väisälä 1	-1421, 58	28°, 67	90°, 28	1, 10 AU	0, 38 AU	3, 82
134P/Kowal-Vavrova	-3784, 73	29°, 09	95°, 26	1, 09 AU	0, 46 AU	4, 68
P/2004 VR8	-4626, 45	35°, 95	114°, 55	1, 43 AU	0, 85 AU	5, 81

Tabela 1: Resultados depois de corrido o programa MATLAB

Assim, depois de corrido o programa para todos os 665 cometas, chegou-se à conclusão de que quatro deles foram visíveis no espaço de tempo estudado, a partir do abrigo rupestre.

No painel 1, está representada a possível órbita do cometa no céu, sugerida por (Lima, 2013). Com as informações obtidas referentes aos quatro cometas calculou-se a altura e o azimute diários, ao longo de um ano, para poder definir a órbita de cada cometa até desaparecer do campo de visão. Para isso, construíram-se gráficos e através do programa Stellarium chegou-se a uma órbita aproximada.

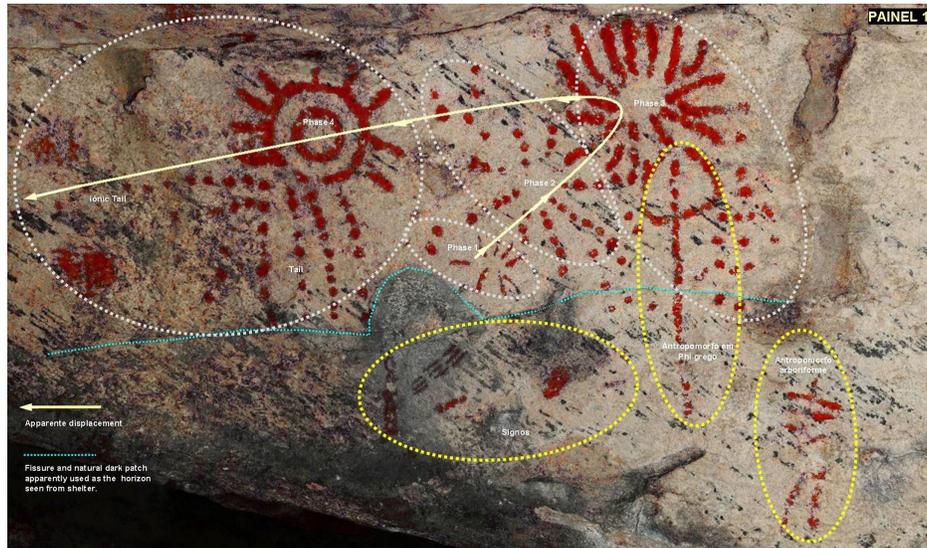


Figura 19: Painel 1 do abrigo rupestre (Paulo Lima, CEAUCP)

5.1 Características dos cometas

Todos os dados obtidos para estes cometas foram comparados com os dados mais recentes obtidos pelo "*JPL Small-Body Database Browser*" da NASA e foram criadas tabelas com as suas características. Nas tabelas de comparação, a distância mínima à Terra refere-se à menor distância atingida entre eles na órbita mais recente, e a distância à Terra refere-se à distância naquele instante, não sendo necessariamente a distância mínima.

3D/Biela

Foi descoberto por Jacques Leibax Montaigne (França) a 8 de Março de 1772 e teve como primeira designação 3D/1772 E1.



Figura 20: Desenho feito por Otto Wilhelm Struve a 25 de Setembro de 1852

(<http://cometography.com/pcomets/003d.html>)

Foi observado em 1846 a partir-se em dois e em 1852 os dois fragmentos foram observados como cometas gêmeos, desde então este cometa nunca mais foi observado, tendo sido possivelmente destruído.

Data	03/12/1832	2365 a.C.
Semi-eixo maior	3.535 AU	3.125 AU
Excentricidade	0.751	0.813
Inclinação	13.216	10.758
Longitude do nodo ascendente	250.669	153.214
Argumento do periélio	221.659	314.372
Instante da passagem pelo periélio	26/11/1832	2365 a.C.
Período	6.650 anos	5.525 anos
Distância periélica	0.879 AU	0.585 AU
Distância afélica	6.190 AU	5.666 AU
Distância mínima à Terra / Distância à Terra	0.000518 AU	0.346 AU

Tabela 2: Comparação de dados do cometa Biela (NASA e resultados obtidos)

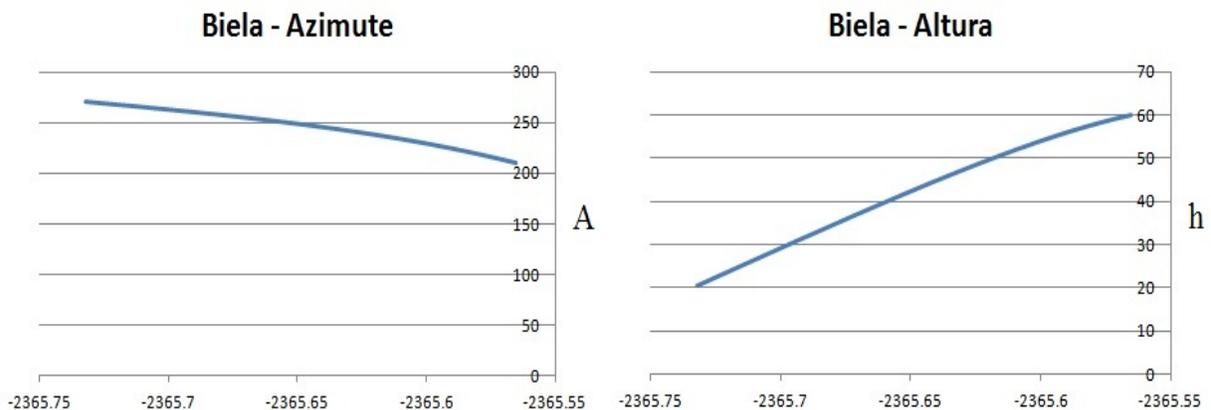


Figura 21: Azimute e altura do cometa Biela, este cometa esteve visível durante 63 dias



Figura 22: Órbita aproximada do cometa Biela (imagem do Stellarium)

40P/Väisälä 1

Descoberto por Yrjö Väisälä (Finlândia) a 8 de Fevereiro de 1939, teve como primeira designação 40P/1939 CB.



Figura 23: Imagem obtida a 18 de Março de 2004 por Mihelcic Matej através de um refletor de 10 polegadas f/6.3 e uma câmara MX CCD com tempo de exposição de 120 segundos
 (<http://cometography.com/pcomets/040p.html>)

Data	23/08/2004	1421 a.C.
Semi-eixo maior	4.892 AU	3.479 AU
Excentricidade	0.633	0.683
Inclinação	11.538	29.957
Longitude do nodo ascendente	134.733	219.661
Argumento do periélio	47.189	12.929
Instante da passagem pelo periélio	22/01/2004	1428 a.C.
Período	10.82 anos	6.488 anos
Distância periélica	1.796 AU	1.102 AU
Distância afélica	7.989 AU	5.856 AU
Distância mínima à Terra / Distância à Terra	0.82 AU	0.379 AU

Tabela 3: Comparação de dados do cometa Väisälä 1 (NASA e resultados obtidos)

A distância à Terra é menor do que a distância mínima que actualmente atinge, portanto na altura o cometa seria mais fácil de ser observado à vista desarmada. De notar a grande diferença na inclinação. Durante a última passagem este cometa teve uma magnitude aparente mínima de 15, a 1 de Março de 2003. Há-de voltar a passar perto da Terra em 2014.

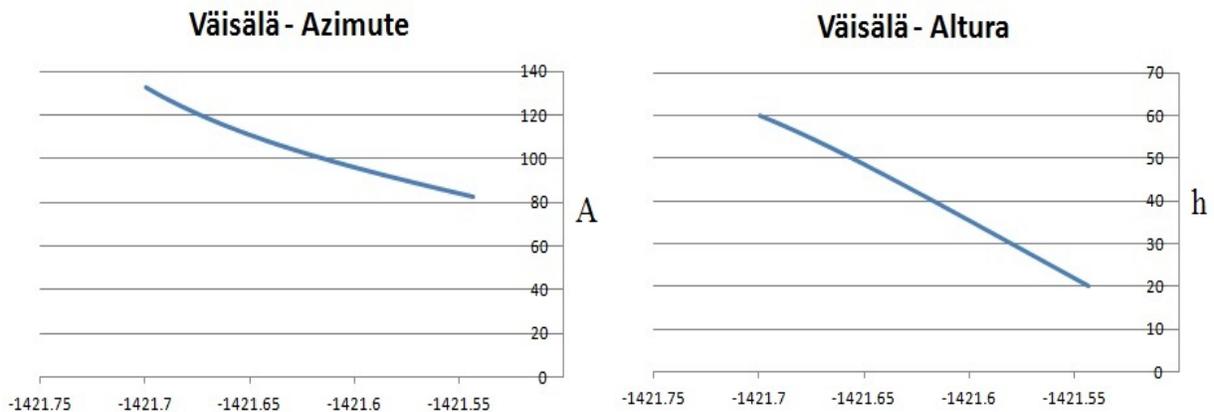


Figura 24: Azimute e altura do cometa Väisälä 1, este cometa esteve visível durante 59 dias



Figura 25: Órbita aproximada do cometa Väisälä 1 (imagem do Stellarium)

Kowal-Vavrova

Descoberto por Charles T. Kowal e por Zdenka Vavrova em 1983, teve como primeira designação 134P/1983 J3.

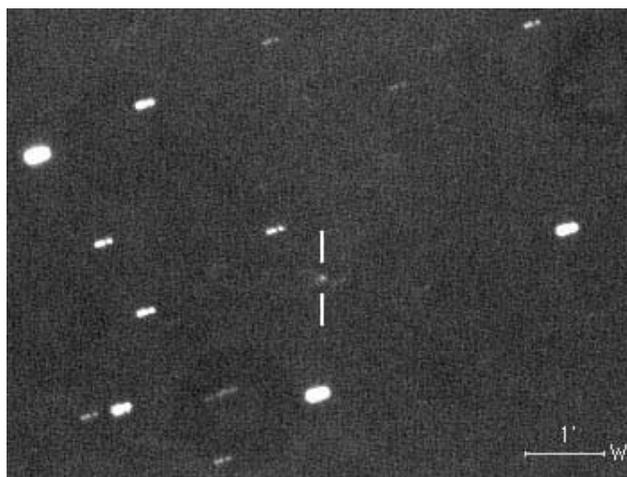


Figura 26: Imagem CCD obtida por Akimasa Nakamura a 19 de Maio de 1998 usando um telescópio Ritchey-Chretien (<http://cometography.com/pcomets/134p.html>)

Data	25/07/2013	3784 a.C.
Semi-eixo maior	6.229 AU	2.995 AU
Excentricidade	0.587	0.925
Inclinação	4.349	5.891
Longitude do nodo ascendente	202.125	307.300
Argumento do periélio	18.863	345.883
Instante da passagem pelo periélio	21/05/2014	3789 a.C.
Período	15.55 anos	5.182 anos
Distância periélica	2.571 AU	0.225 AU
Distância afélica	9.887 AU	5.764 AU
Distância mínima à Terra / Distância à Terra	1.565 AU	0.456 AU

Tabela 4: Comparação de dados do cometa Kowal-Vavrova (NASA e resultados obtidos)

Grande diferença do semi-eixo maior, o que leva a um aumento do período de pouco mais de 10 anos. A distância à Terra em 3784 a.C. é muito inferior à distância mínima actual da órbita, portanto o cometa era muito mais brilhante do que actualmente.

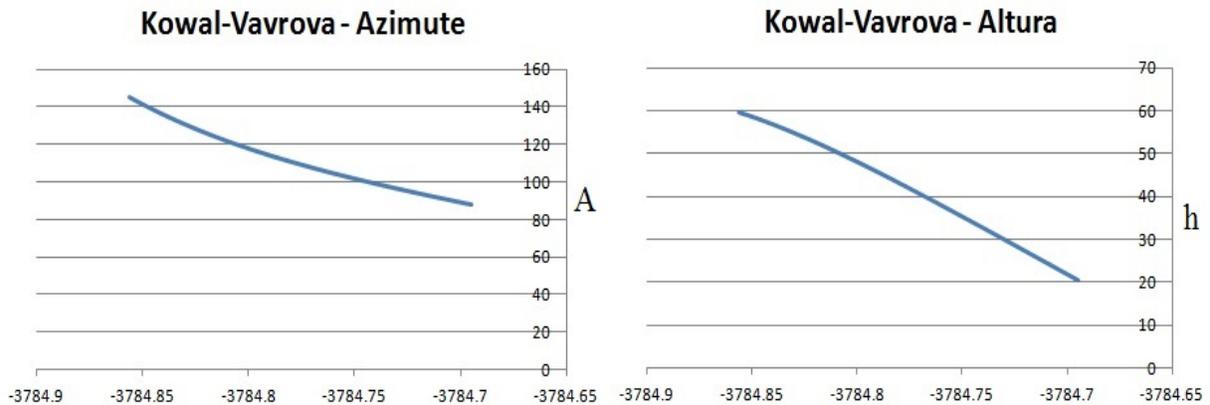


Figura 27: Azimute e altura do cometa Kowal-Vavrova, este cometa esteve visível durante 61 dias



Figura 28: Órbita aproximada do cometa Kowal-Vavrova (imagem do Stellarium)

P/2004 VR8

Foi descoberto através de um telescópio do LONEOS (Lowell Observatory Near-Earth Object Search) localizado em Flagstaff no Arizona. Não há muita informação sobre este cometa.

Data	09/08/2005	4626 a.C.
Semi-eixo maior	4.847 AU	3.818 AU
Excentricidade	0.510	0.661
Inclinação	20.117	17.407
Longitude do nodo ascendente	71.216	98.442
Argumento do periélio	63.100	187.079
Instante da passagem pelo periélio	02/09/2005	4633 a.C.
Período	10.67 anos	7.46 anos
Distância periélica	2.376 AU	1.295 AU
Distância afélica	7.319 AU	6.341 AU
Distância mínima à Terra / Distância à Terra	1.464 AU	0.851 AU

Tabela 5: Comparação de dados do cometa P/2004 VR8 (NASA e resultados obtidos)

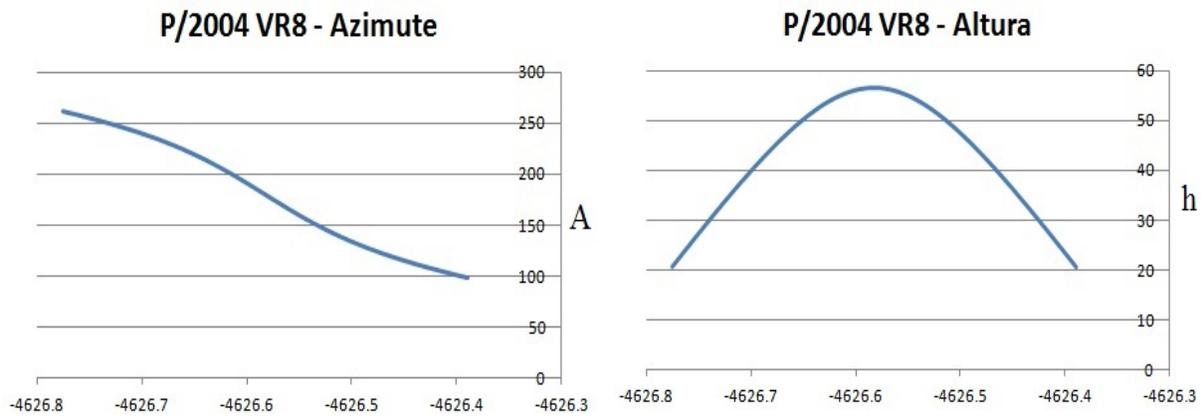


Figura 29: Azimute e altura do cometa P/2004 VR8, este cometa esteve visível durante 143 dias



Figura 30: Órbita aproximada do cometa P/2004 VR8 (imagem do Stellarium)

6 Discussão e Conclusões

Com este trabalho conclui-se que no abrigo rupestre, em Carlão, entre os anos de 5.500 a.C e 1 a.C., pelo menos os cometas Biela, Väisälä 1, Kowal-Vavrova e P/2004 VR8 seriam observáveis à vista desarmada. No entanto nenhuma das órbitas obtidas coincide com a órbita aparentemente representada (figura 19). Mas, a ser a representação de um cometa tem sempre que se considerar a alternativa de ter sido um ainda não descoberto ou de poder já ter sido destruído (caso do Biela) sem, no entanto, nunca ter sido referenciado. Outros cometas colidem com o Sol ou com outros planetas, como o caso do cometa Shoemaker-Levy 9 em 1994, que foi observado a colidir com Júpiter.



Figura 31: Imagem de 9 fragmentos (num total de 21) do cometa Shoemaker-Levy 9 a 17 de Maio de 1994 (Wikipedia)

Um cometa perde massa cada vez que passa perto do Sol, a taxa dessa perda depende dos seguintes factores: composição, período de revolução (quanto menor o período maior a taxa da perda de massa) e a distância mínima ao Sol (em cada período esta distância não vai ser a mesma). Atualmente não há um modelo físico para a taxa de perda de massa, esta é estimada com simulações numéricas (Fink, Rubin, 2012). No caso particular destes cometas não nos foi possível determinar esse valor. Em todo o caso, a magnitude aparente dos cometas na época estudada, há-de ser menor do que a aqui apresentada.

Os dados do "*JPL Small-Body Database Search Engine*" da NASA, estão a ser constantemente actualizados, por exemplo, a adição da magnitude absoluta, um dos critérios da selecção dos cometas a serem estudados, e a inclusão de dados de cometas que vão sendo descobertos. Consultando regularmente esta base de dados da NASA e fazendo o mesmo estudo, esta lista de quatro cometas pode vir a ser aumentada.

7 Anexo

Anexo A: algoritmo MATLAB

Foram usados quatro ficheiros para os cálculos pretendidos:

1) Cálculo dos elementos orbitais ao longo do tempo

- Ler a tabela "Excel" dos dados dos 665 cometas

Os dados a ler e guardar vão ser:

Nome do cometa;

Semi-eixo maior $\rightarrow a$;

Excentricidade $\rightarrow e$;

Inclinação $\rightarrow i$;

Longitude do nodo ascendente $\rightarrow node$;

Argumento do periélio $\rightarrow arg_peri$;

Instante da passagem pelo periélio (data Juliana) $\rightarrow tp$;

Período de revolução (anos) $\rightarrow T$.

Para colocar os dados no PLASYS precisamos da longitude do periélio com referência ao da Terra. A longitude do periélio é a soma do argumento do periélio com a longitude do nodo ascendente, assim

$$long_peri = (arg_peri + node) - (argTerraInicial + nodeTerraInicial)$$

Para o instante de passagem pelo periélio, é preciso indicar o número de anos, antes (com sinal negativo) ou depois da época inicial. Sendo a data Juliana da época inicial 2456593,5 vamos ter:

$$tpa = \frac{tp - 2456293.5}{365.25} \text{ (anos)}$$

Coloca-se os dados no PLASYS e corre-se o programa.

2) Cálculo da anomalia verdadeira da Terra ao longo do tempo

- Ler o ficheiro do output do programa PLASYS com os dados da Terra ao longo dos 5.000 anos. Vai-se ler o seguinte para cada instante p , com p de 1 até ao número total de elementos :

Data de cada instante $\rightarrow DataTerra$;

Semi-eixo maior $\rightarrow aTerra$;

Excentricidade $\rightarrow eTerra$;

Inclinação $\rightarrow iTerra$;

Longitude do nodo ascendente $\rightarrow nodeTerra$;

Argumento do periélio $\rightarrow periTerra$.

- Cálculo da anomalia média da Terra ao longo do tempo

$$M(p) = \frac{360}{Q(p)}(DataTerra(p) - (tpaTerra - Q(p) + 2013))$$

$tpaTerra \rightarrow$ instante da última passagem da Terra pelo periélio antes de $DataTerra(p)$

$Q(p) \rightarrow$ soma dos períodos de revolução desde 2013 até $DataTerra(p)$

- Cálculo da anomalia excêntrica ao longo do tempo (15 iterações)

$$ETerra(p, 1) = MTerra(p) + eTerra(p) \times \sin(MTerra(p))$$

Para n de 1 até 14:

$$ETerra = ETerra(p, n) + \frac{MTerra(p) - ETerra(p, n) + \frac{180}{\pi} eTerra(p) \sin(ETerra(p, n))}{1 - eTerra(p) \cos(ETerra(p, n))}$$

- Cálculo da anomalia verdadeira ao longo do tempo

Para tirar a ambiguidade da função tangente para calcular a anomalia verdadeira, como a anomalia excêntrica e a anomalia verdadeira se encontram sempre no mesmo semi-plano, então:

$$tangente(p) = \sqrt{\frac{1 + eTerra(p)}{1 - eTerra(p)}} \tan\left(\frac{1}{2}ETerra(p)\right)$$

Se $0 \leq ETerra(p) < 180$

se $tangente(p) < 0$ então

$$TA_Terra(p) = 2 [\arctan(tangente(p)) + 180]$$

se $tangente(p) \geq 0$ então

$$TA_Terra(p) = 2 [\arctan(tangente(p))]$$

Se $180 \leq ETerra(p) < 360$

se $tangente(p) \leq 0$ então

$$TA_Terra(p) = 2 [\arctan(tangente(p)) + 180]$$

se $tangente(p) > 0$ então

$$TA_Terra(p) = 2 [\arctan(tangente(p)) + 360]$$

Colocar $TA_Terra(p)$ entre $[0, 360]$

3) Cálculo das coordenadas locais entre 5.500 aC e 1 aC

Os cálculos vão ser feitos para cada cometa: $c \in \{1, \dots, 665\}$

- Colocar os dados dos cometas numa tabela ("CometaOut")

Para cada linha, que vai corresponder a cada cometa, vamos ter

Primeira coluna \rightarrow nome do cometa

Segunda coluna \rightarrow data para cada ponto ($DataCometa \rightarrow CometaOut\{c,2\}$)

Terceira coluna \rightarrow semi-eixo maior para cada ponto ($aCometa \rightarrow CometaOut\{c,3\}$)

Quarta coluna \rightarrow excentricidade para cada ponto ($eCometa \rightarrow CometaOut\{c,4\}$)

Quinta coluna \rightarrow inclinação para cada ponto ($iCometa \rightarrow CometaOut\{c,5\}$)

Sexta coluna \rightarrow longitude do nodo ascendente para cada ponto ($nodeCometa \rightarrow CometaOut\{c,6\}$)

Sétima coluna \rightarrow argumento do periélio para cada cometa ($argCometa \rightarrow CometaOut\{c,7\}$)

Colocar os ângulos da longitude do nodo ascendente e do argumento do periélio ente $[0,360]$.

- Cálculo da anomalia média

Como nem sempre se tem o instante de passagem pelo periélio imediatamente antes de 01/01/2013, tem que se calcular esse instante antes da data do primeiro ponto que temos (tpa), então:

Para m de 1 até ao número de pontos de cada cometa

$$P(m, 1) = 0$$

enquanto $DataCometa(m) < (2013 + tpa - P(m))$

$$P(m) = P(m) + \sqrt{(aCometa)^3}$$

$$MCometa(m) = \frac{360}{\sqrt{(aCometa)^3}} (DataCometa(m) - (2013 + tpa - P(m)))$$

$P(m)$ é a soma dos períodos de revolução desde tp até $DataCometa$

- Cálculo da anomalia excêntrica (15 iterações)

$$ECometa(m,1) = MCometa(m) + eCometa(m) \sin(MCometa(m))$$

Para n de 1 até 14

$$ECometa(m, n+1) = ECometa(m, n) + \frac{MCometa(m) - ECometa(m, n) + \frac{180eCometa(m)}{\pi} \sin(ECometa(m, n))}{1 - eCometa(m) \cos(ECometa(m, n))}$$

- Cálculo da anomalia verdadeira

$$tangente(m) = \sqrt{\left(\frac{1 + eCometa(m)}{1 - eCometa(m)}\right)} \tan\left(\frac{1}{2}ECometa(m, 15)\right)$$

Se $0 \leq ECometa(m, 15) < 180$

se $tangente(m) < 0$ então

$$Tacometa(m) = 2[\arctan(tangente(m) + 180)]$$

se $\text{tangente}(m) \geq 0$ então

$$T\text{Acometa}(m) = 2 \arctan(\text{tangente}(m))$$

Se $180 \leq E\text{Cometa}(m, 15) < 360$

se $\text{tangente}(m) \geq 0$ então

$$T\text{Acometa}(m) = 2[\arctan(\text{tangente}(m)) + 180]$$

se $\text{tangente}(m) < 0$ então

$$T\text{Acometa}(m) = 2[\arctan(\text{tangente}(m)) + 360]$$

Colocar $T\text{Acometa}(m)$ entre $[0, 360]$

- Cálculo da ascensão recta e da declinação

Como temos mais pontos para a Terra do que para os cometas, vamos apenas considerar os pontos em que a data da Terra seja o mais próximo possível da data para cada ponto do cometa, então

Para l de 1 até ao número total de elementos da Terra

Para j de 1 até ao número total de elementos do cometa

Se $\text{DataTerra}(l) \leq \text{DataCometa}(j)$

guardar em $\text{DataUsada}(j) = \text{DataTerra}(l)$ e repetir

Se $\text{DataTerra}(l) > \text{DataCometa}(j)$

parar o ciclo ficando com os seguintes dados guardados:

$$\text{DataUsada}(j) = \text{DataTerra}(l - 1)$$

$$a\text{Usado}(j) = a\text{Terra}(l - 1)$$

$$e\text{Usado}(j) = e\text{Terra}(l - 1)$$

$$i\text{Usado}(j) = i\text{Terra}(l - 1)$$

$$\text{nodeUsado}(j) = \text{nodeTerra}(l - 1)$$

$$\text{argUsado}(j) = \text{argTerra}(l - 1)$$

$$TA_Usado(j) = TA_Terra(l - 1)$$

- Distância radial entre o Sol e o cometa e entre o Sol e a Terra

$$rCometa(j) = aCometa(j) \frac{1 - (eCometa(j))^2}{1 + eCometa(j) \cos(TAcometa(j))}$$

$$rTerra(j) = aUsado(j) \frac{1 - (eUsado(j))^2}{1 + eUsado(j) \cos(TA_Usado(j))}$$

- Coordenadas eclípticas heliocêntricas

$$\begin{cases} xCometa(j, 1) = rCometa(j)[\cos(nodeCometa(j)) \cos(argCometa(j) + TAcometa(j)) - \sin(nodeCometa(j)) \sin(argCometa(j) + TAcometa(j)) \cos(iCometa(j))] \\ xCometa(j, 2) = rCometa(j)[\sin(nodeCometa(j)) \cos(argCometa(j) + TAcometa(j)) + \cos(nodeCometa(j)) \sin(argCometa(j) + TAcometa(j)) \cos(iCometa(j))] \\ xCometa(j, 3) = rCometa(j)[\sin(argCometa(j) + TAcometa(j)) \sin(iCometa(j))] \end{cases}$$

$$\begin{cases} xTerra(j, 1) = rTerra(j)[\cos(nodeUsado(j)) \cos(argUsado(j) + TA_Usado(j)) - \sin(nodeUsado(j)) \sin(argUsado(j) + TA_Usado(j)) \cos(iUsado(j))] \\ xTerra(j, 2) = rTerra(j)[\sin(nodeUsado(j)) \cos(argUsado(j) + TA_Usado(j)) + \cos(nodeUsado(j)) \sin(argUsado(j) + TA_Usado(j)) \cos(iUsado(j))] \\ xTerra(j, 3) = rTerra(j)[\sin(argUsado(j) + TA_Usado(j)) \sin(iUsado(j))] \end{cases}$$

- Coordenadas eclípticas geocêntricas

$$\begin{cases} xgeo(j, 1) = xCometa(j, 1) - xTerra(j, 1) \\ xgeo(j, 2) = xCometa(j, 2) - xTerra(j, 2) \\ xgeo(j, 3) = xCometa(j, 3) - xTerra(j, 3) \end{cases}$$

- Coordenadas equatoriais geocêntricas

$$\begin{cases} xeq(j, 1) = xgeo(j, 1) \\ xeq(j, 2) = xgeo(j, 2) \cos(\epsilon) - xgeo(j, 3) \sin(\epsilon) \\ xgeo(j, 2) \sin(\epsilon) + xgeo(j, 3) \cos(\epsilon) \end{cases}$$

$$\epsilon = 23.439281 \rightarrow \text{obliquidade da eclítica}$$

- Coordenadas equatoriais uranográficas

Declinação:

$$Dec = \arctan \left(\frac{xeq(j, 3)}{\sqrt{(xeq(j, 1))^2 + (xeq(j, 2))^2}} \right)$$

Ascensão recta:

Por causa da ambiguidade vamos ter

Se $xeq(j, 1) < 0$ então

$$RA(j) = \arctan \left(\frac{xeq(j, 2)}{xeq(j, 1)} \right) + 180$$

Se $xeq(j, 1) \geq 0$ e $xeq(j, 2) < 0$ então

$$RA(j) = \arctan \left(\frac{xeq(j, 2)}{xeq(j, 1)} \right) + 360$$

Se $xeq(j, 1) \geq 0$ e $xeq(j, 2) \geq 0$ então

$$RA(j) = \arctan \left(\frac{xeq(j, 2)}{xeq(j, 1)} \right)$$

Distância entre o cometa e a Terra:

$$Radial(j) = \sqrt{(xeq(j, 1))^2 + (xeq(j, 2))^2 + (xeq(j, 3))^2}$$

- Colocar numa tabela os dados obtidos dos cometas entre 5.500 aC e 1 aC
- Data Juliana

Para m de 1 até ao número de elementos que estão neste intervalo de tempo

$$DJ(m) = \text{INT}[365.25 \times DataCometa(m) - 1] + \text{INT}[30.6001 \times 14] - 2 + 1720996.5 + 1$$

- Tempo sideral médio em Greenwich às 0hTU

$$TU(m) = \frac{DJ(m) - 2451545}{36525}$$

$$TSMG_0(m) = 6 + \frac{41}{60} + \frac{50.54841}{3600} + \left(\frac{8640184.812866}{3600} TU(m) \right) + \frac{0.093104}{3600} (TU(m))^2 - \frac{6.2 \times 10^{-6}}{3600} (TU(m))^3$$

Colocar $TSMG_0$ entre 0 e 24 horas

- Tempo sideral médio no local

$$TSM(m) = TSMG_0(m) + \left(long + \frac{24}{360} \right)$$

$$long = - \left(7 + \frac{24}{60} + \frac{8.50}{3600} \right) \rightarrow \text{longitude do local}$$

Colocar $TSM(m)$ entre 0 e 24 horas

- Equação dos equinócios

$$EqEq(m) = - \frac{17.2}{3600} \sin(125.045 - 1934.136 \times TU(m)) \cos(\epsilon)$$

- Tempo sideral aparente no local

$$TS(m) = EqEq(m) \times \frac{24}{360} + TSM(m)$$

- Ângulo horário

$$H(m) = TS(m) - RA(m) \times \frac{24}{360}$$

Colocar $H(m)$ entre 0 e 24 horas

- Coordenadas horizontais locais

Altura:

$$H(m) = H(m) \times \frac{360}{24}$$

$$h(m) = \arcsin[\sin(lat) \sin(Dec(m)) + \cos(lat) \cos(Dec(m)) \cos(H(m))]$$

$$lat = 41 + \frac{17}{60} + \frac{47.82}{3600} \rightarrow \text{latitude do local}$$

Azimute:

Por causa da ambiguidade vamos ter

$$\begin{cases} \text{seno}A(m) = \frac{\cos(Dec(m)) \sin(H(m))}{\cos(h(m))} \\ \text{cossen}A(m) = \frac{\sin(Dec(m)) - \sin(h(m)) \sin(lat)}{\cos(h(m)) \cos(lat)} \end{cases}$$

Se $\text{seno}A(m) \geq 0$ e $\text{cossen}A(m) \geq 0$ então

$$A(m) = \arcsin(\text{seno}A(m))$$

Se $\text{seno}A(m) \geq 0$ e $\text{cossen}A(m) < 0$ então

$$A(m) = 180 - \arcsin(\text{seno}A(m))$$

Se $\text{seno}A(m) < 0$ e $\text{cossen}A(m) < 0$ então

$$A(m) = \arcsin(\text{seno}A(m)) + 180$$

Se $\text{seno}A(m) < 0$ e $\text{cossen}A(m) \geq 0$ então

$$A(m) = \arcsin(\text{seno}A(m)) + 360$$

- Colocar os resultados numa tabela

Primeira Coluna: Nome do cometa

Segunda Coluna: Tabela com os seguintes valores

Primeira coluna \rightarrow Data

Segunda coluna \rightarrow Altura

Terceira coluna \rightarrow Azimute

- Tabela final

Para c de 1 até 665 e sendo $e1$ o número de elementos de cada cometa, coloca-se numa tabela o nome, data, altura, azimute e distância do cometa à Terra correspondentes. Verifica-se todos os elementos do cometa e adiciona-se na tabela aqueles que satisfazem as condições. Quando estes forem todos verificados passa-se ao cometa seguinte.

$$e2 = 1$$

$$\text{Se } 15 < h(e1) < 75 \text{ e } 80 < A(e1) < 280$$

$$TabelaFinal\{c, 1\} = nome\{c\}$$

$$TabelaFinal\{c, 2\}(e2, 1) = Data\{c\}(e1)$$

$$TabelaFinal\{c, 2\}(e2, 2) = Altura\{c\}(e1)$$

$$TabelaFinal\{c, 2\}(e2, 3) = Azimute\{c\}(e1)$$

$$TabelaFinal\{c, 2\}(e2, 4) = rCometa\{c\}(e1)$$

$$TabelaFinal\{c, 2\}(e2, 5) = Radial\{c\}(e1)$$

Incrementa-se $e2$

4) Filtrar os resultados obtidos em 3)

- Ler a magnitude absoluta de cada cometa, $MagAbs$
- Calcular a magnitude aparente

Se o número de elementos de um cometa na *TabelaFinal* não for zero

Para m de 1 até ao número de elementos de cada cometa

$$aparente(m, 1) = MagAbs + 5 \times \log_{10}(TabelaFinal(m, 5)) + 10 \times \log_{10}(TabelaFinal(m, 4))$$

- Se $aparente(m) < 6$ então guarda-se os dados numa tabela com: nome do cometa, data, altura, azimute, distância do cometa ao Sol, distância do cometa à Terra e magnitude aparente.

8 Referências

- Beutler, Gerhard, Methods of Celestial Mechanics: Vol. I e Vol. II, Springer, 2005
- Collins, George W., The Foundations of Celestial Mechanics, Pachart Foundation, 2004
- Fernandes, João, Princípios de Astronomia Esférica, Ano Lectivo 2009-2010
- Fink, Uwe; Rubin, Martin, 2012, The calculation of $Af\rho$ and mass loss rate for comets, Icarus, Volume 221, Issue 2, p. 721-734
- Green, Robin M., Spherical Astronomy, Cambridge, 1985
- Lima, Paulo, 2013, comunicação privada
- Newhouse, Robin, 2010. Calculating Celestial Coordinates from Orbital Parameters Using Javascript, Department of Physics and Astronomy, University of British Columbia, 210
- Silva, Fábio, 2013. Landscape and Astronomy in Megalithic Portugal: the Carregal do Sal Nucleus and Star Mountain Range. Papers from the Institute of Archaeology 22:99-114
- <http://cometography.com/pcomets/003d.html> (último acesso: 19/08/2013)
- <http://www.britannica.com/EBchecked/topic/64816/Bielas-Comet> (último acesso: 19/08/2013)
- <http://cometography.com/pcomets/040p.html> (último acesso: 19/08/2013)
- <http://cometography.com/pcomets/134p.html> (último acesso: 19/08/2013)
- http://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb_query.cgi#x (último acesso: 08/08/2013)
- <http://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi> (último acesso: 19/08/2013)
- http://www.feiradeciencias.com.br/sala24/24_faq01.asp (último acesso: 21/08/2013)

- http://www.rocketroberts.com/astro/halebopp_gallery.htm (último acesso: 07/09/2013)
- http://en.wikipedia.org/wiki/Halley's_Comet (último acesso: 07/09/2013)
- http://en.wikipedia.org/wiki/Comet_Shoemaker%E2%80%93Levy_9 (último acesso: 08/09/2013)
- <http://news.nationalgeographic.com/news/2010/02/100211-stonehenge-stonehedge-secret-rituals/> (último acesso: 11/07/2013)
- http://pt.wikipedia.org/wiki/Anomalia_exc%C3%AAntrica (último acesso: 11-09-2013)