

# Polinómios cúbicos Riemannianos: abordagem Hamiltoniana e generalizações

Lígia Raquel Lopes dos Santos Abrunheiro

Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra  
Departamento de Matemática

2011



# Polinómios cúbicos Riemannianos: abordagem Hamiltoniana e generalizações

Lígia Raquel Lopes dos Santos Abrunheiro

Orientadores:

Margarida Maria Lopes da Silva Camarinha  
Jesús Jerónimo Clemente-Gallardo

Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra  
Departamento de Matemática

2011



Dissertação apresentada à Faculdade de Ciências e Tecnologia da  
Universidade de Coimbra, para obtenção do Grau de Doutor em  
Matemática, na especialidade de Matemática Pura.



Este trabalho foi apoiado pelo programa PROTEC 2008, Programa de apoio à formação avançada de docentes do Ensino Superior Politécnico da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), desenvolvido pelo Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior (MCTES) em articulação com o Conselho Coordenador dos Institutos Superiores Politécnicos (CCISP), nos anos lectivos de 2009-2010 e 2010-2011.

O trabalho teve ainda o apoio do projecto intitulado *Generalized Lagrangian and Hamiltonian Techniques for Geometric Control Theory*, no âmbito do programa Acções Integradas Luso-Espanholas 2007 do Conselho de Reitores das Universidades Portuguesas (CRUP), nos anos de 2007 e 2008 (Acção E-3/07).





Para os meus pais,  
Maria da Graça e Carlos Daniel.



## Agradecimentos

Gostaria de expressar o meu sincero agradecimento a todos os que contribuíram, de forma directa ou indirecta, para a realização desta dissertação.

Aos meus orientadores, Doutora Margarida Maria Lopes da Silva Camarinha e Doutor Jesús Jerónimo Clemente-Gallardo, que acompanharam e apoiaram intensamente esta minha caminhada, quero agradecer tudo o que me ensinaram e a paciência que tiveram comigo nas diversas discussões matemáticas. À Doutora Margarida Camarinha pela sua inteira disponibilidade e constante motivação, e por me ter envolvido naquele que é o tema central desta tese. Ao Jesús, cuja convivência e partilha de experiências novas se tornou essencial para a progressão deste trabalho.

Agradeço ao Instituto Superior de Contabilidade e Administração da Universidade de Aveiro (ISCAA) o empenho demonstrado no apoio da minha candidatura ao programa PROTEC, que me permitiu usufruir de dois semestres de dispensa de serviço docente, o que me facilitou em muito o desenvolvimento deste trabalho. Uma referência especial à boa vontade e compreensão que os meus colegas da Área de Matemática do ISCAA sempre me dispensaram. Não posso também deixar de expressar a minha gratidão a todos os alunos de quem fui professora nestes últimos anos e que me permitiram equilibrar a investigação com o gosto que tenho desde tenra idade, que é o de ensinar.

O meu *muito obrigada* à minha família e aos meus amigos pelo carinho e apoio incondicional. Estou particularmente grata aos meus pais e ao meu irmão que me proporcionaram o bem-estar e a tranquilidade indispensáveis. Agradeço do fundo do coração ao meu querido Pedro, que esteve sempre ao meu lado, dando-me força para continuar, principalmente nestes últimos árduos meses de escrita da tese.



## Resumo

Esta dissertação é dedicada ao estudo dos polinómios cúbicos Riemannianos e a algumas generalizações deste conceito e da teoria envolvente, no sentido a seguir explicado. O trabalho contribui essencialmente para um novo formalismo Hamiltoniano e dá ênfase à situação em que temos como espaço de configuração um grupo de Lie conexo e compacto.

O trabalho é iniciado com a exposição do problema variacional clássico de segunda ordem, que permite definir as curvas conhecidas como polinómios cúbicos Riemannianos e a análise de alguns dos invariantes ao longo destas curvas. No âmbito dos fibrados tangentes de ordem superior, apresentamos a versão intrínseca das equações de Euler-Lagrange e ainda a correspondente abordagem Hamiltoniana resultante da transformação de Legendre generalizada. Introduzimos o problema de controlo óptimo dos polinómios cúbicos Riemannianos, cujo sistema de controlo está associado ao problema variacional destes polinómios. Para o efeito, é adaptada para ordem dois, a formulação geométrica de um sistema de controlo de primeira ordem. Prosseguimos depois para a descrição Hamiltoniana deste problema de controlo, através de uma variante presimpléctica do princípio do máximo de Pontryagin e aplicamos o respectivo algoritmo de restrição. É discutida também a relação existente entre os formalismos Lagrangiano e de controlo óptimo apresentados. Os resultados são concretizados para os polinómios cúbicos em grupos de Lie conexos e compactos e esta situação é simplificada com a trivialização à esquerda do sistema Hamiltoniano simpléctico obtido. Analisamos as simetrias do sistema, recorrendo ao método de redução simpléctica de Marsden-Weinstein, obtendo no final um sistema com menos graus de liberdade do que o inicial. Exemplificamos as abordagens expostas, com a apresentação do problema de controlo óptimo dinâmico do corpo rígido livre e esférico.

Numa segunda etapa, estendemos o problema de controlo óptimo dos polinómios cúbicos em grupos de Lie a um problema com um sistema de controlo de conexão afim mais geral. Mais concretamente, e em paralelismo com o estudo feito para os

polinómios cúbicos, é explorado o formalismo presimplético e a trivialização do sistema Hamiltoniano simplético, obtido para este problema mais geral. Relacionamos a dinâmica estudada para o referido problema de controlo óptimo, com a dinâmica de um problema variacional com restrições, que aparece na literatura como uma extensão do clássico problema variacional dos polinómios cúbicos. Apresentamos alguns exemplos elementares, que ilustram bem a abordagem apresentada. Concluimos o trabalho com o enquadramento dos problemas de controlo óptimo estudados ao longo da tese, na teoria mais geral dos algebróides de Lie. Sob este ponto de vista, enriquecemos o texto com alguns exemplos de problemas (cinemáticos e dinâmicos) relacionados com o corpo rígido.

Alguns dos resultados desta tese foram já objecto de publicação em [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

**Palavras chave:** Polinómios cúbicos Riemannianos, cálculo de variações, controlo óptimo, formalismo Lagrangiano e Hamiltoniano para ordem superior, princípio do máximo de Pontryagin, geometria Riemanniana, geometria simplética e presimplética, redução simplética de Marsden-Weinstein, grupos de Lie, sistemas de controlo de conexão afim, algebróides de Lie.

## Abstract

This thesis is devoted to the study of Riemannian cubic polynomials and to some generalizations of this concept and the related theory, in the sense explained below. The work contributes essentially to a new Hamiltonian formalism and gives emphasis to the situation where the configuration space is a compact and connected Lie group.

The work begins with an exposition of the classical second order variational problem that defines the curves known as Riemannian cubic polynomials and the analysis of some invariants along these curves. In the context of higher order tangent bundles, we present the intrinsic version of the Euler-Lagrange equations and the corresponding Hamiltonian approach resulting from the generalized Legendre transformation. We introduce the optimal control problem of Riemannian cubic polynomials, whose control system is associated with the variational problem of these polynomials. For this purpose, the geometric formulation of a first order control system is adapted to order two. We proceed then to the Hamiltonian description of this control problem, using a presymplectic variant of the Pontryagin maximum principle, and apply the appropriate constraint algorithm. The relation between the introduced Lagrangian and optimal control formalisms is also discussed. The results are implemented for the cubic polynomials on compact and connected Lie groups and this situation is simplified with the left trivialization of the obtained symplectic Hamiltonian system. We analyze the symmetries of the system using the symplectic reduction procedure of Marsden-Weinstein, getting in the end a system with fewer degrees of freedom than the original one. We also exemplify our approaches with the dynamic optimal control problem of the free and spherical rigid body.

In a second step, we extend the optimal control problem of cubic polynomials on Lie groups to a more general problem with an affine connection control system. More specifically, in parallel with the study of cubic polynomials, we explore the presymplectic formalism and the trivialization of the symplectic Hamiltonian system obtained for this further general problem. We relate the dynamics studied for the above optimal

control problem, with the dynamics of a variational problem with constraints, which appears in the literature as an extension of the classical variational problem of cubic polynomials. Some elementary examples that illustrate our approach are also given. We conclude with a framework in the more general theory of Lie algebroids of the optimal control problems studied throughout the thesis. From this point of view, we provide some examples of (kinematic and dynamic) problems related to the rigid body.

Some of the results of the thesis can be found in [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

**Keywords:** Riemannian cubic polynomials, calculus of variations, optimal control, higher order Lagrangian and Hamiltonian formalisms, Pontryagin maximum principle, Riemannian geometry, symplectic and presymplectic geometry, symplectic reduction of Marsden-Weinstein, Lie groups, affine connection control systems, Lie algebroids.



# Índice

<b>Introdução</b>	<b>v</b>
<b>1 Polinómios cúbicos Riemannianos</b>	<b>1</b>
1.1 Problema variacional dos polinómios cúbicos . . . . .	2
1.1.1 Apresentação do problema variacional . . . . .	2
1.1.2 Problema variacional no contexto dos fibrados tangentes de ordem superior . . . . .	5
1.1.3 Formulação geométrica da equação de Euler-Lagrange . . . . .	6
1.2 Problema de controlo óptimo dos polinómios cúbicos . . . . .	11
1.2.1 Notas sobre a metodologia de Skinner-Rusk . . . . .	12
1.2.2 Formulação geométrica do problema de controlo óptimo . . . . .	15
1.2.3 Sistema Hamiltoniano presimplético . . . . .	17
1.3 Transformação de Legendre . . . . .	22
1.4 Polinómios cúbicos na esfera $S^2$ . . . . .	26
<b>2 Polinómios cúbicos em grupos de Lie</b>	<b>29</b>
2.1 Noções preliminares em grupos de Lie . . . . .	30
2.1.1 O grupo de Lie $G$ . . . . .	30

2.1.2	O grupo de Lie fibrado tangente . . . . .	34
2.1.3	Produto semidirecto do grupo de Lie e da sua álgebra . . . . .	35
2.1.4	Trivializações dos fibrados . . . . .	39
2.2	Problema variacional . . . . .	41
2.3	Problema de controlo óptimo . . . . .	44
2.4	Dinâmica do problema de controlo óptimo . . . . .	48
2.5	Trivialização à esquerda do sistema Hamiltoniano . . . . .	50
2.6	Integrais do movimento . . . . .	52
2.7	Relação entre as duas abordagens . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Redução do sistema Hamiltoniano em grupos de Lie</b>	<b>57</b>
3.1	Fundamentos de redução simpléctica . . . . .	58
3.2	Redução do sistema Hamiltoniano dos polinómios cúbicos . . . . .	60
3.2.1	Espaço de fases reduzido . . . . .	61
3.2.2	Dinâmica reduzida . . . . .	67
3.3	Integrais do movimento . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Polinómios cúbicos em <math>SO(3)</math></b>	<b>79</b>
4.1	Grupo de Lie $SO(3)$ . . . . .	80
4.2	Polinómios cúbicos em $SO(3)$ . . . . .	82
4.3	Problema de controlo óptimo dinâmico do corpo rígido . . . . .	88
4.3.1	Movimento rotacional do corpo rígido livre e esférico . . . . .	89
4.3.2	Dinâmica do problema de controlo óptimo . . . . .	91
4.3.3	Redução da dinâmica . . . . .	93

<b>5</b>	<b>Um problema de controlo óptimo com restrições</b>	<b>97</b>
5.1	Problema variacional com restrições . . . . .	98
5.2	Problema de controlo óptimo com restrições . . . . .	101
5.3	Sistema Hamiltoniano presimplético . . . . .	104
5.4	Trivialização do sistema Hamiltoniano. Exemplos. . . . .	108
5.5	Relação com a abordagem variacional . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Problemas de controlo óptimo em algebróides de Lie</b>	<b>115</b>
6.1	Algebróides de Lie: definições e propriedades básicas . . . . .	116
6.2	Prolongamento de um fibrado . . . . .	119
6.3	Problema de controlo óptimo num algebróide de Lie . . . . .	125
6.4	Exemplos: movimento rotacional do corpo rígido livre . . . . .	128
6.5	Problema de controlo óptimo com restrições . . . . .	140
	<b>Considerações finais</b>	<b>143</b>
<b>A</b>	<b>Fibrados tangentes de ordem superior</b>	<b>147</b>
A.1	Notas sobre variedades fibradas e fibrados gerais . . . . .	147
A.2	A geometria do fibrado tangente . . . . .	150
A.3	Fibrados tangentes de ordem $k$ . . . . .	153
A.3.1	Definição de fibrado tangente de ordem $k$ . . . . .	153
A.3.2	Sistema de coordenadas locais em $T^k M$ . . . . .	154
A.3.3	Levantamentos . . . . .	155
A.3.4	Operador de derivação total . . . . .	156
A.4	Campo de vectores de Liouville de ordem superior . . . . .	158

---

A.5	Estrutura canónica quase-tangente de ordem superior . . . . .	161
A.6	Derivações e diferenciação verticais . . . . .	163
A.7	Formas semi-básicas . . . . .	166
<b>B</b>	<b>Grupos de Lie e acções de grupos de Lie</b>	<b>169</b>
B.1	Grupos de Lie e álgebras de Lie . . . . .	170
B.2	Acção de um grupo de Lie numa variedade . . . . .	175
B.3	Diferenciação das aplicações adjunta e coadjunta . . . . .	184
B.4	Produto semidirecto de um grupo de Lie e um espaço vectorial . . . . .	185
B.5	Aplicação momento . . . . .	186
<b>C</b>	<b>Problemas de controlo óptimo</b>	<b>191</b>
C.1	Formulação geométrica de um problema de controlo óptimo . . . . .	191
C.2	Descrição simpléctica do problema de controlo . . . . .	192
	<b>Bibliografia</b>	<b>195</b>

# Introdução

Os polinómios cúbicos Riemannianos podem ser entendidos como uma generalização para variedades Riemannianas dos polinómios cúbicos do espaço Euclidiano. É sob esta perspectiva que em 1989 ([69]), Noakes, Heinzinger e Paden iniciam o estudo de um problema variacional de segunda ordem, que é explorado em 1995 ([37]), no contexto da interpolação dinâmica, por Crouch e Silva Leite. Mais concretamente, os polinómios cúbicos numa variedade Riemanniana apresentam-se como as soluções suaves da equação diferencial de quarta ordem

$$\frac{D^4x}{dt^4} + R \left( \frac{D^2x}{dt^2}, \frac{dx}{dt} \right) \frac{dx}{dt} = 0, \quad (1)$$

onde  $D/dt$  denota a derivada covariante e  $R$  é o tensor de curvatura. A equação (1) é a equação de Euler-Lagrange do problema variacional de segunda ordem com Lagrangiano dado por  $(1/2) \langle D^2x/dt^2, D^2x/dt^2 \rangle$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota a métrica Riemanniana. Na situação em que a variedade Riemanniana é o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$  munido com a métrica Euclidiana, a equação (1) reduz-se a  $d^4x/dt^4 = 0$ , cujas soluções são os polinómios cúbicos em  $\mathbb{R}^n$ .

Uma série de resultados preponderantes na investigação deste tema têm vindo a ser desenvolvidos, nomeadamente uma teoria geométrica que pode ser interpretada como uma extensão natural para ordem superior da teoria clássica das geodésicas (ver [26, 27, 28, 29, 40, 52]). Mais recentemente, em [2, 3, 66, 67, 68, 70, 73] foi analisado o problema dos polinómios cúbicos, sob o ponto de vista variacional, para variedades localmente simétricas e como resultado obtiveram-se alguns invariantes ao longo destes

polinómios. A partir desse momento, a explicação da natureza geométrica destes invariantes tornou-se um desafio de investigação relevante. Destaca-se a análise qualitativa dos cúbicos realizada por Abrunheiro e Camarinha em [2, 3] (incluída no capítulo 4 nesta dissertação), por Noakes em [66, 67] e por Noakes e Popiel em [70], com especial atenção para o caso do grupo de Lie  $SO(3)$ , onde estes polinómios correspondem a quadráticos de Lie na álgebra de Lie. Isto é, quando a variedade de configuração é um grupo de Lie  $G$  conexo e compacto, a equação de Euler-Lagrange (1) dá lugar às equações

$$\frac{dx}{dt} = T_e L_x Y \quad \ddot{Y} + [Y, \ddot{Y}] = 0, \quad (2)$$

onde  $x$  é uma curva em  $G$  e  $Y$  é uma curva na álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  do grupo, que se designa por quadrático de Lie (refira-se ainda que, na equação anterior,  $T_e L_x$  representa a aplicação tangente na identidade  $e$  do grupo da translação à esquerda por  $x$ ; e  $[\cdot, \cdot]$  é o parêntesis de Lie na álgebra). Se  $G = SO(3)$ , a equação anterior é equivalente a

$$\dot{x} = x\hat{y} \quad \ddot{y} + y \times \dot{y} = 0,$$

onde  $x$  é uma curva em  $SO(3)$ ,  $\hat{y} \in \mathfrak{so}(3)$  e  $y \in \mathbb{R}^3$  é o correspondente vector em  $\mathbb{R}^3$ .

Ao longo dos últimos anos, os problemas variacionais Riemannianos de ordem superior têm sido objecto de intensa investigação. Neste âmbito, para além dos trabalhos acima referidos sobre os polinómios cúbicos, destaca-se ainda o estudo das curvas elásticas, também conhecidas como polinómios cúbicos em tensão (ver [13, 76]). Ambos os temas têm desempenhado um papel preponderante na teoria da interpolação. As aplicações à aeronáutica e à robótica, nomeadamente ao planeamento de trajectórias para o movimento de corpos rígidos, sublinham a relevância deste estudo em variedades de curvatura constante e em grupos de Lie. O estudo de problemas variacionais definidos em fibrados tangentes de ordem superior e os correspondentes formalismos Hamiltoniano e Lagrangiano têm sido bastante desenvolvidos, referimos, a título de exemplo, os trabalhos [23, 31, 36, 47, 49, 62]. Esta linguagem geométrica permite-nos interpretar um Lagrangiano  $L$  regular de um problema variacional de ordem  $k$  numa variedade diferenciável  $M$ , como uma função no fibrado tangente  $T^k M$  de ordem  $k$

de  $M$ . Neste contexto, a respectiva equação de Euler-Lagrange apresenta a seguinte versão intrínseca

$$i_{X_E}\omega_L = dE, \quad (3)$$

no sentido em que as curvas integrais do campo de vectores  $X_E$  no fibrado tangente de ordem  $2k - 1$  definido pelo sistema simpléctico (3) são as soluções da equação de Euler-Lagrange, onde  $\omega_L$  e  $E$  são, respectivamente, a 2-forma de Poincaré-Cartan generalizada em  $T^{2k-1}M$  e a função energia definida em  $T^{2k-1}M$ , ambas associadas a  $L$ . Na situação em que o Lagrangiano é hiper-regular, recorrendo à transformação de Legendre generalizada  $Leg$ , passa-se do sistema  $(T^{2k-1}M, \omega_L, E)$  para o sistema Hamiltoniano  $(T^*(T^{k-1}M), \omega_{k-1}, H)$ , onde  $\omega_{k-1}$  é a forma canónica simpléctica no fibrado cotangente  $T^*(T^{k-1}M)$  e  $H$  é a função energia Hamiltoniana associada a  $L$ ,  $H = E \circ Leg^{-1}$ . Além disso, o campo de vectores  $X_H = (Leg)_*(X_E)$  é a solução da equação Hamiltoniana

$$i_{X_H}\omega_{k-1} = dH, \quad (4)$$

onde  $(Leg)_*(X_E)$  denota o prolongamento pela aplicação  $Leg$  de  $X_E$ .

A primeira descrição Hamiltoniana dos polinómios cúbicos, tanto quanto nos é dado a conhecer, é apresentada em [28] e enquadra estes problemas no contexto da geometria sub-Riemanniana. Esta dissertação é orientada, em parte, para o desenvolvimento de uma nova perspectiva Hamiltoniana do problema dos polinómios cúbicos, tendo por base a moderna teoria geométrica do controlo óptimo. Daremos especial relevo à situação dos grupos de Lie, para a qual os métodos geométricos utilizados proporcionam novas respostas para algumas questões em aberto, nomeadamente no que diz respeito ao estudo da integrabilidade do sistema. A existência de simetrias de sistemas físicos é uma propriedade de reconhecido valor por diversos motivos, tais como, o facto de providenciar propriedades intrínsecas do sistema, ou ainda, o facto de conseguirmos, através do processo de redução, relacionar o sistema original com um sistema que se desenvolve numa variedade de dimensão menor do que a inicial. Se para além disso, forem conhecidos integrais do movimento para o sistema reduzido, aumenta a possibilidade de se conseguir diminuir ainda mais a dimensão do sistema, estudando a

sua integrabilidade.

Os problemas variacionais estão estritamente relacionados com problemas de controlo óptimo (ver, por exemplo, [20]). Alguns trabalhos (ver, por exemplo, [14, 38, 48, 51]) revelam o mérito das ferramentas da mecânica moderna (Hamiltoniana e Lagrangiana) de sistemas, na descrição geométrica de problemas de controlo óptimo (ver, por exemplo, [19, 24, 43, 65]), formulação esta que dá origem a resultados intrínsecos. Neste contexto, um problema de controlo óptimo com espaço de estados dado por uma variedade diferenciável  $M$  e fibrado dos controlos  $B$ , consiste em determinar, de entre as curvas suaves em  $B$  que satisfazem certas condições iniciais e finais fixas no espaço de estados, as curvas  $\gamma$  em  $B$  que minimizam uma determinada funcional integral (com função custo definida em  $B$ ) e que satisfazem a equação

$$\frac{d}{dt}(\tau \circ \gamma)(t) = \Pi(\gamma(t)),$$

onde  $\tau$  é a projecção do fibrado  $B$  em  $M$  e  $\Pi : B \rightarrow TM$  é o campo de vectores ao longo da projecção  $\tau$ , ou seja, definido de modo a que o seguinte diagrama seja comutativo

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\Pi} & TM \\ & \searrow \tau & \downarrow \pi_M \\ & & M \end{array},$$

onde  $\pi_M$  representa a projecção canónica natural de  $TM$  em  $M$ . A análise da dinâmica deste tipo de problema, pode ser concretizada através de uma versão geométrica do princípio do máximo de Pontryagin, usando um sistema simpléctico ou présimpléctico (dependendo da especificidade do problema). Na descrição présimpléctica, que é inspirada na formulação de Skinner e Rusk da mecânica clássica, trabalha-se com um sistema dinâmico que tem subjacente uma estrutura présimpléctica definida no produto fibrado do espaço de co-estados e do fibrado de controlos,  $T^*M \times_M B$ . Esta situação conduz-nos ao algoritmo de restrição présimpléctico desenvolvido por Gotay, Nester e Hinds (ver [41] e as referências aí mencionadas), que foi proposto para a teoria de controlo por diversos autores (consultar [38, 48]).



O desenvolvimento da teoria de controlo nas últimas décadas conduziu o cálculo das variações a novas áreas de investigação e sublinhou de forma clara a importância do estudo de problemas de ordem superior. A abordagem dos problemas de controlo óptimo discutidos nesta dissertação é estabelecida no âmbito geométrico referido no parágrafo anterior, mas com as devidas adaptações aos fibrados de ordem superior ou, no caso do último capítulo, aos algebróides de Lie. O interesse pelos sistemas de controlo de ordem superior tem vindo a crescer de forma louvável. Sobre este assunto, mencionamos os estudos de Bullo e Lewis [25] e de Barbero-Liñán e Muñoz-Lecanda [15] para sistemas de conexão afim (no capítulo 5, estudaremos um problema de controlo óptimo de segunda ordem para um sistema de controlo de conexão afim em grupos de Lie; e abordaremos a respectiva versão em algebróides de Lie, no capítulo 6). Do mesmo modo, é de citar o trabalho de Benedito e Martín de Diego [18], que apresenta uma generalização geométrica do princípio de Hamilton para ordem superior. Referimos ainda os artigos [5, 6, 8], desenvolvidos pela autora deste trabalho, em colaboração com Camarinha e Clemente-Gallardo, onde é desenvolvido o estudo dos polinómios cúbicos Riemannianos, usando esta nova perspectiva geométrica. Em particular, em [6, 8] é estudado o problema de controlo dinâmico do corpo rígido livre e esférico (apresentaremos estes resultados no capítulo 4). Dos mesmos autores, destacam-se igualmente, os recentes estudos em grupos de Lie publicados em [7] (que exporemos nos capítulos 2 e 3). No artigo mencionado, para além da descrição presimpléctica do problema dos polinómios cúbicos, apresenta-se também a redução da dinâmica do sistema original, recorrendo ao método de redução simpléctico de Marsden-Weinstein e, com os integrais do movimento obtidos, faz-se um primeiro estudo relativo à integrabilidade do sistema, usando o teorema de Lie-Cartan. Na situação particular do grupo de Lie  $SO(3)$ , o sistema original definido numa variedade de dimensão 12, pode ser reduzido a um sistema definido numa variedade de dimensão 2. Além dos trabalhos referidos, salientamos também o trabalho [33] de Colombo e Martín de Diego, onde se obtém uma generalização das equações de Euler-Arnold para uma ordem qualquer; e a publicação [39] de Gay-Balmaz *et al*, onde os autores se dedicam aos splines de ordem superior, sob o ponto de vista variacional

e exploram, para além de outras questões interessantes, a abordagem Hamiltoniana associada às equações de Euler-Poincaré de ordem superior e a respectiva redução de Hamilton-Ostrogradsky. Em ambos os artigos são apresentadas aplicações a problemas de controlo óptimo, neste sentido torna-se pertinente relacionar alguns dos resultados destes artigos com o estudo que propomos para os polinómios cúbicos.

A generalização para algebróides de Lie da mecânica clássica em fibrados tangentes e cotangentes enriquece substancialmente os formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano, e, em particular, a teoria de controlo óptimo. Sob o ponto de vista dos algebróides de Lie, é possível tratar de sistemas num contexto mais abrangente, uma vez que esta teoria nos proporciona estruturas que generalizam de forma natural os fibrados tangentes. O primeiro autor a estudar a mecânica Lagrangiana no âmbito dos algebróides de Lie foi Weinstein [78]. Posteriormente, Martinez desenvolveu em [57] a mecânica Lagrangiana em algebróides de Lie, usando um formalismo similar ao formalismo de Klein da mecânica Lagrangiana clássica. Para tal, o autor generalizou elementos geométricos fundamentais da mecânica Lagrangiana, tais como o conceito de endomorfismo vertical, de campo de vectores de Liouville e de formas de Cartan. Mais recentemente, têm surgido outros trabalhos nesta área, citamos a título de exemplo alguns artigos, onde podem também ser encontradas outras referências sobre o assunto: [32] da autoria de Cariñena *et al*, onde é dada uma descrição geométrica da dinâmica Lagrangiana em quase-coordenadas; [34] de Cortés *et al*, que trata de sistemas Lagrangianos não holónomos; e ainda [4] de Abrunheiro *et al*, onde se apresentam diversos exemplos de problemas de controlo óptimo. Para esta dissertação, interessa-nos particularmente o trabalho [58] sobre problemas de controlo óptimo em algebróides de Lie. Com o intuito de tornar mais explícito o enquadramento nos algebróides de Lie dos problemas de controlo abordados nesta tese, escrevemos a seguir algumas linhas introdutórias ao tema (que será desenvolvido no capítulo 6). Um algebróide de Lie  $E$  sobre uma variedade diferenciável  $M$ , é um fibrado sobre  $M$ , cujo conjunto das secções tem uma estrutura de álgebra de Lie, junto com um homomorfismo  $\rho : E \rightarrow TM$  (aplicação âncora) de fibrados vectoriais e tal que é satisfeita uma certa condição de compatibilidade. Um

problema de controlo óptimo no algebróide de Lie  $E$ , com espaço de controlos dado por um fibrado  $B$  sobre  $M$ , é caracterizado pela determinação das curvas  $\gamma$  em  $B$ , que satisfazem certas condições iniciais e finais fixas no espaço de estados  $M$  e minimizam uma funcional integral (com função custo definida em  $B$ ), e que, para além disso, satisfazem as equações

$$\frac{d}{dt}(\tau \circ \gamma)(t) = (\rho \circ \sigma)(\gamma(t)),$$

onde  $\sigma : B \rightarrow E$  é uma secção ao longo da aplicação projecção  $\tau : B \rightarrow M$  (isto é, tal que é satisfeita a igualdade  $\pi \circ \sigma = \tau$ ). Em termos de diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{\sigma} & E & \xrightarrow{\rho} & TM \\ & \searrow \tau & \downarrow \pi & \swarrow \pi_M & \\ & & M & & \end{array} .$$

É neste contexto que serão descritos os problemas de controlo dos polinómios cúbicos e o mais geral do capítulo 5. Refira-se que não aprofundaremos muito, a nível dos algebróides de Lie, o estudo dos nossos problemas, uma vez que não é esse o objectivo principal do trabalho. Pretendemos com esta análise deixar uma breve nota sobre as potencialidades dos algebróides de Lie, no desenvolvimento de problemas na linha dos que apresentaremos, mas para situações mais gerais.

Em seguida, descreveremos o conteúdo desta dissertação, a qual está organizada em seis capítulos e contém no final três apêndices de apoio ao trabalho desenvolvido, bem como as referências bibliográficas que foram sendo citadas ao longo do texto.

No capítulo 1 começaremos por introduzir o problema variacional clássico dos polinómios cúbicos Riemannianos ([37, 69]) e alguns invariantes ao longo destas curvas ([3, 26, 66]). Enquadraremos este problema variacional no contexto dos fibrados tangentes de ordem superior, apresentando a versão intrínseca das suas equações de Euler-Lagrange, a partir de alguns resultados de [49], ou seja, a equação (3) para o nosso Lagrangiano de ordem dois. Exporemos depois o problema de controlo óptimo para o sistema de controlo associado ao problema variacional (problema de controlo óptimo dos polinómios cúbicos Riemannianos). Para o efeito, serão usadas algumas ferramen-

tas da teoria geométrica de controlo ([19, 24, 43, 65]), adaptadas ao nosso problema de controlo de segunda ordem. A dinâmica deste problema será concretizada usando uma versão presimpléctica do princípio do máximo de Pontryagin e a aplicação de um algoritmo geométrico de restrição, onde teremos por fonte de inspiração os trabalhos [14, 18, 35, 38, 48, 51]. Daremos ainda lugar a uma análise da relação existente entre os formalismos Lagrangiano e de controlo óptimo apresentados, baseada na generalização para ordem superior da transformação de Legendre, segundo [49] (especificando, para os polinómios cúbicos, o sistema (4)). O capítulo termina com a exemplificação dos resultados expostos, para o caso da esfera  $S^2$  ([5]). Além disso, como suporte a este primeiro capítulo, surgirá no apêndice A uma exposição sintetizada da teoria dos fibrados tangentes de ordem superior, baseada essencialmente em [36, 49].

Os capítulos 2 e 3 são dedicados ao estudo dos polinómios cúbicos em grupos de Lie conexos e compactos. Com o intuito de firmar a notação e as ferramentas utilizadas ao longo do trabalho, relativamente aos grupos de Lie, apresentaremos na primeira secção do capítulo 2 e no apêndice B, uma exposição sintetizada dos principais resultados que interessam para este trabalho, da teoria básica de grupos de Lie e acções de grupos de Lie (as referências utilizadas são essencialmente [1, 17, 42, 45, 46, 50, 55, 61, 71, 75]). Abordaremos com mais pormenor o grupo de Lie fibrado tangente de um grupo, o grupo de Lie produto semidirecto de um grupo pela sua álgebra e o isomorfismo existente entre estes dois grupos (trivialização à esquerda do fibrado tangente de um grupo). Incluiremos ainda a noção de aplicação momento, que é um conceito essencial no estudo das simetrias que efectuaremos no capítulo 3. A trivialização à esquerda, atrás referida, permitir-nos-á simplificar para grupos de Lie, de uma forma bastante eficaz, as abordagens dos problemas variacional e de controlo óptimo dos polinómios cúbicos, do capítulo 1. Esse é o objectivo do capítulo 2, que finalizará com uma análise dos integrais do movimento do sistema Hamiltoniano e os relacionará com os invariantes obtidos a partir do problema variacional. No capítulo 3 concretizaremos a redução da dinâmica do sistema trivializado, começando por usar a metodologia de redução de Marsden-Weinstein ([56, 71]). A interpretação da dinâmica reduzida conduzir-nos-á a

um sistema que vive no produto cartesiano da órbita coadjunta do grupo, da álgebra de Lie do grupo e do seu dual. Utilizaremos ainda o teorema de Lie-Cartan ([12]), no sentido de tentar caracterizar o número de integrais do movimento em involução. Parte dos resultados destes dois capítulos foram já publicados em [7].

No capítulo 4 formularemos o problema variacional dos polinómios cúbicos no grupo de Lie  $SO(3)$ . Sob o ponto de vista Lagrangiano, destacaremos algumas propriedades dos quadráticos de Lie, curvas na álgebra de Lie que estão associadas aos polinómios cúbicos, como já referimos atrás. Esta análise foi já publicada em [2, 3] e segue a linha dos trabalhos [66, 67], tendo sido alguns dos resultados obtidos paralelamente pelos diferentes autores. A última parte do capítulo é dedicada ao estudo da dinâmica do problema de controlo óptimo dos polinómios cúbicos em  $SO(3)$  (com o estudo do corpo rígido livre e esférico). Neste sentido, especificaremos para o caso de  $SO(3)$ , o sistema Hamiltoniana presimpléctico que descreve o problema, a trivialização à esquerda do sistema, a redução da dinâmica e a posterior análise dos integrais do movimento (isto é, os tópicos de âmbito Hamiltoniano dos dois capítulos anteriores). Estes resultados foram recentemente publicados em [6, 8].

O objectivo dos últimos dois capítulos é generalizar a teoria dos polinómios cúbicos em grupos de Lie, em dois sentidos distintos. No capítulo 5, exploraremos o formalismo presimpléctico anteriormente mencionado, para um problema de controlo com sistema de controlo de conexão afim similar ao do problema dos polinómios cúbicos, mas com um número de variáveis de controlo inferior ao número de variáveis da variedade de configuração. O capítulo contém ainda uma extensão do problema variacional dos polinómios cúbicos a um problema com restrições, por forma a analisar, para a situação dos grupos de Lie, a relação existente entre esta abordagem Lagrangiana e a abordagem Hamiltoniana geométrica apresentada. No capítulo 6 pretendemos enquadrar na teoria dos algebróides de Lie os problemas de controlo óptimo dos polinómios cúbicos e o mais geral anteriormente referido. Com este intuito, recordaremos nas duas primeiras secções do capítulo, as noções e propriedades básicas dos algebróides de Lie. Referimos [30, 53, 54] para um estudo mais aprofundado desta teoria. Além disso, resumiremos na

terceira secção, a formulação geométrica de um problema de controlo num algebróide de Lie e a respectiva abordagem Hamiltoniana geométrica, baseando-nos essencialmente em [58]. Por fim, nas duas últimas secções aplicaremos esta teoria mais abrangente dos algebróides de Lie, aos problemas de controlo estudados nos capítulos precedentes. Em particular, apresentaremos alguns exemplos ([4]) relacionados com o movimento rotacional do corpo rígido livre (problemas de controlo óptimo cinemáticos e dinâmicos, com e sem restrições).

# Capítulo 1

## Polinómios cúbicos Riemannianos

Neste capítulo começaremos por apresentar o problema variacional clássico dos polinómios cúbicos Riemannianos. Enquadraremos este problema no contexto dos fibrados tangentes de ordem superior e esta análise conduzir-nos-á à versão intrínseca das equações de Euler-Lagrange. De seguida, estudaremos um problema de controlo óptimo de segunda ordem equivalente ao problema variacional dos polinómios cúbicos. A descrição Hamiltoniana que faremos deste problema de controlo será baseada na abordagem presimpléctica do princípio do máximo de Pontryagin.

Concretizaremos a abordagem Hamiltoniana do problema variacional partindo da sua versão intrínseca, o que nos permitirá associar às equações de Euler-Lagrange um sistema Hamiltoniano. Para isso definiremos a transformação de Legendre generalizada. Finalmente, verificaremos que este sistema Hamiltoniano coincide com o sistema que descreve a dinâmica do problema de controlo óptimo. Neste sentido, os formalismos Lagrangiano e de controlo óptimo tornam-se equivalentes.

Ao longo deste capítulo,  $M$  é uma variedade Riemanniana de dimensão finita  $n$ , com métrica Riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . A conexão simétrica em  $M$ , correspondente à métrica Riemanniana, é denotada por  $\nabla$ . O campo de vectores velocidade e a derivada co-

variante ao longo de uma curva  $x$  em  $M$  são denotados, respectivamente, por  $dx/dt$  e  $DY/dt$ , onde  $Y$  é um campo de vectores ao longo de  $x$ . Além disso, representamos o tensor de curvatura por  $R$  e a diferenciação covariante de  $R$  por  $\nabla R$ .

Um sistema de coordenadas locais (ou carta) na variedade  $M$  definido(a) num aberto  $U$  de  $M$ ,  $\varphi : U \subset M \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ , com correspondentes funções coordenadas  $x^1, \dots, x^n : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ , é representado por  $(U, \varphi)$  ou  $(U, x^1, \dots, x^n)$ . As coordenadas locais naturais dos fibrados tangentes  $TM$ ,  $T^2M$  e  $T^3M$  serão denotadas, respectivamente, por  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ ,  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, u^1, \dots, u^n)$  e  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, u^1, \dots, u^n, v^1, \dots, v^n)$ .

Refira-se ainda que no apêndice A são recordados os fundamentos básicos, de utilidade para o presente capítulo, da teoria dos espaços tangentes de ordem superior.

## 1.1 Problema variacional dos polinómios cúbicos

O problema variacional a seguir apresentado, que designaremos por *problema variacional dos polinómios cúbicos*, foi introduzido em 1989 por Noakes, Heinzinger e Paden em [69] e abordado no contexto da interpolação dinâmica em 1995 por Crouch e Silva Leite em [37].

### 1.1.1 Apresentação do problema variacional

Seja  $\mathcal{C}$  o conjunto constituído pelas curvas  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  de classe  $C^1$  e seccionalmente suaves que verificam as condições de fronteira

$$\gamma(0) = x_0, \quad \gamma(T) = x_T, \quad \frac{d\gamma}{dt}(0) = y_0, \quad \frac{d\gamma}{dt}(T) = y_T,$$

onde  $x_0, x_T \in M$ ,  $y_0 \in T_{x_0}M$ ,  $y_T \in T_{x_T}M$  e  $T \in \mathbb{R}^+$ . Consideremos o problema variacional de segunda ordem em  $M$  que consiste em encontrar as curvas  $\gamma \in \mathcal{C}$ , que minimizam a funcional

$$\frac{1}{2} \int_0^T \left\langle \frac{D^2\gamma}{dt^2}, \frac{D^2\gamma}{dt^2} \right\rangle dt. \quad (1.1.1)$$



A equação de Euler-Lagrange deste problema variacional é dada pela equação diferencial de quarta ordem

$$\frac{D^4\gamma}{dt^4} + R \left( \frac{D^2\gamma}{dt^2}, \frac{d\gamma}{dt} \right) \frac{d\gamma}{dt} = 0. \quad (1.1.2)$$

Note-se que, por vezes, omitimos a dependência do tempo para simplificar a notação.

**Definição 1.1.1.** *Uma curva suave*

$$\begin{aligned} \gamma: I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \gamma(t) \end{aligned}$$

diz-se um polinómio cúbico Riemanniano em  $M$  se verifica a equação (1.1.2).

**Exemplo 1.1.2.** *Seja  $M = \mathbb{R}^n$  a variedade Riemanniana munida com a métrica Euclidiana. Neste caso, a derivada covariante ao longo de uma curva é a derivada usual ao longo de uma curva em  $\mathbb{R}^n$  e o tensor de curvatura é zero. Assim, a funcional (1.1.1) é simplesmente  $(1/2) \int_0^T \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt$  (onde  $\|\cdot\|$  é a norma em  $\mathbb{R}^n$ ) e a equação (1.1.2) reduz-se a  $d^4\gamma/dt^4 = 0$ , cujas soluções são os polinómios cúbicos em  $\mathbb{R}^n$ .*

Utilizaremos a notação  $V$  para representar o campo de vectores velocidade  $d\gamma/dt$  de um polinómio cúbico Riemanniano  $\gamma$ .

**Proposição 1.1.3.** [26] *Se  $\gamma$  é um polinómio cúbico Riemanniano em  $M$ , então a seguinte expressão é invariante ao longo de  $\gamma$ :*

$$\frac{1}{2} \left\langle \frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt} \right\rangle - \left\langle \frac{D^2V}{dt^2}, V \right\rangle. \quad (1.1.3)$$

*Demonstração.* O resultado é obtido quando integramos o produto interno de (1.1.2) com  $V$ . □

**Lema 1.1.4.** [3] *Se  $\gamma$  é um polinómio cúbico Riemanniano, então*

$$\frac{d}{dt} \left[ \left\langle \frac{D^2V}{dt^2}, \frac{D^2V}{dt^2} \right\rangle - \left\langle \frac{D^3V}{dt^3}, \frac{DV}{dt} \right\rangle \right] = \left\langle (\nabla_V R) \left( \frac{DV}{dt}, V \right), \frac{DV}{dt} \right\rangle.$$

*Demonstração.* Usando a propriedade do tensor de curvatura

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(W, Z)Y, X \rangle$$

e a definição de diferenciação covariante do tensor de curvatura, ou seja,

$$\begin{aligned} (\nabla_X R)(Y, Z)W &= \\ &= \nabla_X[R(Y, Z)W] - R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y, \nabla_X Z)W - R(Y, Z)\nabla_X W, \end{aligned}$$

facilmente se obtém

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\langle R \left( \frac{DV}{dt}, V \right) V, \frac{DV}{dt} \right\rangle - \left\langle (\nabla_V R) \left( \frac{DV}{dt}, V \right) V, \frac{DV}{dt} \right\rangle &= \\ = 2 \left\langle R \left( \frac{DV}{dt}, V \right) V, \frac{D^2V}{dt^2} \right\rangle. \end{aligned}$$

Além disso, note-se que

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{D^2V}{dt^2}, \frac{D^2V}{dt^2} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D^3V}{dt^3}, \frac{D^2V}{dt^2} \right\rangle.$$

Para concluirmos a demonstração, basta considerar o produto interno de (1.1.2) com  $D^2V/dt^2$  e aplicar as igualdades acima indicadas na equação obtida.  $\square$

**Proposição 1.1.5.** *Seja  $\gamma$  um polinómio cúbico Riemanniano numa variedade localmente simétrica. A expressão*

$$\left\langle \frac{D^2V}{dt^2}, \frac{D^2V}{dt^2} \right\rangle - \left\langle \frac{D^3V}{dt^3}, \frac{DV}{dt} \right\rangle \quad (1.1.4)$$

*é invariante ao longo de  $\gamma$ .*

O invariante (1.1.4) foi deduzido por Abrunheiro e Camarinha, usando o lema 1.1.4 (ver [3]). No entanto, a existência de um segundo invariante ao longo do polinómio cúbico Riemanniano, foi originalmente publicada por Noakes em [66] (de facto, quando substituimos em (1.1.4) a terceira derivada covariante usando as equações (1.1.2), obtemos exactamente o invariante introduzido em [66]).

### 1.1.2 Problema variacional no contexto dos fibrados tangentes de ordem superior

Interessa-nos verificar que a função Lagrangiana (ou Lagrangiano) associada à funcional (1.1.1), ou seja,

$$\frac{1}{2} \left\langle \frac{D^2\gamma}{dt^2}, \frac{D^2\gamma}{dt^2} \right\rangle, \quad (1.1.5)$$

é uma função bem definida no fibrado tangente de segunda ordem  $T^2M$ , que passaremos a denotar por  $L$ . Dizemos que  $L$  é um Lagrangiano de ordem dois.

Para uma clara compreensão da abordagem do problema variacional dos polinómios cúbicos no contexto dos fibrados tangentes de ordem superior, torna-se importante descrever o problema variacional em termos de coordenadas locais. Seja  $(U, x^1, \dots, x^n)$  um sistema de coordenadas locais em  $M$  com  $x_0 \in U$ . Seja  $\gamma$  uma curva em  $M$  pertencente à classe  $\mathcal{C}$  e denotemos as coordenadas do ponto  $\gamma(t) \in U$  por  $x^1(t), \dots, x^n(t)$ ,  $t \in [0, T]$ . Então, a derivada covariante  $DV/dt$  do campo de vectores velocidade de  $\gamma$ , designada por campo de vectores aceleração de  $\gamma$ , pode exprimir-se da seguinte forma ([22]):

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{k=1}^n \left( \ddot{x}^k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\gamma(t)}, \quad (1.1.6)$$

onde  $\Gamma_{ij}^k$  são as funções reais definidas em  $U$  que representam os símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana. Assim, se denotarmos as componentes da métrica Riemanniana por  $g_{ij}$ , o Lagrangiano (1.1.5) escreve-se localmente como

$$\frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^n g_{lk} \left( \ddot{x}^l + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^l \dot{x}^i \dot{x}^j \right) \left( \ddot{x}^k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j \right). \quad (1.1.7)$$

Refira-se ainda que a forma generalizada da equação de Euler-Lagrange para um Lagrangiano arbitrário  $L$  de ordem dois, se traduz localmente por

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1.8)$$

Para o Lagrangiano definido por (1.1.7), esta equação resulta na equação (1.1.2).

Precisamos agora de algumas das ferramentas geométricas discutidas no apêndice A. Da definição A.3.2, sabemos que cada ponto de  $T^2M$  é representado por uma classe de equivalência  $[\gamma]_0^2$  de curvas em  $M$  tangentes de ordem 2 no ponto  $\gamma(0) = x_0 \in M$ , onde  $\gamma$  é uma curva em  $M$  (ver definição A.3.1). Seja  $\gamma_2 : [0, T] \rightarrow T^2M$  o levantamento para  $T^2M$  de uma curva  $\gamma$  em  $M$  (ver definição A.3.3). Denotemos as coordenadas do ponto  $\gamma_2(t) \in T^2M$  por

$$x^i = x^i(t), y^i = \dot{x}^i(t), u^i = \ddot{x}^i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in [0, T].$$

O Lagrangiano (1.1.5) do nosso problema pode ser interpretado como sendo a função  $L : T^2M \rightarrow \mathbb{R}$  definida, para cada  $[\gamma]_0^2 \in T^2M$  (com  $\gamma(0) = x_0$ ), por

$$L([\gamma]_0^2) = \frac{1}{2} \langle (K \circ i_{1,1})(\gamma_2(t)), (K \circ i_{1,1})(\gamma_2(t)) \rangle, \quad (1.1.9)$$

onde,  $i_{1,1}$  é a a injeção natural de  $T^2M$  para  $TTM$  dada por (A.3.6) (para  $l = 1$ ) e  $K$  é a aplicação conexão exposta na definição A.2.9. Ao longo do levantamento  $\gamma_2$ , o Lagrangiano (1.1.9) exprime-se da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^n g_{lk} \left( u^l + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^l y^i y^j \right) \left( u^k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k y^i y^j \right). \quad (1.1.10)$$

Importa observar que este Lagrangiano é regular visto que a matriz  $[(\partial^2 L)/(\partial u^i \partial u^j)]$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , é invertível. De facto, de (1.1.10) vem

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} = \sum_{k=1}^n g_{ik} \left( u^k + \sum_{j,l=1}^n \Gamma_{jl}^k y^j y^l \right) \quad (1.1.11)$$

e portanto

$$\left[ \frac{\partial^2 L}{\partial u^i \partial u^j} \right]_{1 \leq i, j \leq n} = [g_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n},$$

que é obviamente uma matriz invertível (por definição de métrica Riemanniana).

### 1.1.3 Formulação geométrica da equação de Euler-Lagrange

Apresentamos agora uma formulação geométrica da equação de Euler-Lagrange (1.1.2) independente da teoria Hamiltoniana, no sentido em que descrevemos intrinsecamente

a dinâmica sem recorrer à transformação de Legendre. Na secção 1.3 concretizaremos a abordagem geométrica da dinâmica Lagrangiana do problema dos polinómios cúbicos recorrendo à transformação de Legendre.

Em geral, a dinâmica de um Lagrangiano  $L$  definido em  $T^2M$  desenvolve-se no espaço tangente de terceira ordem  $T^3M$ , uma vez que a equação de Euler-Lagrange do problema variacional associado a  $L$  se traduz localmente pelo sistema de equações diferenciais de quarta ordem (1.1.8). Mais concretamente, estas equações diferenciais podem ser interpretadas como sendo um campo de vectores em  $T^3M$ , no sentido em que as respectivas curvas integrais deste campo de vectores são levantamentos de curvas em  $M$  soluções da equação de Euler-Lagrange.

As estruturas geométricas cruciais para a abordagem que nos propomos apresentar são o campo de vectores de Liouville  $C_1$  e a estrutura canónica quase-tangente  $J_1$  em  $T^2M$ . Consideramos ainda  $C_2$ , o campo de vectores canónico de ordem 2 em  $T^2M$ ; e  $J_2$ , o endomorfismo vertical de ordem 2 de  $T(T^2M)$ . Consulte-se (A.4.3) para as expressões locais dos campos de vectores  $C_1$  e  $C_2$  e (A.5.1) para as representações matriciais dos endomorfismos  $J_1$  e  $J_2$ . Como veremos a seguir, estas ferramentas geométricas permitem-nos associar a um Lagrangiano  $L : T^2M \rightarrow \mathbb{R}$  arbitrário:

- Uma 2-forma  $\omega_L$  em  $T^3M$ , a 2-forma de Poincaré-Cartan generalizada.
- Uma função  $E : T^3M \rightarrow \mathbb{R}$ , a função energia (Lagrangiana) generalizada.

Seja  $\omega_L$  a 2-forma fechada em  $T^3M$  associada a um Lagrangiano  $L$  de ordem 2, dada por

$$\omega_L = -dd_{J_1}L + \frac{1}{2}d_Tdd_{J_2}L, \quad (1.1.12)$$

onde  $d_T$ ,  $d$  e  $d_{J_i}$  representam, respectivamente, o operador de derivação total, a diferenciação exterior e a diferenciação vertical de ordem  $i$  ( $i=1,2$ ), na álgebra exterior das formas diferenciáveis em  $T^2M$  (ver observação A.3.5 e definição A.6.5). Isto é,  $\omega_L = -d\alpha_L$ , para  $\alpha_L$  a 1-forma em  $T^3M$  definida por

$$\alpha_L = d_{J_1}L - \frac{1}{2}d_Td_{J_2}L. \quad (1.1.13)$$

Seja  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  uma curva suave em  $M$  com  $\gamma(t)$  representado localmente pelas coordenadas  $x^1(t), \dots, x^n(t)$ , para cada  $t \in [0, T]$ , onde  $T \in \mathbb{R}^+$ . Se  $\gamma_3 : [0, T] \rightarrow T^3M$  é o levantamento de  $\gamma$  para  $T^3M$  (ver definição A.3.3), representamos  $\gamma_3(t) \in T^3M$  localmente por

$$x^i = x^i(t), y^i = \dot{x}^i(t), u^i = \ddot{x}^i(t), v^i = \ddot{x}^i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in [0, T].$$

**Proposição 1.1.6.** *Seja  $L$  o Lagrangiano definido por (1.1.10). A 1-forma  $\alpha_L$  definida por (1.1.13) exprime-se localmente como*

$$\alpha_L = \sum_{i=1}^n (\alpha_i^0 dx^i + \alpha_i^1 dy^i),$$

para  $\alpha_i^l = \alpha_i^l(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, u^1, \dots, u^n, v^1, \dots, v^n)$ ,  $l = 0, 1$ , as funções reais dadas por

$$\alpha_i^0 = \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k,l,s=1}^n \left[ (\Gamma_{iks} - \Gamma_{ksi}) \Gamma_{jl}^s - g_{is} \frac{\partial \Gamma_{jl}^s}{\partial x^k} \right] y^j y^k y^l + \sum_{k=1}^n (\Gamma_{ijk} - 3\Gamma_{kji}) y^j u^k - g_{ij} v^j \right\}$$

e

$$\alpha_i^1 = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n \Gamma_{jki} y^j y^k + g_{ij} u^j \right),$$

onde  $\Gamma_{ijk} := \sum_{s=1}^n \Gamma_{ij}^s g_{sk}$ .

*Demonstração.* Começemos por observar que de acordo com a observação A.6.7 temos

$$d_{J_1} L = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial y^i} dx^i + 2 \frac{\partial L}{\partial u^i} dy^i \right) \quad \text{e} \quad d_{J_2} L = \sum_{i=1}^n 2 \frac{\partial L}{\partial u^i} dx^i.$$

Assim, substituindo estas expressões em (1.1.13) obtemos

$$\alpha_L = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial y^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial u^i} \right) \right] dx^i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial u^i} dy^i.$$

Portanto,  $\alpha_i^0 = \partial L / \partial y^i - (d/dt) (\partial L / \partial u^i)$  e  $\alpha_i^1 = \partial L / \partial u^i$ . Agora, de (1.1.11) sai de imediato a expressão de  $\alpha_i^1$  dada no enunciado. Por outro lado, de (1.1.10), deduzimos a derivada

$$\frac{\partial L}{\partial y^i} = 2 \sum_{k,m,s=1}^n g_{mk} \Gamma_{is}^m y^s \left( u^k + \sum_{j,l=1}^n \Gamma_{jl}^k y^j y^l \right). \quad (1.1.14)$$

Por conseguinte,

$$\alpha_i^0 = \sum_{k,m,s=1}^n \left\{ 2g_{mk}\Gamma_{is}^m y^s \left( u^k + \sum_{j,l=1}^n \Gamma_{jl}^k y^j y^l \right) - \frac{d}{dt} \left[ g_{ik} \left( u^k + \sum_{j,l=1}^n \Gamma_{jl}^k y^j y^l \right) \right] \right\}.$$

Para finalizar a demonstração basta simplificar esta expressão e fazer uso das propriedades

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{kij} + \Gamma_{kji}$$

que resultam da simetria e compatibilidade da conexão Riemanniana ([22]).  $\square$

Note-se que do lema A.7.2 resulta que  $\alpha_L$  é uma 1-forma em  $T^3M$  semi-básica de tipo 2. Designamos  $\alpha_L$  por *forma de Jacobi-Ostrogradsky associada a  $L$* .

O resultado a seguir apresentado é demonstrado em [49] (página 111) para a situação mais geral de um Lagrangiano de ordem  $k$  e correspondente 2-forma de Poincaré-Cartan generalizada.

**Teorema 1.1.7.** *Um Lagrangiano  $L$  de ordem 2 é regular se e só se a 2-forma  $\omega_L$  definida por (1.1.12) é simpléctica.*

Como vimos na subsecção anterior, o Lagrangiano definido por (1.1.10) é regular. Portanto, o teorema anterior e a proposição 1.1.6 garantem-nos que ao problema variacional dos polinómios cúbicos Riemannianos podemos associar a forma simpléctica localmente definida por

$$\omega_L = -d\alpha_L = \sum_{i=1}^n (dx^i \wedge d\alpha_i^0 + dy^i \wedge d\alpha_i^1), \quad (1.1.15)$$

onde  $\alpha_i^0$  e  $\alpha_i^1$  são as funções definidas na proposição 1.1.6. Neste trabalho não nos interessa explorar a abordagem em coordenadas do problema variacional e por isso limitamo-nos a apresentar a expressão (1.1.15) sem mais desenvolvimentos.

Defina-se agora a função energia  $E : T^3M \rightarrow \mathbb{R}$  associada a um Lagrangiano  $L$  de ordem 2, do seguinte modo:

$$E = C_1L - \frac{1}{2}d_T(C_2L) - L. \quad (1.1.16)$$

Se  $L$  é o Lagrangiano definido por (1.1.10), então a função energia (1.1.16) exprime-se, ao longo do levantamento  $\gamma_3$  de uma curva  $\gamma$  em  $M$ , como

$$E = \sum_{i=1}^n (\alpha_i^0 y^i + \alpha_i^1 u^i) - L, \quad (1.1.17)$$

onde  $\alpha_i^0$  e  $\alpha_i^1$  são as funções definidas na proposição 1.1.6. Efectivamente, tendo em atenção as expressões (A.4.3) de  $C_1$  e  $C_2$ , vem

$$C_1 L = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial y^i} y^i + 2 \frac{\partial L}{\partial u^i} u^i \right) \quad \text{e} \quad C_2 L = \sum_{i=1}^n 2 \frac{\partial L}{\partial u^i} y^i. \quad (1.1.18)$$

Consequentemente, (1.1.16) toma a forma

$$E = \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial y^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u^i} \right) y^i + \frac{\partial L}{\partial u^i} u^i \right] - L.$$

Mas, como vimos ao longo da demonstração da proposição 1.1.6, temos  $\partial L / \partial u^i = \alpha_i^1$  e  $\partial L / \partial y^i - (d/dt) (\partial L / \partial u^i) = \alpha_i^0$ , o que nos conduz a (1.1.17).

**Proposição 1.1.8.** *Seja  $L$  o Lagrangiano definido por (1.1.10) e  $E$  a correspondente função energia (1.1.17). A função energia coincide com (1.1.3), ou seja,*

$$E = \frac{1}{2} \left\langle \frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt} \right\rangle - \left\langle \frac{D^2V}{dt^2}, V \right\rangle,$$

onde  $V = d\gamma/dt$  representa o campo de vectores velocidade de  $\gamma$ .

*Demonstração.* Para obter o resultado, basta recordar que  $L$  se escreve como (1.1.5) e verificar que ao substituir as derivadas (1.1.11) e (1.1.14) nas igualdades (1.1.18), se obtém

$$C_1 L = 2 \sum_{i,k=1}^n g_{ik} \left( u^i + \sum_{j,l=1}^n \Gamma_{jl}^i y^j y^l \right) \left( u^k + \sum_{j,l=1}^n \Gamma_{jl}^k y^j y^l \right)$$

e

$$C_2 L = 2 \sum_{i,k} g_{ik} y^i \left( u^k + \sum_{j,l=1}^n \Gamma_{jl}^k y^j y^l \right).$$

Isto é,

$$C_1 L = 2 \left\langle \frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt} \right\rangle \quad \text{e} \quad C_2 L = 2 \left\langle V, \frac{DV}{dt} \right\rangle,$$

onde estamos a ter em consideração (1.1.6). □



Observe-se que a proposição anterior revela a importância do invariante (1.1.3), na teoria dos polinómios cúbicos. De facto, coincidindo (1.1.3) com a função energia, podemos afirmar que este invariante ao longo do polinómio cúbico desempenha um papel similar, ao desempenhado pelo comprimento do campo de vectores velocidade, na teoria das geodésicas.

A versão intrínseca da equação de Euler-Lagrange é dada pela equação simpléctica

$$i_{X_E}\omega_L = dE, \quad (1.1.19)$$

que define de modo único o campo de vectores  $X_E$  em  $T^3M$ . Esta afirmação é consequência da aplicação do teorema a seguir formulado, cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [49] (apresentado no referido trabalho, para a situação geral de um Lagrangiano de uma ordem qualquer, não necessariamente de ordem 2).

**Teorema 1.1.9.** *Seja  $L$  um Lagrangiano regular de ordem 2 em  $M$  (ou seja, definido em  $T^2M$ ). Então, as curvas integrais do campo de vectores  $X_E$  definido por (1.1.19) são as soluções da equação de Euler-Lagrange (1.1.8).*

## 1.2 Problema de controlo óptimo dos polinómios cúbicos

Nesta secção analisamos um problema de controlo óptimo de segunda ordem correspondente ao problema variacional dos polinómios cúbicos Riemannianos. Formulamos o problema utilizando ferramentas geométricas da teoria de controlo (ver, por exemplo, [19, 24, 43, 65]). A descrição usada permite-nos representar a dinâmica do sistema de controlo através de um sistema Hamiltoniano presimpléctico. Este modelo geométrico é baseado na formulação de Skinner-Rusk da mecânica clássica ([77]), que envolve a utilização do algoritmo presimpléctico de Gotay-Nester ([41]). Nos últimos anos, surgiram diversos artigos que generalizam (em variados contextos) esta abordagem intrínseca, originalmente construída por Skinner-Rusk para sistemas Lagrangianos singulares, de entre os quais referimos [14, 18, 35, 38, 48, 51], que serviram de fonte de inspiração para o trabalho desenvolvido nesta secção.

O problema de controlo óptimo dos polinómios cúbicos Riemannianos apresentado nesta secção foi introduzido por Abrunheiro, Camarinha e Clemente-Gallardo em [5]. No referido trabalho é também discutida a existência da estrutura presimpléctica que permite descrever a dinâmica do problema de controlo.

### 1.2.1 Notas sobre a metodologia de Skinner-Rusk

Em [77], Skinner e Rusk introduziram uma formulação geométrica da dinâmica Hamiltoniana generalizada de Dirac-Bergmann para sistemas Lagrangianos degenerados, que com as devidas adaptações, acreditamos ser o formalismo mais apropriado para o estudo da dinâmica do nosso problema. Descrevemos de seguida e de uma forma resumida a metodologia original de Skinner-Rusk:

- Partimos de um sistema Lagrangiano com espaço de configuração dado por uma variedade diferenciável  $Q$  e Lagrangiano  $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Consideramos a soma de Whitney  $T^*Q \oplus TQ$ , do espaço de fases  $T^*Q$  e do espaço das velocidades  $TQ$  sobre o espaço de configuração  $Q$ , com projecções canónicas  $pr_1 : T^*Q \oplus TQ \rightarrow T^*Q$  e  $pr_2 : T^*Q \oplus TQ \rightarrow TQ$ .
- Construimos um Hamiltoniano  $H := \llcorner pr_1, pr_2 \gg -L \circ pr_2 : T^*Q \oplus TQ \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\llcorner \cdot, \cdot \gg$  denota o produto dualidade canónica de vectores e covectores em  $Q$ . Portanto, se  $(x, y, p) \in T^*Q \oplus TQ$ , temos  $H(x, y, p) = p(y) - L(x, y)$ .
- A descrição Hamiltoniana é concretizada através de  $(T^*Q \oplus TQ, \Omega, H)$ , um sistema presimpléctico com a 2-forma presimpléctica  $\Omega$  dada pela imagem recíproca (“pull-back”) da forma canónica simpléctica em  $T^*Q$  pela projecção  $pr_1$ . Localmente, temos  $\Omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dp_i$ .
- A dinâmica é dada pelos campos de vectores  $X$  que são solução da equação Hamiltoniana  $i_X \Omega = dH$ . Esta equação é interpretada como um versão intrínseca das equações de Hamilton do princípio do máximo de Pontryagin.

Na situação em que  $L$  é regular, é garantida a existência de uma única solução  $X$  da equação Hamiltoniana. Por outro lado, se  $L$  é singular, torna-se necessário a aplicação de um algoritmo de restrição ([41]) que permita determinar uma subvariedade, caso esta exista, onde haja um campo de vectores dinâmico solução.

Recorde-se que, na situação em que temos um sistema Hamiltoniano simpléctico<sup>1</sup>  $(N, \omega, h)$ , o facto de  $\omega$  ser não degenerada permite-nos construir o isomorfismo  $S_\omega$  que a cada campo de vectores  $X$  na variedade simpléctica  $N$  faz corresponder a 1-forma  $i_X\omega$  em  $N$ ; e nesse caso o sistema  $i_X\omega = dh$  tem uma única solução, globalmente definida em  $N$  por  $X = S_\omega^{-1}(dh)$ . Por outro lado, se o sistema Hamiltoniano  $(N, \omega, h)$  é presimpléctico ( $\omega$  é degenerada), não se pode garantir (à partida) a existência de uma solução  $X$  que satisfaça o sistema  $i_X\omega = dh$  em todos os pontos da variedade  $N$ , ou seja, o sistema pode ser satisfeito apenas para alguns pontos da variedade. Mais concretamente, podemos considerar, de forma similar ao que se faz no caso simpléctico, uma aplicação linear  $S_\omega : \mathcal{X}(N) \rightarrow \bigwedge^1(N)$ , e um homomorfismo de espaços vectoriais, também denotado por  $S_\omega$ , de  $TN$  em  $T^*N$ . No entanto, agora  $S_\omega$  não é necessariamente um isomorfismo. Portanto,  $dh \in Im S_\omega$  é uma condição necessária para que  $i_X\omega = dh$  tenha solução. Impondo esta condição, dado um ponto  $z \in N$ , garantimos a existência de um vector tangente  $v_z \in T_zN$  tal que  $\omega(z)(v_z, \cdot) = dh(z)(\cdot)$ . Mas, em geral, existem apenas alguns pontos  $z \in N$  onde isto acontece. Se assumirmos que o conjunto de pontos que satisfazem esta condição formam uma subvariedade<sup>2</sup>  $W_1$  embebida em  $N$ :

$$W_1 = \{z \in N : [dh(z)](y_z) = 0, \forall y_z \in Ker \omega(z)\},$$

<sup>1</sup>Um sistema Hamiltoniano simpléctico é definido como sendo um terno  $(N, \omega, h)$ , onde  $(N, \omega)$  é uma variedade simpléctica e  $h$  é o Hamiltoniano (ou função Hamiltoniana) cujo campo de vectores Hamiltoniano  $X_h$  é a solução das equações de Hamilton (ou equações Hamiltonianas)  $i_{X_h}\omega = dh$ . Neste contexto, é usual designar a variedade simpléctica  $N$  por espaço de fases (dos momentos) do sistema Hamiltoniano (designação equivalente à do espaço de fases das velocidades para um sistema Lagrangiano). (Consultar, por exemplo, página 187 de [1] ou página 102 de [50].)

<sup>2</sup>Note-se que a subvariedade  $\{z \in N : \exists v_z \in T_zN : \omega(z)(v_z, \cdot) = dh(z)(\cdot)\}$  coincide com  $W_1$ , como consequência do resultado: se  $\alpha_z \in T_z^*N$ , então  $\alpha_z \in S_\omega(T_zN)$  se e só se  $Ker \omega(z) \subset Ker \alpha_z$  ([15]).

onde  $\text{Ker } \omega(z) = \{v_z \in T_z N : \omega(z)(v_z, \cdot) = 0\}$ , então, encontra-se pelo menos uma solução  $X$  que satisfaz o sistema dinâmico (sendo  $\omega$  degenerada,  $\text{Ker } S_\omega$  não é trivial, portanto pode existir mais do que uma solução em  $W_1$ , o campo de vectores  $X$  e os campos de vectores pertencentes a  $\text{Ker } S_\omega$ ). Para que o sistema seja satisfeito num sentido restrito, ou seja, admita uma solução  $X$  quando restrito a  $W_1$ , a solução encontrada tem de ser tangente a  $W_1$  ( $X : W_1 \rightarrow TW_1$ ), condição esta que, em geral, não acontece. Se for esse o caso, teremos de considerar uma nova subvariedade  $W_2$ , contida em  $W_1$  e que satisfaça esse requisito. Podemos continuar este processo, obtendo uma sequência de subconjuntos (que assumimos serem subvariedades de  $N$ )

$$\dots \hookrightarrow W_k \hookrightarrow \dots \hookrightarrow W_2 \hookrightarrow W_1 \hookrightarrow N,$$

até encontrarmos, eventualmente, uma subvariedade final onde existe pelo menos um campo de vectores tangente a essa subvariedade que satisfaz o sistema dinâmico.

Em conclusão, quando estamos na presença de um sistema Hamiltoniano presimplético, seguindo o raciocínio acima exposto, pode-se analisar o sistema de forma a tentar perceber se é ou não possível resolver o sistema dinâmico num sentido restrito. Tal procedimento é designado por algoritmo geométrico de sistemas presimpléticos, conhecido por algoritmo restrição de Gotay-Nester (ver [41]). Este algoritmo permite, em algumas situações, determinar uma subvariedade maximal da variedade presimplética, e um campo de vectores tangente a essa subvariedade tal que o sistema dinâmico é satisfeito, quando restrito à subvariedade.

Consideremos novamente a situação exposta no início desta subsecção para descrever a metodologia de Skinner-Rusk: na presença do sistema presimplético

$$(T^*Q \oplus TQ, \Omega, H),$$

facilmente se deduz que a correspondente subvariedade restrição  $W_1$  é caracterizada localmente pela condição  $\partial H / \partial y = 0$ , ou seja,  $p - \partial L / \partial y = 0$ . Assim, se  $L$  é regular, esta condição de restrição permite-nos determinar de forma única as velocidades  $y = \varphi(x, p)$  como funções de  $x$  e  $p$ . O Hamiltoniano  $H_1(x, p) = (p \circ \varphi)(x, p) - L(x, \varphi(x, p))$  definido

em  $T^*Q$  dá lugar a um sistema de equações diferenciais equivalentes às equações de Euler-Lagrange para o Lagrangiano  $L$ .

### 1.2.2 Formulação geométrica do problema de controlo óptimo

O sistema de controlo óptimo associado ao problema variacional dos polinómios cúbicos é um sistema de controlo de segunda ordem em  $M$ . Nesta secção adaptamos para a situação dos polinómios cúbicos a conhecida formulação geométrica de um sistema de controlo de primeira ordem resumida na secção C.1.

O sistema de controlo associado ao problema variacional dos polinómios cúbicos é dado pelo sistema de controlo de segunda ordem em  $M$

$$\frac{DV}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n u^i(t) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\gamma(t)},$$

onde  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  é a curva em  $M$ ,  $V$  é o respectivo campo de vectores velocidade e  $u^i$  são funções reais suaves designadas por controlos. Se considerarmos  $\gamma(t)$  localmente representado por  $x^i = x^i(t)$  para  $i = 1, \dots, n$  e  $t \in [0, T]$ , o sistema de controlo escreve-se como o conjunto das seguintes equações diferenciais dependentes dos parâmetros  $u^i$ :

$$\ddot{x}^i(t) = u^i(t) - \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i(t) \dot{x}^j(t) \dot{x}^k(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.2.1)$$

visto que  $DV/dt$  é dado por (1.1.6). Note-se que o sistema é afim nos controlos.

Sob um ponto de vista geométrico, na caracterização global do problema de controlo óptimo, importa considerar a estrutura de fibrado afim  $\tau_2^1 : T^2M \rightarrow TM$  (ver (A.3.1)). Um sistema de controlo de segunda ordem pode ser descrito por um campo de vectores  $\Pi : T^2M \rightarrow TTM$  ao longo da projecção natural  $\tau_2^1$ , isto é, definido de forma a que o seguinte diagrama seja comutativo:

$$\begin{array}{ccc} T^2M & \xrightarrow{\Pi} & TTM \\ & \searrow \tau_2^1 & \downarrow \pi_{TM} \\ & & TM \end{array},$$

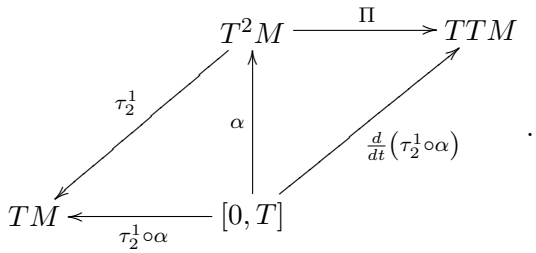
onde  $\pi_{TM}$  representa a projecção canónica natural de  $TTM$  em  $TM$ . Portanto, o espaço de estados e o fibrado de controlos são dados por  $TM$  e  $T^2M$ , respectivamente. Para cada  $[\gamma]_0^2 \in T^2M$ , sabemos que  $\tau_2^1([\gamma]_0^2) = [\gamma]_0^1 \in TM$  (ver (A.3.1)). Então,  $\Pi([\gamma]_0^2) \in T_{[\gamma]_0^1}TM$  e, sendo  $\Pi^i : T^2M \rightarrow \mathbb{R}$  funções reais suaves,  $i = 1, \dots, n$ , o campo de vectores  $\Pi$  pode exprimir-se na forma

$$\Pi([\gamma]_0^2) = \sum_{i=1}^n \Pi^i([\gamma]_0^2) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{[\gamma]_0^1} + \sum_{i=1}^n \Pi^{i+n}([\gamma]_0^2) \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{[\gamma]_0^1}.$$

Ao longo de uma curva  $\alpha : [0, T] \rightarrow T^2M$ , temos

$$\Pi(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^n \Pi^i(\alpha(t)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{(\tau_2^1 \circ \alpha)(t)} + \sum_{i=1}^n \Pi^{i+n}(\alpha(t)) \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{(\tau_2^1 \circ \alpha)(t)}. \quad (1.2.2)$$

Além disso, quando  $\alpha$  é curva integral de  $\Pi$  temos

$$\frac{d}{dt} (\tau_2^1 \circ \alpha)(t) = \Pi(\alpha(t))$$


Então, se  $\alpha(t)$  é localmente definido por  $x^i = x^i(t)$ ,  $y^i = \dot{x}^i(t)$ ,  $u^i = \ddot{x}^i(t)$ , para  $i = 1, \dots, n$  e  $t \in [0, T]$ , de forma a descrevermos as equações diferenciais (1.2.1), interessa-nos considerar (1.2.2) com

$$\Pi^i(\alpha(t)) = y^i \quad \text{e} \quad \Pi^{i+n}(\alpha(t)) = u^i - \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i y^j y^k. \quad (1.2.3)$$

As variáveis  $(x^i, y^i)$  designam-se por variáveis de estado e  $u^i$  são as variáveis de controlo.

O problema de controlo óptimo dos polinómios cúbicos Riemannianos em  $M$  consiste em determinar as curvas  $\alpha : [0, T] \rightarrow T^2M$  de classe  $C^2$ , seccionalmente suaves e com condições iniciais e finais fixas no espaço de estados

$$(\tau_2^1 \circ \alpha)(0) = (x_0, y_0) \quad \text{e} \quad (\tau_2^1 \circ \alpha)(T) = (x_T, y_T), \quad (1.2.4)$$

que satisfazem o sistema de controlo  $(d/dt)(\tau_2^1 \circ \alpha)(t) = \Pi(\alpha(t))$ , e minimizam a funcional  $\int_0^T G(\alpha(t))dt$ , com  $T \in \mathbb{R}^+$  fixo, para  $G : T^2M \rightarrow \mathbb{R}$  a função custo definida por

$$G([\gamma]_0^2) = \frac{1}{2} \langle K(\Pi([\gamma]_0^2)), K(\Pi([\gamma]_0^2)) \rangle, \quad (1.2.5)$$

para cada  $[\gamma]_0^2 \in T^2M$ , onde  $K$  é a aplicação conexão apresentada na definição A.2.9. Observe-se que em coordenadas locais, a função custo é dada por

$$G = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij} u^i u^j. \quad (1.2.6)$$

**Observação 1.2.1.** *É curioso observar que qualquer que seja o elemento  $[\gamma]_0^2 \in T^2M$ , se tem*

$$\Pi([\gamma]_0^2) = (Z \circ \tau_2^1)([\gamma]_0^2) + J \left( \sum_{i=1}^n u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{[\gamma]_0^1} \right), \quad (1.2.7)$$

onde  $Z$  é o spray geodésico da conexão Riemanniana de  $M$  e  $J$  é estrutura canónica quase-tangente em  $TM$  definidos, respectivamente por (A.2.3) e (A.2.2).

### 1.2.3 Sistema Hamiltoniano presimpléctico

A descrição Hamiltoniana do problema de controlo óptimo dos polinómios cúbicos Riemannianos tem como espaço de co-estados o fibrado cotangente  $T^*TM$ . Generalizando o formalismo intrínseco de Skinner-Rusk resumido na subsecção 1.2.1, consideramos o sistema presimpléctico  $(\mathcal{T}, \Omega, H)$  com as seguintes características:

- O espaço total é o fibrado sobre  $TM$  dado por

$$\mathcal{T} = T^*TM \times_{TM} T^2M,$$

onde a fibra de  $\mathcal{T}$  sobre um ponto  $(x, y) \in TM$  é dada por  $T^*_{(x,y)}TM \times (T^2M)_{(x,y)}$ , com  $(T^2M)_{(x,y)} = (\tau_2^1)^{-1}(x, y)$ . Sejam  $pr_1 : T^*TM \times_{TM} T^2M \rightarrow T^*TM$  e  $pr_2 : T^*TM \times_{TM} T^2M \rightarrow T^2M$  as projecções canónicas do espaço total no espaço de co-estados e no fibrado de controlos, respectivamente.

- A 2-forma presimpléctica  $\Omega$  em  $\mathcal{T}$  é dada pela imagem recíproca (“pull-back”)

$$\Omega = (pr_1)^* \omega_1, \quad (1.2.8)$$

onde  $\omega_1$  denota a 2-forma simpléctica canónica em  $T^*TM$ .

- A função Hamiltoniana  $H : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por

$$H = \ll pr_1, \Pi \circ pr_2 \gg - G \circ pr_2, \quad (1.2.9)$$

onde  $\Pi$  e  $G$  são definidos, respectivamente, por (1.2.7) e (1.2.5), e  $\ll \dots \gg$  representa o produto dualidade canónica de vectores e covectores no fibrado tangente  $TM$ ,  $\ll f, g \gg (z) = (f(z) \circ g)(z)$ .

- O campo de vectores dinâmico  $X_H : \mathcal{T} \rightarrow T(\mathcal{T})$  é a solução do sistema dinâmico

$$i_{X_H} \Omega = dH. \quad (1.2.10)$$

O sistema presimpléctico fornece condições necessárias para a existência de trajectórias extremantes do problema de controlo óptimo, vistas como uma versão geométrica das condições dadas pelo princípio do máximo de Pontryagin. A equação (1.2.10) pode ser interpretada como uma versão intrínseca das equações de Hamilton.

Uma curva  $\alpha$  em  $T^2M$  é uma trajectória crítica do problema de controlo óptimo, se existir um levantamento de  $\alpha$  para o espaço total  $\mathcal{T}$  que é uma curva integral do campo de vectores definido por (1.2.10).

Estamos portanto interessados em determinar o campo de vectores dinâmico  $X_H$ , solução da equação (1.2.10).

Aplicamos agora ao sistema presimpléctico  $(\mathcal{T}, \Omega, H)$ , o algoritmo geométrico referido na subsecção 1.2.1. Começamos por considerar a subvariedade

$$W_1 = \{z \in \mathcal{T} : dH(z)(v_z) = 0, \forall v_z \in Ker \Omega(z)\}.$$

Antes de prosseguirmos, torna-se importante a análise local da estrutura presimpléctica  $\Omega$  definida por (1.2.8). Se  $(U, x^1, \dots, x^n)$  é um sistema de coordenadas locais em



$M$ , e  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$  e  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, u^1, \dots, u^n)$  representam, respectivamente, as coordenadas locais naturais de  $T^*TM$  e  $T^2M$ , então  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, u^1, \dots, u^n, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$  constitui um sistema de coordenadas no espaço total  $\mathcal{T} = T^*TM \times_{TM} T^2M$ . Neste contexto, facilmente se verifica que a forma presimpléctica  $\Omega$  se exprime como

$$\Omega = \sum_{i=1}^n (dx^i \wedge dp_i + dy^i \wedge dq_i).$$

e portanto  $\text{Ker } \Omega = \text{span} \{ \partial/\partial u^1, \dots, \partial/\partial u^n \}$ . De onde se segue que a subvariedade  $W_1$  é localmente caracterizada pelas restrições

$$\frac{\partial H}{\partial u^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.2.11)$$

Note-se ainda que, sendo o nosso sistema de controlo afim nos controlos, atendendo à definição do Hamiltoniano (1.2.9) e à expressão local (1.2.6) da função custo  $G$ , temos  $(\partial^2 H)/(\partial u^i \partial u^j) = -(\partial^2 G)/(\partial u^i \partial u^j) = -g_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$  (recorde-se que  $g_{ij}$  é a notação usada para as componentes da métrica Riemanniana). Então, a matriz

$$\left[ \frac{\partial^2 H}{\partial u^i \partial u^j} \right]_{1 \leq i, j \leq n} \quad (1.2.12)$$

é invertível, o que significa que o sistema é regular em qualquer ponto.

Seja  $\Omega_{W_1}$  a restrição a  $W_1$  da forma presimpléctica  $\Omega$  dada por (1.2.8).

**Proposição 1.2.2.** *A 2-forma  $\Omega_{W_1}$  é simpléctica.*

*Demonstração.* A 2-forma  $\Omega_{W_1}$  é simpléctica se e só se  $T_z W_1 \cap (T_z W_1)^\perp = \{0\}$ , para qualquer  $z \in W_1$ , onde  $(T_z W_1)^\perp$  é o ortogonal de  $T_z W_1$  relativamente a  $\Omega$ , ou seja,

$$(T_z W_1)^\perp = \{v_z \in T_z \mathcal{T} : \Omega(z)(v_z, u_z) = 0, \forall u_z \in T_z W_1\}.$$

Seja  $z \in W_1$ . Sabendo que  $(\partial^2 H)/(\partial u^i \partial u^j) = d(\partial H/\partial u^i)(\partial/\partial u^j)$ , que  $W_1$  é definida pelas restrições (1.2.11) e atendendo ainda à invertibilidade da matriz (1.2.12), temos  $\partial/\partial u^j \notin T_z W_1$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Assim,

$$T_z W_1 \oplus \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial u^1} \Big|_z, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n} \Big|_z \right\} = T_z \mathcal{T}. \quad (1.2.13)$$

Além disso, pelo facto de o sistema ser regular temos  $T_z W_1 \cap Ker \Omega(z) = \{0\}$ . Com efeito, seja  $v_z \in T_z W_1 \cap Ker \Omega(z)$ :

- Uma vez que  $v_z \in Ker \Omega(z)$ , temos  $v_z = \sum_{i=1}^n v_z^i (\partial/\partial u^i)|_z$ , para certas funções suaves  $v_z^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
- Por outro lado, porque  $v_z \in T_z W_1$  e sendo  $W_1$  caracterizada pelas restrições (1.2.11), sabemos que  $d[(\partial H/\partial u^j)(z)](v_z) = 0$ , para  $j = 1, \dots, n$ , o que de acordo com o ponto anterior se escreve como  $\sum_{i,j=1}^n v_z^i [(\partial^2 H)/(\partial u^i \partial u^j)] = 0$ . Logo, dado que a matriz (1.2.12) é invertível, concluímos que  $v_z^i = 0$ , para  $i = 1, \dots, n$  e portanto  $v_z = 0$ .

Para concluir a demonstração, basta mostrar que  $Ker \Omega(z) = (T_z W_1)^\perp$ . Ora, por definição  $Ker \Omega(z) \subset (T_z W_1)^\perp$  e portanto é suficiente verificar a inclusão contrária. Seja  $v_z \in (T_z W_1)^\perp$ , então por definição,  $\Omega(z)(v_z, u_z) = 0$ ,  $\forall u_z \in T_z W_1$ . Além disso, dado que  $\partial/\partial u^i \in Ker \Omega$ , vem  $\Omega(z)(v_z, \partial/\partial u^i) = 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Deste modo, atendendo a (1.2.13), concluímos que  $v_z \in Ker \Omega(z)$  e portanto  $Ker \Omega(z) = (T_z W_1)^\perp$ . Consequentemente,  $T_z W_1 \cap (T_z W_1)^\perp = \{0\}$ .  $\square$

De acordo com a proposição anterior, a regularidade do sistema de controlo garante-nos que  $(W_1, \Omega_{W_1})$  é uma variedade simpléctica. Por conseguinte, o algoritmo é interrompido no primeiro passo, pois fica garantida a existência de um único campo de vectores  $X_{W_1}$  em  $W_1$  solução dos sistema dinâmico (1.2.10) quando restrito a  $W_1$ , ou seja, tal que

$$i_{X_{W_1}} \Omega_{W_1} = dH_{W_1}, \quad (1.2.14)$$

onde  $H_{W_1}$  é a restrição de  $H$  a  $W_1$ .

Uma vez que o sistema é regular, as restrições (1.2.11) definem implicitamente  $n$  funções reais  $\varphi^i$  tais que  $u^i = \varphi^i(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ , para  $i = 1, \dots, n$ . De forma a determinarmos estas funções  $\varphi^i$ , fazemos a análise local do Hamiltoniano. Usando (1.2.3) e (1.2.6), verificamos que o Hamiltoniano  $H : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

definido por (1.2.9), se exprime localmente como

$$H = \sum_{i=1}^n p_i y^i + \sum_{i=1}^n q_i \left( u^i - \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i y^j y^k \right) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij} u^i u^j.$$

Verifica-se agora com facilidade que a subvariedade  $W_1$  é caracterizada por

$$q_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} u^j, \quad i = 1, \dots, n,$$

pelo que deduzimos a expressão dos controlos óptimos

$$u^i = \sum_{j=1}^n g^{ij} q_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

onde  $[g^{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$  é a matriz inversa da matriz  $[g_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ . Consideramos assim o difeomorfismo

$$\varphi : (T^*TM, \omega_1) \longrightarrow (W_1, \Omega_{W_1}),$$

definido localmente por

$$\begin{aligned} \varphi(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) &= \\ &= (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, \sum_{j=1}^n g^{1j} q_j, \dots, \sum_{j=1}^n g^{nj} q_j, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n). \end{aligned}$$

Note-se que a função inversa de  $\varphi$  é a restrição a  $W_1$  da projecção  $pr_1$ . Facilmente se verifica que  $\varphi^* \Omega_{W_1} = \omega_1$ , ou seja, a imagem recíproca de  $\Omega_{W_1}$  por  $\varphi$  coincide com  $\omega_1$ , e portanto  $\varphi$  define um simplectomorfismo entre as variedades simplécticas  $(T^*TM, \omega_1)$  e  $(W_1, \Omega_{W_1})$ .<sup>3</sup> A existência deste simplectomorfismo permite-nos reduzir o estudo do sistema dinâmico (1.2.14) em  $W_1$ , ao estudo do sistema em  $T^*TM$

$$i_{X_{H_1}} \omega_1 = dH_1,$$

<sup>3</sup> Sejam  $(M_1, \omega_1)$  e  $(M_2, \omega_2)$  variedades simplécticas e  $f : M_1 \rightarrow M_2$  um difeomorfismo. Então,

- $f$  diz-se um simplectomorfismo se  $f^* \omega_2 = \omega_1$  ([1], página 177).
- $f$  é um simplectomorfismo se e somente se, qualquer que seja a função suave  $h$  em  $M_2$ , se verifica  $f^* X_h = X_{h \circ f}$ , onde  $f^* X_h = (f^{-1})_* X_h = T f^{-1} \circ X_h \circ f$  (prolongamento de  $X_h$  por  $f^{-1}$ ), e  $X_h$  e  $X_{h \circ f}$  representam os campos de vectores Hamiltonianos associados a  $h$  e a  $h \circ f$ , respectivamente ([1], página 194).

onde  $H_1 : T^*TM \rightarrow \mathbb{R}$  é definido por  $H_1 = H_{W_1} \circ \varphi$ , portanto é localmente dado por

$$H_1 = \sum_{i=1}^n p_i y^i + \sum_{i=1}^n q_i \left( \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{il} q_l - \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i y^j y^k \right), \quad (1.2.15)$$

e o campo de vectores  $X_{H_1}$  em  $T^*TM$  é o prolongamento (“push-forward”) de  $X_{W_1}$  por  $\varphi^{-1}$ ,  $X_{H_1} = (\varphi^{-1})_* X_{W_1} = T\varphi^{-1} \circ X_{W_1} \circ \varphi$ .

Posto isto, o problema de controlo óptimo dos polinómios cúbicos Riemannianos pode ser descrito pelo sistema Hamiltoniano  $(T^*TM, \omega_1, H_1)$ . As curvas integrais deste campo de vectores determinam, quando projectadas para a variedade original, as soluções do problema de controlo óptimo (ver [14, 38]). Repare-se que, sendo o sistema Hamiltoniano  $(T^*TM, \omega_1, H_1)$  canónico, o campo de vectores solução  $X_{H_1}$  em  $T^*TM$ , determina-se de acordo com

$$X_{H_1} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H_1}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial H_1}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial y^i} - \frac{\partial H_1}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial H_1}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right). \quad (1.2.16)$$

### 1.3 Transformação de Legendre

Analisamos nesta secção a capacidade que os problemas variacional e de controlo óptimo, apresentados na duas secções anteriores, têm para descrever as mesmas soluções, ou seja, os polinómios cúbicos Riemannianos. A ideia consiste no seguinte:

- Definir a transformação de Legendre  $Leg : T^3M \rightarrow T^*TM$  associada ao Lagrangiano regular  $L : T^2M \rightarrow \mathbb{R}$  da secção 1.1.
- Usando a referida transformação de Legendre, associar ao problema variacional da secção 1.1, uma função  $H_L : T^*TM \rightarrow \mathbb{R}$ , designada por função energia Hamiltoniana associada a  $L$ .
- Concretizar a abordagem Hamiltoniana do problema variacional dos polinómios cúbicos, com o Hamiltoniano dado pela função energia Hamiltoniana  $H_L$ .
- E, finalmente, verificar que este novo sistema Hamiltoniano, e aquele que associámos ao problema de controlo óptimo da secção 1.2, coincidem.

Consideremos o problema variacional dos polinómios cúbicos da secção 1.1. Seja  $\alpha_L$  a forma de Jacobi-Ostrogradsky associada ao Lagrangiano  $L$  dado por (1.1.10), ou seja, a 1-forma em  $T^3M$  definida por (1.1.13). Recorde-se da proposição 1.1.6 que, se  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, u^1, \dots, u^n, v^1, \dots, v^n)$  representa um sistema de coordenadas naturais em  $T^3M$ , então a expressão local desta 1-forma é dada por

$$\alpha_L = \sum_{i=1}^n (\alpha_i^0 dx^i + \alpha_i^1 dy^i), \quad (1.3.1)$$

onde  $\alpha_i^l$ , são as funções reais definidas na proposição 1.1.6, para  $l = 0, 1$  e  $i = 1, \dots, n$ . Como mencionámos anteriormente,  $\alpha_L$  é uma 1-forma em  $T^3M$  semi-básica de tipo 2. Estamos assim em condições de aplicar o teorema A.7.3.

Denotemos por  $\tau_{TM}$  e  $\pi_{T^3M}$  as projecções canónicas, respectivamente, de  $T^*TM$  em  $TM$  e de  $TT^3M$  em  $T^3M$ . Consideremos ainda a projecção natural  $\tau_3^1 : T^3M \rightarrow TM$ .

**Proposição 1.3.1.** *A forma de Jacobi-Ostrogradsky  $\alpha_L$  definida por (1.3.1) determina uma aplicação*

$$Leg : T^3M \rightarrow T^*(TM),$$

tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} T^3M & \xrightarrow{Leg} & T^*TM \\ & \searrow \tau_3^1 & \swarrow \tau_{TM} \\ & TM & \end{array} .$$

A relação entre  $\alpha_L$  e  $Leg$  é dada por

$$\alpha_L = \ll Leg \circ \pi_{T^3M}, T\tau_3^1 \gg,$$

onde  $\ll \cdot, \cdot \gg$  representa o produto dualidade canónica de vectores e covectores em  $TM$ .

Em termos locais temos

$$\begin{aligned} Leg(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, u^1, \dots, u^n, v^1, \dots, v^n) &= \\ &= (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, \alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0, \alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1), \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

onde  $\alpha_i^l$ , são as funções reais definidas na proposição 1.1.6, para  $l = 0, 1$  e  $i = 1, \dots, n$ .

**Proposição 1.3.2.** *Se  $\omega_1$  é a forma canónica simpléctica em  $T^*TM$  e  $\omega_L$  é a forma simpléctica em  $T^3M$  definida por (1.1.15), então*

$$\text{Leg}^*\omega_1 = \omega_L,$$

onde  $\text{Leg}$  é a aplicação determinada pela forma de Jacobi-Ostrogradsky  $\alpha_L$ .

*Demonstração.* Por definição, temos  $\omega_L = -d\alpha_L$  e  $\omega_1 = -d\lambda_1$ , onde  $\lambda_1$  é a forma de Liouville em  $T^*TM$ . De acordo com o corolário A.7.4, temos  $\text{Leg}^*\lambda_1 = \alpha_L$  e daqui se deduz de imediato o pretendido.  $\square$

A demonstração do resultado a seguir apresentado pode ser encontrada em [49] (página 111), para a situação geral de um Lagrangiano de ordem  $k$  e correspondente forma de Jacobi-Ostrogradsky  $\alpha_L$ .

**Teorema 1.3.3.** *Um Lagrangiano  $L$  de ordem 2 é regular se e só se a aplicação  $\text{Leg} : T^3M \rightarrow T^*TM$  determinada pela correspondente forma de Jacobi-Ostrogradsky  $\alpha_L$  é um difeomorfismo local. Nessa situação, a aplicação  $\text{Leg}$  designa-se por transformação de Legendre associada a  $L$ .*

A transformação de Legendre associada a um certo Lagrangiano pode não ser um difeomorfismo global. No caso de o ser, dizemos que  $L$  é *hiper-regular*. Na situação dos polinómios cúbicos,  $L$ , definido por (1.1.10), é um Lagrangiano hiper-regular. De facto, sabemos da secção 1.1 que  $L$  é regular, mas para além disso,  $\text{Leg}$  é um difeomorfismo, uma vez que a sua restrição a cada fibra de  $\tau_3^1 : T^3M \rightarrow TM$  é bijectiva. Se  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$  é um sistema de coordenadas locais em  $T^*TM$ , então a aplicação inversa de  $\text{Leg}$  é definida localmente por

$$\begin{aligned} \text{Leg}^{-1}(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = \\ = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, u^1, \dots, u^n, v^1, \dots, v^n), \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

onde

$$u^i = \sum_{l=1}^n g^{il} q_l - \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i y^j y^k, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.3.4)$$

e

$$v^i = \sum_{j=1}^n g^{ij}(p_j - f_j), \quad i = 1, \dots, n,$$

para

$$f_j = \sum_{i,k,l,s=1}^n \left[ (\Gamma_{jks} - \Gamma_{ksj})\Gamma_{il}^s - g_{js} \frac{\partial \Gamma_{il}^s}{\partial x^k} \right] y^i y^k y^l + \sum_{k=1}^n (\Gamma_{jik} - 3\Gamma_{kij}) y^i u^k,$$

com  $\Gamma_{ijk} := \sum_{s=1}^n \Gamma_{ij}^s g_{sk}$ . Neste contexto,  $Leg$  define um simplectomorfismo (ver nota de rodapé 3 do actual capítulo) entre as variedades simplécticas  $(T^3M, \omega_L)$  e  $(T^*TM, \omega_1)$ .

Recordemos agora o formalismo intrínseco do problema variacional dos polinómios cúbicos apresentado na secção 1.1: temos a variedade simpléctica  $(T^3M, \omega_L)$  e a função energia  $E : T^3M \rightarrow \mathbb{R}$  associada ao Lagrangiano  $L$ , definida por (1.1.17). Como referimos, as curvas integrais do campo de vectores  $X_E$  definido pelo sistema (1.1.19),  $i_{X_E}\omega_L = dE$ , satisfazem as equações de Euler-Lagrange do problema variacional e, nesse sentido, este sistema é considerado como a versão intrínseca das equações de Euler-Lagrange. Face ao exposto na presente secção, estamos em condições de apresentar o sistema Hamiltoniano associado ao problema variacional dos polinómios cúbicos. Assim, consideramos o sistema  $(T^*TM, \omega_1, H_L)$ , onde

$$H_L = E \circ Leg^{-1} \tag{1.3.5}$$

é denominada a função energia Hamiltoniana associada a  $L$ . A dinâmica deste sistema Hamiltoniano é descrita pelo campo de vectores  $X_{H_L}$  definido pelo sistema

$$i_{X_{H_L}}\omega_1 = dH_L.$$

Ora, como concluimos no parágrafo anterior,  $Leg$  é um simplectomorfismo e, como consequência (consultar nota de rodapé 3 do presente capítulo), o campo de vectores  $X_{H_L}$  é dado pelo prolongamento (“push-forward”) de  $X_E$  pela aplicação  $Leg$ , ou seja,  $X_{H_L} = (Leg)_*X_E = TLeg \circ X_E \circ Leg^{-1}$ . Assim, temos o seguinte resultado ([49]):

**Proposição 1.3.4.** *Se  $\sigma$  é uma curva integral de  $X_E$ , então  $\bar{\sigma} = Leg \circ \sigma$  é uma curva integral de  $X_{H_L}$  e temos  $\tau_{TM} \circ \bar{\sigma} = \tau_3^1 \circ \sigma$ .*

Para finalizar esta secção, apresentamos um resultado que nos permite concluir que o sistema  $(T^*TM, \omega_1, H_L)$  associado ao problema de Lagrange coincide com o sistema  $(T^*TM, \omega_1, H_1)$  abordado na secção anterior para descrever a dinâmica do problema de controlo óptimo.

**Proposição 1.3.5.** *A função energia Hamiltoniana  $H_L : T^*TM \rightarrow \mathbb{R}$  definida por (1.3.5) coincide com o Hamiltoniano  $H_1 : T^*TM \rightarrow \mathbb{R}$  definido por (1.2.15). Escrevemos  $H := H_L = H_1$ .*

*Demonstração.* Sendo  $H_L$  definido por (1.3.5), atendendo às expressões (1.1.17) de  $E$  e (1.3.3) de  $Leg^{-1}$ , e sabendo ainda que  $Leg$  é definida por (1.3.2), temos

$$H_L = \sum_{i=1}^n (p_i y^i + q_i u^i(x, y, p, q)) - \frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^n g_{lk} \left( u^l(x, y, p, q) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^l y^i y^j \right) \left( u^k(x, y, p, q) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k y^i y^j \right), \quad (1.3.6)$$

onde estamos a considerar  $(x, y, p, q) = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$  e  $(x, y, u, v) = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, u^1, \dots, u^n, v^1, \dots, v^n)$ , de forma a simplificar a notação. Ora, para cada  $i = 1, \dots, n$ ,  $u^i(x, y, p, q)$  exprime-se por (1.3.4), o que substituindo em (1.3.6) resulta no pretendido.  $\square$

Perante o que aqui se expôs, concluímos que os formalismos Lagrangiano e de controlo óptimo são equivalentes, pois como vimos a transformação de Legendre permite-nos passar globalmente de um formalismo ao outro.

## 1.4 Polinómios cúbicos na esfera $S^2$

Terminamos este capítulo com a apresentação do problema de controlo óptimo dos polinómios cúbicos na esfera  $S^2$ , exemplo este abordado por Abrunheiro, Camarinha e Clemente-Gallardo em [5].



Seja  $S^2$  a esfera de raio  $a$  com as coordenadas esféricas usuais  $x^1 = \theta$  e  $x^2 = \varphi$ . Neste caso, as componentes da métrica Riemanniana são  $g_{11} = a^2 \sin^2 \varphi$ ,  $g_{22} = a^2$  e  $g_{12} = g_{21} = 0$ . Os símbolos de Christoffel são  $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \cot \varphi$ ,  $\Gamma_{11}^2 = -\sin \varphi \cos \varphi$  e todos os outros são zero. Consideremos o problema de controlo óptimo dos polinómios cúbicos Riemannianos em  $S^2$ . O espaço de estados é o fibrado  $TS^2$ , o fibrado de controlos é dado por  $T^2S^2$  e o espaço de co-estados por  $T^*TS^2$ . Representemos as correspondentes coordenadas destes espaços por  $(\theta, \varphi, y_\theta, y_\varphi)$ ,  $(\theta, \varphi, y_\theta, y_\varphi, u^1, u^2)$  e  $(\theta, \varphi, y_\theta, y_\varphi, p_\theta, p_\varphi, q_\theta, q_\varphi)$ , respectivamente. A função custo do problema é

$$G = \frac{1}{2} [a^2(u^1)^2 \sin^2 \varphi + a^2(u^2)^2]$$

e o sistema de controlo é representado por

$$\begin{cases} \dot{\theta} = y_\theta \\ \dot{\varphi} = y_\varphi \\ \dot{y}_\theta = u^1 - 2y_\theta y_\varphi \cot \varphi \\ \dot{y}_\varphi = u^2 + (y_\theta)^2 \sin \varphi \cos \varphi. \end{cases}$$

O Hamiltoniano é definido na variedade presimpléctica  $T^*TS^2 \times_{TS^2} T^2S^2$  por

$$H = p_\theta y_\theta + p_\varphi y_\varphi + (u^1 - 2y_\theta y_\varphi \cot \varphi) q_\theta + (u^2 + (y_\theta)^2 \sin \varphi \cos \varphi) q_\varphi - \frac{1}{2} [a^2(u^1)^2 \sin^2 \varphi + a^2(u^2)^2].$$

Efectuando os cálculos, verifica-se que as equações de restrição  $\partial H / \partial u^i = 0$ ,  $i = 1, 2$ , que definem a variedade simpléctica  $W_1$  são

$$q_\theta - a^2 u^1 \sin^2 \varphi = 0 \quad \text{e} \quad q_\varphi - a^2 u^2 = 0$$

e consequentemente os controlos são dados por

$$u^1 = \frac{1}{a^2} q_\theta \operatorname{cosec}^2 \varphi \quad \text{e} \quad u^2 = \frac{1}{a^2} q_\varphi.$$

Portanto, o Hamiltoniano em  $T^*TS^2$  escreve-se como

$$H = p_\theta y_\theta + p_\varphi y_\varphi + \frac{1}{2a^2} (q_\theta)^2 \operatorname{cosec}^2 \varphi + \frac{1}{2a^2} (q_\varphi)^2 + (y_\theta)^2 q_\varphi \sin \varphi \cos \varphi - 2y_\theta y_\varphi q_\theta \cot \varphi.$$

Assim, de acordo com (1.2.16), o campo de vectores solução  $X$  em  $T^*TS^2$  é dado por

$$\begin{aligned}
X &= y_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + y_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \\
&+ \left( \frac{1}{a^2} q_\theta \operatorname{cosec}^2 \varphi - 2y_\theta y_\varphi \cot \varphi \right) \frac{\partial}{\partial y_\theta} + \left( \frac{1}{a^2} q_\varphi + (y_\theta)^2 \sin \varphi \cos \varphi \right) \frac{\partial}{\partial y_\varphi} + \\
&+ \left[ \left( \frac{1}{a^2} (q_\theta)^2 \cot \varphi - 2y_\theta y_\varphi q_\theta \right) \operatorname{cosec}^2 \varphi - (y_\theta)^2 q_\varphi + 2(y_\theta)^2 q_\varphi \sin^2 \varphi \right] \frac{\partial}{\partial p_\varphi} \\
&+ (2y_\varphi q_\theta \cot \varphi - 2y_\theta q_\varphi \sin \varphi \cos \varphi - p_\theta) \frac{\partial}{\partial q_\theta} \\
&+ (2y_\theta q_\theta \cot \varphi - p_\varphi) \frac{\partial}{\partial q_\varphi}.
\end{aligned}$$

## Capítulo 2

# Polinómios cúbicos em grupos de Lie

Este capítulo é dedicado ao estudo do problema dos polinómios cúbicos em grupos de Lie conexos e compactos. Destacaremos a versão Hamiltoniana do problema, tendo em vista uma redução da dinâmica que será analisada num capítulo posterior.

Na secção 1 apresentaremos alguns conceitos e resultados básicos da teoria de grupos de Lie com o intuito de consolidar a notação e as ferramentas de base deste capítulo. Realçaremos os conceitos de trivialização à esquerda dos fibrados tangente e cotangente de um grupo de Lie, usando a translação à esquerda do grupo. Este tipo de trivialização permitir-nos-á aprofundar a formulação Hamiltoniana do nosso problema.

Abordaremos na secção 2 o problema variacional dos polinómios cúbicos. Adaptaremos para o caso do grupo de Lie, as equações de Euler-Lagrange e os invariantes ao longo do polinómio cúbico que conhecemos da situação geral. O objectivo é estabelecer, no final do capítulo, o paralelismo entre estes resultados e os que serão deduzidos geometricamente nas secções seguintes.

As secções 3 e 4 são dedicadas à descrição Hamiltoniana do problema de controlo dos polinómios cúbicos, no contexto dos grupos de Lie (os resultados mais relevantes

destas duas secções foram publicados por Abrunheiro, Camarinha e Clemente-Gallardo em [7]). Introduziremos o problema de controlo com o espaço de estados e o fibrado de controlos trivializados. De seguida, descreveremos a dinâmica do problema usando o formalismo presimplético associado à forma canónica simplética do fibrado cotangente do produto semidirecto do grupo de Lie e da sua álgebra. Prosseguimos, na secção 5, com a trivialização deste fibrado cotangente. O resultado final será um sistema Hamiltoniano na variedade simplética dada pelo produto cartesiano do produto semidirecto acima mencionado pelo seu dual, para o qual deduziremos, na secção 6, alguns integrais do movimento. Na última secção, analisaremos a relação existente entre as abordagens Hamiltoniana e Lagrangiana apresentadas, usando as ferramentas geométricas introduzidas.

Neste capítulo,  $G$  é um grupo de Lie de dimensão finita, conexo e compacto com identidade  $e$ . A correspondente álgebra de Lie, equipada com o parêntesis de Lie  $[\cdot, \cdot]$ , é denotada por  $\mathfrak{g}$  e o seu espaço dual por  $\mathfrak{g}^*$ .

## 2.1 Noções preliminares em grupos de Lie

Nesta secção estabelecemos alguma notação e recordamos alguns conceitos e resultados da teoria dos grupos de Lie que serão usados ao longo deste trabalho. As referências utilizadas são essencialmente [45, 46, 61, 75]. Importa ainda ter em consideração o apêndice B, dedicado aos grupos de Lie e acções de grupos de Lie e que serve de apoio ao presente capítulo.

### 2.1.1 O grupo de Lie $G$

Representamos os elementos do grupo de Lie por  $x$  ou  $g$ . As aplicações dadas por  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(x, g) \mapsto xg$  e  $G \rightarrow G$ ,  $x \mapsto x^{-1}$  são as operações multiplicação e inversão

para o grupo. Sejam

$$L_x : G \rightarrow G \quad \text{e} \quad R_x : G \rightarrow G,$$

respectivamente, as translações à esquerda e à direita por  $x \in G$  que sabemos serem difeomorfismos (ver definição B.1.4 e proposição B.1.5). A aplicação tangente de  $L_x$  em  $g \in G$  é denotada por  $T_g L_x$  e representamos a sua transposta por  $T_g^* L_x$ . De igual modo, denotamos por  $T_g R_x$  e  $T_g^* R_x$  a aplicação tangente de  $R_x$  em  $g \in G$  e a sua transposta, respectivamente. Recordamos a seguir as definições de representação adjunta (em  $\mathfrak{g}$ ) e coadjunta (em  $\mathfrak{g}^*$ ) do grupo e da sua álgebra (ver exemplos B.2.12 e B.2.13).

- A *representação adjunta* de  $G$  é denotada por  $Ad$  e é caracterizada por fazer corresponder a cada  $x \in G$  o automorfismo em  $\mathfrak{g}$  dado por  $Ad_x := T_e(R_{x^{-1}} \circ L_x)$ .
- A aplicação tangente de  $Ad$  na identidade  $e$  designa-se por *representação adjunta de  $\mathfrak{g}$*  e é denotada por  $ad : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ . Temos  $ad_Y Z = [Y, Z]$ , para cada  $Y, Z \in \mathfrak{g}$ .
- A aplicação  $Ad^* : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}^*)$  definida, para cada  $x \in G$  e  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ , por  $[Ad^*(x)](\xi) := Ad_{x^{-1}}^* \xi = \xi \circ Ad_{x^{-1}}$ , diz-se a *representação coadjunta de  $G$* .
- A *representação coadjunta de  $\mathfrak{g}$*  é a aplicação  $ad^* : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g}^*)$  dada por  $[ad^*(Y)](\xi) := -ad_Y^* \xi = -\xi \circ ad_Y$ , para cada  $Y \in \mathfrak{g}$  e  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ .

Em virtude de assumirmos o grupo de Lie  $G$  conexo e compacto, é garantida a existência de uma métrica Riemanniana bi-invariante<sup>1</sup> em  $G$ , que denotamos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Este resultado e o a seguir apresentado podem ser encontrados, por exemplo, em [45, 61].

**Teorema 2.1.1.** *Se  $G$  é um grupo de Lie munido com uma métrica Riemanniana bi-invariante, então a conexão  $\nabla$  e o tensor de curvatura  $R$  associados a esta métrica são dados, respectivamente, por*

$$\nabla_Y Z = \frac{1}{2}[Y, Z] \quad \text{e} \quad R(Y, Z)W = -\frac{1}{4}[[Y, Z], W],$$

<sup>1</sup>A métrica é bi-invariante se for invariante à esquerda e à direita, o que significa que satisfaz  $\langle Y, Z \rangle = \langle T_g L_x Y, T_g L_x Z \rangle = \langle T_g R_x Y, T_g R_x Z \rangle$ , para quaisquer  $Y, Z$  campos de vectores em  $G$  e  $x, g \in G$ .

onde  $Y$ ,  $Z$  e  $W$  são campos de vectores invariantes à esquerda. Além disso, verifica-se a seguinte propriedade

$$\langle [Y, Z], W \rangle = \langle Y, [Z, W] \rangle. \quad (2.1.1)$$

Fixemos uma base ortonormada  $\{A_1, \dots, A_n\}$  na álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , ou seja, uma base que verifica  $\langle A_i, A_j \rangle = \delta_{ij}$ , para quaisquer  $i, j = 1, \dots, n$ , onde  $\delta_{ij}$  representa o símbolo de Kronecker. Como é sabido, todo o grupo de Lie é paralelizável e portanto  $TG$  possui um referencial global. Podemos assim definir a base descrita na seguinte proposição, que é gerada pela base  $\{A_1, \dots, A_n\}$ .

**Proposição 2.1.2.** *Consideremos os  $n$  campos de vectores  $X_i : G \rightarrow TG$  em  $G$ ,  $i = 1, \dots, n$ , definidos de acordo com*

$$X_i(x) = T_e L_x A_i, \quad (2.1.2)$$

para cada  $x \in G$ . Então,

$$\{X_1, \dots, X_n\}$$

é uma base ortonormada de campos de vectores em  $G$  invariantes à esquerda.

*Demonstração.* Começemos por observar que os campos de vectores  $X_i$  em  $G$  são, por construção, campos de vectores invariantes à esquerda, ou seja, é válida a igualdade  $TL_x \circ X_i = X_i \circ L_x$ , para qualquer  $x \in G$  (ver definição B.1.14). De acordo com o mencionado na observação B.1.15, sendo campos de vectores invariantes à esquerda, estes ficam completamente definidos pelos seu valor na identidade  $X_i(e) = A_i$  e, portanto, estão bem definidos quando consideramos  $X_i(x) = T_e L_x A_i$ . Agora, se  $v_x \in T_x G$ , para  $x \in G$ , sendo a aplicação tangente  $T_e L_x$  um isomorfismo (ver proposição B.1.5), podemos garantir a existência de um elemento  $A = \sum_{i=1}^n a_i A_i \in \mathfrak{g}$ , onde  $a_i$  são funções reais suaves, tal que  $v_x = T_e L_x A$ . Logo,  $v_x = \sum_{i=1}^n a_i X_i(x)$  e portanto  $\{X_1(x), \dots, X_n(x)\}$  é uma base de  $T_x G$ . Além disso, é claro que a base de campos de vectores é ortonormada, dado que  $\{A_1, \dots, A_n\}$  é uma base ortonormada e que a métrica é bi-invariante.  $\square$

Importa ainda referir que a base dual de  $\{A_1, \dots, A_n\}$  é uma base do espaço dual  $\mathfrak{g}^*$ . Esta base gera uma base de campos de covectores (ou seja, 1-formas) em  $G$  invariantes à esquerda. Com o intuito de simplificar a linguagem, ao longo desta dissertação adoptamos as notações descritas de seguida.

- Da proposição 2.1.2, sabemos que qualquer campo de vectores suave  $Z_x$  ao longo de uma curva  $x$  em  $G$  pode escrever-se na forma

$$Z_x(t) = \sum_{i=1}^n z^i(t) X_i(x(t)), \quad (2.1.3)$$

onde  $z^i$  são funções suaves do tempo. Representamos por  $\dot{Z}_x$  o campo de vectores ao longo de  $x$  dado por

$$\dot{Z}_x(t) = \sum_{i=1}^n \dot{z}^i(t) X_i(x(t)). \quad (2.1.4)$$

- Seja  $Y$  uma curva em  $\mathfrak{g}$  e  $\xi$  uma curva em  $\mathfrak{g}^*$ . Representamos por

$$\dot{Y} \quad (\text{respectivamente, } \dot{\xi}) \quad (2.1.5)$$

o elemento de  $\mathfrak{g}$  (respectivamente,  $\mathfrak{g}^*$ ) cujas componentes em relação à base de  $\mathfrak{g}$  (respectivamente,  $\mathfrak{g}^*$ ) acima mencionada, são as derivadas das componentes de  $Y$  (respectivamente,  $\xi$ ).

- Se  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ , o vector tangente identificado com este vector cotangente através da métrica Riemanniana é denotado por  $X_\xi \in \mathfrak{g}$ . Isto é,

$$\xi(Y) = \langle X_\xi, Y \rangle, \quad \forall Y \in \mathfrak{g}. \quad (2.1.6)$$

Com as notações acima consideradas, é simples de mostrar o seguinte resultado:

**Proposição 2.1.3.** *Se  $Y \in \mathfrak{g}$  e  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ , então são válidas as igualdades*

$$\dot{X}_\xi = X_{\dot{\xi}}, \quad X_{ad_Y^* \xi} = -ad_Y X_\xi \quad e \quad X_{Ad_x^* \xi} = Ad_{x^{-1}} X_\xi. \quad (2.1.7)$$

*Demonstração.* De acordo com (2.1.6), torna-se claro que as componentes de  $\xi$  e  $X_\xi$  relativamente às bases, respectivamente, de  $\mathfrak{g}^*$  e  $\mathfrak{g}$  acima referidas, coincidem. Como consequência,  $\dot{X}_\xi = X_{\dot{\xi}}$ . Se  $Z \in \mathfrak{g}$ ,  $\langle X_{ad_Y^* \xi}, Z \rangle = (ad_Y^* \xi)(Z) = \xi([Y, Z]) = \langle X_\xi, [Y, Z] \rangle$ , o que pela propriedade (2.1.1) nos dá  $\langle X_{ad_Y^* \xi}, Z \rangle = \langle [X_\xi, Y], Z \rangle = -\langle ad_Y X_\xi, Z \rangle$ . Logo,  $X_{ad_Y^* \xi} = -ad_Y X_\xi$ . Por sua vez,  $\langle X_{Ad_x^* \xi}, Z \rangle = (Ad_x^* \xi)(Z) = \xi(Ad_x Z) = \langle X_\xi, Ad_x Z \rangle$ , o que, pela bi-invariância da métrica, é equivalente a escrever  $\langle X_{Ad_x^* \xi}, Z \rangle = \langle Ad_{x^{-1}} X_\xi, Z \rangle$ . Portanto, concluímos que  $X_{Ad_x^* \xi} = Ad_{x^{-1}} X_\xi$ .  $\square$

**Observação 2.1.4.** *Seja  $\lambda$  a forma de Maurer-Cartan exposta na definição B.1.20. Observe-se que a relação entre as bases  $\{A_1, \dots, A_n\}$  e  $\{X_1, \dots, X_n\}$  acima consideradas, pode ser traduzida pela identidade*

$$A_i = \lambda_x(X_i(x)),$$

para cada  $i = 1, \dots, n$ . Então, através de  $\lambda$ , a cada campo de vectores  $Z_x$  ao longo de uma curva  $x$  em  $G$ , podemos associar um elemento  $Z$  da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Com efeito, se  $Z_x$  é dado por (2.1.3), definimos

$$Z := \lambda_x(Z_x(t)) = \sum_{i=1}^n z^i(t) A_i. \quad (2.1.8)$$

Além disso, resulta de imediato que

$$\frac{d}{dt} [\lambda_x(Z_x(t))] = \lambda_x(\dot{Z}_x(t)), \quad (2.1.9)$$

onde  $\dot{Z}_x$  é definido por (2.1.4).

## 2.1.2 O grupo de Lie fibrado tangente

O fibrado tangente  $TG$  do grupo de Lie  $G$  é um grupo de Lie com operações de grupo definidas como prolongamentos tangentes das operações em  $G$ . Denotamos os elementos de  $TG$  por  $v_x$  ou  $v_g$ , onde  $\pi_G(v_x) = x$  e  $\pi_G(v_g) = g$  para  $\pi_G : TG \rightarrow G$  a projecção canónica. A demonstração do resultado a seguir apresentado pode ser encontrada, por exemplo, em [46].



**Lema 2.1.5.** *Se  $m : G \times G \rightarrow G$  representa a operação multiplicação do grupo de Lie  $G$ , então, a aplicação tangente a  $m$  num elemento arbitrário  $(x, g) \in G \times G$  é definida por*

$$(T_{(x,g)}m)(v_x, v_g) = T_x R_g v_x + T_g L_x v_g \in T_{xg}G,$$

para cada  $v_x \in T_x G$  e  $v_g \in T_g G$ .

**Proposição 2.1.6.** [46, 71] *O fibrado tangente  $TG$  do grupo de Lie  $G$  é um grupo de Lie com operações de grupo dadas por*

$$\begin{array}{ccc} TG \times TG & \longrightarrow & TG \\ (v_x, v_g) & \longmapsto & v_x v_g \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} TG & \longrightarrow & TG \\ v_x & \longmapsto & v_x^{-1} \end{array}$$

onde

$$v_x v_g = T_x R_g v_x + T_g L_x v_g \in T_{xg}G \quad e \quad v_x^{-1} = -(T_e L_{x^{-1}} \circ T_x R_{x^{-1}})(v_x) \in T_{x^{-1}}G,$$

para cada  $v_x \in T_x G$  e  $v_g \in T_g G$ , com  $x, g \in G$ .

### 2.1.3 Produto semidirecto do grupo de Lie e da sua álgebra

No contexto da secção B.4, interessa-nos o seguinte caso particular: consideramos o grupo de Lie  $G$  a actuar no espaço vectorial dado pela sua álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , através da acção à direita que consiste no diferencial na identidade da acção à direita de  $G$  em si próprio definida por  $(x, g) \in G \times G \mapsto (R_x \circ L_{x^{-1}})(g) \in G$ . Uma vez que  $T_e(R_x \circ L_{x^{-1}})Y = Ad_{x^{-1}}Y$ , a representação à direita de  $G$  em  $\mathfrak{g}$  que estamos a considerar e a correspondente representação de  $\mathfrak{g}$  em  $\mathfrak{g}$ , são tais que

$$Y \cdot x \equiv Ad_{x^{-1}}Y \quad e \quad Z \cdot Y = -ad_Y Z = ad_Z Y,$$

para quaisquer  $x \in G$  e  $Y, Z \in \mathfrak{g}$ . De acordo com a proposição B.4.1, construímos o grupo de Lie produto semidirecto descrito no resultado a seguir apresentado.

**Proposição 2.1.7.** *A variedade diferenciável produto cartesiano  $G \times \mathfrak{g}$  munida com a operação multiplicação*

$$(x, Y)(g, Z) = (xg, Ad_{g^{-1}}Y + Z),$$

com  $(x, Y), (g, Z) \in G \times \mathfrak{g}$ , é um grupo de Lie, designado por grupo de Lie produto semidirecto de  $G$  e  $\mathfrak{g}$  e denotado por  $G \otimes_S \mathfrak{g}$ . O elemento identidade deste grupo é  $(e, 0)$  e o elemento inverso de  $(x, Y) \in G \times \mathfrak{g}$  é definido por  $(x, Y)^{-1} = (x^{-1}, -Ad_x Y)$ .

Ao longo deste trabalho, usaremos a notação  $G \times \mathfrak{g}$ , em vez de  $G \otimes_S \mathfrak{g}$ , para representar o produto semidirecto. E de forma análoga se usam as notações  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$  para representar a correspondente álgebra de Lie e o seu dual, respectivamente.

Da secção B.4, sabemos ainda que o parêntesis de Lie em  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$  é determinado de acordo com a fórmula

$$[(Y, Z), (Y', Z')] = ([Y, Y'], [Y, Z'] + [Z, Y'])$$

e portanto  $ad_{(Y,Z)}(Y', Z') = ([Y, Y'], [Y, Z'] + [Z, Y'])$ , para quaisquer  $Y, Y', Z, Z' \in \mathfrak{g}$ . Daqui, facilmente se deduz que

$$ad_{(Y,Z)}^*(\mu, \xi) := (\mu, \xi) \circ ad_{(Y,Z)} = (ad_Y^* \mu + ad_Z^* \xi, ad_Y^* \xi). \quad (2.1.10)$$

### Fibrado tangente de $G \times \mathfrak{g}$

$$T(G \times \mathfrak{g}) = \bigcup_{(x,Y) \in G \times \mathfrak{g}} T_{(x,Y)}(G \times \mathfrak{g}) = \bigcup_{(x,Y) \in G \times \mathfrak{g}} (T_x G \times \{Y\} \times \mathfrak{g}).$$

Se  $(x, Y) \in G \times \mathfrak{g}$ , cada elemento

$$(v_x, U) \in T_{(x,Y)}(G \times \mathfrak{g})$$

é tal que  $v_x \in T_x G$  e  $U \in T_Y \mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ . Neste sentido, identificamos de forma natural este elemento  $(v_x, U)$  com o terno

$$(v_x, Y, U) \in T_x G \times \{Y\} \times \mathfrak{g},$$

que será a notação adoptada para os elementos de  $T(G \times \mathfrak{g})$ . A projecção natural do fibrado  $T(G \times \mathfrak{g})$  é a aplicação  $\pi_{G \times \mathfrak{g}} : T(G \times \mathfrak{g}) \rightarrow G \times \mathfrak{g}$ , definida por

$$\pi_{G \times \mathfrak{g}}(v_x, Y, U) = (\pi_G(v_x), Y) = (x, Y),$$

para cada  $(v_x, Y, U) \in T(G \times \mathfrak{g})$ .

### Fibrado tangente de ordem dois de $G$

O fibrado tangente de ordem dois  $T^2G$  de  $G$ , quando trivializado usando o difeomorfismo (2.1.15) de  $TG$  abordado na secção a seguir, é um fibrado sobre  $G \times \mathfrak{g}$ , que denotaremos por  $\widetilde{T^2G}$ , e que pode ser visto como um subfibrado de  $T(G \times \mathfrak{g})$ .

$$\widetilde{T^2G} = \{(v_x, Y, U) \in T_{(x,Y)}(G \times \mathfrak{g}) : T_x L_{x^{-1}} v_x = Y\} = \bigcup_{x \in G} (T_x G \times \mathfrak{g}). \quad (2.1.11)$$

Assim, representamos cada elemento de  $\widetilde{T^2G}$  por um par

$$(v_x, U) \in T_x G \times \mathfrak{g}.$$

A projecção natural do fibrado  $\widetilde{T^2G}$  é a aplicação  $\widetilde{\tau}_2^1 : \widetilde{T^2G} \rightarrow G \times \mathfrak{g}$ , definida por

$$\widetilde{\tau}_2^1(v_x, U) = (\pi_G(v_x), T_x L_{x^{-1}} v_x) = (x, T_x L_{x^{-1}} v_x), \quad (2.1.12)$$

para cada  $(v_x, U) \in \widetilde{T^2G}$ .

### Fibrado cotangente de $G \times \mathfrak{g}$

$$T^*(G \times \mathfrak{g}) = \bigcup_{(x,Y) \in G \times \mathfrak{g}} T_{(x,Y)}^*(G \times \mathfrak{g}) = \bigcup_{(x,Y) \in G \times \mathfrak{g}} (T_x^* G \times \{Y\} \times \mathfrak{g}^*).$$

Se  $(x, Y) \in G \times \mathfrak{g}$ , cada elemento

$$(\alpha_x, \xi) \in T_{(x,Y)}^*(G \times \mathfrak{g})$$

é tal que  $\alpha_x \in T_x^* G$  e  $\xi \in T_Y^* \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^*$ . Portanto, os elementos de  $T^*(G \times \mathfrak{g})$  podem ser caracterizados através de elementos do tipo

$$(\alpha_x, Y, \xi) \in T_x^* G \times \{Y\} \times \mathfrak{g}^*.$$

Neste trabalho, sempre que se justificar, simplificamos a notação agora introduzida, suprimindo o segundo elemento do terno que representa cada elemento de  $T(G \times \mathfrak{g})$  ou  $T^*(G \times \mathfrak{g})$ , ou seja, assumimos a identificação entre os elementos de  $T_{(x,Y)}(G \times \mathfrak{g})$

(respectivamente,  $T_{(x,Y)}^*(G \times \mathfrak{g})$ ) e os elementos de  $T_x G \times \mathfrak{g}$  (respectivamente,  $T_x^* G \times \mathfrak{g}^*$ ), nos casos em que esta não gere ambiguidade.

Terminamos esta subsecção com dois resultados que visam a translação à esquerda no grupo de Lie produto semidirecto  $G \times \mathfrak{g}$ , mais concretamente deduzimos as fórmulas para a tangente desta translação e para a correspondente transposta.

**Proposição 2.1.8.** *Sejam  $(x, Y), (g, Z) \in G \times \mathfrak{g}$ . A aplicação tangente da translação à esquerda por  $(x, Y)$  em  $(g, Z)$ , é definida por*

$$\begin{aligned} T_{(g,Z)}L_{(x,Y)} : T_{(g,Z)}(G \times \mathfrak{g}) &\longrightarrow T_{(xg, Ad_{g^{-1}}Y+Z)}(G \times \mathfrak{g}) \\ (v_g, Z, U) &\longmapsto T_{(g,Z)}L_{(x,Y)}(v_g, Z, U) \end{aligned}$$

com  $T_{(g,Z)}L_{(x,Y)}(v_g, Z, U) = (T_g L_x v_g, Ad_{g^{-1}}Y + Z, U + [Ad_{g^{-1}}Y, T_g L_{g^{-1}}v_g])$ .

*Demonstração.* Refira-se que, quaisquer que sejam os elementos  $(x, Y), (g, Z) \in G \times \mathfrak{g}$ , temos  $L_{(x,Y)}(g, Z) = (xg, Ad_{g^{-1}}Y + Z)$ . Por definição, o valor da aplicação tangente desta translação num ponto  $(v_g, Z, U)$  de  $T_{(g,Z)}(G \times \mathfrak{g})$  é calculado de acordo com:

$$T_{(g,Z)}L_{(x,Y)}(v_g, Z, U) = \left. \frac{d}{dt} (L_{(x,Y)} \circ \varphi)(t) \right|_{t=0},$$

para  $\varphi$  uma curva em  $G \times \mathfrak{g}$ , escrita como um par de curvas  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$  (a primeira em  $G$  e a segunda em  $\mathfrak{g}$ ), que satisfaz  $\varphi_1(0) = g$ ,  $\varphi_2(0) = Z$ ,  $\dot{\varphi}_1(0) = v_g$  e  $\dot{\varphi}_2(0) = U$ . Desenvolvendo a expressão dada temos

$$\begin{aligned} T_{(g,Z)}L_{(x,Y)}(v_g, Z, U) &= \left. \frac{d}{dt} \left( x\varphi_1(t), Ad_{\varphi_1^{-1}(t)}Y + \varphi_2(t) \right) \right|_{t=0} = \\ &= \left( \left. \frac{d}{dt} (L_x \circ \varphi_1)(t) \right|_{t=0}, Ad_{g^{-1}}Y + Z, \left. \frac{d}{dt} Ad_{\varphi_1^{-1}(t)}Y \right|_{t=0} + \dot{\varphi}_2(0) \right) = \\ &= \left( T_g L_x v_g, Ad_{g^{-1}}Y + Z, U + \left. \frac{d}{dt} Ad_{\varphi_1^{-1}(t)}Y \right|_{t=0} \right). \end{aligned}$$

Usando agora (B.3.2) obtemos o pretendido.  $\square$

**Proposição 2.1.9.** *A aplicação transposta da aplicação tangente  $T_{(g,Z)}L_{(x,Y)}$  é dada*

por

$$\begin{aligned} T_{(g,Z)}^* L_{(x,Y)} : T_{(xg, Ad_{g^{-1}}Y+Z)}^*(G \times \mathfrak{g}) &\longrightarrow T_{(g,Z)}^*(G \times \mathfrak{g}) \\ (\alpha_{xg}, Ad_{g^{-1}}Y + Z, \xi) &\longmapsto T_{(g,Z)}^* L_{(x,Y)}(\alpha_{xg}, Ad_{g^{-1}}Y + Z, \xi) \end{aligned}$$

$$\text{com } T_{(g,Z)}^* L_{(x,Y)}(\alpha_{xg}, Ad_{g^{-1}}Y + Z, \xi) = \left( T_g^* L_x \alpha_{xg} + ad_{Ad_{g^{-1}}Y}^* \xi \circ T_g L_{g^{-1}}, Z, \xi \right).$$

*Demonstração.* Por definição, temos

$$T_{(g,Z)}^* L_{(x,Y)}(\alpha_{xg}, Ad_{g^{-1}}Y + Z, \xi) = (\alpha_{xg}, Ad_{g^{-1}}Y + Z, \xi) \circ T_{(g,Z)} L_{(x,Y)}.$$

Assim, dado  $(v_g, Z, U) \in T_{(g,Z)}(G \times \mathfrak{g})$  temos

$$\begin{aligned} \left[ T_{(g,Z)}^* L_{(x,Y)}(\alpha_{xg}, Ad_{g^{-1}}Y + Z, \xi) \right] (v_g, Z, U) &= \\ = \alpha_{xg} (T_g L_x v_g) + \xi(U) + \xi([Ad_{g^{-1}}Y, T_g L_{g^{-1}} v_g]) &= \\ = \left( T_g^* L_x \alpha_{xg} + ad_{Ad_{g^{-1}}Y}^* \xi \circ T_g L_{g^{-1}} \right) (v_g) + \xi(U). \end{aligned}$$

De onde se segue o resultado. □

Nas duas proposições anteriores, se escolhermos  $(g, Z) = (e, 0)$ , obtemos o seguinte resultado:

**Corolário 2.1.10.** *Quaisquer que sejam  $(W, U) \in T_{(e,0)}(G \times \mathfrak{g}) \equiv \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ ,  $(x, Y) \in G \times \mathfrak{g}$  e  $(\alpha_x, \xi) \in T_{(x,Y)}^*(G \times \mathfrak{g}) \equiv T_x^* G \times \mathfrak{g}^*$ , temos*

$$T_{(e,0)} L_{(x,Y)}(W, U) = (T_e L_x W, U + ad_Y W) \in T_x G \times \mathfrak{g} \equiv T_{(x,Y)}(G \times \mathfrak{g}) \quad (2.1.13)$$

e

$$T_{(e,0)}^* L_{(x,Y)}(\alpha_x, \xi) = (T_e^* L_x \alpha_x + ad_Y^* \xi, \xi) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \equiv T_{(e,0)}^*(G \times \mathfrak{g}). \quad (2.1.14)$$

#### 2.1.4 Trivializações dos fibrados

A translação à esquerda no grupo de Lie  $G$  induz as duas seguintes trivializações:

- A *trivialização à esquerda do fibrado tangente*  $TG$  que consiste em identificar este espaço com o espaço  $G \times \mathfrak{g}$  através do isomorfismo

$$\begin{aligned} \lambda: \quad TG &\longrightarrow G \times \mathfrak{g} \\ v_x \in T_x G &\longmapsto (x, T_x L_{x^{-1}} v_x), \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

cuja inversa é definida por  $\lambda^{-1}(x, Y) = T_e L_x Y$ , para cada  $(x, Y) \in G \times \mathfrak{g}$ .

- A *trivialização à esquerda do fibrado cotangente*  $T^*G$ , isto é, identificar  $T^*G$  com  $G \times \mathfrak{g}^*$  através do isomorfismo

$$\begin{aligned} \bar{\rho}: \quad T^*G &\longrightarrow G \times \mathfrak{g}^* \\ \alpha_x \in T_x^*G &\longmapsto (x, T_e^* L_x \alpha_x) = (x, \alpha_x \circ T_e L_x), \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

com inversa definida por  $(\bar{\rho})^{-1}(x, \xi) = T_x^* L_{x^{-1}} \xi = \xi \circ T_x L_{x^{-1}}$ , para  $x \in G$  e  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ .

Refira-se que a trivialização à esquerda (2.1.15) de  $TG$  e a forma de Maurer- Cartan em  $G$  (isto é, a 1-forma em  $G$  com valores em  $\mathfrak{g}$  apresentada na definição B.1.20) traduzem na sua essência a mesma ideia. Por este motivo, usamos a mesma notação  $\lambda$  para os dois conceitos.

A trivialização à esquerda de  $TG$ , permite-nos concluir que as estruturas de grupo de Lie de  $TG$  e do produto semidirecto  $G \times \mathfrak{g}$  descritas nas duas subsecções anteriores são isomorfas (consultar, por exemplo, [46]):

**Lema 2.1.11.** *Os grupos de Lie  $TG$  e  $G \times \mathfrak{g}$  são isomorfos através do isomorfismo  $\lambda$  definido por (2.1.15).*

*Demonstração.* Sejam  $v_x \in T_x G$  e  $v_g \in T_g G$ , com  $x, g \in G$ . Para a operação multiplicação temos

$$\begin{aligned} \lambda(v_x v_g) &= (xg, (T_{xg} L_{g^{-1}x^{-1}} \circ T_x R_g) v_x + (T_{xy} L_{g^{-1}x^{-1}} \circ T_g L_x) v_g) = \\ &= (xg, T_x (L_{g^{-1}} \circ L_{x^{-1}} \circ R_g) v_x + T_g (L_{g^{-1}} \circ L_{x^{-1}} \circ L_x) v_g) = \\ &= (xg, T_x (L_{g^{-1}} \circ R_g \circ L_{x^{-1}}) v_x + T_g L_{g^{-1}} v_g) = \\ &= (xg, Ad_{g^{-1}} T_x L_{x^{-1}} v_x + T_g L_{g^{-1}} v_g) = \\ &= (x, T_x L_{x^{-1}} v_x) (g, T_g L_{g^{-1}} v_g) = \lambda(v_x) \lambda(v_g). \end{aligned}$$

Por outro lado, para a operação inversão vem

$$\begin{aligned}
\lambda(v_x^{-1}) &= (x^{-1}, -[T_{x^{-1}}L_x \circ T_x(L_{x^{-1}} \circ R_{x^{-1}})]v_x) = \\
&= (x^{-1}, -T_x(L_x \circ L_{x^{-1}} \circ R_{x^{-1}})v_x) = (x^{-1}, -T_xR_{x^{-1}}v_x) = \\
&= (x^{-1}, -(T_xR_{x^{-1}} \circ T_eL_x \circ T_xL_{x^{-1}})v_x) = (x^{-1}, -Ad_xT_xL_{x^{-1}}v_x) = \\
&= (x, T_xL_{x^{-1}}v_x)^{-1} = [\lambda(v_x)]^{-1}.
\end{aligned}$$

De acordo com a definição B.1.6, a demonstração está concluída.  $\square$

Para o trabalho a desenvolver a seguir, interessa-nos considerar a trivialização à esquerda do fibrado cotangente  $T^*(G \times \mathfrak{g})$ , fazendo uso da translação à esquerda no grupo de Lie  $G \times \mathfrak{g}$  (de um modo similar ao que fazemos em (2.1.16)). De acordo com a fórmula (2.1.14), identificamos o fibrado cotangente  $T^*(G \times \mathfrak{g})$  com o espaço  $G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$  através do isomorfismo

$$\begin{aligned}
\rho : \quad T^*(G \times \mathfrak{g}) &\longrightarrow G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \\
(\alpha_x, Y, \xi) \in T_{(x,Y)}^*(G \times \mathfrak{g}) &\longmapsto (x, Y, T_e^*L_x\alpha_x + ad_Y^*\xi, \xi).
\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

Usando a proposição 2.1.9, verifica-se facilmente que a inversa deste isomorfismo é dada, para cada  $(x, Y, \mu, \xi) \in G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ , por

$$\rho^{-1}(x, Y, \mu, \xi) = (T_x^*L_{x^{-1}}(\mu - ad_Y^*\xi), Y, \xi) \in T_{(x,Y)}^*(G \times \mathfrak{g}). \tag{2.1.18}$$

## 2.2 Problema variacional

Consideremos o problema variacional dos polinómios cúbicos Riemannianos, a que se dedica a secção 1.1, agora para  $M = G$  (a variedade diferenciável é o grupo de Lie conexo e compacto). No caso dos grupos de Lie, a equação de Euler-Lagrange (1.1.2) adquire uma forma particular que foi deduzida por Crouch e Silva Leite em [37], como uma extensão do resultado no grupo de Lie  $SO(3)$  obtido por Noakes, Heinzinger e Paden em [69]. Descrevemos de seguida as etapas essenciais para a dedução dessa equação.

Seja  $x$  uma curva em  $G$  e consideremos a base ortonormada de campos de vectores invariantes à esquerda em  $G$  definidos por (2.1.2). Então, o campo de vectores velocidade  $Y_x$  de  $x$  pode escrever-se como

$$Y_x(t) := \frac{dx}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n y^i(t) X_i(x(t)), \quad (2.2.1)$$

onde  $y^i$ ,  $i = 1, \dots, n$  são funções suaves do tempo.

**Proposição 2.2.1.** [37] *Se  $Y_x$  é o campo de vectores velocidade de uma curva  $x$  num grupo de Lie conexo e compacto, escrito na forma (2.2.1), então a sua derivada covariante escreve-se como*

$$\frac{DY_x}{dt} = \dot{Y}_x, \quad (2.2.2)$$

onde estamos a considerar a notação (2.1.4).

*Demonstração.* Da definição de derivada covariante ([45]), vem

$$\frac{DY_x}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n \dot{y}^i(t) X_i(x(t)) + \sum_{i,j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i(t) y^j(t) y^k(t) X_i(x(t)),$$

onde  $\Gamma_{jk}^i$  são os símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em  $G$ . No entanto, prova-se que a segunda parcela da igualdade anterior é nula. Para tal, usa-se o teorema 2.1.1. Temos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i(t) y^j(t) y^k(t) X_i(x(t)) &= \sum_{j,k=1}^n y^j(t) y^k(t) \nabla_{X_j(x(t))} X_k(x(t)) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n y^j(t) y^k(t) [X_j(x(t)), X_k(x(t))] = \frac{1}{2} [Y_x(t), Y_x(t)] = 0. \end{aligned}$$

Logo, a derivada covariante reduz-se a  $(DY_x/dt)(t) = \sum_{i=1}^n \dot{y}^i(t) X_i(x(t)) = \dot{Y}_x$ .  $\square$

Um procedimento semelhante ao usado na demonstração da proposição anterior, permite-nos deduzir as seguintes expressões para as derivadas covariantes de ordem superior ([37]):

$$\frac{D^2 Y_x}{dt^2} = \ddot{Y}_x + \frac{1}{2} [Y_x, \dot{Y}_x] \quad \text{e} \quad \frac{D^3 Y_x}{dt^3} = \ddot{\dot{Y}}_x + [Y_x, \ddot{Y}_x] + \frac{1}{4} [[\dot{Y}_x, Y_x], Y_x]. \quad (2.2.3)$$



Note-se que, por vezes, omitimos a dependência do tempo para simplificar a notação.

De acordo com o acima exposto e atendendo ao teorema 2.1.1, a definição 1.1.1 é adaptada para grupos de Lie da forma a seguir apresentada.

**Definição 2.2.2.** *Uma curva suave*

$$\begin{aligned} x : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow G \\ t &\longmapsto x(t) \end{aligned}$$

diz-se um polinómio cúbico Riemanniano no grupo de Lie  $G$  se verifica a equação

$$\ddot{Y}_x + [Y_x, \ddot{Y}_x] = 0, \quad \text{com } Y_x = \dot{x}. \quad (2.2.4)$$

Podemos assim deduzir três invariantes que apresentamos na proposição a seguir.

**Proposição 2.2.3.** *Seja  $x$  um polinómio cúbico no grupo de Lie  $G$  e  $Y_x = \dot{x}$  o respectivo campo de vectores velocidade. As seguintes expressões são invariantes ao longo de  $x$ :*

$$I_1 = \frac{1}{2} \langle \dot{Y}_x, \dot{Y}_x \rangle - \langle \ddot{Y}_x, Y_x \rangle \quad (2.2.5)$$

$$I_2 = \langle \ddot{Y}_x, \ddot{Y}_x \rangle \quad (2.2.6)$$

$$I_3 = \left\langle [Y_x, \dot{Y}_x], \ddot{Y}_x + \frac{1}{2}[Y_x, \dot{Y}_x] \right\rangle. \quad (2.2.7)$$

*Demonstração.* O resultado obtém-se fazendo a integração do produto interno da equação (2.2.4) com  $Y_x$ ,  $\ddot{Y}_x$  e  $[Y_x, \dot{Y}_x]$ , respectivamente, e recorrendo ainda à propriedade (2.1.1).  $\square$

Importa observar que, atendendo a (2.2.2) e (2.2.3), os dois invariantes (1.1.3) e (1.1.4) correspondem, respectivamente, a  $I_1$  e  $I_2 + I_3$ .

**Proposição 2.2.4.** *Seja  $\lambda$  a forma de Maurer-Cartan descrita na definição B.1.20. A equação de Euler-Lagrange (2.2.4) é equivalente a*

$$\ddot{Y} + [Y, \ddot{Y}] = 0, \quad \text{com } Y = \lambda_x(Y_x) \equiv \lambda_x(\dot{x}), \quad (2.2.8)$$

onde estamos a utilizar a notação (2.1.5).

*Demonstração.* Note-se que

$$\ddot{Y}_x + [Y_x, \ddot{Y}_x] = 0 \Leftrightarrow \lambda_x(\ddot{Y}_x) + \lambda_x([Y_x, \ddot{Y}_x]) = 0 \Leftrightarrow \lambda_x(\ddot{Y}_x) + [\lambda_x(Y_x), \lambda_x(\ddot{Y}_x)] = 0.$$

Ora, se considerarmos  $Y = \lambda_x(Y_x)$ , atendendo a (2.1.8), torna-se claro que  $\lambda_x(\ddot{Y}_x) = \ddot{Y}$  e  $\lambda_x(\ddot{Y}_x) = \ddot{Y}$ . E portanto as equações (2.2.4) e (2.2.8) são equivalentes.  $\square$

Refira-se ainda que tendo em atenção a bi-invariância da métrica Riemanniana, os invariantes (2.2.5), (2.2.6) e (2.2.7) tomam a forma

$$I_1 = \frac{1}{2} \langle \dot{Y}, \dot{Y} \rangle - \langle \ddot{Y}, Y \rangle \quad (2.2.9)$$

$$I_2 = \langle \ddot{Y}, \ddot{Y} \rangle \quad (2.2.10)$$

$$I_3 = \left\langle [Y, \dot{Y}], \ddot{Y} + \frac{1}{2}[Y, \dot{Y}] \right\rangle, \quad (2.2.11)$$

com  $Y = \lambda_x(Y_x) \equiv \lambda_x(\dot{x})$ .

**Observação 2.2.5.** *É interessante observar que, por definição de campo de vectores velocidade, temos  $Y = \lambda(\dot{x}) = (\lambda \circ T_t x)(d/dt)$ , onde  $d/dt$  denota o campo de vectores usual em  $\mathbb{R}$  e  $T_t x : T_t \mathbb{R} \rightarrow T_{x(t)} G$  é a aplicação tangente a  $x$  em  $t$ . Mas,  $\lambda \circ T_t x$  coincide com a imagem recíproca de  $\lambda$  por  $x$ ,  $x^* \lambda$ . Esta imagem recíproca define uma 1-forma em  $\mathbb{R}$  com valores em  $\mathfrak{g}$  que se designa por derivada de Darboux de  $x$ . Portanto,  $Y$  é a imagem do campo de vectores usual de  $\mathbb{R}$  pela derivada de Darboux.*

**Observação 2.2.6.** *Note-se que atendendo às equações de Maurer-Cartan (B.1.3), a equação de Euler-Lagrange que caracteriza uma curva  $x$  em  $G$  como um polinómio cúbico é equivalente a*

$$\lambda(\ddot{Y}_x) - d\lambda(Y_x, \ddot{Y}_x) = 0,$$

sendo  $Y_x$  o campo de vectores velocidade de  $x$  e onde assumimos a notação (2.1.4).

## 2.3 Problema de controlo óptimo

O problema de controlo óptimo correspondente ao problema variacional dos polinómios cúbicos Riemannianos em  $G$  é definido de acordo com o exposto na secção 1.2, con-

siderando  $M = G$ . O espaço de estados é dado pelo fibrado tangente  $TG$  e o fibrado de controlos é o fibrado tangente de segunda ordem  $T^2G$ . O problema de controlo óptimo dos polinómios cúbicos Riemannianos no grupo de Lie  $G$  consiste em encontrar, de entre as curvas  $\alpha : [0, T] \rightarrow T^2G$  seccionalmente  $C^2$ -suaves com condições iniciais e finais (1.2.4) e que satisfazem o sistema de controlo  $(d(\tau_2^1 \circ \alpha) / dt)(t) = \Pi(\alpha(t))$ , a curva que minimiza a funcional  $\int_0^T G(\alpha(t)) dt$ , com  $T \in \mathbb{R}^+$  fixo, para  $G : T^2G \rightarrow \mathbb{R}$  a função custo definida por (1.2.5) e onde  $\Pi$  é o campo de vectores ao longo de  $\tau_2^1 : T^2G \rightarrow TG$  definido por (1.2.7).

Interessa-nos considerar o problema de controlo com espaço de estados e fibrado de controlos trivializados, no sentido a seguir descrito. Usando a trivialização à esquerda de  $TG$  dada por (2.1.15), o espaço de estados do nosso problema passa a ser o produto semidirecto  $G \times \mathfrak{g}$ . Além disso, o fibrado de controlos  $T^2G$  pode também ser trivializado e assim ser interpretado como um fibrado sobre  $G \times \mathfrak{g}$ , resultando no fibrado de controlos  $\widetilde{T^2G}$  dado por (2.1.11) e a respectiva projecção canónica  $\widetilde{\tau}_2^1 : \widetilde{T^2G} \rightarrow G \times \mathfrak{g}$  definida por (2.1.12).

No contexto do parágrafo anterior, uma curva  $\gamma$  em  $\widetilde{T^2G}$  é definida à custa de três elementos:  $x$  uma curva em  $G$ ;  $Y_x$  um campo de vectores ao longo de  $x$ , que pode ser visto como uma curva em  $TG$  que satisfaz  $\pi_G \circ Y_x = x$ ; e  $U$  uma curva em  $\mathfrak{g}$ . Nesta nova versão do problema de controlo óptimo, pretendemos determinar as curvas

$$\gamma : [0, T] \rightarrow \widetilde{T^2G}, t \mapsto (Y_x(t), U(t)) \in T_{x(t)}G \times \mathfrak{g}$$

seccionalmente  $C^2$ -suaves e onde  $T \in \mathbb{R}^+$  é fixo, com condições iniciais e finais fixas no espaço de estados  $G \times \mathfrak{g}$ , tal que se verifique o seguinte:

- $\gamma$  minimiza a funcional  $\int_0^T L(\gamma(t)) dt$ , onde  $L : \widetilde{T^2G} \rightarrow \mathbb{R}$  é a função custo definida, para cada  $(v_x, U) \in \widetilde{T^2G}$ , por

$$L(v_x, U) = \frac{1}{2} \langle U, U \rangle. \quad (2.3.1)$$

- $\gamma$  satisfaz o sistema de controlo

$$\frac{d}{dt} (\tilde{\tau}_2^1 \circ \gamma) (t) = \tilde{\Pi}(\gamma(t))$$

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{T^2G} & \xrightarrow{\tilde{\Pi}} & T(G \times \mathfrak{g}) \\ & \nearrow \tilde{\tau}_2^1 & & \nearrow \frac{d}{dt} (\tilde{\tau}_2^1 \circ \gamma) \\ G \times \mathfrak{g} & \xleftarrow{\tilde{\tau}_2^1 \circ \gamma} & [0, T] & \xrightarrow{\gamma} & \widetilde{T^2G} \end{array},$$

onde  $\tilde{\Pi}$  é o campo de vectores ao longo da projecção  $\tilde{\tau}_2^1$ , ou seja, verifica-se a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{T^2G} & \xrightarrow{\tilde{\Pi}} & T(G \times \mathfrak{g}) \\ & \searrow \tilde{\tau}_2^1 & \downarrow \pi_{G \times \mathfrak{g}} \\ & & G \times \mathfrak{g} \end{array}$$

e que é definido, para cada  $(v_x, U) \in \widetilde{T^2G}$ , por

$$\tilde{\Pi}(v_x, U) = (v_x, T_x L_{x^{-1}} v_x, U) \sim (v_x, U) \in T_x G \times \mathfrak{g}, \quad (2.3.2)$$

onde  $T_{(x, T_x L_{x^{-1}} v_x)}(G \times \mathfrak{g}) \sim T_x G \times \{T_x L_{x^{-1}} v_x\} \times \mathfrak{g} \sim T_x G \times \mathfrak{g}$ , identificações estas explicadas com pormenor na subsecção 2.1.3.

Observe-se que, de acordo com (2.1.12), temos  $(\tilde{\tau}_2^1 \circ \gamma)(t) = (x(t), T_{x(t)} L_{x^{-1}(t)} Y_x(t))$  e portanto o sistema de controlo é caracterizado pelo sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Y_x(t) \\ \frac{d}{dt} [T_{x(t)} L_{x^{-1}(t)} Y_x(t)] = U(t). \end{cases}$$

Mas,  $T_{x(t)} L_{x^{-1}(t)} Y_x(t) = \lambda_{x(t)}(Y_x(t))$ , onde  $\lambda$  é a forma de Maurer-Cartan da definição B.1.20. Assim, atendendo a (2.1.9), a segunda equação do sistema anterior é equivalente a  $\lambda_{x(t)}(\dot{Y}_x(t)) = U(t)$ , pelo que o sistema de controlo adquire a forma

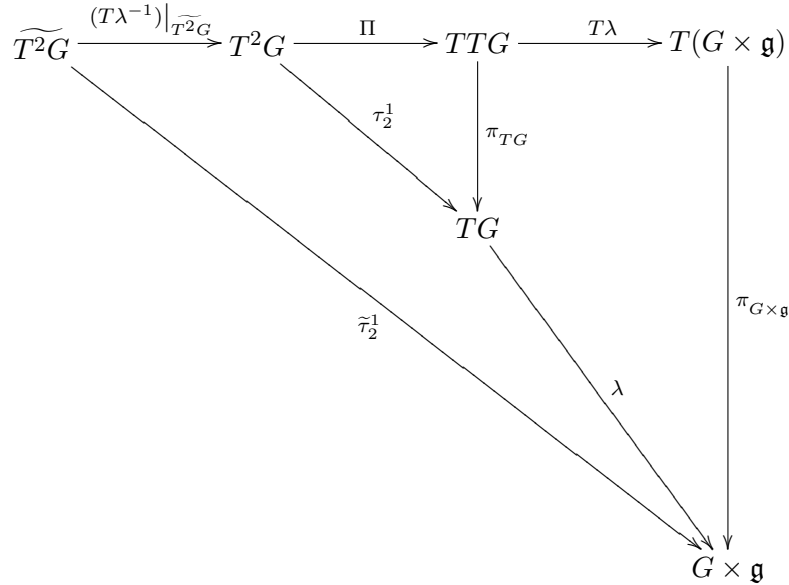
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Y_x(t) \\ \dot{Y}_x(t) = T_e L_{x(t)} U(t) \end{cases} \quad (2.3.3)$$

que é uma versão alternativa do sistema de controlo apresentado em [21, 28].

Importa referir que a escolha do campo de vectores  $\tilde{\Pi}$  foi feita de acordo com o a seguir descrito. Da secção 1.2, sabemos que o sistema de controlo é definido de forma a caracterizar a restrição  $(DY_x/dt)(t) = U_x(t)$ , onde  $Y_x$  é o campo de vectores velocidade da curva  $x$  dado por (2.2.1) e  $U_x$  é um novo campo de vectores ao longo de  $x$  escrito na forma (2.1.3), com componentes dadas pelos controlos. Atendendo a (2.2.2), a referida restrição reduz-se a  $\dot{Y}_x = U_x$ , o que justifica a apresentação do sistema de controlo (2.3.3) se pensarmos em  $U$  como sendo a imagem pela forma de Maurer-Cartan de  $U_x$ .

**Observação 2.3.1.** *Por curiosidade, analisemos com mais pormenor a trivialização efectuada no problema de controlo, relacionando-a com a versão original resumida no início desta secção. Se  $\lambda$  é o isomorfismo definido por (2.1.15), o campo de vectores  $\tilde{\Pi}$  e a projecção  $\tilde{\tau}_2^1$  são caracterizados por*

$$\tilde{\Pi} = T\lambda \circ \Pi \circ (T\lambda^{-1})|_{\widetilde{T^2G}} \quad e \quad \tilde{\tau}_2^1 = \lambda \circ \tau_2^1 \circ (T\lambda^{-1})|_{\widetilde{T^2G}}.$$



Por outro lado, a curva solução  $\gamma$  em  $\widetilde{T^2G}$  é uma trivialização da curva  $\alpha$  em  $T^2G$ , considerando  $\gamma = (T\lambda)|_{T^2G} \circ \alpha$ .

$$\begin{array}{ccccc}
& & \widetilde{T^2G} & \xrightarrow{\widetilde{\Pi}} & T(G \times \mathfrak{g}) \\
& & \uparrow (T\lambda)|_{T^2G} & & \uparrow T\lambda \\
& & T^2G & \xrightarrow{\Pi} & TTG \\
& \nearrow \widetilde{\tau}_2^1 & \uparrow \tau_2^1 & \nearrow \frac{d}{dt}(\tau_2^1 \circ \alpha) & \\
G \times \mathfrak{g} & \xleftarrow{\lambda} & TG & \xleftarrow{\tau_2^1 \circ \alpha} & [0, T]
\end{array}$$

## 2.4 Dinâmica do problema de controlo óptimo

Apresentamos agora a formulação Hamiltoniana do problema de controlo óptimo da secção anterior (com espaço de estados e fibrado de controlos trivializados). Adaptamos as ideias geométricas da secção 1.2 que se baseiam na abordagem presimpléctica do princípio do máximo de Pontryagin. O espaço de co-estados do nosso sistema é o fibrado cotangente  $T^*(G \times \mathfrak{g})$ . Consideramos o sistema presimpléctico  $(\mathcal{T}, \widetilde{\Omega}, \widetilde{H})$  cujo espaço total é o fibrado sobre  $G \times \mathfrak{g}$  dado pelo produto fibrado

$$\mathcal{T} = T^*(G \times \mathfrak{g}) \times_{G \times \mathfrak{g}} \widetilde{T^2G},$$

onde  $T^*_{(x,Y)}(G \times \mathfrak{g}) \times (\widetilde{\tau}_2^1)^{-1}(x, Y)$  é a fibra de  $\mathcal{T}$  sobre  $(x, Y) \in G \times \mathfrak{g}$ . Tendo em atenção a notação nos fibrados de  $G \times \mathfrak{g}$  adoptada na subsecção 2.1.3, os elementos de  $\mathcal{T}$  são denotados por  $(\alpha_x, Y, \xi, U) \in T^*_x G \times \{Y\} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}$ , onde  $(x, Y) \in G \times \mathfrak{g}$ . As projecções canónicas  $pr_1 : \mathcal{T} \rightarrow T^*(G \times \mathfrak{g})$  e  $pr_2 : \mathcal{T} \rightarrow \widetilde{T^2G}$  do espaço total no espaço de co-estados e no fibrado de controlos são definidas, para cada  $(\alpha_x, Y, \xi, U) \in \mathcal{T}$ , respectivamente, por  $pr_1(\alpha_x, Y, \xi, U) = (\alpha_x, Y, \xi)$  e  $pr_2(\alpha_x, Y, \xi, U) = (T_e L_x Y, U)$ . A 2-forma presimpléctica em  $\mathcal{T}$  é dada pela imagem recíproca (“pull-back”)

$$\widetilde{\Omega} = (pr_1)^* \omega_0, \quad (2.4.1)$$

onde  $\omega_0$  é a forma simpléctica canónica em  $T^*(G \times \mathfrak{g})$ . O Hamiltoniano é definido por  $\widetilde{H} = \ll pr_1, \widetilde{\Pi} \circ pr_2 \gg -L \circ pr_2$ , com  $\widetilde{\Pi}$  e  $L$  dados, respectivamente, por (2.3.2) e (2.3.1),

e onde  $\llcorner \cdot, \cdot \lrcorner$  denota o produto dualidade canónica de vectores e covectores em  $G \times \mathfrak{g}$ .

Assim,

$$\tilde{H}(\alpha_x, Y, \xi, U) = (T_e^* L_x \alpha_x)(Y) + \xi(U) - \frac{1}{2} \langle U, U \rangle. \quad (2.4.2)$$

O campo de vectores dinâmico do sistema presimpléctico  $(\mathcal{T}, \tilde{\Omega}, \tilde{H})$  é o campo de vectores  $X_{\tilde{H}} : \mathcal{T} \rightarrow T(\mathcal{T})$  solução do sistema dinâmico  $i_{X_{\tilde{H}}} \tilde{\Omega} = d\tilde{H}$ .

O problema de controlo óptimo dos polinómios cúbicos é regular e portanto, aplicando o algoritmo geométrico de sistemas presimplécticos a  $(\mathcal{T}, \tilde{H}, \tilde{\Omega})$ , obtemos um sistema na variedade simpléctica  $W_1 = \{z \in \mathcal{T} : d\tilde{H}(z)(v_z) = 0, \forall v_z \in \text{Ker } \tilde{\Omega}(z)\}$ . Utilizando um raciocínio similar ao da secção 1.2, facilmente se deduz que esta variedade pode ser interpretada do seguinte modo:

$$W_1 = \{(\alpha_x, Y, \xi, U) \in \mathcal{T} : U = X_\xi\},$$

onde  $X_\xi$  é o elemento de  $\mathfrak{g}$  identificado com  $\xi \in \mathfrak{g}^*$  através da métrica Riemanniana de  $G$ , conforme (2.1.6). Assim, temos o sistema Hamiltoniano  $(W_1, \tilde{H}_{W_1}, \tilde{\Omega}_{W_1})$ , onde  $\tilde{\Omega}_{W_1}$  é a forma simpléctica em  $W_1$  dada pela restrição a  $W_1$  da forma presimpléctica  $\tilde{\Omega}$ ; e o Hamiltoniano  $\tilde{H}_{W_1}$  é a restrição de  $\tilde{H}$  a  $W_1$ . O campo de vectores Hamiltoniano  $X_{W_1}$  associado a  $\tilde{H}_{W_1}$  é definido pelo sistema dinâmico  $i_{X_{W_1}} \tilde{\Omega}_{W_1} = d\tilde{H}_{W_1}$ . De modo similar ao sucedido na secção 1.2, podemos concluir o seguinte:

**Proposição 2.4.1.** *O estudo do sistema dinâmico  $i_{X_{W_1}} \tilde{\Omega}_{W_1} = d\tilde{H}_{W_1}$  reduz-se ao estudo de um sistema dinâmico na variedade simpléctica  $(T^*(G \times \mathfrak{g}), \omega_0)$ .*

*Demonstração.* Basta considerar o difeomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : (T^*(G \times \mathfrak{g}), \omega_0) &\longrightarrow (W_1, \tilde{\Omega}_{W_1}) \\ (\alpha_x, Y, \xi) &\longmapsto (\alpha_x, Y, \xi, X_\xi), \end{aligned}$$

que é obviamente um symplectomorfismo, ou seja, verifica-se

$$(\varphi^{-1})^* \omega_0 = \tilde{\Omega}_{W_1}.$$

De facto, considerando  $\tilde{\Omega}_{W_1} := i_{W_1}^* \tilde{\Omega}$ , onde  $i_{W_1} : W_1 \hookrightarrow \mathcal{T}$  é a inclusão e  $\tilde{\Omega}$  é a forma presimpléctica definida por (2.4.1), temos

$$\varphi^* \tilde{\Omega}_{W_1} = (\varphi^* \circ i_{W_1}^*) \tilde{\Omega} = (\varphi^* \circ i_{W_1}^* \circ pr_1^*) \omega_0 = (pr_1 \circ i_{W_1} \circ \varphi)^* \omega_0.$$

Mas, se  $(\alpha_x, Y, \xi) \in T^*(G \times \mathfrak{g})$  temos

$$(pr_1 \circ i_{W_1} \circ \varphi)(\alpha_x, Y, \xi) = (pr_1 \circ i_{W_1})(\alpha_x, Y, \xi, X_\xi) = pr_1(\alpha_x, Y, \xi, X_\xi) = (\alpha_x, Y, \xi),$$

e portanto  $pr_1 \circ i_{W_1} \circ \varphi$  é a aplicação identidade. Como consequência,  $\varphi^* \tilde{\Omega}_{W_1} = \omega_0$ , ou seja,  $(\varphi^{-1})^* \omega_0 = \tilde{\Omega}_{W_1}$ .

A  $\tilde{H}_{W_1}$  fazemos corresponder o Hamiltoniano  $\bar{H} := \tilde{H}_{W_1} \circ \varphi : T^*(G \times \mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Temos

$$\bar{H}(\alpha_x, Y, \xi) = (T_e^* L_x \alpha_x)(Y) + \frac{1}{2} \xi(X_\xi), \quad (2.4.3)$$

para cada  $(\alpha_x, Y, \xi) \in T_{(x,Y)}^*(G \times \mathfrak{g})$ . Ficamos com o sistema dinâmico  $i_{X_{\bar{H}}} \omega_0 = d\bar{H}$ , onde  $X_{\bar{H}} : T^*(G \times \mathfrak{g}) \rightarrow T(T^*(G \times \mathfrak{g}))$  é o prolongamento (“push-forward”) de  $X_{W_1}$  pelo simplectomorfismo  $\varphi^{-1}$ ,  $X_{\bar{H}} = (\varphi^{-1})_* X_{W_1} = T\varphi^{-1} \circ X_{W_1} \circ \varphi$ .  $\square$

## 2.5 Trivialização à esquerda do sistema Hamiltoniano

Nesta secção, procedemos à trivialização à esquerda de  $(T^*(G \times \mathfrak{g}), \omega_0, \bar{H})$ , o sistema Hamiltoniano construído na demonstração da última proposição da secção anterior. Para tal, consideramos a trivialização à esquerda do fibrado cotangente  $T^*(G \times \mathfrak{g})$ , que consiste em identificar este fibrado com o espaço  $G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$  através do isomorfismo  $\rho$  definido por (2.1.17).

O Hamiltoniano  $\bar{H}$  dado por (2.4.3) é trivializado à esquerda fazendo a composição  $H := \bar{H} \circ \rho^{-1}$ . Obtém-se  $H(x, Y, \mu, \xi) = \mu(Y) - (ad_Y^* \xi)(Y) + \frac{1}{2} \xi(X_\xi)$ , uma vez que  $\rho^{-1}$  é dado por (2.1.18). Contudo,  $(ad_Y^* \xi)(Y) = 0$  e assim  $H : G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$  é definido por

$$H(x, Y, \mu, \xi) = \mu(Y) + \frac{1}{2} \xi(X_\xi). \quad (2.5.1)$$

Sendo  $\rho$  um difeomorfismo podemos munir  $G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$  de uma estrutura simpléctica (ver nota de rodapé 3 do capítulo 1), dada pela imagem recíproca da forma simpléctica  $\omega_0$  em  $T^*(G \times \mathfrak{g})$  por  $\rho^{-1}$

$$\Omega = (\rho^{-1})^* \omega_0. \quad (2.5.2)$$



Portanto,  $\rho$  é um simplectomorfismo, o que nos permite trivializar para  $G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$  o campo de vectores Hamiltoniano  $X_{\bar{H}}$ , considerando  $X_H = \rho_* X_{\bar{H}} := T\rho \circ X_{\bar{H}} \circ \rho^{-1}$ . Este campo de vectores é caracterizado como sendo a solução do sistema dinâmico  $i_{X_H}\Omega = dH$ . A proposição a seguir apresentada conduz-nos à expressão de  $X_H$ .

**Proposição 2.5.1.** *O seguinte sistema de equações diferenciais descreve o movimento para o sistema Hamiltoniano trivializado  $(G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, \Omega, H)$ :*

$$\begin{cases} \dot{x} = T_e L_x Y \\ \dot{Y} = X_\xi \\ \dot{\mu} = 0 \\ \dot{\xi} = -\mu + ad_Y^* \xi. \end{cases} \quad (2.5.3)$$

*Demonstração.* Seja  $z = (x, Y, \mu, \xi)$  uma curva integral de  $X_H$ . Seguindo [17] (secção A.3, exemplo 3), as equações Hamiltonianas em  $G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$  (a trivialização à esquerda do fibrado cotangente do grupo de Lie  $G \times \mathfrak{g}$ ) designam-se por equações de Euler-Arnold e são dadas por

$$\begin{cases} (\dot{x}, \dot{Y}) = T_{(e,0)} L_{(x,Y)} \left( \frac{\partial H}{\partial \mu}(z), \frac{\partial H}{\partial \xi}(z) \right) \\ (\dot{\mu}, \dot{\xi}) = -T_{(e,0)}^* L_{(x,Y)} \left( \frac{\partial H}{\partial x}(z), \frac{\partial H}{\partial Y}(z) \right) + ad_{\left(\frac{\partial H}{\partial \mu}(z), \frac{\partial H}{\partial \xi}(z)\right)}^* (\mu, \xi). \end{cases}$$

Nesta notação,  $(\partial H/\partial x)(z)$  é interpretado como um elemento de  $T_x^*G$ ,  $(\partial H/\partial Y)(z)$  como um elemento de  $\mathfrak{g}^*$ ,  $(\partial H/\partial \mu)(z)$  e  $(\partial H/\partial \xi)(z)$  como elementos de  $\mathfrak{g}$ . Em virtude das identidades (2.1.10), (2.1.13) e (2.1.14), o sistema anterior reescreve-se como

$$\begin{cases} \dot{x} = T_e L_x \frac{\partial H}{\partial \mu}(z) \\ \dot{Y} = \frac{\partial H}{\partial \xi}(z) + ad_Y \frac{\partial H}{\partial \mu}(z) \\ \dot{\mu} = -T_e^* L_x \frac{\partial H}{\partial x}(z) - ad_Y^* \frac{\partial H}{\partial Y}(z) + ad_{\frac{\partial H}{\partial \mu}(z)}^* \mu + ad_{\frac{\partial H}{\partial \xi}(z)}^* \xi \\ \dot{\xi} = -\frac{\partial H}{\partial Y}(z) + ad_{\frac{\partial H}{\partial \mu}(z)}^* \xi. \end{cases}$$

Da expressão do Hamiltoniano (2.5.1), vem  $(\partial H/\partial x)(z) = 0$ ,  $(\partial H/\partial Y)(z) = \mu$ ,  $(\partial H/\partial \mu)(z) = Y$  e  $(\partial H/\partial \xi)(z) = X_\xi$ . Substituindo estas expressões no sistema acima e simplificando, obtemos o resultado pretendido (note-se que usando a propriedade (2.1.1), se prova que  $ad_{X_\xi}^* \xi = 0$ ).  $\square$

Tendo em atenção a proposição anterior, para cada  $(x, Y, \mu, \xi) \in G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ , temos

$$X_H(x, Y, \mu, \xi) = (T_e L_x Y, X_\xi, 0, -\mu + \text{ad}_Y^* \xi). \quad (2.5.4)$$

**Observação 2.5.2.** *É interessante observar que se considerarmos a mudança de variável  $\bar{\mu} = \mu - \text{ad}_Y^* \xi$ , as equações (2.5.3) se transformam nas equações obtidas em [28]. Refira-se ainda que adaptando a metodologia de [33], onde os autores obtêm uma generalização das equações de Euler-Arnold para uma ordem qualquer, as equações Hamiltonianas para o caso particular dos polinómios cúbicos coincidem com as encontradas em [28]. As equações que derivam das abordagens apresentadas em [28, 33] são Hamiltonianas para o Hamiltoniano (2.5.1), quando considerada uma forma simpléctica distinta da considerada nesta dissertação. Isto deve-se ao facto de estarmos a considerar uma trivialização que preserva a estrutura de grupo do produto semidirecto  $G \times \mathfrak{g}$ . A nossa forma simpléctica trivializada (2.5.2) é dada por <sup>2</sup>*

$$\begin{aligned} \Omega(x, Y, \mu, \xi)(V_1, V_2) = \\ = -\alpha_1(Z_2) - \beta_1(W_2 - [Y, Z_2]) + \alpha_2(Z_1) + \beta_2(W_1 - [Y, Z_1]) + \\ + \mu([Z_1, Z_2]) + \xi([Z_1, W_2] + [W_1, Z_2] - [Y, [Z_1, Z_2]]), \end{aligned}$$

para  $(x, Y, \mu, \xi) \in G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$  e  $V_i := (T_e L_x Z_i, W_i, \alpha_i, \beta_i) \in T_x G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ ,  $i = 1, 2$ , onde assumimos a identificação de  $T_{(x, Y, \mu, \xi)}(G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*)$  com  $T_x G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ .

## 2.6 Integrais do movimento

Como é do nosso conhecimento, a função Hamiltoniana de um sistema Hamiltoniano é naturalmente um integral do movimento desse sistema. Assim, a função  $H$  definida por

---

<sup>2</sup>Para demonstrar este facto, basta adaptar o seguinte resultado: seja  $G$  um grupo de Lie e  $(T^*G, \omega_0)$  o seu fibrado cotangente com a 2-forma canónica simpléctica  $\omega_0$ . Seja ainda  $\rho : T^*G \rightarrow G \times \mathfrak{g}^*$  a trivialização à esquerda. Então, a imagem recíproca de  $\omega_0$  por  $\rho^{-1}$ ,  $\Omega = (\rho^{-1})^* \omega_0$  é definida de acordo com o seguinte  $\Omega(g, \alpha)((T_e L_g \xi, \beta), (T_e L_g \eta, \gamma)) = -\beta(\eta) + \gamma(\xi) + \alpha([\xi, \eta])$ , onde  $(g, \alpha) \in G \times \mathfrak{g}^*$  e  $(T_e L_g \xi, \beta), (T_e L_g \eta, \gamma) \in T_g G \times \mathfrak{g}^* \equiv T_{(g, \alpha)}(G \times \mathfrak{g}^*)$ . (Consultar, por exemplo, página 315 de [1] ou página 278 de [17].)

(2.5.1) é um integral do movimento do sistema Hamiltoniano  $(G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, \Omega, H)$

$$m_1 := H = \mu(Y) + \frac{1}{2}\xi(X_\xi). \quad (2.6.1)$$

Para além deste integral do movimento interessa-nos ainda apresentar os dois integrais da proposição a seguir.

**Proposição 2.6.1.** *As funções reais  $m_2$  e  $m_3$  definidas, para cada elemento  $(x, Y, \mu, \xi)$  de  $G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ , por*

$$m_2 = \mu(X_\mu) \quad (2.6.2)$$

e

$$m_3 = 2(ad_Y^* \xi)(X_\mu) + (ad_Y^* ad_Y^* \xi)(X_\xi), \quad (2.6.3)$$

são integrais do movimento do sistema Hamiltoniano.

*Demonstração.* A terceira equação do sistema Hamiltoniano (2.5.3) permite-nos concluir de imediato que a função  $m_2$  é um integral do movimento. Consideremos o campo de vectores solução  $X_H$  definido por (2.5.4). Para demonstrar que  $m_3$  é um integral do movimento, é necessário provar que  $X_H m_3 = 0$ , isto é, qualquer que seja o elemento  $z = (x, Y, \mu, \xi)$  de  $G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ , vamos verificar que  $[(dm_3)(z)](X_H(z)) = 0$ . No que se segue, assumimos uma notação similar à adoptada na proposição 2.5.1, relativamente à interpretação dos elementos  $(\partial m_3 / \partial x)(z)$ ,  $(\partial m_3 / \partial Y)(z)$ ,  $(\partial m_3 / \partial \mu)(z)$  e  $(\partial m_3 / \partial \xi)(z)$ . Note-se que, atendendo às expressões de  $X_H$  e de  $m_3$  (dadas, respectivamente, por (2.5.4) e (2.6.3)), é óbvio que

$$[(dm_3)(z)](X_H(z)) = \left( \frac{\partial m_3}{\partial Y}(z) \right) (X_\xi) + (ad_Y^* \xi - \mu) \left( \frac{\partial m_3}{\partial \xi}(z) \right).$$

Para concluirmos a demonstração, basta calcular as derivadas de  $m_3$  e substituir o resultado na expressão anterior. Ora, de (2.6.3) deduz-se que  $(\partial m_3 / \partial \xi)(z) = 2ad_Y X_{\mu - ad_Y^* \xi}$  e  $(\partial m_3 / \partial Y)(z) = 2ad_{X_\xi}^* (\mu - ad_Y^* \xi)$ , e recorrendo à propriedade (2.1.1), resulta de imediato que  $[(dm_3)(z)](X_H(z)) = 0$ .  $\square$

## 2.7 Relação entre as duas abordagens

Estamos agora interessados em tirar conclusões a respeito da relação existente entre a dinâmica descrita por (2.5.4) e a abordagem Lagrangiana apresentada na secção 2.2.

**Proposição 2.7.1.** *As equações Hamiltonianas (2.5.3) são equivalentes às equações de Euler-Lagrange (2.2.8).*

*Demonstração.* Começemos por observar que a primeira equação de (2.5.3) é equivalente a  $Y = T_x L_{x^{-1}} \dot{x}$ , ou seja,  $Y = \lambda(\dot{x})$ , onde  $\lambda$  é a forma de Maurer-Cartan. Observe-se ainda que a última equação de (2.5.3) pode ser escrita como uma equação na álgebra de Lie. De facto, tendo em conta a identificação de vectores e covectores descrita por (2.1.6) e as propriedades (2.1.7), temos

$$\dot{X}_\xi = -X_\mu - ad_Y X_\xi. \quad (2.7.1)$$

Diferenciando agora esta igualdade e fazendo uso da terceira equação de (2.5.3), obtemos  $\ddot{X}_\xi + ad_{\dot{Y}} X_\xi + ad_Y \dot{X}_\xi = 0$ . Por fim, atendendo à segunda equação de (2.5.3), esta última igualdade toma a forma  $\ddot{Y} + [Y, \ddot{Y}] = 0$ . Portanto, cada solução das equações Hamiltonianas (2.5.3) dá lugar a uma solução das equações de Euler-Lagrange (2.2.8). Por outro lado, assumindo que temos uma solução de (2.2.8) que satisfaz  $\dot{Y} = X_\xi$  e  $\dot{X}_\xi + X_\mu + ad_Y X_\xi = 0$ , é simples de verificar que existe uma correspondente solução de (2.5.3). Com efeito, basta mostrar que  $\dot{\mu} = 0$  (a terceira equação de (2.5.3)), pois as outras três equações do sistema Hamiltoniano saem naturalmente.  $\square$

Para finalizar esta secção, relacionamos ainda os três invariantes da abordagem variacional descritos na secção 2.2, com os integrais do movimento do sistema Hamiltoniano  $(G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, \Omega, H)$  deduzidos na secção precedente.

**Proposição 2.7.2.** *O integral do movimento (2.6.1) coincide com o invariante  $I_1$  dado por (2.2.9).*

*Demonstração.* Recorde-se que, no decorrer da demonstração da proposição 2.7.1, vimos que a primeira equação de (2.5.3) é equivalente a  $Y = \lambda(\dot{x})$ . Note-se que, de acordo com (2.1.6), podemos escrever  $m_1 = \langle X_\mu, Y \rangle + (1/2) \langle X_\xi, X_\xi \rangle$ . Usando a segunda equação do sistema Hamiltoniano (2.5.3) e também a quarta equação mas escrita na forma (2.7.1), obtemos  $m_1 = (1/2) \langle \dot{Y}, \dot{Y} \rangle - \langle \ddot{Y}, Y \rangle + \langle [Y, Y], Y \rangle$ . Mas, pela propriedade (2.1.1), a última parcela da igualdade anterior é nula. Assim,  $m_1 = I_1$ .  $\square$

**Proposição 2.7.3.** *Os invariantes  $I_2$  e  $I_3$  definidos, respectivamente, por (2.2.10) e (2.2.11) relacionam-se com os integrais do movimento da proposição 2.6.1 através das seguintes igualdades*

$$I_2 = m_2 - m_3 \quad e \quad I_3 = \frac{1}{2}m_3.$$

*Demonstração.* Para demonstrar o pretendido basta ter em atenção que  $\dot{Y} = X_\xi$  e  $\ddot{Y} = X_\xi = -X_\mu - [Y, X_\xi]$ , igualdades estas que se deduzem do sistema Hamiltoniano (2.5.3) e das propriedades (2.1.7).  $\square$

**Observação 2.7.4.** *Notemos que da terceira equação do sistema Hamiltoniano (2.5.3), deduz-se que  $\mu = c$ , com  $c \in \mathfrak{g}^*$ . Substituindo agora  $\mu$  por  $c$  na última equação de (2.5.3), obtemos*

$$\dot{\xi} - ad_Y^* \xi = -c.$$

*Em alternativa, podemos substituir  $X_\mu$  por  $C := X_{-c} \in \mathfrak{g}$  na equação (2.7.1) (a versão na álgebra de Lie da última equação de (2.5.3)) e ficamos com  $\dot{X}_\xi + ad_Y X_\xi = C$ . Atendendo à segunda equação de (2.5.3), a equação anterior toma a forma*

$$\ddot{Y} + [Y, \dot{Y}] = C \tag{2.7.2}$$

*que é exactamente a conhecida forma reduzida das equações de Euler-Lagrange (2.2.8) da formulação Lagrangiana.*

*Dada uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , uma curva  $Y$  em  $\mathfrak{g}$  que satisfaça a equação (2.7.2) denomina-se por quadrático de Lie ("Lie quadratic"), que se diz nulo quando  $C = 0$ . Nas situações em que o quadrático de Lie nulo  $Y$  é tal que  $Y = T_x L_{x^{-1}} \dot{x}$  (ou seja,*

tal que  $Y = \lambda(\dot{x})$ , na linguagem da forma de Maurer-Cartan), para uma determinada curva  $x$  em  $G$ , dizemos que  $x$  é um polinómio cúbico Riemanniano nulo ([66]).

## Capítulo 3

# Redução do sistema

# Hamiltoniano em grupos de Lie

O objectivo deste capítulo é concretizar a redução da dinâmica do sistema Hamiltoniano trivializado  $(G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, \Omega, H)$  dos polinómios cúbicos, descrito na secção 2.5. Neste sentido, iniciaremos a análise das simetrias do sistema, fazendo uso de uma acção de  $G$  no espaço de fases  $G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ . Para o efeito, aplicaremos o método de redução simpléctica de Marsden-Weinstein, um processo que permite remover as simetrias de um sistema Hamiltoniano, associando a este um outro sistema Hamiltoniano com espaço de fases de dimensão inferior à do original. Referimos [56] e [71] para uma leitura detalhada sobre esta técnica de redução, que apresentaremos resumidamente na primeira secção deste capítulo. Interpretaremos a redução da dinâmica do sistema procedendo à eliminação de alguns dos graus de liberdade do sistema original. Mais concretamente, a dinâmica no sistema reduzido desenvolver-se-á no produto cartesiano da órbita coadjunta do grupo, da álgebra de Lie do grupo e do seu dual,  $\mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ . Daremos especial relevo à caracterização dos integrais do movimento do sistema encontrado, com o intuito de contribuir para o estudo da integrabilidade do sistema. Neste contexto, usando o teorema de Lie-Cartan, terminaremos o capítulo com um resultado interessante relacionado com o número de integrais do movimento em involução.

### 3.1 Fundamentos de redução simpléctica

Consideremos um  $G$ -espaço Hamiltoniano  $(P, \omega, \phi, J)$  no sentido da definição B.5.2, ou seja,  $\phi$  é uma acção simpléctica de um grupo de Lie  $G$  numa variedade simpléctica e conexa<sup>1</sup>  $(P, \omega)$ , com correspondente aplicação momento  $J : P \rightarrow \mathfrak{g}^*$ . Suponhamos que a aplicação momento  $J$  é equivariante, o que, pelo estabelecido na definição B.5.5, significa que temos a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\phi_g} & P \\ J \downarrow & & \downarrow J \\ \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{Ad_{g^{-1}}^*} & \mathfrak{g}^* \end{array},$$

para todo o  $g \in G$ . Seja  $\eta \in \mathfrak{g}^*$  um valor regular de  $J$  (ver definição B.5.8). Como é explicado no último parágrafo do apêndice B, sendo  $\eta$  um valor regular,  $J^{-1}(\eta)$  é uma subvariedade inicial de  $P$  de dimensão igual a  $\dim P - \dim G$ . Consideremos ainda o subgrupo de isotropia coadjunto  $G_\eta$  de  $G$ , isto é, o subgrupo de isotropia de  $\eta$  sob a acção coadjunta dado por (B.2.2):

$$G_\eta = \{g \in G : Ad_{g^{-1}}^* \eta = \eta\}. \quad (3.1.1)$$

Em virtude da equivariância de  $J$ , facilmente se verifica que  $J^{-1}(\eta)$  é  $G_\eta$ -invariante. Assim, pelo lema B.2.4, temos que  $G_\eta$  actua em  $J^{-1}(\eta)$  e que o espaço das  $G_\eta$ -órbitas de  $J^{-1}(\eta)$

$$P_\eta = J^{-1}(\eta)/G_\eta,$$

está bem definido. Vamos supor ainda que esta acção de  $G_\eta$  em  $J^{-1}(\eta)$  é própria e livre. Então, de acordo com o lema B.2.18,  $P_\eta$  é uma variedade suave de dimensão igual a  $\dim P - \dim G - \dim G_\eta$ , sendo a projecção canónica  $\pi_\eta : J^{-1}(\eta) \rightarrow P_\eta$  uma submersão sobrejectiva. Neste âmbito, o espaço  $P_\eta$  diz-se o *espaço de fases reduzido* (*simpléctico* ou *de Marsden-Weinstein*). As condições descritas neste primeiro parágrafo vão ser as hipóteses dos teoremas da redução que apresentamos nesta secção.

<sup>1</sup>Consideramos a variedade  $P$  como sendo conexa para garantirmos que a aplicação momento é determinada a menos de uma constante em  $\mathfrak{g}^*$ .



A redução descrita nos teoremas que se seguem (o primeiro relativo à redução do espaço de fases, o segundo relativo à respectiva redução da dinâmica) é designada por *redução simpléctica* ou *redução de Marsden-Weinstein* e é utilizada para reduzir sistemas Hamiltonianos com simetrias. Uma simetria num sistema Hamiltoniano é definida por uma acção de um grupo de Lie  $G$  na variedade simpléctica espaço de fases do sistema, que tem associada uma aplicação momento e que preserva o Hamiltoniano do sistema. Refira-se ainda que a redução simpléctica aqui apresentada é por vezes denominada em inglês por “point reduction”, pelo facto de estarmos a fixar o valor da aplicação momento ao ponto  $\eta \in \mathfrak{g}^*$ . As demonstrações dos resultados apresentados podem ser encontradas, por exemplo, em [1, 17, 56, 71].

**Teorema 3.1.1.** *Suponhamos que:*

- (i)  $(P, \omega, \phi, J)$  é um  $G$ -espaço Hamiltoniano com aplicação momento  $J$  equivariante.
- (ii)  $\eta \in \mathfrak{g}^*$  é um valor regular de  $J$ .
- (iii) A acção do subgrupo de isotropia coadjunto  $G_\eta$  na subvariedade  $J^{-1}(\eta)$  é própria e livre.

Então, o espaço de fases reduzido  $P_\eta = J^{-1}(\eta)/G_\eta$  tem uma única estrutura simpléctica  $\omega_\eta$  caracterizada pela identidade

$$\pi_\eta^* \omega_\eta = i_\eta^* \omega,$$

onde  $i_\eta : J^{-1}(\eta) \hookrightarrow P$  denota a inclusão canónica e  $\pi_\eta$  é a projecção de  $J^{-1}(\eta)$  em  $P_\eta$ .

**Teorema 3.1.2.** *Consideremos as hipóteses do teorema anterior e consideremos ainda um Hamiltoniano  $G$ -invariante do  $G$ -espaço Hamiltoniano  $(P, \omega, \phi, J)$ , ou seja, tal que  $H \circ \phi_g = H$ , para todo o  $g \in G$ . Então, o fluxo  $f_t$  do campo de vectores Hamiltoniano  $X_H$  induz um fluxo Hamiltoniano  $f_t^\eta$  em  $P_\eta$ , definido por  $\pi_\eta \circ f_t \circ i_\eta = f_t^\eta \circ \pi_\eta$ :*

$$\begin{array}{ccc} J^{-1}(\eta) & \xrightarrow{f_t \circ i_\eta} & J^{-1}(\eta) \\ \pi_\eta \downarrow & & \downarrow \pi_\eta \\ P_\eta & \xrightarrow{f_t^\eta} & P_\eta \end{array} .$$

O Hamiltoniano  $H_\eta$  correspondente a  $f_t^\eta$  é definido por  $H_\eta \circ \pi_\eta = H \circ i_\eta$ :

$$\begin{array}{ccc} J^{-1}(\eta) & \xrightarrow{i_\eta} & P \\ \pi_\eta \downarrow & & \downarrow H \\ P_\eta & \xrightarrow{H_\eta} & \mathbb{R} \end{array} .$$

O terno  $(P_\eta, \omega_\eta, H_\eta)$  designa-se por *sistema Hamiltoniano reduzido*.

No contexto do teorema anterior, os campos de vectores  $X_H$  e  $X_{H_\eta}$  estão, por construção,  $\pi_\eta$ -relacionados. Isto é,

$$T\pi_\eta \circ X_H \circ i_\eta = X_{H_\eta} \circ \pi_\eta, \quad (3.1.2)$$

ou, em termos de diagrama:

$$\begin{array}{ccc} J^{-1}(\eta) & \xrightarrow{X_H \circ i_\eta} & T(J^{-1}(\eta)) \\ \pi_\eta \downarrow & & \downarrow T\pi_\eta \\ P_\eta & \xrightarrow{X_{H_\eta}} & TP_\eta \end{array} .$$

**Observação 3.1.3.** *A redução simpléctica pode ser abordada de uma forma alternativa através do conhecido teorema da órbita ("orbit reduction"). Nessa situação, o espaço reduzido será  $P_{\mathcal{O}} := J^{-1}(\mathcal{O})/G$  onde  $\mathcal{O}$  é a órbita coadjunta de um determinado elemento de  $\mathfrak{g}^*$  (ver [71]).*

## 3.2 Redução do sistema Hamiltoniano dos polinómios cúbicos

Consideremos o sistema Hamiltoniano trivializado  $(G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, \Omega, H)$  dos polinómios cúbicos abordado na secção 2.5, onde estamos a considerar  $G$  um grupo de Lie conexo e compacto. Interessa-nos relembrar que  $\Omega$  é a imagem recíproca da forma simpléctica canónica em  $T^*(G \times \mathfrak{g})$ , pelo isomorfismo entre  $G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$  e  $T^*(G \times \mathfrak{g})$  dado por (2.1.18).

## 3.2.1 Espaço de fases reduzido

Seja  $\phi$  a acção à esquerda do grupo de Lie  $G$  em  $G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$  definida por

$$\begin{aligned} \phi : G \times (G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*) &\longrightarrow G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \\ (g, (x, Y, \mu, \xi)) &\longmapsto (gx, Y, \mu, \xi). \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

**Proposição 3.2.1.** *A acção  $\phi$  dada por (3.2.1) é uma acção simpléctica relativamente à forma simpléctica  $\Omega$  e tem uma aplicação momento  $Ad^*$ -equivariante definida por*

$$\begin{aligned} J : G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ (x, Y, \mu, \xi) &\longmapsto Ad_{x^{-1}}^*(\mu - ad_Y^* \xi). \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Vamos necessitar do seguinte resultado para demonstrarmos a proposição anterior:

**Lema 3.2.2.** *Sejam  $G$  e  $G_1$  grupos de Lie e  $T^*G_1$  o fibrado cotangente de  $G_1$  munido com a estrutura simpléctica canónica  $\omega_0$ . Consideremos uma acção simpléctica  $\Lambda$  de  $G$  em  $T^*G_1$  com aplicação momento  $Ad^*$ -equivariante denotada por  $J_\Lambda$ . Consideremos ainda a acção  $\bar{\Lambda}$  de  $G$  em  $G_1 \times \mathfrak{g}_1^*$  dada pela trivialização à esquerda da acção  $\Lambda$ , que é definida por  $\bar{\Lambda}_g := \bar{\rho} \circ \Lambda_g \circ \bar{\rho}^{-1}$ , para cada  $g \in G$ ,*

$$\begin{array}{ccc} T^*G_1 & \xrightarrow{\Lambda_g} & T^*G_1 \\ \bar{\rho}^{-1} \uparrow & & \downarrow \bar{\rho} \\ G_1 \times \mathfrak{g}_1^* & \xrightarrow{\bar{\Lambda}_g} & G_1 \times \mathfrak{g}_1^* \end{array} ,$$

onde  $\bar{\rho}$  é o isomorfismo de  $T^*G_1$  em  $G_1 \times \mathfrak{g}_1^*$  definido de acordo com (2.1.16).

A acção  $\bar{\Lambda}$  é simpléctica relativamente a  $\Omega := (\bar{\rho}^{-1})^* \omega_0$  e tem uma aplicação momento dada por  $J := J_\Lambda \circ \bar{\rho}^{-1}$  que é  $Ad^*$ -equivariante, ou seja, verifica-se a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_1 \times \mathfrak{g}_1^* & \xrightarrow{\bar{\Lambda}_g} & G_1 \times \mathfrak{g}_1^* \\ \bar{\rho}^{-1} \downarrow & & \downarrow \bar{\rho}^{-1} \\ T^*G_1 & & T^*G_1 \\ J_\Lambda \downarrow & & \downarrow J_\Lambda \\ \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{Ad_{g^{-1}}^*} & \mathfrak{g}^* \end{array} .$$

*Demonstração.* Por definição, a acção  $\bar{\Lambda}$  é simpléctica se  $\bar{\Lambda}_g^* \Omega = \Omega$ , para cada  $g \in G$ . Para obter esta igualdade basta ter em atenção as definições de  $\bar{\Lambda}$  e  $\Omega$ , o facto de  $\Lambda$  ser simpléctica relativamente a  $\omega_0$  (ou seja,  $\Lambda_g^* \omega_0 = \omega_0$ ), e fazer uso da propriedade da imagem recíproca de formas diferenciáveis dada por  $F^* \circ G^* = (G \circ F)^*$ , onde  $F$  e  $G$  são funções entre duas variedades. Com efeito,  $\bar{\Lambda}_g^* \Omega = [(\bar{\rho} \circ \Lambda_g \circ \bar{\rho}^{-1})^* \circ (\bar{\rho}^{-1})^*](\omega_0) = (\Lambda_g \circ \bar{\rho}^{-1})^*(\omega_0) = (\bar{\rho}^{-1})^*(\Lambda_g^* \omega_0) = (\bar{\rho}^{-1})^* \omega_0 = \Omega$ .

Resta mostrar a segunda parte do lema. Começamos por considerar o gerador infinitesimal  $Y_{G_1 \times \mathfrak{g}_1^*} : G_1 \times \mathfrak{g}_1^* \rightarrow T(G_1 \times \mathfrak{g}_1^*)$  da acção  $\bar{\Lambda}$  correspondente a um elemento  $Y \in \mathfrak{g}$ . Pela definição B.2.5, sabemos que  $Y_{G_1 \times \mathfrak{g}_1^*}(g_1, \xi_1) = (T_e \bar{\Lambda}^{(g_1, \xi_1)})(Y)$ , para cada  $(g_1, \xi_1) \in G_1 \times \mathfrak{g}_1^*$ . Logo,  $(T\bar{\rho}^{-1} \circ Y_{G_1 \times \mathfrak{g}_1^*})(g_1, \xi_1) = [T_e(\bar{\rho}^{-1} \circ \bar{\Lambda}^{(g_1, \xi_1)})](Y)$ . Mas, para  $g \in G$ , temos  $(\bar{\rho}^{-1} \circ \bar{\Lambda}^{(g_1, \xi_1)})(g) = (\bar{\rho}^{-1} \circ \bar{\Lambda}_g)(g_1, \xi_1) = \Lambda^{\bar{\rho}^{-1}(g_1, \xi_1)}(g)$ . Assim,  $(T\bar{\rho}^{-1} \circ Y_{G_1 \times \mathfrak{g}_1^*})(g_1, \xi_1) = (T_e \Lambda^{\bar{\rho}^{-1}(g_1, \xi_1)})(Y) = (Y_{T^*G_1} \circ \bar{\rho}^{-1})(g_1, \xi_1)$ , onde o campo de vectores  $Y_{T^*G_1} : T^*G_1 \rightarrow T(T^*G_1)$  representa o gerador infinitesimal da acção  $\Lambda$  correspondente a  $Y$ . Portanto, os geradores infinitesimais das duas acções, correspondentes a um dado  $Y \in \mathfrak{g}$ , estão relacionados através da identidade  $T\bar{\rho}^{-1} \circ Y_{G_1 \times \mathfrak{g}_1^*} = Y_{T^*G_1} \circ \bar{\rho}^{-1}$ . Isto significa que  $Y_{G_1 \times \mathfrak{g}_1^*}$  é o prolongamento (“push-forward”) de  $Y_{T^*G_1}$  por  $\bar{\rho}$ :

$$Y_{G_1 \times \mathfrak{g}_1^*} = \bar{\rho}_*(Y_{T^*G_1}).$$

Por outro lado, recorde-se que sendo  $J_\Lambda$  uma aplicação momento de  $\Lambda$ , pela definição B.5.2, o gerador infinitesimal  $Y_{T^*G_1}$  coincide com o campo de vectores Hamiltoniano da função  $J_\Lambda^Y : T^*G_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha_{g_1} \in T_{g_1}^*G_1 \mapsto [J_\Lambda(\alpha_{g_1})](Y)$ , onde  $g_1 \in G_1$ . Então, uma vez que  $\bar{\rho}$  é um symplectomorfismo, usamos um resultado de [1] (descrito na nota de rodapé 3 do capítulo 1), para concluir que  $\bar{\rho}_*(Y_{T^*G_1})$  é o campo de vectores Hamiltoniano associado à função  $J_\Lambda^Y \circ \bar{\rho}^{-1}$ . Face ao exposto, o gerador infinitesimal  $Y_{G_1 \times \mathfrak{g}_1^*}$  é o campo de vectores Hamiltoniano de  $J_\Lambda^Y \circ \bar{\rho}^{-1}$  e, conseqüentemente,  $J := J_\Lambda \circ \bar{\rho}^{-1}$  é uma aplicação momento da acção  $\bar{\Lambda}$ . Para finalizar a demonstração, utilizamos o facto de  $J_\Lambda$  ser  $Ad^*$ -equivariante (ou seja,  $J_\Lambda \circ \Lambda_g = Ad_{g^{-1}}^* \circ J_\Lambda$ , para todo  $g \in G$ , de acordo com a definição B.5.5), para deduzirmos que  $J$  é também  $Ad^*$ -equivariante. De facto,  $J \circ \bar{\Lambda}_g = J_\Lambda \circ \Lambda_g \circ \bar{\rho}^{-1} = Ad_{g^{-1}}^* \circ J$ , para todo  $g \in G$ .  $\square$

*Demonstração da proposição 3.2.1.* Começamos por considerar as seguintes acções:

- A acção de  $G$  em  $G \times \mathfrak{g}$  dada, para cada  $g \in G$  e  $(x, Y) \in G \times \mathfrak{g}$ , por

$$(g, (x, Y)) \mapsto L_{(g,0)}(x, Y) = (gx, Y). \quad (3.2.3)$$

Da definição B.2.5, facilmente se deduz que o gerador infinitesimal  $Z_{G \times \mathfrak{g}}$  desta acção, correspondente a um elemento  $Z \in \mathfrak{g}$ , é definido, para cada  $(x, Y) \in G \times \mathfrak{g}$ , por

$$Z_{G \times \mathfrak{g}}(x, Y) = (T_e R_x Z, Y, Y) \in T_{(x,Y)}(G \times \mathfrak{g}). \quad (3.2.4)$$

- A acção levantamento cotangente da acção (3.2.3), que denotaremos por  $\Lambda$ , definida de acordo com o exemplo B.2.15. Isto é,  $\Lambda$  é a acção de  $G$  em  $T^*(G \times \mathfrak{g})$  dada por

$$\Lambda(g, (\alpha_x, Y, \xi)) = \left( T_{(gx,Y)}^* L_{(g^{-1},0)} \right) (\alpha_x, Y, \xi) = (T_{gx}^* L_{g^{-1}} \alpha_x, Y, \xi), \quad (3.2.5)$$

para cada  $g \in G$ ,  $(\alpha_x, Y, \xi) \in T_{(x,Y)}^*(G \times \mathfrak{g})$ , com  $(x, Y) \in G \times \mathfrak{g}$ , e onde estamos a usar a fórmula da proposição 2.1.9 (relativa à aplicação transposta da aplicação tangente da translação, no contexto dos produtos semidirectos).

O corolário B.5.7 garante-nos que a acção  $\Lambda$  é simpléctica relativamente à forma simpléctica canónica  $\omega_0$  em  $T^*(G \times \mathfrak{g})$ . Além disso,  $\Lambda$  admite uma aplicação momento  $Ad^*$ -equivariante,  $J_\Lambda : T^*(G \times \mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{g}^*$ , definida de acordo com a identidade  $[J_\Lambda(\alpha_x, Y, \xi)](Z) = [(\alpha_x, Y, \xi) \circ Z_{G \times \mathfrak{g}}](x, Y)$ , para  $(x, Y) \in G \times \mathfrak{g}$ ,  $(\alpha_x, Y, \xi) \in T_{(x,Y)}^*(G \times \mathfrak{g})$  e  $Z \in \mathfrak{g}$ . Assim, usando a expressão (3.2.4), concluímos que a aplicação momento é determinada (a menos de uma constante) por

$$J_\Lambda(\alpha_x, Y, \xi) = T_e^* R_x \alpha_x. \quad (3.2.6)$$

Estamos agora em condições de aplicar o lema 3.2.2 para  $G_1 = G \times \mathfrak{g}$ . Com efeito, sendo a acção  $\Lambda$  simpléctica e com aplicação momento  $Ad^*$ -equivariante, então a sua trivialização à esquerda (definida por  $\rho \circ \Lambda_g \circ \rho^{-1}$ , para cada  $g \in G$ ) é uma acção simpléctica relativamente a  $\Omega = (\rho^{-1})^* \omega_0$ , onde  $\rho$  é o isomorfismo entre  $T^*(G \times \mathfrak{g})$  e

$G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$  dado por (2.1.17). Ora, esta acção trivializada é precisamente a acção  $\phi$  definida por (3.2.1). De facto, de (2.1.17), (2.1.18) e (3.2.5), vem

$$\begin{aligned} (\rho \circ \Lambda_g \circ \rho^{-1})(x, Y, \mu, \xi) &= (\rho \circ \Lambda_g)(T_x^* L_{x^{-1}}(\mu - ad_Y^* \xi), Y, \xi) = \\ &= \rho(T_{gx}^* L_{(gx)^{-1}}(\mu - ad_Y^* \xi), Y, \xi) = \phi_g(x, Y, \mu, \xi), \end{aligned}$$

para  $g \in G$  e  $(x, Y, \mu, \xi) \in G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ . Tendo em conta o estipulado no lema 3.2.2, a aplicação  $J : G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ ,  $J := J_\Lambda \circ \rho^{-1}$  é uma aplicação momento  $Ad^*$ -equivariante da acção  $\phi$ . Por conseguinte, atendendo a (2.1.18) e (3.2.6), temos

$$J(x, Y, \mu, \xi) = (T_e^* R_x \circ T_x^* L_{x^{-1}})(\mu - ad_Y^* \xi) = Ad_{x^{-1}}^*(\mu - ad_Y^* \xi),$$

para cada  $(x, Y, \mu, \xi) \in G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ , o que finaliza a demonstração.  $\square$

Notemos que, do lema B.2.17, sabemos que a acção  $\phi$  definida por (3.2.1) é própria, uma vez que  $G$  é um grupo de Lie compacto. Podemos ainda concluir que  $\phi$  é livre, pois se considerarmos  $G_{(x, Y, \mu, \xi)} := \{g \in G : \phi_g(x, Y, \mu, \xi) = (x, Y, \mu, \xi)\}$  o subgrupo de isotropia de um qualquer elemento  $(x, Y, \mu, \xi) \in G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ , então imediatamente se deduz que este subgrupo de isotropia é constituído apenas pela identidade do grupo de Lie  $G$ ,  $G_{(x, Y, \mu, \xi)} = \{g \in G : gx = x\} = \{e\}$ . Como consequência, de acordo com o teorema B.5.9, o facto de  $\phi$  ser livre permite-nos escrever o seguinte resultado:

**Proposição 3.2.3.** *Todo o elemento  $\eta \in \mathfrak{g}^*$  é um valor regular da aplicação momento  $J$  definida por (3.2.2).*

Seja  $\eta \in \mathfrak{g}^*$ . Interessa-nos agora considerar o subgrupo de isotropia coadjunto de  $\eta$ , ou seja, (3.1.1), que sabemos ser um subgrupo de Lie fechado de  $G$ , e ainda o subconjunto  $J^{-1}(\eta)$  que é uma subvariedade inicial de  $G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ , dado que  $\eta$  é um valor regular. Repare-se que, da expressão (3.2.2) de  $J$ , vem

$$J^{-1}(\eta) = \{(x, Y, \mu, \xi) \in G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* : \mu = Ad_x^* \eta + ad_Y^* \xi\}. \quad (3.2.7)$$

Como foi justificado no início da secção anterior, sendo  $J$  uma aplicação momento  $Ad^*$ -equivariante, a acção restrição (no sentido do lema B.2.4) de  $G_\eta$  em  $J^{-1}(\eta)$ , que

continuaremos a denotar por  $\phi$ , está bem definida, assim como o correspondente espaço das  $G_\eta$ -órbitas de  $J^{-1}(\eta)$ .

**Proposição 3.2.4.** *A acção de  $G_\eta$  em  $J^{-1}(\eta)$  (acção restrição da acção (3.2.1)) é própria e livre, para qualquer valor regular  $\eta \in \mathfrak{g}^*$  da aplicação momento  $J$  definida por (3.2.2) (neste caso, para qualquer  $\eta \in \mathfrak{g}^*$ ).*

*Demonstração.* Como vimos, a acção (3.2.1) é livre e própria. Então, a acção de  $G_\eta$  em  $J^{-1}(\eta)$  é obviamente livre, e para além disso também é própria, por ser uma acção restrição de uma acção própria ao subgrupo de Lie fechado  $G_\eta$  (ver observação B.2.19).  $\square$

Os resultados das proposições 3.2.1 e 3.2.4 permitem-nos aplicar o teorema 3.1.1 da redução simpléctica. Neste sentido, passamos a trabalhar numa nova variedade simpléctica, a variedade reduzida constituída pelo espaço das  $G_\eta$ -órbitas de  $J^{-1}(\eta)$ :

$$(G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*)_\eta := J^{-1}(\eta)/G_\eta, \quad (3.2.8)$$

munida com a estrutura simpléctica  $\Omega_\eta$  que se caracteriza pela identidade  $\pi_\eta^* \Omega_\eta = i_\eta^* \Omega$ , sendo  $i_\eta$  e  $\pi_\eta$ , respectivamente, a inclusão canónica de  $J^{-1}(\eta)$  em  $G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$  e a projecção de  $J^{-1}(\eta)$  em  $(G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*)_\eta$ .

Pretendemos agora explorar com mais detalhe a redução obtida. Mais concretamente, vamos interpretar a variedade simpléctica reduzida (3.2.8), da forma que consideramos ser a mais eficaz para promover o estudo aprofundado do sistema Hamiltoniano. Começamos por observar que a subvariedade  $J^{-1}(\eta)$ , definida por (3.2.7), é difeomorfa ao produto semidirecto  $G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$  (do grupo de Lie  $G \times \mathfrak{g}$  e do espaço vectorial  $\mathfrak{g}^*$ ) através do difeomorfismo

$$\begin{aligned} \Upsilon_\eta : G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* &\longrightarrow J^{-1}(\eta) \\ (x, Y, \xi) &\longmapsto (x, Y, Ad_x^* \eta + ad_Y^* \xi, \xi). \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Apresentamos de seguida um lema que nos vai conduzir à interpretação da variedade reduzida (3.2.8).

**Lema 3.2.5.** *Consideremos a acção de  $G_\eta$  em  $G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$  dada por*

$$g \cdot (x, Y, \xi) = (gx, Y, \xi), \quad (3.2.10)$$

para cada  $g \in G_\eta$  e  $(x, Y, \xi) \in G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ , e ainda o correspondente espaço das órbitas  $(G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*)/G_\eta$ . O difeomorfismo (3.2.9) induz um novo difeomorfismo

$$\bar{\Upsilon}_\eta : (G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*)/G_\eta \longrightarrow (G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*)_\eta,$$

que faz corresponder a cada  $G_\eta$ -órbita de um elemento  $(x, Y, \xi) \in G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ , a  $G_\eta$ -órbita do elemento  $(x, Y, Ad_x^* \eta + ad_Y^* \xi, \xi) \in J^{-1}(\eta)$ .

*Demonstração.* É apenas necessário verificar que  $\Upsilon_\eta$  é equivariante para as acções  $\phi$  e (3.2.10) de  $G_\eta$  em  $J^{-1}(\eta)$  e  $G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ , respectivamente. Com efeito, dados os elementos  $g \in G_\eta$  e  $(x, Y, \xi) \in G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ , temos  $\Upsilon_\eta(g \cdot (x, Y, \xi)) = (gx, Y, Ad_{gx}^* \eta + ad_Y^* \xi, \xi)$ . Mas,  $Ad_{gx}^* \eta = Ad_x^*(Ad_g^* \eta) = Ad_x^* \eta$ , pois  $g \in G_\eta$ . Logo,  $\Upsilon_\eta(g \cdot (x, Y, \xi)) = \phi_g(\Upsilon_\eta(x, Y, \xi))$ .  $\square$

Face ao exposto, estabelecemos o seguinte resultado:

**Proposição 3.2.6.** *A variedade reduzida  $(G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*)_\eta$ , definida por (3.2.8), é difeomorfa ao espaço  $\mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ , onde  $\mathcal{O}_\eta$  denota a órbita coadjunta do elemento  $\eta$  definida de acordo com (B.2.3).*

*Demonstração.* Note-se que a aplicação  $\varepsilon_\eta : (G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*)/G_\eta \rightarrow \mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ , que a cada  $G_\eta$ -órbita de um elemento  $(x, Y, \xi) \in G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ , faz corresponder o ponto  $(Ad_x^* \eta, Y, \xi) \in \mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ , é claramente um difeomorfismo. Deste modo, construímos a aplicação  $\bar{\varphi}_\eta := \varepsilon_\eta \circ \bar{\Upsilon}_\eta^{-1}$ , isto é,

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_\eta : (G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*)_\eta &\longrightarrow \mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \\ [(x, Y, Ad_x^* \eta + ad_Y^* \xi, \xi)]_\eta &\longmapsto (Ad_x^* \eta, Y, \xi), \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

que nos dá o difeomorfismo pretendido e assim fica concluída a demonstração.  $\square$

O resultado da proposição anterior permite-nos concluir que a aplicação  $\bar{\varphi}_\eta$  dada por (3.2.11) é um symplectomorfismo, sendo

$$\bar{\Omega}_\eta = (\bar{\varphi}_\eta^{-1})^* \Omega_\eta \quad (3.2.12)$$



a estrutura simpléctica em  $\mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$  (onde usamos novamente o resultado de [1] mencionado na nota de rodapé 3 do capítulo 1).

Finalizamos esta subsecção, com uma observação útil na simplificação de alguns dos resultados a obter posteriormente: a aplicação  $\varphi_\eta := \bar{\varphi}_\eta \circ \pi_\eta : J^{-1}(\eta) \rightarrow \mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$  é tal que

$$\varphi_\eta(x, Y, Ad_x^* \eta + ad_Y^* \xi, \xi) = (Ad_x^* \eta, Y, \xi). \quad (3.2.13)$$

Além disso,  $\varphi_\eta$  é sobrejectiva, uma vez que  $\bar{\varphi}_\eta$  é bijectiva e a projecção  $\pi_\eta$  é sobrejectiva.

### 3.2.2 Dinâmica reduzida

Analisamos nesta subsecção a redução da dinâmica do nosso sistema Hamiltoniano, induzida pela redução do espaço de fases efectuada na subsecção anterior. Recordemos que o Hamiltoniano  $H : G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$  é definido por (2.5.1), isto é, para cada  $(x, Y, \mu, \xi) \in G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$  temos

$$H(x, Y, \mu, \xi) = \mu(Y) + \frac{1}{2} \xi(X_\xi). \quad (3.2.14)$$

De imediato se verifica que  $H(gx, Y, \mu, \xi) = H(x, Y, \mu, \xi)$  e portanto o Hamiltoniano  $H$  é invariante sob a acção  $\phi$  considerada na secção anterior que é definida por (3.2.1). O campo de vectores Hamiltoniano  $X_H$  associado a  $H$  foi determinado no capítulo anterior e é dado por (2.5.4), ou seja,

$$X_H(x, Y, \mu, \xi) = (T_e L_x Y, X_\xi, 0, -\mu + ad_Y^* \xi). \quad (3.2.15)$$

De acordo com o teorema 3.1.2, o fluxo de  $X_H$  induz um fluxo Hamiltoniano na variedade reduzida (3.2.8), cujo respectivo Hamiltoniano  $H_\eta$  é determinado de forma única pela identidade

$$H_\eta \circ \pi_\eta = H \circ i_\eta. \quad (3.2.16)$$

Além disso, os campos de vectores Hamiltonianos  $X_H$  e  $X_{H_\eta}$  estão  $\pi$ -relacionados através da igualdade (3.1.2), o que se traduz na comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
J^{-1}(\eta) & \xrightarrow{X_H \circ i_\eta} & T(J^{-1}(\eta)) \\
\pi_\eta \downarrow & & \downarrow T\pi_\eta \\
(G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*)_\eta & \xrightarrow{X_{H_\eta}} & T((G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*)_\eta)
\end{array} .$$

Tendo em consideração a descrição dada no final da subsecção anterior, o ideal será conseguirmos caracterizar o sistema reduzido como um sistema em  $(\mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*, \bar{\Omega}_\eta)$ , onde  $\bar{\Omega}_\eta$  é a forma simpléctica (3.2.12). Para o efeito, vamos determinar a expressão de  $X_{H_\eta}$  quando interpretado como um campo de vectores em  $\mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ . Adoptamos a seguinte notação (desde que inserida num contexto em que o seu significado seja óbvio):

$$\theta := Ad_x^* \eta \in \mathcal{O}_\eta.$$

Introduza-se a nova função Hamiltoniana  $h : \mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$  caracterizada no lema a seguir.

**Lema 3.2.7.** *Seja  $\bar{\varphi}_\eta$  a aplicação (3.2.11) e  $H_\eta$  o Hamiltoniano (3.2.16). A função  $h := H_\eta \circ \bar{\varphi}_\eta^{-1} : \mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , é definida, para cada  $(\theta, Y, \xi) \in \mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ , por*

$$h(\theta, Y, \xi) = \theta(Y) + \frac{1}{2} \xi(X_\xi). \quad (3.2.17)$$

*Demonstração.* Uma vez que a aplicação  $\varphi_\eta := \bar{\varphi}_\eta \circ \pi_\eta$  dada por (3.2.13) é sobrejectiva, cada  $(\theta, Y, \xi) \in \mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$  é a imagem por  $\varphi$  de  $(x, Y, \theta + ad_Y^* \xi, \xi) \in J^{-1}(\eta)$ . Então,  $h(\theta, Y, \xi) = (H_\eta \circ \pi_\eta)(x, Y, \theta + ad_Y^* \xi, \xi)$ . Tendo agora em atenção (3.2.16), obtemos  $h(\theta, Y, \xi) = H(x, Y, \theta + ad_Y^* \xi, \xi)$ . Assim, usando (3.2.14) deduzimos o pretendido.  $\square$

Porque (3.2.11) é um simplectomorfismo, o campo de vectores Hamiltoniano  $X_h$  associado a  $h$  verifica a relação  $X_h \circ \bar{\varphi}_\eta = T\bar{\varphi}_\eta \circ X_{H_\eta}$ . Logo,  $X_h \circ \bar{\varphi}_\eta \circ \pi_\eta = T\bar{\varphi}_\eta \circ X_{H_\eta} \circ \pi_\eta$ , ou seja,  $X_h \circ \varphi_\eta = T\bar{\varphi}_\eta \circ X_{H_\eta} \circ \pi_\eta$ . Usando agora (3.1.2), obtemos

$$X_h \circ \varphi_\eta = T\varphi_\eta \circ X_H \circ i_\eta. \quad (3.2.18)$$

Vamos desenvolver a expressão de  $X_h$  para cada ponto em  $\mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ , fazendo uso da relação (3.2.18) e do seguinte lema:

**Lema 3.2.8.** *Se  $(a, b, c, d) \in T_{(x, Y, \theta + ad_Y^* \xi, \xi)} J^{-1}(\eta)$ , então*

$$T_{(x, Y, \theta + ad_Y^* \xi, \xi)} \varphi_\eta(a, b, c, d) = \left( ad_{T_x L_{x^{-1}a}}^* \theta, b, d \right), \quad (3.2.19)$$

onde  $J^{-1}(\eta)$  é a variedade (3.2.7) e  $\varphi_\eta$  a aplicação (3.2.13).

*Demonstração.* Antes de iniciarmos a demonstração, refira-se que a escolha do elemento  $(a, b, c, d)$  relaciona-se com o facto de  $T_{(x, Y, \theta + ad_Y^* \xi, \xi)} J^{-1}(\eta)$  ser um subconjunto de  $T_{(x, Y, \theta + ad_Y^* \xi, \xi)}(G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*) \equiv T_x G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ .

Seja  $\beta = (\beta_1, \beta_2, Ad_{\beta_1}^* \eta + ad_{\beta_2}^* \beta_3, \beta_3)$  uma curva em  $J^{-1}(\eta)$  que satisfaz as condições iniciais  $\beta(0) = (x, Y, \theta + ad_Y^* \xi, \xi)$  e  $\dot{\beta}(0) = (a, b, c, d)$ . Então, como é do conhecimento geral,  $T_{(x, Y, \theta + ad_Y^* \xi, \xi)} \varphi_\eta(a, b, c, d) = (d(\varphi_\eta \circ \beta)/dt)(0)$ . Mas, usando (B.3.3), a expressão anterior toma a forma  $(ad_{T_{\beta_1(0)} L_{\beta_1(0)^{-1} \dot{\beta}_1(0)}}^* Ad_{\beta_1(0)}^* \eta, \dot{\beta}_2(0), \dot{\beta}_3(0)) = (ad_{T_x L_{x^{-1}a}}^* \theta, b, d)$ .  $\square$

**Proposição 3.2.9.** *Para cada ponto  $(\theta, Y, \xi) \in \mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ , o campo de vectores dinâmico  $X_h$  do sistema Hamiltoniano  $(\mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*, \bar{\Omega}_\eta, h)$  é definido por*

$$X_h(\theta, Y, \xi) = (ad_Y^* \theta, X_\xi, -\theta). \quad (3.2.20)$$

*Demonstração.* Começamos por observar que das relações (3.2.13) e (3.2.18), temos  $X_h(\theta, Y, \xi) = (T\varphi_\eta \circ X_H)(x, Y, \theta + ad_Y^* \xi, \xi)$ . De acordo com (3.2.15), sabemos que  $X_H(x, Y, \theta + ad_Y^* \xi, \xi) = (T_e L_x Y, X_\xi, 0, -\theta)$ . Para finalizar a demonstração, basta aplicar a fórmula (3.2.19) a  $(a, b, c, d) = (T_e L_x Y, X_\xi, 0, -\theta)$ , de forma a deduzirmos que  $T_{(x, Y, \theta + ad_Y^* \xi, \xi)} \varphi_\eta(T_e L_x Y, X_\xi, 0, -\theta) = (ad_Y^* \theta, X_\xi, -\theta)$ .  $\square$

Consequentemente, as equações de Hamilton na variedade reduzida  $\mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$  são dadas por

$$\begin{cases} \dot{\theta} = ad_Y^* \theta \\ \dot{Y} = X_\xi \\ \dot{\xi} = -\theta. \end{cases} \quad (3.2.21)$$

**Observação 3.2.10.** Na proposição 2.7.1, verificámos a equivalência entre as soluções das equações de Hamilton (2.5.3) e as equações de Euler-Lagrange (2.2.8). Evidentemente que a dinâmica reduzida descrita por (3.2.20) se relaciona também com a abordagem variacional dos polinómios cúbicos. De facto, uma curva integral do campo de vectores Hamiltoniano reduzido (3.2.20) dá lugar a uma curva que satisfaz a equação de Euler-Lagrange

$$\ddot{Y} + [Y, \ddot{Y}] = 0. \quad (3.2.22)$$

Com efeito, escrevendo a primeira equação de (3.2.21) como uma equação na álgebra de Lie (no sentido da identificação (2.1.6) e usando as propriedades (2.1.7)), obtemos  $\dot{X}_\theta + [Y, X_\theta] = 0$ . Mas, pelas outras duas equações de (3.2.21), sabemos que  $X_\theta = -\dot{Y}$ . Assim, a partir de uma solução de (3.2.21) obtemos uma solução de (3.2.22).

**Observação 3.2.11.** A redução apresentada nesta secção, assim como os resultados da secção a seguir, foram publicados por Abrunheiro, Camarinha e Clemente-Gallardo em [7]. Os polinómios cúbicos Riemannianos são um exemplo da generalização para ordem superior das geodésicas Riemannianas (splines de ordem superior) [27]. O estudo dos splines de ordem superior tem despertado o interesse de diversos autores nos últimos anos, de onde salientamos o trabalho [39] de Gay-Balmaz et al. No referido trabalho, os autores investigam os splines de ordem superior, sob um ponto de vista variacional e na área da correspondência por padrão ("template matching") em grupos de Lie, com aplicação à análise de imagens. Para tal, desenvolvem o formalismo de Euler-Poincaré para problemas variacionais de ordem superior que são invariantes sob transformações de grupos de Lie. De entre os diversos assuntos analisados nesse artigo, interessa-nos destacar a abordagem Hamiltoniana associada às equações de Euler-Poincaré de ordem superior, que faz uso da redução de Hamilton-Ostrogradsky e que leva à dedução das equações de Ostrogradsky-Lie-Poisson. Para o caso particular dos 2-splines (ou seja, dos polinómios cúbicos), as equações de Ostrogradsky-Lie-Poisson coincidem com as equações Hamiltonianas (3.2.21) deduzidas nesta dissertação.

### 3.3 Integrais do movimento

Os integrais do movimento de um sistema dinâmico são quantidades que são conservadas ao longo do fluxo desse sistema e por vezes podem ser associados a simetrias do sistema. O clássico teorema da integrabilidade de Liouville, exposto por Arnold em [11] (que contribuiu também para uma versão mais completa deste resultado), garante que um sistema dinâmico com um espaço de fases de dimensão  $2N$  é completamente integrável se admite  $N$  integrais funcionalmente independentes que estejam em involução, isto é, com parênteses de Poisson nulos dois a dois. No entanto, este tipo de situação é extremamente rara. Na prática, lidamos diversas vezes com sistemas Hamiltonianos que admitem um grupo de simetrias não abeliano, ou então um grupo de simetrias abeliano mas em número inferior ao requerido para a integrabilidade completa. Se forem satisfeitas certas condições particulares, um conjunto não abeliano de integrais independentes pode conduzir-nos à integrabilidade do sistema, como é explicado por Fomenko e Mishchenko em [63], autores do teorema da integrabilidade não-comutativa. Contudo, na maioria dos casos, o mais natural é encontrar um número de invariantes independentes e comutativos relativamente ao parêntesis de Poisson em número inferior a  $N$ , o que nos poderá conduzir apenas à integrabilidade parcial do sistema original (teorema de Poincaré-Lyapunov-Nekhoroshev, [64]).

Nesta secção estamos interessados numa análise preliminar das simetrias do sistema Hamiltoniano  $(\mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*, \bar{\Omega}_\eta, h)$ , tendo como objectivo um futuro estudo da integrabilidade do sistema no contexto descrito no parágrafo anterior. O problema da redução da ordem de um sistema Hamiltoniano é um tema de estudo bastante antigo, de onde se salientam diversos estudos de Poincaré e Cartan, nomeadamente o teorema de Lie-Cartan que utilizaremos nesta secção (ver detalhes sobre o assunto em [12]).

Com o intuito de simplificar a linguagem, assumimos a seguinte notação (recorde-se que a dimensão da órbita coadjunta é sempre par):

$$\dim \mathfrak{g} = n \quad \text{e} \quad \dim \mathcal{O}_\eta = 2m,$$

onde obviamente  $2m \leq n$ . Assim, a dimensão do espaço de fases do sistema Hamiltoniano é

$$\dim (\mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*) = 2(n + m). \quad (3.3.1)$$

Seja  $X_h$  o campo de vectores solução (3.2.20) do nosso sistema Hamiltoniano. Uma função  $f : \mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$  é um integral do movimento do sistema, se  $[X_h(w)](f) = 0$ , isto é,  $[(df)(w)](X_h(w)) = 0$ , para todo  $w \in \mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ . É importante observar que  $df : \mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \rightarrow T^*(\mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*)$  é tal que  $df(w) \in T_w^* \mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}$ . Neste sentido, adoptamos a notação

$$[df(w)](X_h(w)) = (ad_Y^* \theta) \left( \frac{\partial f}{\partial \theta}(w) \right) + \left[ \frac{\partial f}{\partial Y}(w) \right] (X_\xi) - \theta \left( \frac{\partial f}{\partial \xi}(w) \right). \quad (3.3.2)$$

Além disso, generalizamos a notação para um campo de vectores arbitrário: dado  $X : \mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \rightarrow T(\mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*)$ ,  $w \mapsto (X_1(w), X_2(w), X_3(w)) \in T_w \mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ , escrevemos

$$[df(w)](X(w)) = [X_1(w)] \left( \frac{\partial f}{\partial \theta}(w) \right) + \left[ \frac{\partial f}{\partial Y}(w) \right] (X_2(w)) + [X_3(w)] \left( \frac{\partial f}{\partial \xi}(w) \right). \quad (3.3.3)$$

A função Hamiltoniana (3.2.17), ou seja,

$$l_1 \equiv h = \theta(Y) + \frac{1}{2} \xi(X_\xi) \quad (3.3.4)$$

é naturalmente um integral do movimento do sistema Hamiltoniano. Mas, para além disto, estamos em condições de concluir o seguinte:

**Proposição 3.3.1.** *As funções  $l_{i+1} : \mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por*

$$l_{i+1} = (\theta + ad_Y^* \xi)(A_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.3.5)$$

com  $A_i$  um elemento fixo da base ortonormada de  $\mathfrak{g}$ , são integrais do movimento do sistema Hamiltoniano  $(\mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*, \bar{\Omega}_\eta, h)$ .

*Demonstração.* Seja  $w = (\theta, Y, \xi) \in \mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ , com  $\theta = Ad_x^* \eta$ ,  $x \in G$ . De acordo com (3.3.2) e usando a propriedade (2.1.1), facilmente se verifica que

$$[X_h(l_{i+1})](w) = \theta(ad_Y A_i) - \xi(ad_{A_i} X_\xi) - \theta(ad_Y A_i) = \langle [X_\xi, X_\xi], A_i \rangle = 0,$$

para cada  $i = 1, \dots, n$ , ficando assim demonstrado que as funções são invariantes.  $\square$

**Observação 3.3.2.** *Recordemos que no contexto da formulação variacional são conhecidos três invariantes,  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  dados por (2.2.9), (2.2.10) e (2.2.11), respectivamente. Como vimos nas proposições 2.7.2 e 2.7.3, estes invariantes estão relacionados com os três invariantes  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  (dados por (2.6.1), (2.6.2) e (2.6.3), respectivamente) do sistema Hamiltoniano dos polinómios cúbicos, antes de sofrer a redução a que se dedica o presente capítulo. Esses três invariantes são preservados face à redução, facto que se torna claro para o invariante correspondente ao Hamiltoniano, ou seja, para  $m_1$  (temos  $m_1 \equiv l_1$ ). Efectuando os cálculos verifica-se que  $m_2$  coincide com  $\sum_{i=1}^n l_{i+1}^2$  que, pela proposição 3.3.1, é obviamente um integral do movimento. Por outro lado,  $m_3$  coincide com  $\sum_{i=1}^n l_{i+1}^2 - \theta(X_\theta)$  (note-se que  $\theta(X_\theta)$  é naturalmente um integral do movimento do sistema reduzido). É evidente que existe também uma relação entre os três invariantes da teoria variacional e os integrais do movimento agora obtidos para o sistema Hamiltoniano reduzido. Com efeito, é simples de mostrar que  $I_1 \equiv l_1$ ,  $I_2 \equiv \theta(X_\theta)$  e  $I_3 \equiv (1/2) [\sum_{i=1}^n l_{i+1}^2 - \theta(X_\theta)]$ .*

Ao longo do resto da secção, assumimos que o conjunto formado pelos  $n+1$  integrais do movimento do sistema  $(\mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*, \bar{\Omega}_\eta, h)$  dados por (3.3.4) e (3.3.5), ou seja,

$$l_1, l_2, \dots, l_{n+1}, \quad (3.3.6)$$

é um conjunto de funções funcionalmente independentes num aberto denso do espaço total  $\mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ .

**Observação 3.3.3.** *Seja  $\{A_1, \dots, A_n\}$  a base ortonormada da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  e representemos por  $C_{ij}^k$  as constantes de estrutura desta álgebra de Lie para esta base. Consideremos as expressões dos invariantes (3.3.4) e (3.3.5) em coordenadas, relativamente à base natural associada à base ortonormada de  $\mathfrak{g}$ :*

$$l_1 = \sum_{j=1}^n y^j \theta_j(\nu_1, \dots, \nu_{2n}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\xi_j)^2$$

$$l_{i+1} = \theta_i(\nu_1, \dots, \nu_{2n}) + \sum_{j,k=1}^n C_{ji}^k y^j \xi_k,$$

onde  $\nu_1, \dots, \nu_{2m}$  são as variáveis na órbita  $\mathcal{O}_\eta$ . Assim, os diferenciais dos invariantes podem escrever-se como

$$dl_1 = \sum_{\alpha=1}^{2m} \sum_{j=1}^n y^j \frac{\partial \theta_j}{\partial \nu_\alpha} d\nu_\alpha + \sum_{j=1}^n \theta_j dy^j + \sum_{j=1}^n \xi_j d\xi_j$$

$$dl_{i+n} = \sum_{\alpha=1}^{2m} \frac{\partial \theta_i}{\partial \nu_\alpha} d\nu_\alpha + \sum_{j,k=1}^n c_{ji}^k \xi_k dy^j + \sum_{j,k=1}^n c_{ji}^k y^j d\xi_k.$$

Deste modo, para que se verifique a independência funcional das funções (3.3.6), basta que a seguinte matriz tenha característica máxima:

$$\begin{bmatrix} \sum_j y^j \frac{\partial \theta_j}{\partial \nu_1} & \cdots & \sum_j y^j \frac{\partial \theta_j}{\partial \nu_{2m}} & \theta_1 & \cdots & \theta_n & \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial \nu_1} & \cdots & \frac{\partial \theta_1}{\partial \nu_{2m}} & 0 & \cdots & \sum_k c_{n1}^k \xi_k & \sum_j c_{j1}^1 y^j & \cdots & \sum_j c_{j1}^n y^j \\ \vdots & & & & & & & & \\ \frac{\partial \theta_n}{\partial \nu_1} & \cdots & \frac{\partial \theta_n}{\partial \nu_{2m}} & \sum_k c_{1n}^k \xi_k & \cdots & 0 & \sum_j c_{jn}^1 y^j & \cdots & \sum_j c_{jn}^n y^j \end{bmatrix},$$

para  $\theta_i = \theta_i(\nu_1, \dots, \nu_{2m})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , e onde os índices que aparecem nos somatórios variam de 1 a  $n$ .

**Proposição 3.3.4.** Considerando a estrutura de Poisson em  $\mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ , o conjunto de invariantes  $\{l_{i+1}\}_{i=1, \dots, n}$ , definidos por (3.3.5), tem uma estrutura de álgebra de Lie que o torna isomorfo à álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ .

*Demonstração.* Seja  $\{A_1, \dots, A_n\}$  a base ortonormada da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  e representemos por  $C_{ji}^k$  as constantes de estrutura desta álgebra de Lie para esta base. Se  $w = (\theta, Y, \xi) \in \mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ , sabemos que  $\{l_{i+1}, l_{j+1}\}(w) = [dl_{i+1}(w)](X_{l_{j+1}}(w))$ , onde  $X_{l_{j+1}}$  denota o campo de vectores Hamiltoniano associado a  $l_{j+1}$ .

Para prosseguirmos com a demonstração, necessitamos de determinar a expressão do campo de vectores  $X_{l_{j+1}}$ . Para tal, basta usar um processo similar ao usado na proposição 3.2.9 para determinar  $X_h$ . Deste modo, consideramos primeiro a função  $L_{j+1} : G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$  caracterizada pela identidade  $L_{j+1} \circ i_\eta = l_{j+1} \circ \varphi_\eta$ , onde  $\varphi_\eta$  é a função sobrejectiva definida por (3.2.13). Mais precisamente, verifica-se que  $L_{j+1}(z) = l_{j+1}(\theta, Y, \xi)|_{\theta=\mu-\text{ad}_Y^* \xi} = \mu(A_j)$  onde o elemento  $z$  é tal que  $w = \varphi_\eta(z)$ , ou



seja,  $z = (x, Y, \theta + ad_Y^* \xi, \xi) \in J^{-1}(\eta)$ . Então, o campo de vectores Hamiltoniano  $X_{L_{j+1}}$  associado à função  $L_{j+1}$  está relacionado com  $X_{L_{j+1}}$  do seguinte modo:

$$X_{L_{j+1}}(w) = T_z \varphi_\eta(X_{L_{j+1}}(z)) = \left( ad_{T_x L_{x^{-1}} X_{L_{j+1}}}^* \theta, X_{L_{j+1}}^2, X_{L_{j+1}}^4 \right),$$

onde usamos o lema 3.2.8 com  $(a, b, c, d) = X_{L_{j+1}}(z) = (X_{L_{j+1}}^1, X_{L_{j+1}}^2, X_{L_{j+1}}^3, X_{L_{j+1}}^4)$ . Agora, para que  $X_{L_{j+1}}(w)$  fique completamente determinado, temos de encontrar as expressões das componentes  $X_{L_{j+1}}^1$ ,  $X_{L_{j+1}}^2$  e  $X_{L_{j+1}}^4$ . Um cálculo análogo ao efectuado para determinar as componentes do campo de vectores  $X_H$  na proposição 2.5.1, dá-nos  $X_{L_{j+1}}^1 = T_e L_x A_j$ ,  $X_{L_{j+1}}^2 = ad_Y A_j$  e  $X_{L_{j+1}}^4 = ad_{A_j}^* \xi$ , e assim

$$X_{L_{j+1}}(w) = \left( ad_{A_j}^* \theta, ad_Y A_j, ad_{A_j}^* \xi \right).$$

Por fim, da expressão (3.3.5) de  $l_{i+1}$  e usando (3.3.3) e a identidade de Jacobi, obtemos

$$\begin{aligned} \{l_{i+1}, l_{j+1}\}(w) &= \theta([A_j, A_i]) + \xi([A_i, [A_j, Y]] + [A_j, [Y, A_i]]) = \\ &= \theta([A_j, A_i]) - \xi([Y, [A_i, A_j]]) = (\theta + ad_Y^* \xi)([A_j, A_i]) = \sum_{k=1}^n C_{ji}^k l_{k+1}. \end{aligned}$$

As constantes de estrutura da álgebra de Lie gerada pelas funções  $l_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n$  e as constantes de estrutura de  $\mathfrak{g}$  coincidem, logo, as álgebras são isomorfas.  $\square$

Fazemos agora o ponto da situação:

- Temos os  $n + 1$  integrais do movimento (3.3.6) do sistema Hamiltoniano, que assumimos serem funcionalmente independentes num aberto denso de  $\mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ .
- Evidentemente que  $l_1$  comuta com cada uma das funções  $l_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , uma vez que  $l_1$  coincide com a função Hamiltoniana.
- O facto referido no ponto anterior e a proposição 3.3.4 permitem-nos concluir que o conjunto linear gerado pelos  $n + 1$  integrais do movimento, que denotaremos por  $\mathfrak{L}$ , é fechado relativamente ao parêntesis de Poisson.
- Consequentemente,  $\mathfrak{L}$  tem uma estrutura de álgebra de Lie real de dimensão finita, com  $\dim \mathfrak{L} = n + 1$ . Esta álgebra é designada pela álgebra dos integrais.

Apresentamos de seguida o teorema de Lie-Cartan formulado de acordo com [12]. Refira-se que este teorema é uma generalização, para o caso das álgebras de integrais não-comutativos, do método de Poincaré relativo à redução da ordem de um sistema, método este que é uma versão Hamiltoniana do processo de redução de Routh.

**Teorema 3.3.5** (S. Lie - E. Cartan). *Seja  $(M, \omega, H)$  um sistema Hamiltoniano com  $k$  invariantes  $F_1, \dots, F_k$  tais que  $\{F_i, F_j\} = a_{ij}(F_1, \dots, F_k)$ . Seja  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  a aplicação natural gerada por este conjunto de integrais.*

*Suponhamos que temos um ponto  $c \in \mathbb{R}^k$  que não é um valor crítico da aplicação  $F$  e que nas vizinhanças deste ponto a característica da matriz  $[a_{ij}]$  é constante igual a  $2q$ . Então, numa pequena vizinhança  $U \subset \mathbb{R}^k$  de  $c$  podemos encontrar  $k$  funções independentes  $\varphi_j : U \rightarrow \mathbb{R}$  tais que as funções  $\phi_j = \varphi_j \circ F : N \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $N = F^{-1}(U)$ , satisfazem as relações*

$$\{\phi_1, \phi_2\} = \dots = \{\phi_{2q-1}, \phi_{2q}\} = 1, \quad (3.3.7)$$

*enquanto que os restantes parênteses  $\{\phi_i, \phi_j\}$  são nulos.*

Estamos interessados na seguinte consequência do teorema anterior:

**Observação 3.3.6.** *Suponhamos que temos as hipóteses do teorema de Lie-Cartan e consideremos a notação acima usada na formulação deste teorema. Então, existem  $k-q$  integrais independentes e em involução:  $\phi_2, \phi_4, \dots, \phi_{2q-2}, \phi_{2q}, \phi_{2q+1}, \dots, \phi_k$ , ou seja, metade dos integrais que estão envolvidos nas relações (3.3.7) (portanto,  $q$  integrais) e os restantes  $k-2q$  integrais não contemplados em (3.3.7). Como consequência, o sistema Hamiltoniano original pode ser reduzido, usando o método de Poincaré, a um sistema com menos  $k-q$  graus de liberdade que o original. Para mais pormenores sobre este tema, recomenda-se a consulta de [12] e as referências aí mencionadas.*

Seja  $D$  um subconjunto aberto e denso de  $\mathcal{O}_\eta \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$  onde os  $n+1$  integrais (3.3.6) são funcionalmente independentes e onde a matriz anti-simétrica dos parênteses de Poisson  $[\{l_i, l_j\}]$ ,  $1 \leq i, j \leq n+1$  tem característica máxima. Observe-se que, atendendo

à proposição 3.3.4 e ao facto de  $l_1$  estar em involução com qualquer outro dos integrais, a característica máxima desta matriz coincide com a característica máxima da matriz  $M_{\mathfrak{g}}(a) = [M_{ij}(a)]$ , com  $M_{ij}(a) = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k a_k$ , para  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  e onde  $C_{ij}^k$  são as constantes de estrutura da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Fixamos a seguinte notação (note-se que esta característica é sempre par):

$$r_{\mathfrak{g}} := \frac{1}{2} \max_{a \in \mathbb{R}^n} \text{rank } M_{\mathfrak{g}}(a).$$

Tendo em consideração a observação 3.3.6, o sistema Hamiltoniano  $(\mathcal{O}_{\eta} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*, \bar{\Omega}_{\eta}, h)$ , que assumindo (3.3.1) tem dimensão igual a  $2(m+n)$ , admite

$$n + 1 - r_{\mathfrak{g}}$$

funções definidas num subconjunto aberto de  $D$ , que formam um conjunto de integrais do movimento independentes e em involução. Neste sentido, o nosso sistema será reduzido a um sistema com menos  $n + 1 - r_{\mathfrak{g}}$  graus de liberdade do que o original, ou seja, um sistema de dimensão igual a  $2(m + r_{\mathfrak{g}} - 1)$ . É interessante observar que nas situações em que  $m + r_{\mathfrak{g}} = 1$ , o sistema é completamente integrável. Mas, esta condição é satisfeita apenas em casos triviais, quando a álgebra  $\mathfrak{g}$  é abeliana ou a órbita coadjunta  $\mathcal{O}_{\eta}$  se reduz a um ponto.

Como foi mencionado no início desta secção, estes resultados envolvendo os integrais do movimento podem ter importantes implicações do ponto de vista da integrabilidade do correspondente sistema dinâmico, e portanto, tornam-se relevantes para a determinação dos polinómios cúbicos.



## Capítulo 4

# Polinómios cúbicos em $SO(3)$

Neste capítulo estudaremos algumas propriedades dos polinómios cúbicos no grupo de Lie  $SO(3)$  das rotações do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . A importância do desenvolvimento da teoria da interpolação na computação gráfica e no planeamento de trajectórias para corpos rígidos, onde o grupo de Lie  $SO(3)$  assume um papel especial, motiva a apresentação deste capítulo.

Consideraremos a abordagem variacional dos polinómios cúbicos em  $SO(3)$  e estabeleceremos algumas propriedades interessantes deste tipo de curvas. Daremos especial relevo à análise dos quadráticos de Lie, curvas na álgebra de Lie que estão associadas aos polinómios cúbicos. Os polinómios cúbicos em  $SO(3)$  relacionam-se com o problema de controlo óptimo dinâmico do corpo rígido livre e esférico. Dedicaremos ainda uma secção deste capítulo à descrição Hamiltoniana deste problema, especificando para o grupo de Lie  $SO(3)$  o estudo do sistema Hamiltoniano apresentado no capítulo 2 e ainda a respectiva redução simpléctica do capítulo 3.

## 4.1 Grupo de Lie $SO(3)$

Consideremos o grupo de Lie  $SO(3)$  das rotações do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , constituído por todas as matrizes reais ortogonais de ordem três com determinante unitário

$$SO(3) = \{x \in GL(3, \mathbb{R}) : x^t x = I \quad \wedge \quad \det x = 1\}.$$

A correspondente álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  é dada pelas matrizes reais de ordem três anti-simétricas

$$\mathfrak{so}(3) = \{A \in gl(3, \mathbb{R}) : A = -A^t\},$$

equipada com o parêntesis de Lie  $[\cdot, \cdot]$  dado pelo comutador de matrizes. Seja  $\{A_1, A_2, A_3\}$  a base ortonormada da álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  com

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.1.1)$$

Atendendo às igualdades  $[A_1, A_2] = A_3$ ,  $[A_2, A_3] = A_1$  e  $[A_3, A_1] = A_2$ , as constantes de estrutura para  $\mathfrak{so}(3)$  em relação a esta base são tais que

$$C_{12}^3 = C_{23}^1 = C_{31}^2 = 1 = -C_{21}^3 = -C_{32}^1 = -C_{13}^2, \quad (4.1.2)$$

sendo as restantes nulas.

A álgebra de Lie  $(\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot])$  é isomorfa à álgebra de Lie  $(\mathbb{R}^3, \times)$ , onde  $\times$  denota o produto externo (ver exemplo B.1.11), através do isomorfismo

$$\begin{aligned} \hat{\cdot} : \quad (\mathbb{R}^3, \times) &\longrightarrow (\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot]) \\ y = (y^1, y^2, y^3) &\longmapsto \hat{y} = \sum_{i=1}^3 y^i A_i = \begin{bmatrix} 0 & -y^3 & y^2 \\ y^3 & 0 & -y^1 \\ -y^2 & y^1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Este isomorfismo pode ser caracterizado, de forma alternativa, pela identidade

$$\hat{y}z = y \times z, \quad (4.1.4)$$

para quaisquer  $y, z \in \mathbb{R}^3$ . Por definição de isomorfismo entre álgebras de Lie, temos a propriedade

$$\widehat{y \times z} = [\hat{y}, \hat{z}] \quad (4.1.5)$$

e portanto  $[\hat{y}, \hat{z}]w = (y \times z) \times w$ , para quaisquer  $y, z, w \in \mathbb{R}^3$ .

O isomorfismo (4.1.3) induz um isomorfismo natural entre  $\mathbb{R}^3$  e o espaço dual  $\mathfrak{so}(3)^*$  da álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$

$$\begin{aligned} \tilde{\cdot} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathfrak{so}(3)^* \\ \Pi &\longmapsto \tilde{\Pi}, \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

definido por  $\tilde{\Pi}(\hat{y}) = \Pi \cdot y$ , para cada  $y \in \mathbb{R}^3$  e onde  $\cdot$  denota o produto interno em  $\mathbb{R}^3$ .

Com as identificações (4.1.3) e (4.1.6), temos os seguintes resultados:

- A acção adjunta de  $SO(3)$  em  $\mathfrak{so}(3)$  é definida, para cada  $x \in SO(3)$  e  $y \in \mathbb{R}^3$ , por

$$Ad_x \hat{y} = \widehat{x y}.$$

De facto, sabemos que  $Ad_x \hat{y} := x \hat{y} x^{-1} = \widehat{x y x^t}$ . Contudo, usando (4.1.4), temos

$$(Ad_x \hat{y})(z) = x(y \times x^t z) = xy \times z = (\widehat{x y})(z), \quad \text{para qualquer } z \in \mathbb{R}^3.$$

- A acção coadjunta de  $SO(3)$  em  $\mathfrak{so}(3)^*$  é dada, para cada  $x \in SO(3)$  e  $\Pi \in \mathbb{R}^3$ , por

$$Ad_{x^{-1}}^* \tilde{\Pi} = \widetilde{x \Pi}.$$

Com efeito, se  $y \in \mathbb{R}^3$ , vem  $(Ad_{x^{-1}}^* \tilde{\Pi})(\hat{y}) := \tilde{\Pi}(Ad_{x^{-1}} \hat{y}) = \tilde{\Pi}(\widehat{x^t y})$ . Usando agora o isomorfismo (4.1.6), temos  $(Ad_{x^{-1}}^* \tilde{\Pi})(\hat{y}) = \Pi \cdot x^t y = x \Pi \cdot y = (\widetilde{x \Pi})(\hat{y})$ .

- As acções adjunta e coadjunta da álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  são dadas, respectivamente, por

$$ad_{\hat{y}} \hat{z} = \widehat{y \times z} \quad \text{e} \quad ad_{\tilde{y}}^* \tilde{\Pi} = \widetilde{\Pi \times y},$$

onde  $y, z, \Pi \in \mathbb{R}^3$ . A primeira fórmula é uma consequência imediata da propriedade (4.1.5), uma vez que  $ad_{\hat{y}} \hat{z} = [\hat{y}, \hat{z}]$ . Assim,  $(ad_{\tilde{y}}^* \tilde{\Pi})(\hat{z}) = \tilde{\Pi}(\widehat{y \times z})$ .

Usando (4.1.6) resulta que  $(ad_y^* \tilde{\Pi})(\hat{z}) = \Pi \cdot (y \times z) = (\Pi \times y) \cdot z = (\widetilde{\Pi \times y})(\hat{z})$ , para qualquer  $z \in \mathbb{R}^3$ .

Seja  $x \in SO(3)$ . O isomorfismo (4.1.3) permite-nos ainda representar os elementos de  $T_x SO(3)$  por  $x\hat{y}$ , para um determinado  $y \in \mathbb{R}^3$ . Efectivamente, se  $v_x \in T_x SO(3)$ , então  $T_x L_{x^{-1}} v_x = x^{-1} v_x \in \mathfrak{so}(3)$  e portanto, existe um  $y \in \mathbb{R}^3$  tal que  $x^{-1} v_x = \hat{y}$ . Logo,

$$v_x \equiv x\hat{y} \in T_x SO(3).$$

De forma análoga, usando agora o isomorfismo (4.1.6), cada elemento  $\alpha_x \in T_x^* SO(3)$  é representado por

$$\alpha_x \equiv T_x^* L_{x^{-1}} \tilde{\Pi} \in T_x^* SO(3),$$

para um determinado  $\Pi \in \mathbb{R}^3$ .

De acordo com o acima exposto, o subgrupo de isotropia coadjunto  $(SO(3))_{\tilde{\eta}}$  de  $SO(3)$ , ou seja, o subgrupo de isotropia de  $\tilde{\eta} \in \mathfrak{so}(3)^*$  sob a acção coadjunta, escreve-se como

$$SO(3)_{\tilde{\eta}} = \{x \in SO(3) : Ad_x^* \tilde{\eta} = \tilde{\eta}\} = \{x \in SO(3) : x\eta = \eta\}. \quad (4.1.7)$$

Observe-se que, no caso em que  $\eta \neq 0$ ,  $SO(3)_{\tilde{\eta}}$  é isomorfo ao grupo de Lie  $SO(2)$  (grupo das rotações no plano, que é identificado com o círculo unitário  $S^1$  em  $\mathbb{R}^2$ ); se  $\eta = 0$ ,  $SO(3)_{\tilde{\eta}} = SO(3)$ . Por sua vez, a órbita coadjunta por  $\tilde{\eta} \in \mathfrak{so}(3)^*$

$$\mathcal{O}_{\tilde{\eta}} = \{Ad_{x^{-1}}^* \tilde{\eta} \in \mathfrak{so}(3)^* : x \in SO(3)\} = \{\widetilde{x\eta} \in \mathfrak{so}(3)^* : x \in SO(3)\} \quad (4.1.8)$$

é isomorfa à 2-esfera de raio  $\|\eta\|$ , se  $\eta \neq 0$ , e reduz-se a um ponto quando  $\eta = 0$ .

## 4.2 Polinómios cúbicos em $SO(3)$

A caracterização dos polinómios cúbicos em  $SO(3)$  é um elemento crucial no estudo de importantes aplicações da teoria da interpolação, tais como os problemas de planeamento de trajectórias para corpos rígidos. Nesta secção apresentamos os polinómios cúbicos em  $SO(3)$  e algumas das suas interessantes propriedades matemáticas.



**Teorema 4.2.1.** [69] *Uma curva  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow SO(3)$  é um polinómio cúbico se e só se satisfaz as equações de Euler-Lagrange*

$$\begin{cases} \dot{x} = x\hat{y} \\ \ddot{y} + y \times \dot{y} = 0, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

onde  $y \in \mathbb{R}^3$  e  $\hat{y} \in \mathfrak{so}(3)$  é o seu correspondente através do isomorfismo (4.1.3).

*Demonstração.* As equações (4.2.1) resultam das equações (2.2.8), quando aplicadas ao caso do grupo de Lie  $G = SO(3)$  e tendo em consideração a propriedade (4.1.5).  $\square$

A segunda equação de (4.2.1), isto é,

$$\ddot{y} + y \times \dot{y} = 0, \quad (4.2.2)$$

é equivalente à equação de segunda ordem

$$\dot{y} + y \times \dot{y} = C, \quad C \in \mathbb{R}^3. \quad (4.2.3)$$

Uma curva  $y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  solução desta equação designa-se por *quadrático de Lie*. Na situação em que  $C = 0$ ,  $y$  diz-se um *quadrático de Lie nulo* e o respectivo polinómio cúbico  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow SO(3)$  designa-se por *polinómio cúbico nulo* (estas noções podem ser generalizadas para um grupo de Lie qualquer, como foi referido no último parágrafo da observação 2.7.4). Num certo sentido, o estudo dos polinómios cúbicos em  $SO(3)$  reduz-se ao estudo dos quadráticos de Lie, uma vez que a primeira equação de (4.2.1) pode ser resolvida por uma quadratura para  $x$  em termos de  $y$  (ver detalhes em [68, 70]). As estruturas analítica, geométrica e assintótica dos quadráticos de Lie são bastante ricas, sendo a análise dos quadráticos não nulos ( $C \neq 0$ ) muito mais complexa do que a dos nulos ( $C = 0$ ). Destacamos os dois trabalhos [66, 67] de Noakes, onde o autor apresenta um estudo exaustivo destas curvas em  $\mathbb{R}^3$  (os quadrático de Lie nulos e os não nulos) e das propriedades dos correspondentes polinómios cúbicos em  $SO(3)$ . Importa referir que a função dada pelo quadrado da norma do quadrático de Lie, que denotaremos por  $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$

$$F(t) := \|y(t)\|^2 = y(t) \cdot y(t), \quad (4.2.4)$$

desempenha um papel fundamental neste estudo. Alguns resultados similares aos encontrados por Noakes, foram paralelamente obtidos por Abrunheiro e Camarinha em [2, 3], os quais resumimos de seguida.

No caso do grupo de Lie  $SO(3)$  e sob o ponto de vista variacional, são conhecidos três invariantes ao longo do polinómio cúbico ([3, 66]):

**Lema 4.2.2.** *Se  $y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um quadrático de Lie, então existem constantes reais  $I_1, I_2$  e  $I_3$  tais que*

$$I_1 = \frac{1}{2} \dot{y} \cdot \dot{y} - \ddot{y} \cdot y \quad (4.2.5)$$

$$I_2 = \dot{y} \cdot \ddot{y} \quad (4.2.6)$$

$$I_3 = \ddot{y} \cdot (y \times \dot{y}) + \frac{1}{2} (y \times \dot{y}) \cdot (y \times \dot{y}). \quad (4.2.7)$$

*Demonstração.* Para obter o resultado basta efectuar a integração do produto interno de (4.2.2) com  $y$ ,  $\dot{y}$  e  $y \times \dot{y}$ , respectivamente.  $\square$

Torna-se óbvio que (4.2.5), (4.2.6) e (4.2.7) correspondem aos invariantes (2.2.9), (2.2.10) e (2.2.11), respectivamente. Estes invariantes permitem-nos caracterizar os quadráticos de Lie no sentido descrito nos resultados a seguir apresentados ([3, 66]).

**Proposição 4.2.3.** *Se  $y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um quadrático de Lie, então as seguintes igualdades são satisfeitas*

$$\dot{y} \cdot \dot{y} = 2C \cdot y + 2I_1 \quad (4.2.8)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(y \cdot y) = 6C \cdot y + 4I_1 \quad (4.2.9)$$

$$I_2 + 2I_3 = C \cdot C. \quad (4.2.10)$$

onde  $C \in \mathbb{R}^3$  é a constante do quadrático de Lie  $y$  (ou seja, da equação (4.2.3)) e  $I_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  são os invariantes do lema 4.2.2.

*Demonstração.* A equação (4.2.3) que define o quadrático de Lie permite-nos substituir  $\ddot{y}$  por  $C - y \times \dot{y}$  no invariante  $I_1$  definido por (4.2.5). Daqui resulta de imediato (4.2.8).

Integrando agora duas vezes esta igualdade (4.2.8) e utilizando novamente a equação (4.2.3), obtemos (4.2.9). A equação (4.2.10) resulta do uso de (4.2.3) num dos dois invariantes (4.2.6) ou (4.2.7).  $\square$

**Corolário 4.2.4.** *Se  $y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um quadrático de Lie nulo ( $C=0$ ), então as seguintes igualdades são satisfeitas*

$$\begin{aligned}\dot{y} \cdot \dot{y} &= 2I_1 \\ y \cdot y &= 2I_1 t^2 + a_1 t + a_0 \\ I_2 &= -2I_3,\end{aligned}$$

onde  $C \in \mathbb{R}^3$  é a constante do quadrático de Lie  $y$  (ou seja, da equação (4.2.3)),  $I_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  são os invariantes do lema 4.2.2 e  $a_1, a_0$  são constantes reais.

Observe-se que o corolário anterior estabelece um resultado interessante no que diz respeito à função  $F$  definida por (4.2.4) (ou seja, a função dada pelo quadrado da norma do quadrático de Lie). Referimo-nos ao facto de, neste caso particular dos quadráticos de Lie nulos, a função (4.2.4) se reduzir a um polinómio do segundo grau. Neste contexto, esta propriedade permite-nos escrever a equação dos quadráticos de Lie (4.2.2) como uma equação linear do terceiro grau em  $y$ , da seguinte forma:

**Teorema 4.2.5.** *Se  $y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um quadrático de Lie nulo ( $C = 0$ ), então a equação (4.2.2) pode escrever-se como*

$$\ddot{y} + F\dot{y} - \frac{1}{2}\dot{F}y = 0, \quad (4.2.11)$$

onde  $F(t) = 2I_1 t^2 + a_1 t + a_0$ , com  $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$  e  $I_1$  é dado por (4.2.5).

*Demonstração.* Se  $y$  é um quadrático de Lie nulo, então de (4.2.3) vem  $\ddot{y} = \dot{y} \times y$ . Logo, a equação (4.2.2) é equivalente a  $\ddot{y} + y \times (\dot{y} \times y) = 0$ . Usando agora a propriedade (B.1.1) obtemos  $\ddot{y} + (y \cdot y)\dot{y} - (y \cdot \dot{y})y = 0$ , ou seja,  $\ddot{y} + (y \cdot y)\dot{y} - (1/2)[d(y \cdot y)/dt]y = 0$ . Para terminar a demonstração basta utilizar a segunda igualdade do corolário anterior.  $\square$

Note-se que, nas condições do teorema anterior, a equação (4.2.11) é satisfeita para cada componente  $y^i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , de  $y \in \mathbb{R}^3$ . Este tipo de equação em  $\mathbb{R}$ , ou seja,  $\ddot{u} = (1/2)\dot{F}u - F\dot{u}$  com  $u \in \mathbb{R}$ , reduz-se a um sistema linear da forma

$$\dot{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2}\dot{F} & -F & 0 \end{bmatrix} U,$$

onde  $U = (u, \dot{u}, \ddot{u})^t$ .

**Observação 4.2.6.** *O teorema 4.2.5 foi obtido em [66] para o caso particular dos quadráticos de Lie nulos  $y$  que satisfazem as condições particulares  $\dot{y}(0) \cdot \dot{y}(0) = 1$  e  $\dot{y}(0) \cdot y(0) = 0$ , designados por quadráticos de Lie nulos canônicos (que se prova serem parametrizados por comprimento de arco). Na realidade, o autor reduz o estudo dos quadráticos de Lie nulos não constantes ao estudo dos quadráticos de Lie nulos canônicos e a propriedade correspondente ao resultado do teorema 4.2.5 é usada para analisar simetrias internas dos quadráticos nulos.*

Como mencionámos anteriormente, o estudo dos quadráticos de Lie não nulos é naturalmente mais complicado e os resultados globais existentes não são tão satisfatórios como desejaríamos. O seguinte resultado foi obtido e demonstrado de forma independente em [3, 67], sendo que na segunda referência este resultado foi utilizado para aprofundar a análise dos quadráticos de Lie não nulos, nomeadamente as suas propriedades assintóticas.

**Proposição 4.2.7.** *Seja  $y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  um quadrático de Lie. A função  $F$  dada por (4.2.4) satisfaz a seguinte equação diferencial*

$$\frac{d^4 F}{dt^4} + F\ddot{F} - \frac{3}{4}(\dot{F})^2 - 2I_1 F - 6(I_2 + I_3) = 0, \quad (4.2.12)$$

onde  $I_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  são os invariantes do lema 4.2.2.

*Demonstração.* De (4.2.8) e (4.2.9) vem  $(d^2/dt^2)(y \cdot y) = 3\dot{y} \cdot \dot{y} - 2I_1$ , ou seja,

$$\ddot{F} = 3\dot{y} \cdot \dot{y} - 2I_1. \quad (4.2.13)$$

Além disso, de (4.2.9) deduzimos ainda a igualdade  $d^4F/dt^4 = 6C \cdot \ddot{y}$  e, consequentemente (4.2.10) é equivalente a  $I_2 + 2I_3 = (1/6)(d^4F/dt^4) + (\ddot{y} + y \times \dot{y}) \cdot (y \times \dot{y})$ , onde estamos a usar a equação (4.2.3). Atendendo agora a (4.2.7), a igualdade anterior toma a forma

$$\frac{d^4F}{dt^4} + 3(y \times \dot{y}) \cdot (y \times \dot{y}) - 6(I_2 + I_3) = 0. \quad (4.2.14)$$

Mas,  $(y \times \dot{y}) \cdot (y \times \dot{y}) = -[y \times (y \times \dot{y})] \cdot \dot{y}$  que, fazendo uso da propriedade (B.1.1), se escreve como  $(y \times \dot{y}) \cdot (y \times \dot{y}) = -(y \cdot \dot{y})^2 + (y \cdot y)(\dot{y} \cdot \dot{y})$ . Por fim, a equação diferencial (4.2.12) obtém-se quando se substituiu esta última igualdade em (4.2.14), considerando  $(y \cdot \dot{y})^2 = (1/4)(\dot{F})^2$  e ainda ao facto de, por (4.2.13), termos  $\dot{y} \cdot \dot{y} = (1/3)\ddot{F} - (2/3)I_1$ .  $\square$

**Teorema 4.2.8.** [3] *Se  $y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um quadrático de Lie, então a equação (4.2.2) pode escrever-se como*

$$\frac{d^5y}{dt^5} + F\ddot{y} + \frac{3}{2}\dot{F}\dot{y} - \left(\frac{1}{6}\ddot{F} + \frac{2}{3}I_1\right)\dot{y} - \frac{1}{3}\ddot{F}y = 0.$$

onde  $F$  é a função (4.2.4) e  $I_1$  é dado por (4.2.5).

*Demonstração.* Para demonstrar o pretendido é suficiente derivar duas vezes a equação (4.2.2) e usar a propriedade (B.1.1).  $\square$

Um resultado bem conhecido da teoria das geodésicas garante que apenas as reparametrizações lineares preservam a curva como uma geodésica ([26]). Esse resultado é consequência do facto do comprimento do campo de vectores velocidade ser invariante ao longo da geodésica. O invariante (4.2.6) desempenha um papel similar na análise das parametrizações que preservam a noção de um polinómio cúbico. Contudo, para o polinómio cúbico, o estudo do caso degenerado parece ser bastante pertinente, apesar de não o analisarmos nesta dissertação. No contexto geral dos polinómios cúbicos Riemannianos, foi demonstrado em [26] por Camarinha, e usando propriedades da geometria Riemanniana, que se a transformação de parâmetro é linear, a curva é preservada como polinómio cúbico. Para a situação dos polinómios cúbicos em  $SO(3)$  é possível estabelecer um resultado mais completo que apresentamos de seguida e que foi demonstrado por Abrunheiro e Camarinha em [3].

**Proposição 4.2.9.** [3] *Seja  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow SO(3)$  um polinómio cúbico e  $y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  o correspondente quadrático de Lie. Se o invariante (4.2.7) ao longo de  $y$  é diferente de zero, uma reparametrização de  $x$  é um polinómio cúbico se e só se a transformação de parâmetro é linear.*

*Demonstração.* Se  $\bar{x} : \bar{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow SO(3)$  é uma curva suave obtida por uma reparametrização de  $x$ , ou seja,  $\bar{x} = x \circ s$  com  $s : \bar{I} \rightarrow I$ , então  $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{x}(t)\dot{s}(t)\hat{y}(s(t))$ , dado que  $\dot{x}(s(t)) = x(s(t))\hat{y}(s(t))$ . Seja  $v : \bar{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  a curva definida por  $v(t) = \dot{s}(t)y(s(t))$ . Note-se que as primeiras derivadas de  $v$  são dadas por  $\dot{v}(t) = \ddot{s}(t)y(s(t)) + [\dot{s}(t)]^2 \dot{y}(s(t))$  e  $\ddot{v}(t) = \ddot{\ddot{s}}(t)y(s(t)) + 3\dot{s}(t)\ddot{s}(t)\dot{y}(s(t)) + [\dot{s}(t)]^3 \ddot{y}(s(t))$ . Então, se  $s(t) = at + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , provamos sem dificuldade que  $\bar{x}$  é o polinómio cúbico cujo correspondente quadrático de Lie é dado pela curva  $v$ . Prova-se ainda que se  $C$  é a constante associada ao quadrático de Lie  $y$ , então  $a^3 C$  é a constante associada a  $v$ . Para demonstrar a implicação contrária, é suficiente observar que

$$\ddot{v} \cdot (v \times \dot{v}) + \frac{1}{2}(v \times \dot{v}) \cdot (v \times \dot{v}) = (\dot{s})^6 \left[ \ddot{y} \cdot (y \times \dot{y}) + \frac{1}{2}(y \times \dot{y}) \cdot (y \times \dot{y}) \right],$$

onde estamos a considerar  $s$ ,  $v$  e as suas derivadas como funções de  $t$  e  $y$  como função de  $s(t)$ . □

Existe uma estreita relação entre a teoria dos quadráticos de Lie e a mecânica clássica. Exemplo disso é o caso da dinâmica do corpo rígido livre com simetria esférica. De facto, a velocidade angular do corpo é um quadrático de Lie em  $\mathbb{R}^3$  e a trajectória do corpo pode ser descrita em termos do correspondente polinómio cúbico em  $SO(3)$ . Dedicaremos a próxima secção a este problema, sob o ponto de vista Hamiltoniano.

### 4.3 Problema de controlo óptimo dinâmico do corpo rígido

O problema de controlo óptimo dinâmico para sistemas mecânicos gerais com restrições integráveis nas velocidades foi estudado em [20], onde é denominado por problema de controlo óptimo da força mínima. Este tipo de sistema mecânico é definido numa

variedade Riemanniana geral e envolve a derivada covariante de segunda ordem da variável de configuração. Quando assumidas certas condições particulares, este problema corresponde a um problema variacional com Lagrangiano a depender da aceleração e com condições de fronteira nas posições e nas velocidades. No caso em que o tensor de inércia generalizado é um múltiplo da identidade, o problema variacional de segunda ordem obtido corresponde exactamente ao problema variacional dos polinómios cúbicos Riemannianos. Refira-se que, nesta situação particular, o problema de controlo da força mínima é uma versão natural para ordem superior do problema de controlo da energia mínima, ou seja, do problema variacional de primeira ordem das geodésicas Riemannianas. Adoptamos a designação problema de controlo dinâmico, em vez de problema de controlo da força mínima.

Estamos interessados na descrição Hamiltoniana do problema de controlo dinâmico do corpo rígido livre (relativamente ao movimento de rotação à volta do seu centro de massa) e com os três principais momentos de inércia iguais (simetria esférica). Sem perda de generalidade, podemos considerar o tensor de inércia do corpo rígido como sendo a identidade. Refira-se que teremos em consideração os resultados apresentados e desenvolvidos nos capítulos 2 e 3, uma vez que o caso em estudo é o exemplo do problema dos polinómios cúbicos para o grupo de Lie  $SO(3)$ . Os principais resultados desta secção foram publicados por Abrunheiro, Camarinha e Clemente-Gallardo em [6, 8].

#### 4.3.1 Movimento rotacional do corpo rígido livre e esférico

O espaço de configuração do nosso sistema dinâmico é o grupo de Lie  $SO(3)$ . Portanto, o espaço de estados para o problema de controlo óptimo é o fibrado tangente  $TSO(3)$  e o fibrado de controlos é o fibrado tangente de segunda ordem  $T^2SO(3)$ . A trivialização à esquerda de  $TSO(3)$  determinada pela aplicação (2.1.15), ou seja,

$$\begin{aligned} \lambda : \quad TSO(3) &\longrightarrow SO(3) \times \mathfrak{so}(3) \\ x\hat{y} \in T_xSO(3) &\longmapsto (x, \hat{y}), \end{aligned}$$

permite-nos considerar como espaço de estados o produto semidirecto  $SO(3) \times \mathfrak{so}(3)$ , onde os pontos deste espaço representam a posição e a velocidade angular do corpo. O fibrado de controlos pode também ser trivializado à esquerda e desse modo ser visto como um fibrado sobre  $SO(3) \times \mathfrak{so}(3)$ , que continuaremos a representar por  $T^2SO(3)$ . Consideramos a notação introduzida na subsecção 2.1.3 para os fibrados do produto semidirecto  $SO(3) \times \mathfrak{so}(3)$ , agora adaptada às notações referidas na secção 4.1. Em particular, cada elemento de  $T^2G$  é representado por um par  $(x\hat{y}, \hat{u}) \in T_xSO(3) \times \mathfrak{so}(3)$ , com  $x \in SO(3)$  e  $y, u \in \mathbb{R}^3$ .

Adaptando à situação presente as expressões (2.3.1) e (2.3.2), consideramos a função custo  $L : T^2SO(3) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$L(x\hat{y}, \hat{u}) = \frac{1}{2}u \cdot u \quad (4.3.1)$$

e o campo de vectores  $\Pi : T^2SO(3) \rightarrow T(SO(3) \times \mathfrak{so}(3))$  ao longo da projecção natural  $\tau_2^1 : T^2SO(3) \rightarrow SO(3) \times \mathfrak{so}(3)$ , dado por

$$\Pi(x\hat{y}, \hat{u}) = (x\hat{y}, \hat{y}, \hat{u}) \sim (x\hat{y}, \hat{u}), \quad (4.3.2)$$

para  $(x\hat{y}, \hat{u}) \in T_xSO(3) \times \mathfrak{so}(3)$ , com  $x \in SO(3)$  e  $y, u \in \mathbb{R}^3$ . Seguindo o exposto na secção 2.3, o problema de controlo óptimo dinâmico do corpo rígido livre e esférico, consiste em determinar as curvas  $\gamma : [0, T] \rightarrow T^2SO(3)$  de classe  $C^2$  e seccionalmente suaves, com condições de fronteira no espaço de estados, que minimizam a funcional  $\int_0^T L(\gamma(t))dt$ , com  $T \in \mathbb{R}^+$  fixo, e que satisfazem o sistema de controlo  $(d/dt)(\tau_2^1(\gamma(t))) = \Pi(\gamma(t))$ . Note-se que, de acordo com (2.1.12),  $\tau_2^1(x\hat{y}, \hat{u}) = (x, \hat{y})$ . Assim, o sistema de controlo pode ser escrito como

$$\begin{cases} \dot{x} = x\hat{y} \\ \dot{y} = u, \end{cases}$$

que é a versão à esquerda do sistema de controlo correspondente ao exemplo dado em [21, 28].



### 4.3.2 Dinâmica do problema de controlo óptimo

Pretendemos agora adequar a abordagem Hamiltoniana das secções 2.4 e 2.5 ao caso do grupo de Lie  $SO(3)$ , de forma a descrevermos a dinâmica do problema de controlo apresentado na secção anterior.

- Numa primeira fase, descrevemos a dinâmica do problema através de um sistema presimpléctico definido no fibrado sobre  $SO(3) \times \mathfrak{so}(3)$  dado por

$$\mathcal{T} = T^*(SO(3) \times \mathfrak{so}(3)) \times_{SO(3) \times \mathfrak{so}(3)} T^2SO(3);$$

com forma presimpléctica definida pela imagem recíproca da forma simpléctica canónica  $\omega_0$  em  $T^*(SO(3) \times \mathfrak{so}(3))$  pela projecção canónica  $pr_1$  do espaço total  $\mathcal{T}$  em  $T^*(SO(3) \times \mathfrak{so}(3))$ :

$$\tilde{\Omega} = (pr_1)^*\omega_0;$$

e função Hamiltoniana  $\tilde{H} = \ll pr_1, \Pi \circ pr_2 \gg -L \circ pr_2$ , com  $\Pi$  e  $L$  dados, respectivamente, por (4.3.2) e (4.3.1), onde  $pr_2 : \mathcal{T} \rightarrow T^2SO(3)$  é a projecção canónica e  $\ll \cdot, \cdot \gg$  denota o produto dualidade canónica de vectores e covectores em  $SO(3) \times \mathfrak{so}(3)$ . O campo de vectores dinâmico  $X_{\tilde{H}}$  do sistema presimpléctico  $(\mathcal{T}, \tilde{\Omega}, \tilde{H})$  é o campo de vectores solução do sistema  $i_{X_{\tilde{H}}}\tilde{\Omega} = d\tilde{H}$ .

Representamos por  $(T_x^*L_{x^{-1}}\tilde{\Pi}, \hat{y}, \tilde{\Gamma}, \hat{u}) \in T_x^*SO(3) \times \{\hat{y}\} \times \mathfrak{so}(3)^* \times \mathfrak{so}(3)$  os pontos de  $\mathcal{T}$ , com  $x \in SO(3)$  e  $y, u, \Pi, \Gamma \in \mathbb{R}^3$ . Assim,

$$\tilde{H}(T_x^*L_{x^{-1}}\tilde{\Pi}, \hat{y}, \tilde{\Gamma}, \hat{u}) = \Pi \cdot y + \Gamma \cdot u - \frac{1}{2}u \cdot u.$$

- Aplicamos depois, o algoritmo geométrico de sistemas presimplécticos. Uma vez que o sistema é regular, ficamos com um sistema simpléctico  $(W_1, \tilde{\Omega}_{W_1}, \tilde{H}_{W_1})$  obtido por restrição a  $W_1$  do sistema presimpléctico  $(\mathcal{T}, \tilde{\Omega}, \tilde{H})$ , para

$$W_1 = \{(T_x^*L_{x^{-1}}\tilde{\Pi}, \hat{y}, \tilde{\Gamma}, \hat{u}) \in \mathcal{T} : u = \Gamma\}.$$

- Fazemos uso do simplectomorfismo  $\varphi$  entre as variedades  $(T^*(SO(3) \times \mathfrak{so}(3)), \omega_0)$  e  $(W_1, \tilde{\Omega}_{W_1})$ , definido por  $\varphi(T_x^*L_{x^{-1}}\tilde{\Pi}, \hat{y}, \tilde{\Gamma}) = (T_x^*L_{x^{-1}}\tilde{\Pi}, \hat{y}, \tilde{\Gamma}, \hat{\Gamma})$ , e assim, passamos para o sistema simpléctico  $(T^*(SO(3) \times \mathfrak{so}(3)), \omega_0, \bar{H})$ , onde o Hamiltoniano

é agora dado por  $\bar{H} := \tilde{H}_{W_1} \circ \varphi : T^*(SO(3) \times \mathfrak{so}(3)) \rightarrow \mathbb{R}$ , ou seja,

$$\bar{H}(T_x^* L_{x^{-1}} \tilde{\Pi}, \hat{y}, \tilde{\Gamma}) = \Pi \cdot y + \frac{1}{2} \Gamma \cdot \Gamma, \quad (4.3.3)$$

para  $(T_x^* L_{x^{-1}} \tilde{\Pi}, \hat{y}, \tilde{\Gamma}) \in T_{(x, \hat{y})}^*(SO(3) \times \mathfrak{so}(3))$ , com  $x \in SO(3)$  e  $y, u, \Pi, \Gamma \in \mathbb{R}^3$ . Portanto, o estudo do nosso sistema dinâmico é reduzido ao estudo do sistema  $i_{X_{\bar{H}}} \omega_0 = d\bar{H}$ , onde o campo de vectores Hamiltoniano  $X_{\bar{H}}$  é o prolongamento do campo de vectores Hamiltoniano associado a  $\tilde{H}_{W_1}$  por  $\varphi^{-1}$ .

- Prosseguimos com a trivialização à esquerda do sistema  $(T^*(SO(3) \times \mathfrak{so}(3)), \omega_0, \bar{H})$ , determinada pelo isomorfismo (2.1.17), adaptado à situação do grupo de Lie  $G = SO(3)$ . Assim, tendo em conta as notações e identificações da secção 4.1, consideramos  $\rho : T^*(SO(3) \times \mathfrak{so}(3)) \rightarrow SO(3) \times \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)^* \times \mathfrak{so}(3)^*$ , definido, para cada  $(T_x^* L_{x^{-1}} \tilde{\Pi}, \hat{y}, \tilde{\Gamma}) \in T_{(x, \hat{y})}^*(SO(3) \times \mathfrak{so}(3))$ , por

$$\rho(T_x^* L_{x^{-1}} \tilde{\Pi}, \hat{y}, \tilde{\Gamma}) = \left( x, \hat{y}, \tilde{\Pi} + \widetilde{\Gamma \times y}, \tilde{\Gamma} \right),$$

cuja inversa é definida para cada  $(x, \hat{y}, \tilde{\Pi}, \tilde{\Gamma}) \in SO(3) \times \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)^* \times \mathfrak{so}(3)^*$ , por  $\rho^{-1}(x, \hat{y}, \tilde{\Pi}, \tilde{\Gamma}) = (T_x^* L_{x^{-1}}(\tilde{\Pi} - \widetilde{\Gamma \times y}), \hat{y}, \tilde{\Gamma}) \in T_{(x, \hat{y})}^*(SO(3) \times \mathfrak{so}(3))$ . Por conseguinte,  $(SO(3) \times \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)^* \times \mathfrak{so}(3)^*, \Omega, H)$  é o sistema Hamiltoniano trivializado, onde a forma simpléctica  $\Omega$  é a imagem recíproca por  $\rho^{-1}$  da forma simpléctica canónica  $\omega_0$  em  $T^*(SO(3) \times \mathfrak{so}(3))$

$$\Omega = (\rho^{-1})^* \omega_0 \quad (4.3.4)$$

e o Hamiltoniano  $H$  é a trivialização à esquerda do Hamiltoniano  $\bar{H}$  dado por (4.3.3), ou seja,  $H = \bar{H} \circ \rho^{-1}$ . Temos

$$H(x, \hat{y}, \tilde{\Pi}, \tilde{\Gamma}) = \Pi \cdot y + \frac{1}{2} \Gamma \cdot \Gamma, \quad (4.3.5)$$

para cada  $(x, \hat{y}, \tilde{\Pi}, \tilde{\Gamma}) \in SO(3) \times \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)^* \times \mathfrak{so}(3)^*$ , com  $y, u, \Pi, \Gamma \in \mathbb{R}^3$ . O campo de vectores Hamiltoniano  $X_H$  associado a  $H$  é dado pelo prolongamento por  $\rho$  do campo de vectores Hamiltoniano associado a  $\bar{H}$ .

**Proposição 4.3.1.** *Uma curva  $(x, \hat{y}, \tilde{\Pi}, \tilde{\Gamma})$  em  $SO(3) \times \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)^* \times \mathfrak{so}(3)^*$  é uma curva integral do campo de vectores Hamiltoniano  $X_H$  se satisfaz as equações Hamiltonianas*

$$\begin{cases} \dot{x} = x\hat{y} \\ \dot{y} = \Gamma \\ \dot{\Pi} = 0 \\ \dot{\Gamma} = -\Pi + \Gamma \times y. \end{cases}$$

*Demonstração.* O resultado vem directamente da proposição 2.5.1, quando adaptada para o caso do grupo de Lie  $G = SO(3)$  e tendo em consideração as notações e identificações da secção 4.1.  $\square$

Como consequência, para cada  $(x, \hat{y}, \tilde{\Pi}, \tilde{\Gamma}) \in SO(3) \times \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)^* \times \mathfrak{so}(3)^*$ , obtemos

$$X_H(x, \hat{y}, \tilde{\Pi}, \tilde{\Gamma}) = (x\hat{y}, \hat{\Gamma}, 0, -\tilde{\Pi} + \widetilde{\Gamma \times y}).$$

### 4.3.3 Redução da dinâmica

Aplicamos agora a redução simpléctica do capítulo 3 ao sistema Hamiltoniano trivializado  $(SO(3) \times \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)^* \times \mathfrak{so}(3)^*, \Omega, H)$  descrito na subsecção anterior. Uma vez que o raciocínio é de todo similar ao do referido capítulo, resumimos de seguida os principais pontos de concretização da redução.

- A simetria do sistema Hamiltoniano trivializado é definida pela acção à esquerda  $\phi$  de  $SO(3)$  em  $SO(3) \times \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)^* \times \mathfrak{so}(3)^*$  dada, para cada  $g \in SO(3)$  e  $(x, \hat{y}, \tilde{\Pi}, \tilde{\Gamma}) \in SO(3) \times \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)^* \times \mathfrak{so}(3)^*$  por

$$\phi(g, (x, \hat{y}, \tilde{\Pi}, \tilde{\Gamma})) = (gx, \hat{y}, \tilde{\Pi}, \tilde{\Gamma}).$$

- A aplicação momento  $J : SO(3) \times \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)^* \times \mathfrak{so}(3)^* \rightarrow \mathfrak{so}(3)$  da acção  $\phi$ , que sabemos ser  $Ad^*$ -equivariante, é definida por

$$J(x, \hat{y}, \tilde{\Pi}, \tilde{\Gamma}) = Ad_{x^{-1}}^*(\tilde{\Pi} - ad_{\hat{y}}^* \tilde{\Gamma}) = \widetilde{x\Pi} - x\widetilde{(\Gamma \times y)},$$

para cada  $(x, \hat{y}, \tilde{\Pi}, \tilde{\Gamma}) \in SO(3) \times \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)^* \times \mathfrak{so}(3)^*$ . Sabemos ainda que qualquer  $\tilde{\eta} \in \mathfrak{so}(3)^*$  é um valor regular de  $J$ .

- Seja  $\tilde{\eta} \in \mathfrak{so}(3)^*$ . A acção  $\phi$  (que é própria e livre) induz por restrição (das correspondentes subvariedades) uma acção própria e livre do subgrupo de isotropia coadjunto  $SO(3)_{\tilde{\eta}}$  definido por (4.1.7) na subvariedade  $SO(3)_{\tilde{\eta}}$ -invariante dada por

$$J^{-1}(\tilde{\eta}) = \{(x, \hat{y}, \tilde{\Pi}, \tilde{\Gamma}) \in SO(3) \times \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)^* \times \mathfrak{so}(3)^* : \Pi = x^{-1}\eta + \Gamma \times y\}.$$

Esta variedade é difeomorfa ao produto semidirecto do grupo  $SO(3) \times \mathfrak{so}(3)$  e do espaço vectorial  $\mathfrak{so}(3)^*$ , através de

$$\begin{aligned} SO(3) \times \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)^* &\longrightarrow J^{-1}(\tilde{\eta}) \\ (x, \hat{y}, \tilde{\Gamma}) &\longmapsto (x, \hat{y}, \widetilde{x^{-1}\eta + \Gamma \times y}, \tilde{\Gamma}). \end{aligned}$$

- Da aplicação dos teoremas 3.1.1 e 3.1.2 resulta o sistema Hamiltoniano reduzido

$$(J^{-1}(\tilde{\eta})/(SO(3))_{\tilde{\eta}}, \Omega_{\tilde{\eta}}, H_{\tilde{\eta}}),$$

caracterizado por  $\pi_{\tilde{\eta}}^* \Omega_{\tilde{\eta}} = i_{\tilde{\eta}}^* \Omega$  e  $H_{\tilde{\eta}} \circ \pi_{\tilde{\eta}} = H \circ i_{\tilde{\eta}}$ , onde  $\pi_{\tilde{\eta}}$  é a projecção de  $J^{-1}(\tilde{\eta})$  em  $J^{-1}(\tilde{\eta})/(SO(3))_{\tilde{\eta}}$ ,  $i_{\tilde{\eta}} : J^{-1}(\tilde{\eta}) \hookrightarrow SO(3) \times \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)^* \times \mathfrak{so}(3)^*$  é a inclusão canónica, e  $\Omega$  e  $H$  são definidos por (4.3.4) e (4.3.5), respectivamente.

- Seja  $\mathcal{O}_{\tilde{\eta}}$  a órbita coadjunta definida por (4.1.8) e denotemos cada elemento desta órbita por  $\tilde{\Theta} = \widetilde{x^{-1}\eta} \in \mathcal{O}_{\tilde{\eta}}$ . A aplicação

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{\tilde{\eta}} : J^{-1}(\tilde{\eta})/(SO(3))_{\tilde{\eta}} &\longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{\eta}} \times \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)^* \\ \pi_{\tilde{\eta}}(x, \hat{y}, \widetilde{x^{-1}\eta + \Gamma \times y}, \tilde{\Gamma}) &\longmapsto (\widetilde{x^{-1}\eta}, \hat{y}, \tilde{\Gamma}) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo. Consequentemente, o estudo do sistema reduzido referido no ponto anterior, reduz-se à análise do sistema

$$(\mathcal{O}_{\tilde{\eta}} \times \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)^*, \bar{\Omega}_{\tilde{\eta}}, h),$$

onde  $\bar{\Omega}_{\bar{\eta}} := (\bar{\varphi}_{\bar{\eta}}^{-1})^* \Omega_{\bar{\eta}}$  e o Hamiltoniano  $h$  é definido por

$$h(\tilde{\Theta}, \hat{y}, \tilde{\Gamma}) = \Theta \cdot y + \frac{1}{2} \Gamma \cdot \Gamma, \quad (4.3.6)$$

para cada  $(\tilde{\Theta}, \hat{y}, \tilde{\Gamma}) \in \mathcal{O}_{\bar{\eta}} \times \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)^*$ .

**Proposição 4.3.2.** *O campo de vectores dinâmico (solução)  $X_h$  do sistema Hamiltoniano  $(\mathcal{O}_{\bar{\eta}} \times \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)^*, \bar{\Omega}_{\bar{\eta}}, h)$  é definido, para cada  $(\tilde{\Theta}, \hat{y}, \tilde{\Gamma}) \in \mathcal{O}_{\bar{\eta}} \times \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)^*$ , por*

$$X_h(\tilde{\Theta}, \hat{y}, \tilde{\Gamma}) = (\widetilde{\Theta \times y}, \hat{\Gamma}, -\tilde{\Theta}).$$

Por conseguinte, as equações de Hamilton na variedade reduzida  $\mathcal{O}_{\bar{\eta}} \times \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)^*$  escrevem-se como

$$\begin{cases} \dot{\Theta} = \Theta \times y \\ \dot{y} = \Gamma \\ \dot{\Gamma} = -\Theta. \end{cases} \quad (4.3.7)$$

Tendo em conta os resultados obtidos, temos um sistema de equações numa variedade de dimensão 8, cujas soluções nos conduzem exactamente aos quadráticos de Lie em  $SO(3)$ . De facto, derivando a última equação de (4.3.7) e usando as outras duas equações (ou seja, substituindo na equação obtida  $\ddot{\Gamma}$  por  $\ddot{y}$  e  $\dot{\Theta}$  por  $\Theta \times y$ , obtemos (4.2.2). Podemos afirmar que esta redução é similar à redução das equações de Euler-Arnold às clássicas equações de Euler do corpo rígido (ver, por exemplo, [10]).

Interessa-nos reforçar a importância da dedução das equações (4.3.7). O sistema Hamiltoniano inicial está definido em  $SO(3) \times \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)^* \times \mathfrak{so}(3)^* \sim T^*(TSO(3))$ , uma variedade de dimensão 12. Este sistema foi reduzido a um sistema com menos 2 graus de liberdade (ou seja, definido na variedade  $\mathcal{O}_{\bar{\eta}} \times \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)^*$  de dimensão 8). Este facto, junto com os integrais do movimento que se podem obter, permitem-nos efectuar uma nova redução. Como justificaremos de seguida, podemos eliminar pelo menos mais 3 graus de liberdade, ou seja, obter um sistema num espaço de fases de dimensão 2. Para tal, basta aplicar o teorema de Lie-Cartan, no sentido descrito na última secção do capítulo 3. Consideremos os quatro integrais do movimento dados

pela função Hamiltoniana (4.3.6) e pelos invariantes correspondentes a (3.3.5), ou seja,

$$l_1 = \Theta \cdot y + \frac{1}{2} \Gamma \cdot \Gamma, \quad l_{i+1} = (\Theta + \Gamma \times y) \cdot e_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

onde  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$  e  $e_3 = (0, 0, 1)$ . Nesta situação, é possível provar que estes quatro integrais do movimento são funcionalmente independentes num determinado aberto denso do espaço total (basta seguir o raciocínio explicado na observação 3.3.3). Sabemos que  $l_1$ , por ser o Hamiltoniano do sistema, está em involução com qualquer outro dos invariantes. Além disso, de acordo com a proposição 3.3.4 e considerando as constantes de estrutura (4.1.2) da álgebra  $\mathfrak{so}(3)$ , temos

$$\{l_2, l_3\} = -\{l_3, l_2\} = -l_4, \quad \{l_2, l_4\} = -\{l_4, l_2\} = l_3 \quad \text{e} \quad \{l_3, l_4\} = -\{l_4, l_3\} = -l_2.$$

Assim, a matriz dos parênteses de Poisson dos integrais é dada por

$$[\{l_i, l_j\}]_{1 \leq i, j \leq 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l_4 & l_3 \\ 0 & l_4 & 0 & -l_2 \\ 0 & -l_3 & l_2 & 0 \end{bmatrix},$$

que é uma matriz com característica igual a 2. Do teorema de Lie-Cartan (ver por menores e referências na observação 3.3.6) resulta que, a partir dos quatro integrais do movimento acima considerados, é possível construir pelo menos três integrais do movimento funcionalmente independentes e em involução. Consequentemente, o sistema original pode ser reduzido a um sistema definido numa variedade de dimensão 2, como tínhamos referido.

## Capítulo 5

# Um problema de controlo óptimo com restrições

Neste capítulo apresentaremos uma generalização a um sistema de conexão afim mais genérico, do problema de controlo óptimo dos polinómios cúbicos em grupos de Lie exposto na secção 2.3. Teremos um tipo de sistema de controlo análogo ao usado para os polinómios cúbicos, mas o número de variáveis de controlos será agora inferior ao número de variáveis da variedade de configuração. O novo problema de controlo é a abordagem natural de um problema variacional com restrições que é visto como uma extensão do problema variacional dos polinómios cúbicos da secção 2.2. Iniciaremos o capítulo com a apresentação deste problema variacional no contexto geral de uma variedade Riemanniana arbitrária e iremos particularizar para o caso do grupo de Lie conexo e compacto. De seguida, e no contexto dos grupo de Lie, formularemos o problema de controlo óptimo de um dado sistema de conexão afim e analisaremos a sua dinâmica usando uma abordagem Hamiltoniana presimpléctica, com um raciocínio semelhante ao da secção 2.4, ou seja, temos por base a metodologia de Skinner-Rusk, no sentido explicado na secção 1.2. Após a aplicação do algoritmo presimpléctico procederemos à trivialização do sistema Hamiltoniano simpléctico obtido, seguindo passos análogos aos da secção 2.5. Por fim, relacionaremos esta abordagem Hamiltoniana com

a variacional. Trataremos ainda de enriquecer os conteúdos abordados apresentando alguns exemplos de sistemas de controlo que se desenvolvem em  $SO(3)$ .

## 5.1 Problema variacional com restrições

Uma importante extensão do problema variacional dos polinómios cúbicos Riemannianos abordado na secção 1.1, consiste em analisar o mesmo problema quando acrescido de certas restrições. Esta questão foi introduzida por Crouch e Silva Leite em [37] no contexto da interpolação dinâmica.

Seja  $M$  uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$ , como no capítulo 1, e consideremos  $n$  campos de vectores  $X_1, \dots, X_m, \dots, X_n$  linearmente independentes num certo aberto  $U$  de  $M$ . Seja agora  $\mathcal{C}$  o conjunto de curvas em  $M$  considerado na secção 1.1, contidas no aberto  $U$ . O seguinte problema variacional pode ser visto como uma extensão do problema variacional da secção 1.1:

Determinar as curvas  $x \in \mathcal{C}$  que minimizam a funcional

$$\frac{1}{2} \int_0^T \left\langle \frac{D^2 x}{dt^2}, \frac{D^2 x}{dt^2} \right\rangle dt$$

e que satisfazem as restrições

$$\left\langle \frac{dx}{dt}, X_k(x) \right\rangle = c_k, \quad c_k \in \mathbb{R} \text{ (fixos)}, \quad k = m + 1, \dots, n. \quad (5.1.1)$$

Refira-se que, por vezes, omitimos a dependência do tempo para simplificar a notação.

Sejam  $\omega_k$  as 1-formas associadas aos campos de vectores  $X_k$ ,  $k = m + 1, \dots, n$ , através da métrica Riemanniana. Utilizando uma notação similar à usada em (2.1.6), temos  $X_{\omega_k} \equiv X_k$ , o que significa que  $\omega_k(Y) = \langle X_k, Y \rangle$ , para cada campo de vectores  $Y$  em  $M$ . Identificamos ainda a 1-forma  $i_Y d\omega_k$  com o campo de vectores  $X_{i_Y d\omega_k}$ , onde  $d$  denota a derivada exterior e  $i$  é o operador produto interior de uma forma por um campo de vectores. Recorde-se que  $i_Y d\omega_k$  satisfaz  $(i_Y d\omega_k)(Z) = d\omega_k(Y, Z)$ , e, portanto,  $d\omega_k(Y, Z) = \langle X_{i_Y d\omega_k}, Z \rangle$ , onde  $Y$  e  $Z$  são campos de vectores em  $M$ .



**Teorema 5.1.1.** [37] *Uma condição necessária para que  $x \in \mathcal{C}$  seja um extremante normal para o problema variacional acima considerado é que  $x$  seja de classe  $C^2$  e que existam funções suaves  $\lambda_k : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  (multiplicadores de Lagrange),  $k = m+1, \dots, n$ , tal que se verificam, para todo o  $t \in [0, T]$ , as condições (5.1.1) e*

$$\frac{D^4 x}{dt^4} + R\left(\frac{D^2 x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}\right) \frac{dx}{dt} - \sum_{k=m+1}^n \lambda_k X_i \frac{dx}{dt} d\omega_k - \sum_{k=m+1}^n \dot{\lambda}_k X_k = 0. \quad (5.1.2)$$

É importante referir que o resultado acima apresentado, em geral, não tem uma interpretação global, ou seja, depende da escolha local dos campos de vectores  $X_1, \dots, X_n$ . No entanto, quando a variedade  $M$  é paralelizável,  $TM$  possui um referencial global, situação esta que acontece, por exemplo, quando a variedade é um grupo de Lie conexo e compacto. Por conseguinte, é de particular interesse analisar o caso em que estendemos o problema variacional em grupos de Lie da secção 2.2 a um problema com restrições do tipo acima descrito.

Consideremos o problema variacional acima formulado, para o caso particular em que  $M$  é um grupo de Lie conexo e compacto  $G$ . Sejam  $\{A_1, \dots, A_n\}$  uma base ortonormada da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  do grupo e  $\{X_1, \dots, X_n\}$  a base ortonormada de campos de vectores invariantes à esquerda em  $G$ , definida de acordo com (2.1.2), ou seja, com  $X_i(x) = T_e L_x A_i$ , para cada  $x \in G$  (base gerada pela base da álgebra). Se  $x$  é uma curva suave em  $G$ , então o campo de vectores velocidade de  $x$  pode ser escrito como (2.2.1), isto é,  $(dx/dt)(t) = \sum_{i=1}^n y^i(t) X_i(x(t))$ , onde  $y^i$ , são funções suaves do tempo, para  $i = 1, \dots, n$ . Escrevendo as restrições (5.1.1) usando a notação  $Y_x := dx/dt$ , temos

$$\langle Y_x, X_k \rangle = c_k, \quad \text{onde } c_k \text{ são constantes, } k = m+1, \dots, n. \quad (5.1.3)$$

É óbvio que estas restrições correspondem às condições  $y^k(t) = c_k$ ,  $k = m+1, \dots, n$ .

A versão do teorema 5.1.1 para  $M = G$  é a seguinte:

**Teorema 5.1.2.** [37] *Uma condição necessária para que uma curva  $x$  em  $G$ , pertencente ao conjunto  $\mathcal{C}$  e com campo de vectores velocidade  $Y_x(t) = \sum_{i=1}^n y^i(t) X_i(x(t))$ , seja um extremante normal para o problema variacional com restrições acima formulado, é que  $x$  seja de classe  $C^2$  e que existam funções suaves  $\lambda_k : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$k = m + 1, \dots, n$ , tal que se verificam, para todo o  $t \in [0, T]$ , as condições

$$\ddot{Y}_x + [Y_x, \ddot{Y}_x] - \sum_{i=1}^n \sum_{k=m+1}^n y^i \lambda_k [X_i, X_k] - \sum_{k=m+1}^n \dot{\lambda}_k X_k = 0$$

e  $y^k(t) = c_k$ ,  $k = m + 1, \dots, n$ .

*Demonstração.* Para demonstrar o pretendido é suficiente reescrever (5.1.2), utilizando o teorema 2.1.1 e tendo ainda em atenção que se  $Y$  e  $Z$  são campos de vectores invariantes à esquerda em  $G$  e  $\omega$  é uma 1-forma invariante à esquerda em  $G$ , então verifica-se a identidade  $d\omega(Y, Z) = -\omega([Y, Z])$ . Note-se que, no caso do grupo de Lie  $G$ , temos uma base  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  de 1-formas invariantes à esquerda em  $G$ , base dual da base de campos de vectores invariantes à esquerda. Os últimos  $n - m$  elementos desta base são as 1-formas consideradas para definir os campos de vectores  $X_{i_{Y_x} d\omega_k}$ ,  $k = m + 1, \dots, n$ , que aparecem no teorema 5.1.1. Portanto,  $\langle X_{i_{Y_x} d\omega_k}, X_i \rangle = d\omega_k(Y_x, X_i) = -\omega_k([Y_x, X_i])$ .  $\square$

A primeira condição do teorema anterior pode escrever-se como

$$\ddot{Y}_x + [Y_x, \ddot{Y}_x - Z_x] - \dot{Z}_x = 0, \quad \text{onde} \quad Z_x = \sum_{k=m+1}^n \lambda_k X_k(x).$$

Além disso, se  $\lambda$  é a forma de Maurer-Cartan da definição B.1.20, a equação anterior é equivalente a  $\lambda_x(\ddot{Y}_x) + [\lambda_x(Y_x), \lambda_x(\ddot{Y}_x) - \lambda_x(Z_x)] - \lambda_x(\dot{Z}_x) = 0$ , que atendendo a (2.1.8) se escreve como

$$\ddot{Y} + [Y, \ddot{Y} - Z] - \dot{Z} = 0, \quad (5.1.4)$$

onde  $Y = \lambda_x(Y_x) = \sum_{i=1}^n y^i A_i$  e  $Z = \lambda_x(Z_x) = \sum_{k=m+1}^n \lambda_k A_k$ .

Refira-se que as versões originais dos teoremas apresentados nesta secção são apresentados em [37] com condições de interpolação extra.

**Observação 5.1.3.** *No contexto dos grupos de Lie, consideremos o problema variacional acima descrito para a situação particular em que  $c_k = 0$ ,  $k = m + 1, \dots, n$  (as constantes que definem a restrição são nulas). Ficamos com as restrições*

$$\langle Y_x, X_k \rangle = 0, \quad k = m + 1, \dots, n.$$

Seja  $D$  uma distribuição suave<sup>1</sup> em  $G$  de dimensão constante  $m$ . Assuma-se que, para cada  $x \in G$ , o subespaço  $D(x)$  é gerado pelo conjunto  $\{X_1(x), \dots, X_m(x)\}$ , ou seja, os primeiros  $m$  campos de vectores da base ortonormada de campos de vectores invariantes à esquerda acima considerada, constituem uma base da distribuição. Neste caso, as restrições anteriores escrevem-se como

$$Y_x \in D(x). \quad (5.1.5)$$

## 5.2 Problema de controlo óptimo com restrições

Começamos por fixar a notação a usar tanto nesta secção como nas seguintes:  $G$  é um grupo de Lie conexo e compacto de dimensão finita  $n$  com identidade  $e$ ; a correspondente álgebra de Lie, equipada com o parêntesis de Lie  $[\cdot, \cdot]$ , é denotada por  $\mathfrak{g}$  e o seu espaço dual por  $\mathfrak{g}^*$ . Além disso,  $\{X_1, \dots, X_n\}$  representa a base ortonormada de campos de vectores invariantes à esquerda em  $G$  referida na secção precedente; e os primeiros  $m$  elementos desta base formam uma base de uma distribuição suave  $D$  em  $G$  de dimensão constante  $m$ . Representamos por  $\mathfrak{h}$  o subespaço linear  $D(e)$ ,  $\mathfrak{h} = D(e)$ .

Como veremos a seguir, o problema variacional apresentado na secção anterior para a situação do grupo de Lie é a abordagem variacional natural de um problema de controlo óptimo onde o número de controlos é igual a  $m$ . Formularemos este problema de controlo usando ferramentas geométricas da teoria de controlo. Consideremos uma curva  $x$  em  $G$  e o seu campo de vectores velocidade escrito, como anteriormente, na forma  $Y_x(t) = \sum_{i=1}^n y^i(t)X_i(x(t))$ . Sabemos da proposição 2.2.1 que, numa situação geral (sem restrições), o campo de vectores aceleração de  $x$  se reduz a  $(DY_x/dt)(t) = \sum_{i=1}^n u^i(t)X_i(x(t))$ , onde  $u^i(t) = \dot{y}^i(t)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Mas, se impusermos as

---

<sup>1</sup>Uma distribuição  $D$  numa variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação que associa a cada  $x \in M$  um subespaço linear  $D(x)$  do espaço tangente  $T_x M$ . A distribuição  $D$  é suave se para cada  $x \in M$ , o subespaço  $D(x)$  for gerado por um conjunto de campos de vectores suaves; e tem dimensão constante se a dimensão de  $D(x)$  não depende do ponto  $x \in M$ . (Consultar, por exemplo, [65].)

restrições (5.1.3) temos

$$\frac{DY_x}{dt} = \sum_{a=1}^m u^a X_a(x). \quad (5.2.1)$$

Estas equações representam um sistema de controlo de conexão afim num grupo de Lie. Os sistemas de conexão afim são um caso particular de um sistema mecânico simples com forças externas e sem restrições não-holónomas, designados por alguns autores por sistemas mecânicos holónomos ou sistemas holónomos controlados ([19, 24]).

As equações (5.2.1) traduzem-se por

$$\left\langle \frac{DY_x}{dt}, X_k(x) \right\rangle = 0, \quad k = m+1, \dots, n,$$

ou seja,

$$\frac{DY_x}{dt} \in D(x).$$

Note-se que  $T_x L_{x^{-1}} Y_x = \sum_{i=1}^n y^i A_i$  e portanto, uma vez que estamos a impor que  $\dot{y}^k = 0$ , para  $k = m+1, \dots, n$ , temos  $(d/dt)(T_x L_{x^{-1}} Y_x) = \sum_{a=1}^m \dot{y}^a A_a$ . Assim, podemos considerar o sistema de controlo

$$\begin{cases} \dot{x} = Y_x \\ \frac{d}{dt}(T_x L_{x^{-1}} Y_x) = \sum_{a=1}^m u^a A_a, \end{cases}$$

onde  $u^a$ ,  $a = 1, \dots, m$  são as variáveis de controlo. Isto é,

$$\begin{cases} \dot{x} = Y_x \\ \frac{d}{dt}(T_x L_{x^{-1}} Y_x) = U \end{cases}, \quad \text{com } U \in \mathfrak{h}. \quad (5.2.2)$$

Apresentamos agora um problema de controlo óptimo para o sistema (5.2.2), enquadrando-o no contexto dos fibrados tangentes de ordem superior, de um modo similar ao efectuado na secção 2.3 para os polinómios cúbicos. Seja  $\widetilde{T^2G} \subset T(G \times \mathfrak{g})$  o fibrado tangente de ordem dois de  $G$  trivializado, definido de acordo com (2.1.11). Recorde-se que cada elemento de  $\widetilde{T^2G}$  é denotado por  $(v_x, U) \in T_x G \times \mathfrak{g}$  e ainda que a projecção natural de  $\widetilde{T^2G}$  é a aplicação  $\widetilde{\tau}_2^1 : \widetilde{T^2G} \rightarrow G \times \mathfrak{g}$  dada, para cada  $(v_x, U) \in \widetilde{T^2G}$ , por (2.1.12), ou seja,  $\widetilde{\tau}_2^1(v_x, U) = (x, T_x L_{x^{-1}} v_x)$ . Tal como assumimos na secção 2.3,

uma curva  $\gamma$  em  $\widetilde{T^2G}$  é definida à custa de três elementos:  $x$  uma curva em  $G$ ;  $Y_x$  um campo de vectores ao longo de  $x$ ; e  $U$  uma curva em  $\mathfrak{g}$ . De forma a definir o problema de controlo óptimo a que nos propomos, vamos considerar os elementos a seguir discriminados.

- Construímos a subvariedade  $\mathcal{M}$  do fibrado tangente  $\widetilde{T^2G}$ , considerando

$$\mathcal{M} = \{(v_x, U) \in \widetilde{T^2G} : U \in \mathfrak{h}\}. \quad (5.2.3)$$

Consideramos ainda a aplicação inclusão  $i_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \hookrightarrow \widetilde{T^2G}$ . Assumimos que  $\tilde{\tau}_2^1 \circ i_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow G \times \mathfrak{g}$  é uma submersão sobrejectiva e portanto  $\mathcal{M}$  é uma variedade fibrada sobre  $G \times \mathfrak{g}$ .

- A função custo  $L_{\mathcal{M}}$  a considerar será a restrição à subvariedade  $\mathcal{M}$  da função custo  $L$  definida por (2.3.1), ou seja,

$$L_{\mathcal{M}} = L|_{\mathcal{M}} = L \circ i_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}, (v_x, U) \mapsto (1/2)\langle U, U \rangle.$$

Note-se que, por definição de  $\mathcal{M}$ ,  $U \in \mathfrak{h}$  e portanto

$$L_{\mathcal{M}}(v_x, U) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^m (u^a)^2. \quad (5.2.4)$$

- Consideramos ainda o campo de vectores  $\tilde{\Pi} : \widetilde{T^2G} \rightarrow T(G \times \mathfrak{g})$  ao longo da projecção  $\tilde{\tau}_2^1$  dado por (2.3.2), ou seja,  $\tilde{\Pi}(v_x, U) \sim (v_x, U) \in T_x G \times \mathfrak{g}$ .

O problema de controlo óptimo consiste em encontrar as curvas

$$\gamma : [0, T] \mapsto \mathcal{M}, t \mapsto (Y_x(t), U(t)) \in T_{x(t)} G \times \mathfrak{h},$$

seccionalmente  $C^2$ -suaves e onde  $T \in \mathbb{R}^+$  é fixo, com condições iniciais e finais fixas no espaço de estados  $G \times \mathfrak{g}$ , que minimizam a funcional

$$\int_0^T L_{\mathcal{M}}(\gamma(t)) dt$$

e satisfazem o sistema de controlo

$$\frac{d}{dt} (\tilde{\tau}_2^1 \circ i_{\mathcal{M}} \circ \gamma)(t) = (\tilde{\Pi} \circ i_{\mathcal{M}})(\gamma(t)). \quad (5.2.5)$$

Importa observar que

$$(\tilde{\tau}_2^1 \circ i_{\mathcal{M}})(\gamma(t)) = (x(t), T_x L_{x^{-1}} Y_x(t)) \quad \text{e} \quad (\tilde{\Pi} \circ i_{\mathcal{M}})(\gamma(t)) = (Y_x(t), U(t)),$$

onde  $U(t) \in \mathfrak{h}$ . Neste sentido, os sistemas de controlo (5.2.2) e (5.2.5) são equivalentes.

**Observação 5.2.1.** *Na situação em que  $m = n$ , o problema de controlo apresentado é simplesmente o problema dos polinómios cúbicos da secção 2.3.*

**Observação 5.2.2.** *Refira-se que os problemas de controlo óptimo para sistemas de controlo de conexão afim têm sido objecto de estudo por parte de vários autores nos últimos anos. Interessa-nos destacar o trabalho de Barbero-Liñan e Muñoz-Lecanda [15], onde os autores constroem um algoritmo presimpléctico de forma a caracterizar os diferentes tipos de trajectórias críticas (normais e abnormais) de um problema de controlo óptimo para sistemas de conexão afim que evoluem numa variedade diferenciável. Mencionamos também o artigo [16] dos mesmo autores, onde podem ser encontradas referências bibliográficas relacionadas com as diversas vertentes de estudo de problemas de controlo óptimo que tiveram origem no princípio do Máximo de Pontryagin.*

### 5.3 Sistema Hamiltoniano presimpléctico

Esta secção é dedicada à abordagem presimpléctica do problema de controlo óptimo acima considerado. Antes de iniciarmos o processo, dedicamos alguma atenção à identificação de vectores e covectores, ferramenta esta que possui a capacidade de simplificar eficazmente alguns dos resultados a obter posteriormente.

Seja  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ . Como já referimos anteriormente, fazendo uso da métrica Riemanniana, podemos identificar  $\xi$  com um elemento  $X_\xi$  da álgebra  $\mathfrak{g}$  através de (2.1.6). Interessa-nos também associar a  $\xi$  um elemento  $X_\xi^{\mathfrak{h}}$  do subespaço linear  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ . Para tal, basta definir esta correspondência através da relação

$$\xi(Z) = \langle X_\xi^{\mathfrak{h}}, Z \rangle, \quad \text{para qualquer } Z \in \mathfrak{h}. \quad (5.3.1)$$

Notemos que se  $\xi_1, \dots, \xi_n$  são as coordenadas de  $\xi$  relativamente à base de  $\mathfrak{g}^*$  dual da base  $\{A_1, \dots, A_n\}$  de  $\mathfrak{g}$ , então  $X_\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i A_i$  e  $X_\xi^{\mathfrak{h}} = \sum_{a=1}^m \xi_a A_a$ . Assim, os dois elementos relacionam-se através da igualdade

$$X_\xi = X_\xi^{\mathfrak{h}} + \sum_{k=m+1}^n \xi_k A_k. \quad (5.3.2)$$

Seja  $(\mathcal{T}, \tilde{\Omega}, \tilde{H})$  o sistema Hamiltoniano presimplético dos polinómios cúbicos descrito na secção 2.4. Recorde-se que  $\mathcal{T} = T^*(G \times \mathfrak{g}) \times_{G \times \mathfrak{g}} \widetilde{T^2G}$ . Construa-se agora um novo sistema Hamiltoniano presimplético  $(\bar{\mathcal{T}}, \bar{\Omega}, \bar{H})$  de acordo com o seguinte:

- O espaço total é o fibrado sobre  $G \times \mathfrak{g}$  dado por

$$\bar{\mathcal{T}} = T^*(G \times \mathfrak{g}) \times_{G \times \mathfrak{g}} \mathcal{M},$$

onde  $T^*_{(x,Y)}(G \times \mathfrak{g}) \times (\tilde{\tau}_2^1 \circ i_{\mathcal{M}})^{-1}(x, y)$  é a fibra de  $\bar{\mathcal{T}}$  sobre  $(x, Y) \in G \times \mathfrak{g}$ , para  $\mathcal{M}$  a subvariedade de  $\widetilde{T^2G}$  definida por (5.2.3) e  $i_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \hookrightarrow \widetilde{T^2G}$  a aplicação inclusão. Representamos cada elemento de  $\bar{\mathcal{T}}$  por  $(\alpha_x, Y, \xi, U) \in T^*_x G \times \{Y\} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{h}$ , com  $(x, Y) \in G \times \mathfrak{g}$ .

Consideremos a aplicação inclusão  $i_{\bar{\mathcal{T}}} : \bar{\mathcal{T}} \hookrightarrow \mathcal{T}$ .

- A forma presimplética em  $\bar{\mathcal{T}}$  é definida pela imagem recíproca (“pull-back”)

$$\bar{\Omega} = (pr_1 \circ i_{\bar{\mathcal{T}}})^* \omega_0, \quad (5.3.3)$$

onde  $pr_1 : \mathcal{T} \rightarrow T^*(G \times \mathfrak{g})$  é a projecção canónica e  $\omega_0$  é a forma simplética canónica em  $T^*(G \times \mathfrak{g})$ . Em alternativa podemos escrever  $\bar{\Omega} = (i_{\bar{\mathcal{T}}})^* \tilde{\Omega}$ , pois por definição  $\tilde{\Omega} = (pr_1)^* \omega_0$  (ver (2.4.1)).

- O Hamiltoniano  $\bar{H} : \bar{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}$  é dado por

$$\bar{H} = \tilde{H} \circ i_{\bar{\mathcal{T}}},$$

com  $\tilde{H}$  definido por (2.4.2). Portanto,

$$\bar{H}(\alpha_x, Y, \xi, U) = (T_e^* L_x \alpha_x)(Y) + \xi(U) - \frac{1}{2} \langle U, U \rangle, \quad (5.3.4)$$

para cada  $(\alpha_x, Y, \xi, U) \in T_x^*G \times \{Y\} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{h}$ , com  $(x, Y) \in G \times \mathfrak{g}$ . Localmente  $\overline{H}$  escreve-se como

$$\overline{H} = \sum_{i=1}^n p_i y^i + \sum_{a=1}^m \xi_a u^a - \frac{1}{2} \sum_{a=1}^m (u^a)^2, \quad (5.3.5)$$

onde estamos a assumir que sendo  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, p_1, \dots, p_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$  e  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, u^1, \dots, u^n)$ , respectivamente, as coordenadas locais de  $T^*(G \times \mathfrak{g})$  e  $\widetilde{T^2G}$ , então  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, u^1, \dots, u^m, p_1, \dots, p_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$  constitui um sistema de coordenadas em  $\overline{\mathcal{T}}$ .

Como sabemos, a dinâmica do sistema é determinada com o estudo das soluções  $X_{\overline{H}}$  (campos de vectores em  $\overline{\mathcal{T}}$ ) da equação  $i_{X_{\overline{H}}}\overline{\Omega} = d\overline{H}$ . Com esse intuito, vamos aplicar o algoritmo presimplético ao sistema  $(\overline{\mathcal{T}}, \overline{\Omega}, \overline{H})$ . Tal como na secção 2.4, começamos por considerar os pontos de  $\overline{\mathcal{T}}$  onde o sistema dinâmico tem solução, que neste caso definem a subvariedade dada por  $W_1 = \{z \in \overline{\mathcal{T}} : d\overline{H}(z)(v_z) = 0, \forall v_z \in Ker \overline{\Omega}(z)\}$ . Prosseguimos com a análise do sistema  $(W_1, \overline{\Omega}_{W_1}, \overline{H}_{W_1})$ , onde  $\overline{\Omega}_{W_1}$  e  $\overline{H}_{W_1}$  são as restrições a  $W_1$  da forma presimplética  $\overline{\Omega}$  definida por (5.3.3) e do Hamiltoniano  $\overline{H}$  definido por (5.3.4), respectivamente. Podemos escrever

$$\overline{\Omega}_{W_1} = i_{W_1}^* \overline{\Omega} \quad (5.3.6)$$

e  $\overline{H}_{W_1} := \overline{H} \circ i_{W_1}$ , onde  $i_{W_1} : W_1 \hookrightarrow \overline{\mathcal{T}}$  é a aplicação inclusão. Se a forma  $\overline{\Omega}_{W_1}$  for simplética, então existe um único campo de vectores  $X_{W_1}$  em  $W_1$  solução de  $i_{X_{W_1}}\overline{\Omega}_{W_1} = d\overline{H}_{W_1}$  (restrição a  $W_1$  do sistema dinâmico original) e o algoritmo pára neste primeiro passo.

Em termos de coordenadas, facilmente se verifica que a forma presimplética  $\overline{\Omega}$  definida por (5.3.3) se exprime como

$$\overline{\Omega} = \sum_{i=1}^n (dx^i \wedge dp_i + dy^i \wedge d\xi_i)$$

e portanto  $Ker \overline{\Omega} = span \{\partial/\partial u^1, \dots, \partial/\partial u^m\}$ . De onde se segue que a subvariedade  $W_1$  é localmente caracterizada pelas  $m$  restrições  $dH(z)[(\partial/\partial u^a)|_z] = 0, a = 1, \dots, m,$



$z \in \bar{T}$ , ou seja,

$$\frac{\partial H}{\partial u^a} = 0, \quad a = 1, \dots, m.$$

Atendendo à expressão local (5.3.5) do Hamiltoniano, estas restrições escrevem-se como

$$\xi_a = u^a, \quad a = 1, \dots, m.$$

Portanto, a subvariedade  $W_1$  tem dimensão  $4n$  e podemos escolher para esta subvariedade as coordenadas  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, p_1, \dots, p_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ . com  $\xi_a = u^a$ ,  $a = 1, \dots, m$ .

**Proposição 5.3.1.** *A variedade  $(W_1, \bar{\Omega}_{W_1})$  é simplética.*

*Demonstração.* Note-se que  $W_1$  pode escrever-se como

$$W_1 = \{(\alpha_x, Y, \xi, U) \in T_x^*G \times \{Y\} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{h} : X_\xi^\mathfrak{h} = U\},$$

onde  $X_\xi^\mathfrak{h}$  é definido por (5.3.1). É óbvio que a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : T^*(G \times \mathfrak{g}) &\longrightarrow W_1 \\ (\alpha_x, Y, \xi) &\longmapsto (\alpha_x, Y, \xi, X_\xi^\mathfrak{h}) \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

é um difeomorfismo e portanto  $(W_1, (\varphi^{-1})^*\omega_0)$  é uma variedade simplética, onde  $\omega_0$  é a forma canónica simplética em  $T^*(G \times \mathfrak{g})$ . Para demonstrar o pretendido basta verificar que  $(\varphi^{-1})^*\omega_0$  coincide com a forma  $\bar{\Omega}_{W_1}$ . Da definição (5.3.6) de  $\bar{\Omega}_{W_1}$ , vem  $\varphi^*\bar{\Omega}_{W_1} = (\varphi^* \circ i_{W_1}^* \circ (pr_1 \circ i_{\bar{T}})^*)\omega_0 = (pr_1 \circ i_{\bar{T}} \circ i_{W_1} \circ \varphi)^*\omega_0$ . Mas, facilmente se deduz que  $pr_1 \circ i_{\bar{T}} \circ i_{W_1} \circ \varphi = id_{T^*(G \times \mathfrak{g})}$  e portanto  $\varphi^*\bar{\Omega}_{W_1} = \omega_0$ . Consequentemente,  $\bar{\Omega}_{W_1} = (\varphi^{-1})^*\omega_0$  e concluímos que  $(W_1, \bar{\Omega}_{W_1})$  é uma variedade simplética.  $\square$

A  $\bar{H}_{W_1}$  podemos fazer corresponder o Hamiltoniano  $\bar{H}_{W_1} \circ \varphi : T^*(G \times \mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Temos

$$(\bar{H}_{W_1} \circ \varphi)(\alpha_x, Y, \xi) = (T_e^*L_x\alpha_x)(Y) + \frac{1}{2}\xi \left( X_\xi^\mathfrak{h} \right), \quad (5.3.8)$$

para cada  $(\alpha_x, Y, \xi) \in T_{(x,Y)}^*(G \times \mathfrak{g})$ . O estudo do sistema  $(W_1, \bar{\Omega}_{W_1}, \bar{H}_{W_1})$  reduz-se ao estudo do sistema na variedade simplética  $(T^*(G \times \mathfrak{g}), \omega_0)$  com Hamiltoniano  $\bar{H}_{W_1} \circ \varphi$ .

## 5.4 Trivialização do sistema Hamiltoniano. Exemplos.

Trivializamos agora à esquerda o sistema Hamiltoniano  $(T^*(G \times \mathfrak{g}), \omega_0, \overline{H}_{W_1} \circ \varphi)$ , usando o difeomorfismo  $\rho : T^*(G \times \mathfrak{g}) \rightarrow G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$  definido por (2.1.17). O estudo do nosso problema resume-se ao estudo do sistema Hamiltoniano  $(G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, (\rho^{-1})^* \omega_0, H)$ , onde  $H := \overline{H}_{W_1} \circ \varphi \circ \rho^{-1}$ . Note-se que, de (2.1.18) e (5.3.8), vem

$$H(x, Y, \mu, \xi) = \mu(Y) + \frac{1}{2} \xi(X_\xi^{\flat}), \quad (5.4.1)$$

para cada  $(x, Y, \mu, \xi) \in G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ . Considera-se  $X_H = \rho_* X_{\overline{H}_{W_1} \circ \varphi}$  o campo de vectores caracterizado como sendo a solução do sistema dinâmico  $i_{X_H}[(\rho^{-1})^* \omega_0] = dH$ .

**Proposição 5.4.1.** *O seguinte sistema de equações diferenciais descreve o movimento para o sistema Hamiltoniano trivializado  $(G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, (\rho^{-1})^* \omega_0, H)$ :*

$$\begin{cases} \dot{x} = T_e L_x Y \\ \dot{Y} = X_\xi^{\flat} \\ \dot{\mu} = ad_{X_\xi^{\flat}}^* \xi \\ \dot{\xi} = -\mu + ad_Y^* \xi. \end{cases} \quad (5.4.2)$$

*Demonstração.* Para demonstrar o pretendido basta seguir um raciocínio semelhante ao usado na demonstração da proposição 2.5.1. Isto é, se  $z = (x, Y, \mu, \xi)$  é uma curva integral de  $X_H$ , podemos concluir que o seguinte sistema de equações é satisfeito

$$\begin{cases} \dot{x} = T_e L_x \frac{\partial H}{\partial \mu}(z) \\ \dot{Y} = \frac{\partial H}{\partial \xi}(z) + ad_Y \frac{\partial H}{\partial \mu}(z) \\ \dot{\mu} = -T_e^* L_x \frac{\partial H}{\partial x}(z) - ad_Y^* \frac{\partial H}{\partial Y}(z) + ad_{\frac{\partial H}{\partial \mu}(z)}^* \mu + ad_{\frac{\partial H}{\partial \xi}(z)}^* \xi \\ \dot{\xi} = -\frac{\partial H}{\partial Y}(z) + ad_{\frac{\partial H}{\partial \mu}(z)}^* \xi, \end{cases}$$

onde estamos a tomar a mesma notação da proposição 2.5.1. Tendo agora em atenção (5.4.1),  $(\partial H / \partial x)(z) = 0$ ,  $(\partial H / \partial Y)(z) = \mu$ ,  $(\partial H / \partial \mu)(z) = Y$  e  $(\partial H / \partial \xi)(z) = X_\xi^{\flat}$ . Substituindo estas expressões no sistema anterior obtemos (5.4.2).  $\square$

Terminamos esta secção com a caracterização de três sistemas de controlo que se desenvolvem no grupo de Lie das rotações  $SO(3)$ , usando o formalismo que acabámos de desenvolver (consultar secção 4.1, para mais detalhes sobre este grupo).

**Exemplo 5.4.2.** *Seja  $G \equiv SO(3)$ . Escolhemos a base ortonormada  $\{A_1, A_2, A_3\}$  da álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  dada por (4.1.1). Relativamente à escolha da base do subespaço linear  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(3)$ , contamos com três situações distintas: base igual à de  $\mathfrak{so}(3)$ , a  $\{A_1, A_2\}$  ou a  $\{A_1\}$ ; situações estas que se enquadram nos seguintes três problemas de controlo (assumimos que são satisfeitas certas condições de fronteira em  $SO(3) \times \mathfrak{so}(3)$ ):*

**Caso I** *Minimizar a funcional*

$$L = \frac{1}{2} \int_0^T [(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2] dt,$$

*sujeita ao sistema de controlo*

$$\begin{cases} \dot{x} = y^1 X_1(x) + y^2 X_2(x) + y^3 X_3(x) \\ \dot{y}^1 = u^1 \\ \dot{y}^2 = u^2 \\ \dot{y}^3 = u^3, \end{cases}$$

*para  $x \in SO(3)$ ,  $y^i, u^i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .*

**Caso II** *Minimizar a funcional*

$$L = \frac{1}{2} \int_0^T [(u^1)^2 + (u^2)^2] dt,$$

*sujeita ao sistema de controlo*

$$\begin{cases} \dot{x} = y^1 X_1(x) + y^2 X_2(x) + y^3 X_3(x) \\ \dot{y}^1 = u^1 \\ \dot{y}^2 = u^2 \\ \dot{y}^3 = 0, \end{cases}$$

*para  $x \in SO(3)$ ,  $y^i, u^j \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2$ .*

**Caso III** *Minimizar a funcional*

$$L = \frac{1}{2} \int_0^T [(u^1)^2] dt,$$

*sujeita ao sistema de controlo*

$$\begin{cases} \dot{x} = y^1 X_1(x) + y^2 X_2(x) + y^3 X_3(x) \\ \dot{y}^1 = u^1 \\ \dot{y}^2 = 0 \\ \dot{y}^3 = 0, \end{cases}$$

para  $x \in SO(3)$ ,  $y^i, u^1 \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Como sabemos, a álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  e seu espaço dual  $\mathfrak{so}(3)^*$  são isomorfos ao espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  através dos isomorfismos (4.1.3) e (4.1.6), respectivamente. Por conseguinte, podemos usar um raciocínio semelhante ao desenvolvido na secção 4.3 e escrever para o caso com restrições o equivalente à proposição 4.3.1. Assim, quando  $G = SO(3)$ , o sistema Hamiltoniano (5.4.2) é equivalente a

$$\begin{cases} \dot{x} = x\hat{y} \\ \dot{y} = \xi^{\mathfrak{h}} \\ \dot{\mu} = \xi \times \xi^{\mathfrak{h}} \\ \dot{\xi} = -\mu + \xi \times y, \end{cases}$$

para  $x \in SO(3)$ , e onde  $y, \mu, \xi, \xi^{\mathfrak{h}} \in \mathbb{R}^3$  são os elementos que se identificam, respectivamente, com  $\hat{y} \in \mathfrak{so}(3)$ ,  $\tilde{\mu} \in \mathfrak{so}(3)^*$ ,  $\tilde{\xi} \in \mathfrak{so}(3)^*$  e  $X_{\tilde{\xi}}^{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(3)$ . Indicamos a seguir o sistema Hamiltoniano para cada um dos três casos acima considerados.

**Caso I** *Este caso é a situação dos polinómios cúbicos considerada na secção 4.3 (problema de controlo óptimo dinâmico do corpo rígido livre e esférico, sem restrições), portanto as curvas críticas satisfazem o sistema da proposição 4.3.1.*

## Caso II

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y^1 X_1(x) + y^2 X_2(x) + y^3 X_3(x) \\ \dot{y}^1 = \xi_1 \\ \dot{y}^2 = \xi_2 \\ \dot{y}^3 = 0 \\ \dot{\mu}_1 = -\xi_2 \xi_3 \\ \dot{\mu}_2 = \xi_1 \xi_3 \\ \dot{\mu}_3 = 0 \\ \dot{\xi}_1 = -\mu_1 + \xi_2 y^3 - y^2 \xi_3 \\ \dot{\xi}_2 = -\mu_2 - \xi_1 y^3 + y^1 \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 = -\mu_3 + \xi_1 y^2 - y^1 \xi_2, \end{array} \right.$$

$$x \in SO(3), y^i, \mu_i, \xi_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3.$$

## Caso III

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y^1 X_1(x) + y^2 X_2(x) + y^3 X_3(x) \\ \dot{y}^1 = \xi_1 \\ \dot{y}^2 = 0 \\ \dot{y}^3 = 0 \\ \dot{\mu}_1 = 0 \\ \dot{\mu}_2 = \xi_1 \xi_3 \\ \dot{\mu}_3 = -\xi_1 \xi_2 \\ \dot{\xi}_1 = -\mu_1 + \xi_2 y^3 - y^2 \xi_3 \\ \dot{\xi}_2 = -\mu_2 - \xi_1 y^3 + y^1 \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 = -\mu_3 + \xi_1 y^2 - y^1 \xi_2, \end{array} \right.$$

$$x \in SO(3), y^i, \mu_i, \xi_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3.$$

## 5.5 Relação com a abordagem variacional

As equações Hamiltonianas (5.4.2) são equivalentes às equações (5.1.4) (onde estamos a considerar também a equação  $\dot{x} = Y_x$ ), no sentido a seguir descrito. Começamos por observar que, atendendo às identificações (2.1.6) e (5.3.1), e às propriedades (2.1.7), a terceira equação de (5.4.2) é equivalente à seguinte equação na álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ :

$$\dot{X}_\mu = -ad_{X_\xi^\flat} X_\xi. \quad (5.5.1)$$

Note-se agora que a última equação de (5.4.2) e a de (2.5.3) coincidem. Ora, ao longo da demonstração da proposição 2.7.1, já verificámos que esta equação tem uma correspondente equação na álgebra  $\mathfrak{g}$  dada por (2.7.1). Diferenciando a referida equação obtemos  $\ddot{X}_\xi + \dot{X}_\mu + ad_{\dot{Y}} X_\xi + ad_Y \dot{X}_\xi = 0$ . Fazendo agora uso de (5.5.1) e da segunda equação de (5.4.2), a equação anterior escreve-se como

$$\ddot{X}_\xi + [Y, \dot{X}_\xi] = 0. \quad (5.5.2)$$

Sabendo que  $X_\xi$  se relaciona com  $X_\xi^\flat$  através de (5.3.2) e atendendo à segunda equação de (5.4.2),  $X_\xi$  escreve-se como

$$X_\xi = \dot{Y} + \sum_{k=m+1}^n \xi_k A_k.$$

Por conseguinte, substituindo esta última expressão na equação (5.5.2) obtemos (5.1.4) com  $Z = -\sum_{k=m+1}^n \dot{\xi}_k A_k$ . Assim, conseguimos construir uma solução das equações (5.1.4) a partir de uma solução das equações Hamiltonianas (5.4.2). Por outro lado, assumindo que temos uma solução de (5.1.4) que satisfaz  $\dot{Y} = X_\xi^\flat$ ,  $\dot{X}_\xi + X_\mu + ad_Y X_\xi = 0$  e ainda  $\dot{\xi}_k = -\lambda_k$ ,  $k = m+1, \dots, n$ , verifica-se que existe uma correspondente solução de (5.4.2). Com efeito, basta mostrar que a terceira equação de (5.4.2) é satisfeita, pois as outras três equações do sistema Hamiltoniano saem naturalmente.

**Exemplo 5.5.1.** *Para os três casos apresentados no exemplo 5.4.2, verifica-se, após alguns cálculos, que a correspondente versão Lagrangiana de cada uma das equações Hamiltonianas apresentadas, ou seja, as equações  $\dot{x} = Y_x$  e (5.1.4), é a seguinte:*

**Caso I** Equações de Euler-Lagrange (4.2.1), pois como referimos anteriormente, este é o problema dos polinómios cúbicos da secção 4.3.

**Caso II** Equações (5.1.4) com  $Z = \lambda_3 A_3$  (onde  $\lambda_3 = -\dot{\xi}_3$ ). Isto é,

$$\begin{cases} \dot{x} = y^1 X_1(x) + y^2 X_2(x) + y^3 X_3(x) \\ \ddot{y}^1 - \lambda_3 y^2 - y^3 \ddot{y}^2 = 0 \\ \ddot{y}^2 + \lambda_3 y^1 + y^3 \ddot{y}^1 = 0 \\ \dot{\lambda}_3 - y^1 \ddot{y}^2 + y^2 \ddot{y}^1 = 0, \end{cases}$$

$$x \in SO(3), y^i, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3.$$

**Caso III** Equações (5.1.4) com  $Z = \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3$  (onde  $\lambda_2 = -\dot{\xi}_2$  e  $\lambda_3 = -\dot{\xi}_3$ ). Isto é,

$$\begin{cases} \dot{x} = y^1 X_1(x) + y^2 X_2(x) + y^3 X_3(x) \\ \ddot{y}^1 - \lambda_3 y^2 + \lambda_2 y^3 = 0 \\ \dot{\lambda}_2 - y^3 \ddot{y}^1 - \lambda_3 y^1 = 0 \\ \dot{\lambda}_3 + y^2 \ddot{y}^1 + \lambda_2 y^1 = 0, \end{cases}$$

$$x \in SO(3), y^i, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3.$$





## Capítulo 6

# Problemas de controlo óptimo em algebróides de Lie

A finalidade deste capítulo é enquadrar os problemas de controlo óptimo estudados nesta dissertação, no formalismo mais geral dos algebróides de Lie.

Nas primeiras duas secções recordaremos os conceitos e propriedades fundamentais da teoria dos algebróides de Lie. Destacaremos a definição de prolongamento de um fibrado relativamente a um algebróide de Lie. Na terceira secção apresentaremos, sob este ponto de vista mais abrangente, a noção de problema de controlo óptimo e a respectiva descrição geométrica da dinâmica, generalizando os resultados das secções C.1 e C.2. Como principal referência para estas primeiras secções destacamos o artigo de Martínez [58]. Para mais pormenores sobre a teoria básica dos algebróides de Lie consulte-se, por exemplo, [30, 53, 54].

A quarta secção é dedicada à exposição de alguns exemplos de problemas de controlo óptimo em algebróides de Lie para o corpo rígido livre, que fazem parte de uma série de exemplos do trabalho de Abrunheiro *et al* [4]. Por fim, abordaremos, no contexto dos algebróides de Lie, o problema de controlo óptimo do capítulo 5 (problema este que tem como exemplo trivial, recorde-se, o caso dos polinómios cúbicos do capítulo 2).

## 6.1 Algebróides de Lie: definições e propriedades básicas

Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ . Denotemos por  $C^\infty(M)$  o conjunto das funções reais suaves definidas em  $M$  e por  $\mathcal{X}(M)$  o  $C^\infty$ -módulo dos campos de vectores suaves em  $M$ . Consideremos ainda um fibrado vectorial  $E$  sobre  $M$  com aplicação projecção  $\pi : E \rightarrow M$  e o  $C^\infty(M)$ -módulo  $Sec(E)$  das secções de  $E$ .

**Definição 6.1.1.** *Uma estrutura de algebróide de Lie no fibrado vectorial  $E$  é dada por uma estrutura de álgebra de Lie em  $Sec(E)$ ,  $(Sec(E), [\cdot, \cdot]_E)$ , junto com um homomorfismo  $\rho : E \rightarrow TM$  de fibrados vectoriais, tal que a seguinte condição de compatibilidade (conhecida como identidade de Leibniz) é satisfeita*

$$[\sigma_1, f\sigma_2]_E = f[\sigma_1, \sigma_2]_E + (\rho(\sigma_1)f)\sigma_2,$$

onde  $f \in C^\infty(M)$ ,  $\sigma_1, \sigma_2 \in Sec(E)$  e  $\rho(\sigma)$  denota o campo de vectores em  $M$  definido por  $\rho(\sigma)(x) = \rho(\sigma(x))$ , para cada  $x \in M$  e com  $\sigma \in Sec(E)$ .

O terno  $(E, \rho, [\cdot, \cdot]_E)$  designa-se por *algebróide de Lie sobre  $M$*  e pode ser representado simplesmente por  $E$ . O parêntesis  $[\cdot, \cdot]_E$  é apenas denotado por  $[\cdot, \cdot]$ , quando não há ambiguidade de sentido. A aplicação  $\rho$  diz-se a *âncora do algebróide de Lie*.

Se  $(E, \rho, [\cdot, \cdot]_E)$  é um algebróide de Lie sobre  $M$ , da condição de compatibilidade e da identidade de Jacobi, facilmente se deduz que a aplicação  $\sigma \in Sec(E) \mapsto \rho(\sigma) \in \mathcal{X}(M)$  define um homomorfismo entre as álgebras de Lie  $(Sec(E), [\cdot, \cdot]_E)$  e  $(\mathcal{X}(M), [\cdot, \cdot])$ , que denotamos também por  $\rho$ , onde  $[\cdot, \cdot]$  é o parêntesis de Lie usual de campos de vectores (ver exemplo B.1.13). Isto é,  $\rho([\sigma_1, \sigma_2]_E) = [\rho(\sigma_1), \rho(\sigma_2)]$ , para  $\sigma_1, \sigma_2 \in Sec(E)$ .

No contexto da mecânica, torna-se útil pensar num algebróide de Lie  $E$  sobre  $M$  como uma generalização do fibrado tangente de  $M$ . Um elemento  $a \in E$  é tido como uma velocidade generalizada e a sua imagem pela aplicação âncora é a velocidade usual  $\rho(a) = v \in T_{\pi(a)}M$ .

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\rho} & TM \\ \pi \downarrow & \swarrow \pi_M & \\ M & & \end{array} .$$

**Definição 6.1.2.** *Uma curva  $a : [t_0, t_1] \rightarrow E$  num algebróide de Lie  $E$  diz-se admissível se  $\dot{s}(t) = \rho(a(t))$ , para todo  $t \in [t_0, t_1]$ , com  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$  e onde  $s = \pi \circ a$  é a curva base. Denotamos por  $\text{Adm}(E)$  o espaço das curvas admissíveis.*

Apresentamos a seguir três exemplos básicos de algebróides de Lie.

**Exemplo 6.1.3.** *O fibrado tangente  $TM$  de uma variedade diferenciável  $M$  é um algebróide de Lie sobre  $M$ . Neste caso, o parêntesis de Lie é dado pelo parêntesis de Lie usual de campos de vectores (ver exemplo B.1.13) e a sua âncora é a aplicação identidade.*

**Exemplo 6.1.4.** *Uma álgebra de Lie de dimensão finita é um algebróide de Lie sobre um ponto, cuja âncora é nula e o parêntesis de Lie das secções coincide com o da álgebra de Lie considerada.*

**Exemplo 6.1.5.** *Seja  $D$  um subfibrado integrável de uma variedade  $M$ , isto é,  $D$  é um subfibrado vectorial do fibrado tangente  $TM$  estável segundo o parêntesis usual de campos de vectores em  $M$ . O subfibrado  $D$  é um algebróide de Lie sobre  $M$  (a projecção de  $D$  é a restrição a  $D$  da projecção de  $TM$ ). A estrutura de álgebra de Lie é a restrição a  $D$  da estrutura de álgebra de Lie de campos de vectores em  $M$  (por isso o subfibrado  $D$  tem de ser integrável, de forma a definir uma subálgebra) e a aplicação âncora é a injecção natural  $D \hookrightarrow TM$ . Este é um exemplo de clara importância para sistemas mecânicos com restrições holónomas.*

A estrutura de um algebróide de Lie  $E$  sobre  $M$  pode ser descrita em termos de coordenadas locais. Um sistema de coordenadas locais  $(x^1, \dots, x^n)$  em  $M$  e uma base local  $\{e_1, \dots, e_r\}$  de secções em  $E$ , determinam um sistema de coordenadas locais  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^r)$  no algebróide de Lie  $E$ , onde  $y^\alpha(a)$  é a  $\alpha$ -coordenada de  $a \in E$  na base de secções dada,  $\alpha = 1, \dots, r$ . A âncora de  $E$  e o parêntesis de Lie em  $\text{Sec}(E)$  são localmente determinadas pelas funções suaves  $\rho_\alpha^i$  e  $C_{\beta\gamma}^\alpha$  em  $M$ , designadas por *funções de estrutura do algebróide de Lie* associadas à base local de secções escolhida,

dadas por

$$\rho(e_\alpha) = \sum_{i=1}^n \rho_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{e} \quad [e_\alpha, e_\beta] = \sum_{\gamma=1}^r C_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, r.$$

As funções de estrutura do algebróide de Lie satisfazem determinadas relações que derivam da própria definição de algebróide. Assim, o facto de  $\rho$  ser um homomorfismo de álgebras de Lie traduz-se pelas equações

$$\sum_{j=1}^n \left( \rho_\alpha^j \frac{\partial \rho_\beta^i}{\partial x^j} - \rho_\beta^j \frac{\partial \rho_\alpha^i}{\partial x^j} \right) = \sum_{\gamma=1}^r C_{\alpha\beta}^\gamma \rho_\gamma^i, \quad (6.1.1)$$

para quaisquer  $1 \leq \alpha, \beta \leq r$  e  $1 \leq i \leq n$ . Por outro lado, das identidades de Leibniz e de Jacobi obtêm-se as seguintes equações

$$\sum_{i=1}^n \left( \rho_\alpha^i \frac{\partial C_{\beta\gamma}^\nu}{\partial x^i} + \rho_\beta^i \frac{\partial C_{\gamma\alpha}^\nu}{\partial x^i} + \rho_\gamma^i \frac{\partial C_{\alpha\beta}^\nu}{\partial x^i} \right) + \sum_{\mu=1}^r \left( C_{\beta\gamma}^\mu C_{\alpha\mu}^\nu + C_{\gamma\alpha}^\mu C_{\beta\mu}^\nu + C_{\alpha\beta}^\mu C_{\gamma\mu}^\nu \right) = 0, \quad (6.1.2)$$

para quaisquer  $1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \nu \leq r$ . As equações (6.1.1) e (6.1.2) designam-se por *equações de estrutura do algebróide de Lie*.

Como já referimos, um algebróide de Lie é um objecto geométrico similar ao fibrado tangente. Pensamos num algebróide de Lie  $E$  sobre  $M$ , como sendo um novo fibrado tangente para  $M$ . As secções de  $E$  desempenham um papel análogo ao dos campos de vectores em  $M$ . É assim natural que se generalizem para os algebróides de Lie outras ferramentas geométricas, tais como as que se descrevem de seguida.

Seja  $E$  um algebróide de Lie sobre a variedade diferenciável  $M$ , com aplicação âncora  $\rho : E \rightarrow TM$  e onde denotamos a projecção do fibrado  $E$  por  $\pi : E \rightarrow M$ .

- Uma 1-forma  $\omega$  em  $E$  é uma secção do fibrado dual  $E^*$  de  $E$ , ou seja, uma aplicação  $\omega : M \rightarrow E^*$  tal que  $\nu \circ \omega = id_M$ , onde  $\nu : E^* \rightarrow M$  representa a projecção do fibrado  $E^*$ .
- Uma  $p$ -forma  $\omega$  em  $E$  é uma secção do fibrado exterior  $\wedge^p(E^*)$ , ou seja, uma aplicação  $\omega : M \rightarrow \underbrace{E^* \times \dots \times E^*}_p \text{ vezes}$  tal que  $\nu \circ \omega = id_M$ , onde agora  $\nu$  representa

a projecção canónica do fibrado  $\bigwedge^p(E^*)$ . Como é óbvio, em alternativa podemos considerar  $\omega : \underbrace{Sec(E) \times \cdots \times Sec(E)}_{p \text{ VEZES}} \rightarrow C^\infty(M)$ ,  $p \geq 1$ .

Uma 0-forma em  $E$  define-se como uma função em  $M$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

- A diferenciação exterior  $d$  num algebróide  $E$  é o operador que associa  $p$ -formas a  $(p + 1)$ -formas

$$d : Sec \left( \bigwedge^p(E^*) \right) \longrightarrow Sec \left( \bigwedge^{p+1}(E^*) \right)$$

definido de acordo com o seguinte

$$\begin{aligned} d\omega(\sigma_1, \dots, \sigma_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \rho(\sigma_i) (\omega(\sigma_1, \dots, \hat{\sigma}_i, \dots, \sigma_{p+1})) + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} \omega([\sigma_i, \sigma_j], \sigma_1, \dots, \hat{\sigma}_i, \dots, \hat{\sigma}_j, \dots, \sigma_{p+1}), \end{aligned}$$

para  $\omega \in Sec(\bigwedge^p(E^*))$ ,  $\sigma_1, \dots, \sigma_{p+1} \in Sec(E)$  e onde o símbolo  $\hat{\sigma}_i$  significa a omissão da respectiva secção. Em particular, se considerarmos uma função suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , temos  $df(\sigma) = \rho(\sigma)f$ , para  $\sigma \in Sec(E)$ . Localmente,

$$dx^i = \sum_{\alpha=1}^r \rho_\alpha^i e^\alpha \quad \text{e} \quad de^\gamma = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^r C_{\alpha\beta}^\gamma e^\alpha \wedge e^\beta,$$

para  $i = 1, \dots, n$ ,  $\gamma = 1, \dots, r$  e onde  $\{e^1, \dots, e^r\}$  é a base dual de  $\{e_1, \dots, e_r\}$ .

- Uma estrutura simpléctica  $\omega$  em  $E$  é uma secção de  $\bigwedge^2(E^*)$  não degenerada e fechada relativamente ao operador  $d$ , isto é,  $d\omega = 0$ .

## 6.2 Prolongamento de um fibrado relativamente a um algebróide de Lie

Definimos agora o conceito de prolongamento de um fibrado relativamente a um algebróide de Lie, conceito este que tem a capacidade de possuir as estruturas geométricas apropriadas para a descrição da mecânica (Lagrangiana ou Hamiltoniana) no contexto dos algebróides de Lie. Sejam

- $(E, \rho, [\cdot, \cdot])$  um algebróide de Lie sobre uma variedade diferenciável  $M$ , com a projecção do fibrado  $E$  denotada por  $\pi : E \rightarrow M$ .
- $P$  um fibrado  $M$  com projecção  $\nu : P \rightarrow M$ .

Para qualquer ponto  $p \in P$  consideramos o espaço vectorial

$$\mathcal{T}_p^E P = \{(b, v) \in E_x \times T_p P : \rho(b) = T_p \nu(v)\},$$

onde  $T\nu : TP \rightarrow TM$  é a aplicação tangente a  $\nu$  e  $\nu(p) = x$ . O conjunto

$$\mathcal{T}^E P = \bigcup_{p \in P} \mathcal{T}_p^E P$$

tem uma estrutura natural de fibrado vectorial sobre o fibrado  $P$ , com projecção dada por

$$\pi_P^E : \mathcal{T}^E P \rightarrow P, (b, v) \mapsto \pi_P(v),$$

onde  $\pi_P : TP \rightarrow P$  é a projecção canónica do fibrado tangente  $TP$  sobre  $P$ . Isto é, a cada  $(b, v) \in \mathcal{T}_p^E P$  a projecção  $\pi_P^E$  faz corresponder o elemento  $p$ . Neste sentido, um elemento  $(b, v) \in \mathcal{T}_p^E P$  é frequentemente denotado por  $(p, b, v)$ . Portanto, temos três projecções naturais: cada elemento  $(p, b, v) \in \mathcal{T}^E P$  é projectado através de  $\pi_P^E$  no primeiro factor,  $\pi_P^E(p, b, v) = p$ ; é projectado no segundo factor por uma aplicação  $p_2 : \mathcal{T}^E P \rightarrow E$ ,  $(p, b, v) \mapsto b$ ; e ainda, no terceiro factor, por uma outra aplicação, que é relevante para o que se segue, denotada por  $\rho^1 : \mathcal{T}^E P \rightarrow TP$ ,  $(p, b, v) \mapsto v$ . Podemos assim, considerar o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \nearrow \pi_P^E & \uparrow \pi_P \\ \mathcal{T}^E P & \xrightarrow{\rho^1} & TP \\ \downarrow p_2 & & \downarrow T\nu \\ E & \xrightarrow{\rho} & TM \end{array} .$$

**Definição 6.2.1.** *O fibrado vectorial  $\mathcal{T}^E P$  diz-se o prolongamento de  $P$  relativamente a  $E$  ou  $E$ -fibrado tangente a  $P$ .*

**Definição 6.2.2.** *O prolongamento  $\mathcal{T}^E E$  do fibrado  $E$  relativamente ao algebróide de Lie  $E$  diz-se o prolongamento de  $E$  e denota-se simplesmente por  $\mathcal{T}E$ .*

O fibrado vectorial  $\mathcal{T}^E P$ , acima descrito, pode ser munido com uma estrutura de algebróide de Lie ([57]):

- A âncora  $\rho^1 : \mathcal{T}^E P \rightarrow TP$  deste algebróide é a projecção no terceiro factor, ou seja,  $\rho^1(p, b, v) = v$ , para cada  $(p, b, v) \in \mathcal{T}^E P$ .
- O parêntesis nas secções de  $\mathcal{T}^E P$  é definido no âmbito das denominadas secções projectáveis: uma secção  $Z \in Sec(\mathcal{T}^E P)$  diz-se projectável se existir uma secção  $\sigma \in Sec(E)$  tal que  $Z(p) = (p, \sigma(\nu(p)), U(p))$ , para todo  $p \in P$ , com  $U \in \mathcal{X}(P)$  tal que  $T\nu \circ U = \rho(\sigma) \circ \nu$ . Sejam  $Z_1$  e  $Z_2$  duas secções projectáveis de  $\mathcal{T}^E P$  definidas por  $Z_i(p) = (p, \sigma_i(\nu(p)), U_i(p))$ ,  $i = 1, 2$ . O parêntesis de Lie de  $Z_1$  e  $Z_2$  é dado, para cada  $p \in P$ , por

$$[Z_1, Z_2]_{\mathcal{T}^E P}(p) = (p, [\sigma_1, \sigma_2](\nu(p)), [U_1, U_2](p)).$$

O parêntesis de Lie de duas secções arbitrárias de  $\mathcal{T}^E P$  determina-se a partir do parêntesis precedente, uma vez que qualquer secção de  $\mathcal{T}^E P$  pode ser localmente escrita como uma combinação  $C^\infty(M)$ -linear de secções projectáveis.

Dado um sistema de coordenadas locais  $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^r)$  em  $E$  (associado ao sistema de coordenadas locais  $(x^1, \dots, x^n)$  em  $M$  e à base das secções  $\{e_1, \dots, e_r\}$  de  $E$ ) e um sistema de coordenadas  $(x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^s)$  em  $P$ , podemos definir uma base local  $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_r, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_s\}$  de secções de  $\mathcal{T}^E P$ , considerando

$$\mathcal{X}_\alpha(p) = \left( p, e_\alpha(\nu(p)), \sum_{i=1}^n \rho_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) \quad \text{e} \quad \mathcal{V}_A(p) = \left( p, 0, \frac{\partial}{\partial u^A} \Big|_p \right), \quad (6.2.1)$$

para  $\alpha = 1, \dots, r$  e  $A = 1, \dots, s$ . Se  $z = (p, b, v) \in \mathcal{T}^E P$ , com  $b = \sum_{\alpha=1}^r z^\alpha e_\alpha$  e  $v = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^r \rho_\alpha^i z^\alpha \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{A=1}^s v^A \frac{\partial}{\partial u^A}$ , então

$$z = \sum_{\alpha=1}^r z^\alpha \mathcal{X}_\alpha(p) + \sum_{A=1}^s v^A \mathcal{V}_A(p).$$

As secções verticais são as constituídas apenas por combinações lineares dos elementos  $\mathcal{V}_A$ ,  $A = 1, \dots, s$ . Temos ainda os seguintes factos:

- A aplicação âncora  $\rho^1$  aplicada a uma secção  $Z$  de  $\mathcal{T}^E P$  com expressão local  $Z = \sum_{\alpha=1}^r Z^\alpha \mathcal{X}_\alpha + \sum_{A=1}^s V^A \mathcal{V}_A$  é o campo de vectores em  $P$  dado por

$$\rho^1(Z) = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^r \rho_\alpha^i Z^\alpha \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{A=1}^s V^A \frac{\partial}{\partial u^A}. \quad (6.2.2)$$

- O parêntesis de Lie dos elementos da base é tal que

$$[\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta] = \sum_{\gamma=1}^r C_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{X}_\gamma, \quad [\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{V}_A] = 0 \quad \text{e} \quad [\mathcal{V}_A, \mathcal{V}_B] = 0, \quad (6.2.3)$$

para  $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, r$  e  $A, B = 1, \dots, s$ .

- O operador de diferenciação exterior é determinado pelas identidades

$$\begin{aligned} dx^i &= \sum_{\alpha=1}^r \rho_\alpha^i \mathcal{X}^\alpha, & du^A &= \mathcal{V}^A, \\ d\mathcal{X}^\gamma &= -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^r C_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{X}^\alpha \wedge \mathcal{X}^\beta, & d\mathcal{V}^A &= 0, \end{aligned}$$

para  $i = 1, \dots, n$ ,  $\gamma = 1, \dots, r$ ,  $A = 1, \dots, s$  e onde  $\{\mathcal{X}^1, \dots, \mathcal{X}^r, \mathcal{V}^1, \dots, \mathcal{V}^s\}$  é a base dual de  $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_r, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_s\}$ .

Seja  $E^*$  o fibrado dual de  $E$  com projecção natural  $\nu : E^* \rightarrow M$ . No âmbito da presente secção interessa-nos particularmente a situação em que  $P = E^*$ , ou seja, o **prolongamento  $\mathcal{T}^E E^*$  do fibrado  $E^*$  relativamente ao algebróide de Lie  $E$** . Portanto, consideramos o algebróide  $\mathcal{T}^E E^*$  que é um fibrado sobre  $E^*$  com projecção  $\pi_{E^*}^E : \mathcal{T}^E E^* \rightarrow E^*$ ,  $(\mu, b, w) \mapsto \mu$ , onde  $\mu \in E^*$ ,  $w \in T_\mu E^*$ ,  $b \in E_x$  e  $x \in M$ . Este caso torna-se interessante pelo facto de existir em  $\mathcal{T}^E E^*$  uma estrutura simpléctica canónica, ou seja, uma secção de  $\wedge^2 ((\mathcal{T}^E E^*)^*)$  não degenerada e fechada relativamente ao operador de diferenciação exterior  $d$  (ver final da secção anterior). Esta estrutura é definida de um modo similar ao usado na definição da forma simpléctica canónica no fibrado



cotangente de uma variedade. Define-se primeiro uma 1-forma  $\Theta \in \text{Sec}((\mathcal{T}^E E^*)^*)$ , considerando

$$\Theta(\mu, b, w) = \mu(b),$$

para cada  $(\mu, b, w) \in \mathcal{T}^E E^*$  (onde  $\mu \in E^*$ ,  $w \in T_\mu E^*$ ,  $b \in E_x$  e  $x \in M$ ). A forma canónica simpléctica de  $\mathcal{T}^E E^*$ ,  $\Omega \in \text{Sec}(\wedge^2((\mathcal{T}^E E^*)^*))$ , é dada por

$$\Omega = -d\Theta. \quad (6.2.4)$$

Considerando um sistema de coordenadas  $(x^1, \dots, x^n, \mu_1, \dots, \mu_r)$  em  $E^*$  e denotando por  $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_r, \mathcal{P}^1, \dots, \mathcal{P}^r\}$  a base local de secções de  $\mathcal{T}^E E^*$  associada ao sistema de coordenadas, os diferenciais das coordenadas e dos elementos da base são dados por

$$\begin{aligned} dx^i &= \sum_{\alpha=1}^r \rho_\alpha^i \mathcal{X}^\alpha, & d\mu_\alpha &= \mathcal{P}_\alpha, \\ d\mathcal{X}^\gamma &= -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^r C_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{X}^\alpha \wedge \mathcal{X}^\beta, & d\mathcal{P}_\alpha &= 0, \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

para  $i = 1, \dots, n$ ,  $\alpha, \gamma = 1, \dots, r$  e onde  $\{\mathcal{X}^1, \dots, \mathcal{X}^r, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r\}$  é a base dual da base das secções de  $\mathcal{T}^E E^*$  considerada. Além disso, temos  $\Theta = \sum_{\alpha=1}^r \mu_\alpha \mathcal{X}^\alpha$ . Como consequência, atendendo a (6.2.4) e (6.2.5), podemos escrever

$$\Omega = \sum_{\alpha=1}^r \mathcal{X}^\alpha \wedge \mathcal{P}_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^r \mu_\gamma C_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{X}^\alpha \wedge \mathcal{X}^\beta. \quad (6.2.6)$$

Dizemos que  $(\mathcal{T}^E E^*, \Omega)$  é um algebróide de Lie simpléctico. Quando temos um algebróide de Lie simpléctico, podemos definir um sistema dinâmico para qualquer função na base desse algebróide. No caso particular que estamos a considerar, se  $F \in C^\infty(E^*)$  (0-forma em  $\mathcal{T}^E E^*$ ), então existe uma única secção  $\sigma_F$  de  $\mathcal{T}^E E^*$  tal que

$$i_{\sigma_F} \Omega = dF, \quad (6.2.7)$$

onde  $(i_{\sigma_F} \Omega)(\sigma) = \Omega(\sigma_F, \sigma)$ , para qualquer secção  $\sigma$  de  $\mathcal{T}^E E^*$ . A secção  $\sigma_F$  de  $\mathcal{T}^E E^*$  solução dos sistema dinâmico (6.2.7) diz-se a *secção Hamiltoniana definida por F* e o campo de vectores Hamiltoniano  $X_F = \rho^1(\sigma_F)$  é designado por *campo de vectores Hamiltoniano definido por F*.

Importa ainda considerar o caso particular do **prolongamento**  $\mathcal{T}^E(\mathbf{E}^* \times_M \mathbf{B})$  do **fibrado produto**  $\mathbf{P} = \mathbf{E}^* \times_M \mathbf{B}$  **relativamente ao algebróide de Lie**  $\mathbf{E}$ , onde  $E^* \times_M B$  é o fibrado produto sobre  $M$  de  $E^*$  e de um outro fibrado  $B$  sobre  $M$ . Se  $(x^1, \dots, x^n, \mu_1, \dots, \mu_r, u^1, \dots, u^m)$  representa um sistema de coordenadas locais em  $E^* \times_M B$ , denotamos por  $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_r, \mathcal{P}^1, \dots, \mathcal{P}^r, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_m\}$  a base local de secções de  $\mathcal{T}^E(E^* \times_M B)$ . Nesta situação, o operador de diferenciação exterior é tal que

$$\begin{aligned} dx^i &= \sum_{\alpha=1}^r \rho_{\alpha}^i \mathcal{X}^{\alpha}, & d\mu_{\alpha} &= P_{\alpha}, & du^A &= \mathcal{V}^A, \\ d\mathcal{X}^{\gamma} &= -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^r C_{\alpha\beta}^{\gamma} \mathcal{X}^{\alpha} \wedge \mathcal{X}^{\beta}, & d\mathcal{P}_{\alpha} &= 0, & d\mathcal{V}^A &= 0, \end{aligned}$$

para  $i = 1, \dots, n$ ,  $A = 1, \dots, m$ ,  $\alpha, \gamma = 1, \dots, r$ , e onde estamos a representar por  $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_r, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r, \mathcal{V}^1, \dots, \mathcal{V}^m\}$  a base dual da base das secções acima considerada.

Por conseguinte, o diferencial de uma função  $h : E^* \times_M B \rightarrow \mathbb{R}$  escreve-se como

$$dh = \sum_{\alpha=1}^r \sum_{i=1}^n \rho_{\alpha}^i \frac{\partial h}{\partial x^i} \mathcal{X}^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial h}{\partial \mu_{\alpha}} \mathcal{P}_{\alpha} + \sum_{A=1}^m \frac{\partial h}{\partial u^A} \mathcal{V}^A. \quad (6.2.8)$$

**Definição 6.2.3.** *Sejam  $(E, \rho, [\cdot, \cdot])$  um algebróide de Lie (onde  $\pi : E \rightarrow M$  é a projecção do fibrado  $E$ ) sobre uma variedade diferenciável  $M$ ,  $P$  e  $P'$  dois fibrados gerais sobre  $M$  (com projecções  $\nu : P \rightarrow M$  e  $\nu' : P' \rightarrow M$ , respectivamente) e  $\Psi : P \rightarrow P'$  um morfismo fibrado sobre a identidade em  $M$*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Psi} & P' \\ \nu \downarrow & & \downarrow \nu' \\ M & \xrightarrow{id} & M \end{array}.$$

*Define-se o prolongamento de  $\Psi$  como sendo o morfismo de fibrados vectoriais*

$$\mathcal{T}\Psi : \mathcal{T}^E P \rightarrow \mathcal{T}^E P',$$

*dado por  $\mathcal{T}\Psi(p, b, v) = (\Psi(p), b, T\Psi(v))$ , para cada  $(p, b, v) \in \mathcal{T}^E P$ .*

Por exemplo, consideremos o fibrado produto  $E^* \times_M B$  (como anteriormente) e  $pr_1 : E^* \times_M B \rightarrow E^*$  a projecção que sabemos ser fibrada sobre a identidade em  $M$ . O

prolongamento de  $pr_1$  é o morfismo de fibrados vectoriais  $\mathcal{T}pr_1 : \mathcal{T}^E(E^* \times_M B) \rightarrow \mathcal{T}^E E^*$  definido de acordo com o acima exposto.

Seja agora  $\sigma$  uma secção de  $\mathcal{T}^E E^*$  ao longo de  $pr_1$ , ou seja, tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} E^* \times_M B & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{T}^E E^* \\ & \searrow pr_1 & \downarrow \pi_{E^*}^E \\ & & E^* \end{array}$$

O operador  $i_\sigma$  será utilizado na próxima secção com o seguinte sentido: se  $\omega$  é uma secção de  $\bigwedge^p ((\mathcal{T}^E E^*)^*)$ , então  $i_\sigma \omega$  é a secção de  $\bigwedge^{p-1} ((\mathcal{T}^E(E^* \times_M B))^*)$  dada por

$$(i_\sigma \omega)_{(x, \mu, u)}(a_1, \dots, a_{p-1}) = \omega_{pr_1(x, \mu, u)}(\sigma(x, \mu, u), \mathcal{T}pr_1(a_1), \dots, \mathcal{T}pr_1(a_{p-1})), \quad (6.2.9)$$

para qualquer  $(x, \mu, u) \in E^* \times_M B$  e  $a_1, \dots, a_{p-1} \in \left(\pi_{E^* \times_M B}^E\right)^{-1}(x, \mu, u)$ . Note-se que, considerando a estrutura simpléctica canónica  $\Omega$  definida por (6.2.4) e uma função  $h : E^* \times_M B \rightarrow \mathbb{R}$ , tem-se que  $i_\sigma \Omega - dh$  é uma secção do fibrado dual de  $\mathcal{T}^E(E^* \times_M B)$ .

### 6.3 Problema de controlo óptimo num algebróide de Lie

Nesta secção, generalizamos para o contexto dos algebróides de Lie, o conceito de sistema de controlo óptimo da secção C.1 e a respectiva abordagem Hamiltoniana geométrica da secção C.2. Baseamo-nos essencialmente em [58].

Seja  $E$  um algebróide de Lie sobre uma variedade  $M$  (onde  $\pi : E \rightarrow M$  é a projecção do fibrado  $E$ ), com âncora  $\rho : E \rightarrow TM$ . Seja ainda  $B$  uma variedade fibrada sobre  $M$  com aplicação projecção  $\tau : B \rightarrow M$ .

Um *sistema de controlo* no algebróide de Lie  $E$ , com espaço de controlos  $B$  é descrito como sendo uma secção  $\sigma : B \rightarrow E$  ao longo de  $\tau$  (isto é, tal que é satisfeita a igualdade  $\pi \circ \sigma = \tau$ ). Uma *trajectória do sistema de controlo* é uma curva integral do campo de

vectores  $\rho \circ \sigma : B \rightarrow TM$  ao longo de  $\tau$  (o campo de vectores é tal que  $\pi_M \circ \rho \circ \sigma = \tau$ ).

$$\begin{array}{ccccc}
 B & \xrightarrow{\sigma} & E & \xrightarrow{\rho} & TM \\
 & \searrow \tau & \downarrow \pi & \swarrow \pi_M & \\
 & & M & & 
 \end{array} \quad (6.3.1)$$

Isto é,  $\gamma : [0, T] \rightarrow B$ , com  $T \in \mathbb{R}^+$ , é uma trajectória do sistema de controlo se satisfaz

$$\frac{d}{dt}(\tau \circ \gamma)(t) = (\rho \circ \sigma)(\gamma(t)).$$

Por vezes, referimo-nos às equações anteriores como sendo o sistema de controlo.

Dada uma função custo  $L : B \rightarrow \mathbb{R}$ , o *problema de controlo óptimo* consiste em minimizar o integral de  $L$  sobre um certo conjunto de trajectórias do sistema que satisfazem determinadas condições iniciais e finais fixas no espaço de estados  $M$ . Adaptamos agora a descrição Hamiltoniana da secção C.2. Consideramos os seguintes objectos:

- A função Hamiltoniana  $h : E^* \times_M B \rightarrow \mathbb{R}$ , definida, para cada  $(x, \mu, u) \in E^* \times_M B$  (com  $\mu \in E_x^*$  e  $(x, u) \in B$  tal que  $\tau(x, u) = x$ ), por

$$h(x, \mu, u) = \mu[\sigma(x, u)] - L(x, u). \quad (6.3.2)$$

- A projecção canónica  $pr_1 : E^* \times_M B \rightarrow E^*$ .
- A forma simpléctica canónica  $\Omega$  do algebróide de Lie  $\mathcal{T}^E E^*$  sobre  $E^*$  (prolongamento do fibrado  $E^*$  relativamente ao algebróide  $E$ ), ou seja,  $\Omega$  é a secção de  $\Lambda^2((\mathcal{T}^E E^*)^*)$  definida por (6.2.4).

A secção Hamiltoniana  $\sigma_h$  definida por  $h$  é uma secção de  $\mathcal{T}^E E^*$  ao longo de  $pr_1$  (definida num subconjunto de  $E^* \times_M B$ ) que satisfaz o sistema dinâmico

$$i_{\sigma_h} \Omega = dh, \quad (6.3.3)$$

onde o operador  $i_{\sigma_h}$  é definido de acordo com (6.2.9). Denotamos por  $W$  a variedade onde o sistema (6.3.3) admite solução (quando esta existe). As *trajectórias críticas* são as curvas integrais de  $\rho^1(\sigma_h)$ , onde  $\rho^1$  é a âncora do algebróide de Lie  $\mathcal{T}^E E^*$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 W \subset E^* \times_M B & \xrightarrow{\sigma_h} & \mathcal{T}^E E^* & \xrightarrow{\rho^1} & TE^* \\
 & \searrow_{pr_1} & \downarrow \pi_{E^*}^E & \swarrow_{\pi_{E^*}} & \\
 & & E^* & & 
 \end{array}$$

Seja  $(x^1, \dots, x^n, \mu_1, \dots, \mu_r)$  um sistema de coordenadas em  $E^*$  e consideremos a base local induzida  $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_r, \mathcal{P}^1, \dots, \mathcal{P}^r\}$  de secções de  $\mathcal{T}^E E^*$ . Suponhamos que  $\sigma_h = \sum_{\alpha=1}^r A^\alpha \mathcal{X}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^r B_\alpha \mathcal{P}^\alpha$ , então, atendendo à expressão local (6.2.6) de  $\Omega$ , temos

$$i_{\sigma_h} \Omega = \sum_{\alpha=1}^r A^\alpha \mathcal{P}_\alpha - \sum_{\alpha=1}^r \left( B_\alpha + \sum_{\beta, \gamma=1}^r \mu_\gamma C_{\alpha\beta}^\gamma A^\beta \right) \mathcal{X}^\alpha, \quad (6.3.4)$$

onde  $\{\mathcal{X}^1, \dots, \mathcal{X}^r, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r\}$  é a base dual da base das secções de  $\mathcal{T}^E E^*$  considerada. Por outro lado, note-se que o Hamiltoniano  $h : E^* \times_M B \rightarrow \mathbb{R}$  pode ser visto como uma 0-forma no algebróide de Lie  $\mathcal{T}^E(E^* \times B)$  sobre  $E^* \times B$  (prolongamento do fibrado  $E^* \times B$  relativamente ao algebróide  $E$ , caso considerado no final da secção anterior). Assim, atendendo à expressão local de  $dh$  dada por (6.2.8) e à expressão (6.3.4), concluímos que a solução do sistema dinâmico (6.3.3) é

$$\sigma_h = \sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial h}{\partial \mu_\alpha} \mathcal{X}_\alpha - \sum_{\alpha=1}^r \left[ \sum_{i=1}^n \rho_\alpha^i \frac{\partial h}{\partial x^i} + \sum_{\beta, \gamma=1}^r \mu_\gamma C_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial h}{\partial \mu_\beta} \right] \mathcal{P}^\alpha,$$

definida no subconjunto  $W \subset E^* \times_M B$ , que é dado localmente por

$$\frac{\partial h}{\partial u^A} = 0, \quad A = 1, \dots, m, \quad (6.3.5)$$

onde  $(x^1, \dots, x^n, \mu_1, \dots, \mu_r, u^1, \dots, u^m)$  é o sistema de coordenadas locais de  $E^* \times B$ .

O campo de vectores  $\rho^1(\sigma_h)$  é

$$\rho^1(\sigma_h) = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^r \rho_\alpha^i \frac{\partial h}{\partial \mu_\alpha} \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{\alpha=1}^r \left[ \sum_{i=1}^n \rho_\alpha^i \frac{\partial h}{\partial x^i} + \sum_{\beta, \gamma=1}^r \mu_\gamma C_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial h}{\partial \mu_\beta} \right] \frac{\partial}{\partial \mu_\alpha}$$

e as equações para as trajectórias críticas são

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^i = \sum_{\alpha=1}^r \rho_\alpha^i \frac{\partial h}{\partial \mu_\alpha} \\ \dot{\mu}_\alpha = - \sum_{i=1}^n \rho_\alpha^i \frac{\partial h}{\partial x^i} - \sum_{\beta, \gamma=1}^r \mu_\gamma C_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial h}{\partial \mu_\beta} \\ \frac{\partial h}{\partial u^A} = 0, \end{array} \right. \quad (6.3.6)$$

para  $i = 1, \dots, n$ ,  $\alpha = 1, \dots, r$  e  $A = 1, \dots, m$ .

Facilmente se verifica que nos casos em que conseguirmos escrever  $\mu_\alpha = \sum_{i=1}^n p_i \rho_\alpha^i$ ,  $\alpha = 1, \dots, r$ , as equações acima reduzem-se às equações críticas para o sistema de controlo  $Y = \rho(\sigma)$  em  $TM$  e função custo  $L$ .

## 6.4 Exemplos: movimento rotacional do corpo rígido livre

Nesta secção são apresentados, a título ilustrativo, alguns exemplos de problemas de controlo óptimo em algebróides de Lie relacionados com o movimento rotacional do corpo rígido livre. Consideramos duas situações diferentes, o movimento do corpo rígido sem restrições e o mesmo sistema com determinadas restrições. Além disso, dentro de cada um destes casos, analisamos o problema cinemático e o dinâmico. Estes exemplos foram publicados por Abrunheiro *et al* [4] (os exemplos de problemas sem restrições fazem parte apenas da pré-publicação indicada após esta referência bibliográfica).

A variedade de configuração é o grupo de Lie das rotações  $SO(3)$  e escolhemos como sistema de coordenadas locais os ângulos de Euler de tipo-I que denotamos por  $(x^1, x^2, x^3)$ . Consideramos a estrutura de algebróide de Lie canónica de  $TSO(3)$ , cuja a âncora é  $\rho \equiv id_{TSO(3)}$ . Escolhemos a base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de secções do fibrado  $TSO(3)$  dada por

$$\begin{aligned} e_1 &= \sec(x^2) \sin(x^3) \frac{\partial}{\partial x^1} + \cos(x^3) \frac{\partial}{\partial x^2} + \tan(x^2) \sin(x^3) \frac{\partial}{\partial x^3}, \\ e_2 &= \sec(x^2) \cos(x^3) \frac{\partial}{\partial x^1} - \sin(x^3) \frac{\partial}{\partial x^2} + \tan(x^2) \cos(x^3) \frac{\partial}{\partial x^3}, \\ e_3 &= \frac{\partial}{\partial x^3}. \end{aligned}$$

Assim, a estrutura de álgebra de Lie em  $Sec(TSO(3))$  é determinada pelas relações  $[e_1, e_2] = e_3$ ,  $[e_2, e_3] = e_1$  e  $[e_3, e_1] = e_2$ . Atendendo às coordenadas e à base escolhidas,

a âncora e o parêntesis de Lie são determinados localmente pelas funções

$$\begin{aligned} \rho_1^1 &= \sec(x^2) \sin(x^3), & \rho_1^2 &= \cos(x^3), & \rho_1^3 &= \tan(x^2) \sin(x^3), \\ \rho_2^1 &= \sec(x^2) \cos(x^3), & \rho_2^2 &= -\sin(x^3), & \rho_2^3 &= \tan(x^2) \cos(x^3), \\ \rho_3^1 &= 0, & \rho_3^2 &= 0, & \rho_3^3 &= 1; \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

e

$$C_{12}^3 = -C_{21}^3 = C_{23}^1 = -C_{32}^1 = C_{31}^2 = -C_{13}^2 = 1. \quad (6.4.2)$$

Note-se que as componentes da velocidade de uma curva  $x$  em  $SO(3)$  em relação à base de secções escolhidas são tais que

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= y^1 \sec(x^2) \sin(x^3) + y^2 \sec(x^2) \cos(x^3) \\ \dot{x}^2 &= y^1 \cos(x^3) - y^2 \sin(x^3) \\ \dot{x}^3 &= y^1 \tan(x^2) \sin(x^3) + y^2 \tan(x^2) \cos(x^3) + y^3, \end{aligned}$$

o que é equivalente a escrever

$$\begin{aligned} y^1 &= \dot{x}^1 \cos(x^2) \sin(x^3) + \dot{x}^2 \cos(x^3) \\ y^2 &= \dot{x}^1 \cos(x^2) \cos(x^3) - \dot{x}^2 \sin(x^3) \\ y^3 &= -\dot{x}^1 \sin(x^2) + \dot{x}^3, \end{aligned}$$

ou seja,  $y^1$ ,  $y^2$  e  $y^3$  são as componentes da velocidade angular do corpo (que constituem um conjunto de quase-velocidades, consultar [59, 60]).

**Exemplo 6.4.1** (Problema cinemático sem restrições). *Para este problema vamos assumir que os controlos são todas as componentes da velocidade angular:  $y^1 = u^1$ ,  $y^2 = u^2$  e  $y^3 = u^3$ . O sistema de controlo é*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = u^1 \sec(x^2) \sin(x^3) + u^2 \sec(x^2) \cos(x^3) \\ \dot{x}^2 = u^1 \cos(x^3) - u^2 \sin(x^3) \\ \dot{x}^3 = u^1 \tan(x^2) \sin(x^3) + u^2 \tan(x^2) \cos(x^3) + u^3. \end{cases} \quad (6.4.3)$$

*Sob o ponto vista geométrico da secção anterior, o sistema é descrito por um diagrama do tipo (6.3.1), que neste caso é trivial:*

$$\begin{array}{ccccc} TSO(3) & \xrightarrow{id} & TSO(3) & \xrightarrow{id} & TSO(3) \\ & \searrow \pi_{SO(3)} & \downarrow \pi_{SO(3)} & \swarrow \pi_{SO(3)} & \\ & & SO(3) & & \end{array},$$

onde estamos a representar a aplicação identidade em  $TSO(3)$  por  $id$  e a projecção canónica natural do fibrado tangente por  $\pi_{SO(3)}$ .

Consideramos para função custo  $L : TSO(3) \rightarrow \mathbb{R}$  a energia cinética rotacional, ou seja,

$$L(x, u) = \frac{1}{2} [I_1(u^1)^2 + I_2(u^2)^2 + I_3(u^3)^2],$$

para  $(x, u) \in TSO(3)$ , onde  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  representam os três principais momentos de inércia do corpo. O Hamiltoniano para este problema é a função real  $h$  definida em  $T^*SO(3) \times_{SO(3)} TSO(3)$  por

$$h(x, \mu, u) = \sum_{i=1}^3 \mu_i u^i - L(x, u),$$

para  $(x, \mu, u) \in T^*SO(3) \times_{SO(3)} TSO(3)$ . Nas expressões apresentadas estamos a considerar os sistemas de coordenadas  $(x^1, x^2, x^3, u^1, u^2, u^3)$  e  $(x^1, x^2, x^3, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$  de, respectivamente,  $TSO(3)$  e  $T^*SO(3)$ ; associados, respectivamente, à base de secções  $\{e_1, e_2, e_3\}$  e à sua base dual  $\{e^1, e^2, e^3\}$ , ou seja,  $u = u^1 e_1 + u^2 e_2 + u^3 e_3 \in T_x SO(3)$  e  $\mu = \mu_1 e^1 + \mu_2 e^2 + \mu_3 e^3 \in T^*SO(3)$ . Além disso,  $(x^1, x^2, x^3, \mu_1, \mu_2, \mu_3, u^1, u^2, u^3)$  representa o sistema de coordenadas no produto fibrado  $T^*SO(3) \times_{SO(3)} TSO(3)$ . As condições de optimização (6.3.5) que definem a subvariedade  $W$  correspondem agora a

$$\mu_1 = I_1 u^1, \quad \mu_2 = I_2 u^2, \quad \mu_3 = I_3 u^3.$$

Usando as funções de estrutura (6.4.1) e (6.4.2) do algebróide  $TSO(3)$ , é simples de verificar que para o nosso problema, em  $W$  (considerando  $u^i = u^i(x, \mu)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ), as equações críticas (6.3.6) são dadas pelo sistema de controlo (6.4.3), junto com as equações

$$\begin{cases} \dot{\mu}_1 + \frac{I_3 - I_2}{I_2 I_3} \mu_2 \mu_3 = 0 \\ \dot{\mu}_2 + \frac{I_1 - I_3}{I_1 I_3} \mu_1 \mu_3 = 0 \\ \dot{\mu}_3 + \frac{I_2 - I_1}{I_1 I_2} \mu_1 \mu_2 = 0. \end{cases} \quad (6.4.4)$$

Note-se que as equações (6.4.4) são as clássicas equações de Euler do corpo rígido.



**Exemplo 6.4.2** (Problema dinâmico sem restrições). *Este problema é caracterizado como tendo por controlos todas as componentes da aceleração angular. O sistema de controlo é*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = y^1 \sec(x^2) \sin(x^3) + y^2 \sec(x^2) \cos(x^3) \\ \dot{x}^2 = y^1 \cos(x^3) - y^2 \sin(x^3) \\ \dot{x}^3 = y^1 \tan(x^2) \sin(x^3) + y^2 \tan(x^2) \cos(x^3) + y^3 \\ \dot{y}^1 = u^1 \\ \dot{y}^2 = u^2 \\ \dot{y}^3 = u^3. \end{cases} \quad (6.4.5)$$

Neste caso importa considerar o algebróide de Lie dado pelo prolongamento do algebróide de Lie  $TSO(3)$ ,  $TTSO(3)$  (ver definição 6.2.2). Como é do nosso conhecimento, este algebróide coincide com  $TTSO(3)$ . Portanto, sob o ponto de vista da secção anterior, temos:

- O algebróide  $E \equiv TTSO(3)$  fibrado sobre  $M \equiv TSO(3)$  (denotamos a projecção natural por  $\pi_{TSO(3)}$ ), cuja aplicação âncora é a identidade em  $TTSO(3)$  que denotamos por  $id$ . Consideramos a base de secções  $\{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3\}$  deste algebróide construída a partir de (6.2.1), com as coordenadas e base de secções anteriormente seleccionadas para o algebróide  $TSO(3)$ . Deste modo, temos

$$\mathcal{X}_i(x, y) = (x, y, e_i(x), e_i(x)) \quad e \quad \mathcal{V}_i(x, y) = \left( x, y, 0, \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{(x,y)} \right),$$

para cada  $(x, y) \in TSO(3)$  e com  $i = 1, 2, 3$ . As funções de estrutura deste algebróide de Lie, que representamos por  $\bar{\rho}_j^i$  e  $\bar{C}_{ij}^k$ ,  $1 \leq i, j, k \leq 6$ , em relação à base de secções considerada, são determinadas por relações do tipo (6.2.2) e (6.2.3). Efectuando os cálculos conclui-se que

$$\bar{\rho}_j^i = \begin{cases} \rho_j^i & \text{se } 1 \leq i, j \leq 3 \\ 1 & \text{se } i = j \quad \wedge \quad 3 < i, j \leq 6 \\ 0 & \text{nas outras situações,} \end{cases} \quad (6.4.6)$$

e

$$\bar{C}_{ij}^k = \begin{cases} C_{ij}^k & \text{se } 1 \leq i, j, k \leq 3 \\ 0 & \text{nas outras situações,} \end{cases} \quad (6.4.7)$$

onde  $\rho_j^i$  e  $C_{ij}^k$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$ , são as funções (6.4.1) e (6.4.2), respectivamente.

- O fibrado dos controlos é o fibrado tangente de ordem dois  $B \equiv T^2SO(3)$ , que sabemos ser uma variedade fibrada sobre  $TSO(3)$  com projecção  $\tau_2^1$  definida de acordo com (A.3.1). Cada elemento de  $T^2SO(3)$  é representado por um terno  $(x, y, u)$ , com  $(y, u) \in T_{(x,y)}TSO(3)$  e  $(x, y) \in TSO(3)$ .
- O sistema de controlo é determinado pela secção de  $TTSO(3)$  ao longo de  $\tau_2^1$  dada pela aplicação inclusão  $\sigma \equiv inc : T^2SO(3) \rightarrow TTSO(3)$ ,  $(x, y, u) \mapsto (x, y, y, u)$ .

O diagrama (6.3.1) para este sistema corresponde a

$$\begin{array}{ccccc} T^2SO(3) & \xrightarrow{inc} & TTSO(3) & \xrightarrow{id} & TTSO(3) \\ & \searrow \tau_2^1 & \downarrow \pi_{TSO(3)} & \swarrow \pi_{TSO(3)} & \\ & & TSO(3) & & \end{array} .$$

A função custo  $L : T^2SO(3) \rightarrow \mathbb{R}$  escolhida é a torção, ou seja, para cada elemento  $(x, y, u) \in T^2SO(3)$  temos

$$L(x, y, u) = \frac{1}{2} [(M_1)^2 + (M_2)^2 + (M_3)^2], \quad (6.4.8)$$

onde  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  são  $M_1 = I_1u^1 + (I_3 - I_2)y^2y^3$ ,  $M_2 = I_2u^2 + (I_1 - I_3)y^1y^3$  e  $M_3 = I_3u^3 + (I_2 - I_1)y^1y^2$ . Assim,

$$\begin{aligned} L(x, y, u) = & \frac{1}{2} [(I_1)^2(u^1)^2 + (I_2)^2(u^2)^2 + (I_3)^2(u^3)^2 + \\ & + 2I_1(I_3 - I_2)u^1y^2y^3 + 2I_2(I_1 - I_3)u^2y^1y^3 + 2I_3(I_2 - I_1)u^3y^1y^2 + \\ & + (I_3 - I_2)^2(y^2)^2(y^3)^2 + (I_1 - I_3)^2(y^1)^2(y^3)^2 + (I_2 - I_1)^2(y^1)^2(y^2)^2]. \end{aligned}$$

Note-se que  $(x^1, x^2, x^3, y^1, y^2, y^3, u^1, u^2, u^3)$  denota o sistema de coordenadas de  $T^2SO(3)$  associado à base de secções do algebróide  $TTSO(3)$ . Considerando agora o sistema de coordenadas  $(x^1, x^2, x^3, y^1, y^2, y^3, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \pi_1, \pi_2, \pi_3, u^1, u^2, u^3)$  no produto fibrado  $T^*TTSO(3) \times_{TSO(3)} T^2SO(3)$ , o Hamiltoniano é dado, para cada elemento  $(x, y, \mu, \pi, u)$  deste produto, por

$$h(x, y, \mu, \pi, u) = \sum_{i=1}^3 y^i \mu_i + \sum_{i=1}^3 \pi_i u^i - L(x, y, u).$$

As condições (6.3.5), ou seja,  $\partial h/\partial u^1 = \partial h/\partial u^2 = \partial h/\partial u^3 = 0$ , determinam a subvariedade  $W$ , condições estas que se traduzem por

$$\begin{aligned}\pi_1 &= (I_1)^2 u^1 + I_1(I_3 - I_2)y^2 y^3, \\ \pi_2 &= (I_2)^2 u^2 + I_2(I_1 - I_3)y^1 y^3, \\ \pi_3 &= (I_3)^2 u^3 + I_3(I_2 - I_1)y^1 y^2.\end{aligned}\tag{6.4.9}$$

Assim, em  $W$ , podemos especificar  $u^i = u^i(x, y, \pi)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Atendendo a (6.4.6) e (6.4.7), verifica-se que em  $W$ , o sistema correspondente a (6.3.6), para a situação que estamos a abordar é o seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^i = \sum_{j=1}^3 \rho_j^i \frac{\partial h}{\partial \mu_j} \\ \dot{y}^i = \frac{\partial h}{\partial \pi_i} \\ \dot{\mu}_i = - \sum_{j=1}^3 \rho_j^i \frac{\partial h}{\partial x^j} - \sum_{j,k=1}^3 \mu_k C_{ij}^k \frac{\partial h}{\partial \mu_j} \\ \dot{\pi}_i = - \frac{\partial h}{\partial y^i}, \end{array} \right.$$

o que atendendo à expressão do Hamiltoniano se torna equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^i = \sum_{j=1}^3 \rho_j^i y^j \\ \dot{y}^i = u^i \\ \dot{\mu}_i = - \sum_{j,k=1}^3 \mu_k C_{ij}^k y^j \\ \dot{\pi}_i = -\mu_i + \frac{\partial L}{\partial y^i}, \end{array} \right.$$

para  $i = 1, 2, 3$ . Fazendo uso de (6.4.1) e (6.4.2), conclui-se que este sistema é formado

pelas equações (6.4.5) e ainda por

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mu}_1 + \mu_3 y^2 - \mu_2 y^3 = 0 \\ \dot{\mu}_2 - \mu_3 y^1 + \mu_1 y^3 = 0 \\ \dot{\mu}_3 + \mu_2 y^1 - \mu_1 y^2 = 0 \\ \dot{\pi}_1 = \frac{M_2(M_2 - I_2 u^2) + M_3(M_3 - I_3 u^3)}{y^1} - \mu_1 \\ \dot{\pi}_2 = \frac{M_1(M_1 - I_1 u^1) + M_3(M_3 - I_3 u^3)}{y^2} - \mu_2 \\ \dot{\pi}_3 = \frac{M_1(M_1 - I_1 u^1) + M_2(M_2 - I_2 u^2)}{y^3} - \mu_3. \end{array} \right. \quad (6.4.10)$$

Note-se que as três primeiras equações do sistema (6.4.10) são equivalentes a escrever  $\dot{\mu} = \mu \times y$ . Por outro lado, das últimas três de (6.4.10), obtemos  $\dot{\pi} = \lambda - \mu$ , com  $\lambda$  uma função de  $y$  e  $\dot{y}$ , e onde estamos também a ter em consideração, as últimas três equações do sistema de controlo (6.4.5) (ou seja,  $\dot{y} = u$ ). Assim, conclui-se após alguns cálculos, que o sistema se pode exprimir como

$$\ddot{\pi} = \dot{\lambda} + \dot{\pi} \times y - \lambda \times y. \quad (6.4.11)$$

A equação acima é a equação (30) do trabalho de Maruskin e Bloch [60], onde os autores tratam da generalização das equações de Boltzmann-Hamel, para problemas de controlo de sistemas mecânicos não holónomos.

É importante analisar o caso especial do corpo rígido livre e completamente simétrico com  $I_1 = I_2 = I_3 = 1$ . Nesta situação, as equações de optimização (6.4.9) reduzem-se a  $\pi = u$ . Além disso,  $\dot{\pi} = -\mu$  e portanto  $\lambda = 0$ . Consequentemente, a equação (6.4.11) toma a forma

$$\ddot{y} = \dot{y} \times y,$$

que é a equação de Euler-Lagrange (4.2.2) dos polinómios cúbicos em  $SO(3)$ .

Refira-se que nas considerações dos últimos dois parágrafos, estamos a assumir as trivializações dos fibrados que envolvem este exemplo. Além disso,  $y, \pi, \mu, u$  e  $\lambda$  são elementos de  $\mathbb{R}^3$ , obtidos com base nos isomorfismos naturais que existem entre  $\mathbb{R}^3$  e os espaços  $\mathfrak{so}(3)$  e  $\mathfrak{so}(3)^*$ , ou seja, os isomorfismos (4.1.3) e (4.1.6).

Consideramos a seguir os problemas cinemático e dinâmico do corpo rígido com as restrições:

$$\dot{x}^1 \cos(x^2) \sin(x^3) + \dot{x}^2 \cos(x^3) = 0.$$

Podemos afirmar que estas restrições são determinadas pela distribuição  $D$  de  $SO(3)$  de dimensão 2 gerado pelos elementos  $e_2$  e  $e_3$ . A distribuição  $D$  é um subfibrado de  $TSO(3)$ , com projecção dada pela restrição a  $D$  da projecção canónica  $\pi_{SO(3)}$  do fibrado tangente  $TSO(3)$  em  $SO(3)$ , que será denotada por  $\pi|_D : D \rightarrow SO(3)$ .

**Exemplo 6.4.3** (Problema cinemático com restrições). *Vamos considerar um sistema com velocidade pertencente à distribuição  $D$  acima referida. Cada elemento de  $D$  é representado por um par  $(x, u)$ , onde  $u = u^2 e_2 + u^3 e_3 \in T_x SO(3)$  e  $x \in SO(3)$ . O sistema de coordenadas em  $D$  associado à base  $\{e_2, e_3\}$  é  $(x^1, x^2, x^3, u^2, u^3)$ . O sistema de controlo traduz-se por*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = u^2 \sec(x^2) \cos(x^3) \\ \dot{x}^2 = -u^2 \sin(x^3) \\ \dot{x}^3 = u^2 \tan(x^2) \cos(x^3) + u^3. \end{cases} \quad (6.4.12)$$

No contexto dos algebróides da secção anterior, escolhemos para fibrado dos controlos a distribuição  $B \equiv D$ . O sistema de controlo é determinado pela aplicação inclusão  $\sigma \equiv inc : D \hookrightarrow TSO(3)$  (secção ao longo de  $\tau \equiv \pi|_D$ ). Em termos de diagrama, temos

$$\begin{array}{ccccc} D & \xrightarrow{inc} & TSO(3) & \xrightarrow{id} & TSO(3) \\ & \searrow \pi|_D & \downarrow \pi_{SO(3)} & \swarrow \pi_{SO(3)} & \\ & & SO(3) & & \end{array} .$$

A função custo  $L : D \rightarrow \mathbb{R}$  corresponde à energia proporcionada pelos controlos, ou seja,

$$L(x, u) = \frac{1}{2} [I_2(u^2)^2 + I_3(u^3)^2],$$

para  $(x, u) \in D$ . Seja  $(x^1, x^2, x^3, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$  o sistema de coordenadas em  $T^*SO(3)$  associado à base dual da base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  e  $(x^1, x^2, x^3, \mu_1, \mu_2, \mu_3, u^2, u^3)$  o sistema de

coordenadas em  $T^*SO(3) \times_{SO(3)} D$ . O Hamiltoniano  $h : T^*SO(3) \times_{SO(3)} D \rightarrow \mathbb{R}$  neste caso é dado, localmente, por

$$h(x, \mu, u) = \mu_2 u^2 + \mu_3 u^3 - \frac{1}{2} [I_2(u^2)^2 + I_3(u^3)^2],$$

para  $(x, \mu, u) \in T^*SO(3) \times_{SO(3)} D$ . As condições de optimização (6.3.5) que definem a subvariedade restrição  $W$  são  $\partial h / \partial u^2 = \partial h / \partial u^3 = 0$ , isto é,

$$\mu_2 = I_2 u^2, \quad \mu_3 = I_3 u^3.$$

Usando a representação  $u^2 = u^2(x, \mu)$  e  $u^3 = u^3(x, \mu)$  para  $W$ , facilmente se verifica que as equações (6.3.6) se reduzem a

$$\dot{x}^i = \sum_{j=2}^3 \rho_j^i u^j, \quad \dot{\mu}_i = - \sum_{\beta=2}^3 \mu_1 C_{i\beta}^1 u^\beta - \sum_{\beta, \gamma=2}^3 I_\gamma u^\gamma C_{i\beta}^\gamma u^\beta, \quad i = 1, 2, 3.$$

Usando agora as expressões (6.4.1) e (6.4.2) das funções de estrutura do algebróide de Lie, as equações anteriores são equivalentes ao conjunto de equações dadas pelo sistema de controlo (6.4.12), junto com

$$\begin{cases} \dot{\mu}_2 + \mu_1 u^3 = 0 \\ \dot{\mu}_3 - \mu_1 u^2 = 0 \\ \dot{\mu}_1 + (I_3 - I_2) u^2 u^3 = 0. \end{cases}$$

Observe-se que quando consideramos o caso do corpo rígido livre e completamente simétrico com  $I_1 = I_2 = I_3 = 1$ , obtemos as equações

$$\dot{\mu}_2 + \mu_1 u^3 = 0 \quad \dot{\mu}_3 - \mu_1 u^2 = 0 \quad \dot{\mu}_1 = 0,$$

que são equivalentes às equações obtidas por Sastry e Montgomery em [74].

**Exemplo 6.4.4** (Problema dinâmico com restrições). Para este caso, assumimos que a aceleração angular pertence à distribuição  $D$  acima considerada. Representamos o sistema de coordenadas em  $D$  por  $(x^1, x^2, x^3, y^2, y^3)$ . Sob o ponto de vista dos algebróides, os elementos relevantes a considerar para este caso são os seguintes:

- O algebróide prolongamento  $E \equiv \mathcal{T}^{TSO(3)}D$  do fibrado  $D$  relativamente ao algebróide de Lie  $TSO(3)$ . Representamos cada elemento de  $E \equiv \mathcal{T}^{TSO(3)}D$  por  $(x, y, z, w_1, w_2)$ , onde  $(x, y) \in D$ ,  $z \in T_xSO(3)$  e  $(w_1, w_2) \in T_{(x,y)}D$ . Por definição de fibrado prolongamento temos  $\rho(z) = (T_{(x,y)} \pi|_D)(w_1, w_2)$ . Este é um algebróide de Lie sobre  $D$ , cuja aplicação projecção de fibrado é dada por  $\pi_D^{TSO(3)} : \mathcal{T}^{TSO(3)}D \rightarrow D$ ,  $(x, y, z, w_1, w_2) \mapsto (x, y)$  e a aplicação âncora por  $\rho^1 : \mathcal{T}^{TSO(3)}D \rightarrow TD$ ,  $(x, y, z, w_1, w_2) \mapsto (w_1, w_2)$ .

Seguindo um raciocínio análogo ao do exemplo 6.4.2, verifica-se que as funções de estrutura  $\bar{\rho}_j^i$  e  $\bar{C}_{ij}^k$ ,  $i, j, k = 1, \dots, 5$ , deste algebróide de Lie, são tais que

$$\bar{\rho}_j^i = \begin{cases} \rho_j^i & \text{se } 1 \leq i, j \leq 3 \\ 1 & \text{se } i = j \quad \wedge \quad 3 < i, j \leq 5 \\ 0 & \text{nas outras situações,} \end{cases} \quad (6.4.13)$$

e

$$\bar{C}_{ij}^k = \begin{cases} C_{ij}^k & \text{se } 1 \leq i, j, k \leq 3 \\ 0 & \text{nas outras situações,} \end{cases} \quad (6.4.14)$$

onde  $\rho_j^i$  e  $C_{ij}^k$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$ , são as funções (6.4.1) e (6.4.2), respectivamente.

- Consideramos para fibrado de controlos, o fibrado sobre  $D$  dado por

$$B = \{(x, y, u) \in T^2SO(3) :$$

$$(x, y) \in D \quad \wedge \quad (y, u) \in T_{(x,y)}D \quad \wedge \quad \rho(y) = (T_{(x,y)} \pi|_D)(y, u)\},$$

com projecção  $\nu : B \rightarrow D$ ,  $(x, y, u) \mapsto (x, y)$ . Note-se que podemos considerar a inclusão  $inc : B \rightarrow \mathcal{T}^{TSO(3)}D$ ,  $(x, y, u) \mapsto (x, y, y, y, u)$ .

Temos o sistema de controlo

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = y^2 \sec(x^2) \cos(x^3) \\ \dot{x}^2 = -y^2 \sin(x^3) \\ \dot{x}^3 = y^2 \tan(x^2) \cos(x^3) + y^3 \\ \dot{y}^2 = u^2 \\ \dot{y}^3 = u^3, \end{cases} \quad (6.4.15)$$

descrito pelo diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 B & \xrightarrow{\text{inc}} & \mathcal{T}^{TSO(3)}D & \xrightarrow{\rho^1} & TD \\
 & \searrow \tau & \downarrow \pi_D^{TSO(3)} & \swarrow \pi_D & \\
 & & D & & 
 \end{array}$$

Consideramos para função custo  $L : B \rightarrow \mathbb{R}$ , a restrição a  $B$  da função (6.4.8), ou seja,

$$L(x, y, u) = \frac{1}{2} [(I_2)^2(u^2)^2 + (I_3)^2(u^3)^2 + (I_3 - I_2)^2(y^2)^2(y^3)^2],$$

para  $(x, y, u) \in B$ . A função Hamiltoniana  $h : (\mathcal{T}^{TSO(3)}D)^* \times_D B \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por

$$h(x, y, \mu, \pi, u) = \sum_{i=2}^3 y^i \mu_i + \sum_{i=2}^3 \pi_i u^i - L(x, y, u),$$

para cada  $(x, y, \mu, \pi, u) \in (\mathcal{T}^{TSO(3)}D)^* \times_D B$ . As condições de optimização (6.3.5),  $\partial h / \partial u^2 = \partial h / \partial u^3 = 0$ , conduzem-nos à subvariedade  $W$  definida pelas condições

$$\pi_2 = (I_2)^2 u^2, \quad \pi_3 = (I_3)^2 u^3.$$

Por conseguinte,  $W$  é definida especificando  $u^2 = u^2(x, y, \pi)$  e  $u^3 = u^3(x, y, \pi)$ . De (6.4.13) e (6.4.14), temos que, em  $W$ , o sistema correspondente a (6.3.6), para a presente situação é o seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{x}^i = \sum_{j=1}^3 \rho_j^i \frac{\partial h}{\partial \mu_j} \\
 \dot{y}^\alpha = \frac{\partial h}{\partial \pi_\alpha} \\
 \dot{\mu}_i = - \sum_{j=1}^3 \rho_j^i \frac{\partial h}{\partial x^j} - \sum_{j,k=1}^3 \mu_k C_{ij}^k \frac{\partial h}{\partial \mu_j} \\
 \dot{\pi}_\alpha = - \frac{\partial h}{\partial y^\alpha},
 \end{array} \right.$$



que de acordo com o nosso Hamiltoniano, se exprime como

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^i = \sum_{\alpha=2}^3 \rho_{\alpha}^i y^{\alpha} \\ \dot{y}^{\alpha} = u^{\alpha} \\ \dot{\mu}_i = - \sum_{k=1}^3 \sum_{\beta=2}^3 \mu_k C_{i\beta}^k y^{\beta} \\ \dot{\pi}_{\alpha} = -\mu_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha}}, \end{array} \right.$$

para  $i = 1, 2, 3$ ,  $\alpha = 2, 3$ . Atendendo agora a (6.4.1) e (6.4.2), concluímos que o movimento em  $W$  é descrito pelo sistema de controlo (6.4.15) e pelas equações

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\pi}_2 = \frac{(M_1)^2}{y^2} - \mu_2 \\ \dot{\pi}_3 = \frac{(M_1)^2}{y^3} - \mu_3 \\ \dot{\mu}_2 + \mu_1 y^3 = 0 \\ \dot{\mu}_3 - \mu_1 y^2 = 0 \\ \dot{\mu}_1 + \mu_3 y^2 - \mu_2 y^3 = 0, \end{array} \right. \quad (6.4.16)$$

onde  $M_1 = (I_3 - I_2)y^2 y^3$  é uma torção em  $D$ .

Importa observar que no caso do corpo rígido livre e com os três principais momentos de inércia iguais (simetria esférica), as equações (6.4.16) ficam

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\pi}_2 = -\mu_2 \\ \dot{\pi}_3 = -\mu_3 \\ \dot{\mu}_2 + \mu_1 y^3 = 0 \\ \dot{\mu}_3 - \mu_1 y^2 = 0 \\ \dot{\mu}_1 + \mu_3 y^2 - \mu_2 y^3 = 0. \end{array} \right.$$

Este sistema dá lugar às seguintes equações obtidas por Crouch e Silva Leite em [37]

(*exemplo 6.4, Caso II*)

$$\begin{cases} \ddot{y}^2 - \mu_1 y^3 = 0 \\ \ddot{y}^3 + \mu_1 y^2 = 0 \\ \dot{\mu}_1 - \ddot{y}^3 y^2 + \dot{y}^2 y^3 = 0. \end{cases}$$

## 6.5 Problema de controlo óptimo com restrições

Seja  $G$  um grupo de Lie conexo e compacto de dimensão finita  $n$  com identidade  $e$ , onde a correspondente álgebra de Lie é denotada por  $\mathfrak{g}$  e o seu espaço dual por  $\mathfrak{g}^*$ . Seja ainda  $D$  a distribuição em  $G$  de dimensão constante  $m$  gerada pelos  $m$  primeiros campos de vectores de uma base ortonormada de campos de vectores invariantes à esquerda em  $G$  definida de acordo com (2.1.2). Representemos por  $\mathfrak{h}$  o subespaço linear  $D(e)$ ,  $\mathfrak{h} = D(e)$ .

Consideremos o problema de controlo óptimo da secção 5.2 para o sistema de conexão afim aí considerado. Este problema pode ser interpretado, no âmbito da secção 6.3, como um problema de controlo no algebróide de Lie fibrado tangente  $T(G \times \mathfrak{g})$ , com espaço de controlos  $\mathcal{M} \subset \widetilde{T^2G}$  definido por (5.2.3), ou seja,

$$\mathcal{M} = \{(v_x, U) \in \widetilde{T^2G} : U \in \mathfrak{h}\},$$

onde  $\widetilde{T^2G} \subset T(G \times \mathfrak{g})$  é o fibrado tangente de ordem dois de  $G$  trivializado, definido de acordo com (2.1.11), cuja projecção natural é a aplicação  $\widetilde{\tau}_2^1$  dada por (2.1.12). De facto, basta ter em consideração o seguinte:

- A variedade  $\mathbf{B} = \mathcal{M}$  é fibrada sobre  $\mathbf{M} = G \times \mathfrak{g}$ , uma vez que assumimos que  $\tau = \widetilde{\tau}_2^1 \circ i_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow G \times \mathfrak{g}$  é uma submersão sobrejectiva (recorde-se que  $i_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \hookrightarrow \widetilde{T^2G}$  é a aplicação inclusão).
- O fibrado tangente  $\mathbf{E} = T(G \times \mathfrak{g})$  (com projecção  $\pi = \pi_{G \times \mathfrak{g}} : T(G \times \mathfrak{g}) \rightarrow G \times \mathfrak{g}$ ) é um algebróide de Lie com âncora igual à identidade  $\rho = id : T(G \times \mathfrak{g}) \rightarrow T(G \times \mathfrak{g})$ .

- $\sigma = \tilde{\Pi} \circ i_{\mathcal{M}}$  é uma secção ao longo de  $\tau = \tilde{\tau}_2^1 \circ i_{\mathcal{M}}$  ( $\sigma$  é o sistema de controlo), onde  $\tilde{\Pi}$  é o campo de vectores definido por (2.3.2).

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{M} & \xrightarrow{\tilde{\Pi} \circ i_{\mathcal{M}}} & T(G \times \mathfrak{g}) & \xrightarrow{id} & T(G \times \mathfrak{g}) \\
 & \searrow \tilde{\tau}_2^1 \circ i_{\mathcal{M}} & \downarrow \pi_{G \times \mathfrak{g}} & & \swarrow \pi_{G \times \mathfrak{g}} \\
 & & G \times \mathfrak{g} & & 
 \end{array}$$

Uma curva  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}$ , com  $T \in \mathbb{R}^+$ , é uma trajectória do sistema de controlo se satisfaz

$$\frac{d}{dt} (\tilde{\tau}_2^1 \circ i_{\mathcal{M}} \circ \gamma)(t) = (\tilde{\Pi} \circ i_{\mathcal{M}})(\gamma(t)),$$

ou seja, o sistema (5.2.5) caracterizado no capítulo anterior. Consideramos a função custo  $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(v_x, U) \in T_x G \times \mathfrak{h} \mapsto (1/2)\langle U, U \rangle$ , ou seja, a função custo (5.2.4), anteriormente usada.

Adaptando os passos da secção 6.3 para este caso, construímos o Hamiltoniano  $h : T^*(G \times \mathfrak{g}) \times_{G \times \mathfrak{g}} \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  definido de acordo com (6.3.2), que coincide exactamente com o Hamiltoniano (5.3.4). De facto,

$$\begin{aligned}
 h(\alpha_x, Y, \xi, U) &= (\alpha_x, \xi) \left[ (\tilde{\Pi} \circ i_{\mathcal{M}})(T_e L_x Y, U) \right] - L(T_e L_x Y, U) = \\
 &= (T_e^* L_x \alpha_x)(Y) + \xi(U) - \frac{1}{2} \langle U, U \rangle,
 \end{aligned}$$

para  $(\alpha_x, Y, \xi, U) \in T_x^* G \times \{Y\} \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{h}$ , com  $(x, Y) \in G \times \mathfrak{g}$ .

O sistema dinâmico que nos permite descrever as trajectórias críticas é o sistema (6.3.3),  $i_{\sigma_h} \Omega = dh$ , com os seguintes objectos geométricos:

- A 2-forma  $\Omega$  é a forma simpléctica canónica do algebróide de Lie  $\mathcal{T}^{T(G \times \mathfrak{g})} T^*(G \times \mathfrak{g})$  sobre  $T^*(G \times \mathfrak{g})$  (prolongamento do fibrado  $T^*(G \times \mathfrak{g})$  relativamente ao algebróide  $T(G \times \mathfrak{g})$ ), ou seja,  $\Omega$  é a secção canónica de  $\Lambda^2 \left( (\mathcal{T}^{T(G \times \mathfrak{g})} T^*(G \times \mathfrak{g}))^* \right)$ , definida de acordo com (6.2.4). Ora, da teoria geral do algebróides, sabe-se que

$$\mathcal{T}^{T(G \times \mathfrak{g})} T^*(G \times \mathfrak{g}) = TT^*(G \times \mathfrak{g}),$$

logo,  $\Omega$  não é mais do que a forma canónica simpléctica em  $T^*(G \times \mathfrak{g})$ .

- A secção Hamiltoniana  $\sigma_h$  é uma secção do fibrado tangente  $TT^*(G \times \mathfrak{g})$  ao longo da projecção  $pr_1 : T^*(G \times \mathfrak{g}) \times_{G \times \mathfrak{g}} \mathcal{M} \rightarrow T^*(G \times \mathfrak{g})$ , definida num subconjunto  $W$  de  $T^*(G \times \mathfrak{g}) \times_{G \times \mathfrak{g}} \mathcal{M}$ . As trajectórias críticas são as curvas integrais de  $\rho^1(\sigma_h)$ , onde  $\rho^1$  é a âncora do algebróide de Lie  $TT^*(G \times \mathfrak{g})$ . Mas,  $\rho^1$  é a identidade.

$$\begin{array}{ccccc}
 W \subset T^*(G \times \mathfrak{g}) \times_{G \times \mathfrak{g}} \mathcal{M} & \xrightarrow{\sigma_h} & TT^*(G \times \mathfrak{g}) & \xrightarrow{id} & TT^*(G \times \mathfrak{g}) \\
 & \searrow pr_1 & \downarrow \pi_{T^*(G \times \mathfrak{g})} & \swarrow \pi_{T^*(G \times \mathfrak{g})} & \\
 & & T^*(G \times \mathfrak{g}) & & 
 \end{array}$$

- A solução do sistema é definida na subvariedade de  $W$  determinada pelas condições  $(\partial h / \partial u^a) = 0$ ,  $a = 1, \dots, m$ . Mas, o nosso Hamiltoniano  $h$  pode escrever-se localmente como (5.3.5) e portanto estas condições de restrição traduzem-se por  $\xi_a = u^a$ ,  $a = 1, \dots, m$ . Deste modo, a subvariedade  $W$  é a subvariedade  $W_1$  considerada na aplicação do algoritmo presimpléctico da secção 5.3.

Repare-se que na realidade estamos a seguir um processo equivalente ao da secção 5.3, mas usando a linguagem dos algebróides. Assim, não restam dúvidas de que o nosso sistema, quando restrito à subvariedade  $W \equiv W_1$ , é o sistema simpléctico  $(W_1, \overline{\Omega}_{W_1}, \overline{H}_{W_1})$  da secção 5.3. E, tal como é aí explicado, reduzimos o nosso estudo ao estudo do sistema simpléctico  $(T^*(G \times \mathfrak{g}), \Omega)$  com Hamiltoniano  $h|_{W_1} \circ \varphi$ , onde  $\varphi$  é o difeomorfismo definido por (5.3.7).

Como foi referido no capítulo 5, o problema de controlo óptimo considerado na presente secção, abrange a situação dos polinómios cúbicos do capítulo 2 ( $\mathcal{M} = \widetilde{T^2G}$ ). Portanto, o formalismo presimpléctico apresentado nesta dissertação para os polinómios cúbicos, tem uma interpretação alternativa no contexto dos algebróides de Lie.

# Considerações finais

Esta dissertação centrou-se no estudo da interacção entre a mecânica Hamiltoniana e Lagrangiana de sistemas e a teoria geométrica de controlo, com destaque para a utilização do formalismo Hamiltoniano no estudo de sistemas de controlo de ordem dois e na sua aplicação ao estudo da dinâmica do fluxo dos polinómios cúbicos em variedades Riemannianas. Fazendo uso de ferramentas geométricas de controlo, explorámos a equivalência entre a abordagem variacional e uma abordagem Hamiltoniana descrita através de um formalismo presimpléctico. Uma parte considerável deste trabalho foi dedicada aos polinómios cúbicos em grupos de Lie conexos e compactos e conseguimos alcançar, para este caso, resultados a nível do estudo das simetrias do sistema (redução e análise da integrabilidade do sistema reduzido). A abordagem Hamiltoniana presimpléctica foi conduzida também para a interpretação de um problema com um sistema de controlo de conexão afim mais geral, no âmbito dos grupos de Lie. Além disso, estudámos os problemas (o dos polinómios cúbicos e o problema com um sistema de controlo afim mais genérico) sob o ponto de vista dos algebróides de Lie.

Referimos a seguir e de forma sucinta alguns dos pontos desenvolvidos nesta tese, que contribuem para o estudo dos polinómios cúbicos Riemannianos e para algumas das suas possíveis generalizações.

- No capítulo 1 descrevemos o problema de controlo dos polinómios cúbicos, cujo sistema de controlo óptimo é um sistema de segunda ordem numa variedade Riemanniana  $M$ . Fizemos uso de uma versão presimpléctica do princípio do máximo

de Pontryagin (os primeiros resultados que obtivemos sobre este assunto foram objecto de publicação em [5]). Além disso, concretizámos a versão intrínseca das equações de Euler-Lagrange do problema variacional dos polinómios cúbicos Riemannianos, passámos, via transformação de Legendre generalizada, para um sistema Hamiltoniano e vimos que este sistema é equivalente ao encontrado através da análise geométrica do problema de controlo referido.

- O capítulo 2 foi dedicado ao estudo da dinâmica Hamiltoniana do fluxo dos polinómios cúbicos Riemannianos num grupo de Lie conexo e compacto, especificando para este caso, o formalismo referido no ponto acima. Procedemos à trivialização do sistema Hamiltoniano resultante da abordagem presimpléctica, encontrando as equações de Euler-Arnold generalizadas para este problema de segunda ordem.
- Foi desenvolvido, no capítulo 3, o estudo das simetrias do problema de controlo óptimo dos polinómios cúbicos, para o caso do grupo de Lie conexo e compacto. Usando ferramentas geométricas, efectuámos a remoção de simetrias pela técnica de redução de Marsden-Weinstein. Além disso, obtivemos um resultado bastante interessante relativamente ao número de integrais do movimento em involução, onde fizemos uso do clássico teorema de Lie-Cartan. O trabalho mencionado neste e no ponto anterior, que representa uma parte essencial desta tese, resultou na elaboração do artigo [7].
- Os temas de estudo referidos nos dois pontos anteriores, descrição Hamiltoniana e respectiva redução simpléctica, foram desenvolvidos para o caso do grupo de Lie  $SO(3)$ , com o estudo do problema dinâmico do corpo rígido livre e esférico, efectuado no capítulo 4. Nesta situação particular, a aplicação do método de redução simpléctica de Marsden-Weinstein e do teorema de Lie Cartan, permitiu concluir que é possível reduzir o sistema Hamiltoniano de dimensão 12 a um sistema de dimensão 2. Neste contexto, foram entretanto publicados os artigos [6, 8].

No capítulo 4 desenvolvemos ainda, sob o ponto de vista variacional e no contexto do grupo de Lie  $SO(3)$ , uma análise qualitativa dos polinómios cúbicos, usando alguns invariantes ao longo destas curvas (estudo já publicado em [2, 3]). Nesta situação, os polinómios cúbicos correspondem a quadráticos de Lie na álgebra de Lie e obtém-se alguns resultados curiosos. Refira-se que, para o caso mais geral também deduzimos alguns invariantes (capítulo 1) e, em particular, quando considerámos um grupo de Lie conexo e compacto (capítulo 2), relacionámos estes invariantes com integrais do movimento do sistema Hamiltoniano que descreve o problema de controlo.

- No capítulo 5 estendemos o problema de controlo óptimo dos polinómios cúbicos em grupos de Lie a um problema com um sistema de controlo de conexão afim mais geral. Descrevemos a dinâmica do problema usando um formalismo pre-simpléctico análogo ao usado no capítulo 2. Além disso, estabelecemos a relação existente entre o problema abordado e um problema variacional com restrições, que é uma extensão do problema variacional dos polinómios cúbicos.
- Paralelamente aos temas dos pontos acima referidos abordámos, no capítulo 6, o estudo da relação dos problemas de controlo de ordem dois atrás indicados, com a teoria dos algebróides de Lie. Neste contexto, apresentámos alguns exemplos relacionados com o movimento do corpo rígido livre, alguns deles já publicados em [4].

Mencionamos agora alguns assuntos que não tivemos oportunidade de explorar e que consideramos serem apropriados a um trabalho de investigação futuro, na linha do estudo desenvolvido nesta dissertação.

- Pensamos ser interessante aprofundar o estudo da integrabilidade iniciado no capítulo 3 para o sistema Hamiltoniano reduzido, obtido no âmbito dos polinómios cúbicos em grupos de Lie conexos e compactos.
- Estamos certos que a nova interpretação dos sistemas de controlo aqui apresen-

tada, permitirá estender o estudo efectuado no capítulo 5 a sistemas mecânicos mais gerais. Consideramos ser particularmente interessante, a generalização da análise do sistema (5.2.1), ao sistema mecânico mais genérico apresentado no artigo [20], que é dado por

$$\frac{DY_x}{dt} = \sum_{a=1}^m u^a J_x^{-1} X_a(x),$$

onde  $J$  é o tensor de inércia generalizado numa variedade Riemanniana.

- Acreditamos que o formalismo dos algebróides de Lie nos abre o caminho para explorar, num trabalho futuro, outros interessantes problemas de controlo óptimo. Mencionamos, a título de exemplo, as generalizações para contextos mais gerais (em grupos de Lie ou outras variedades Riemannianas) que se podem obter a partir dos exemplos apresentados na secção 6.4. Em particular, será interessante analisar situações associadas a problemas variacionais com restrições do tipo (5.1.5),  $dx/dt \in D(x)$ , no contexto dos grupos de Lie ou num mais geral.
- O desenvolvimento abordado nesta tese permitiu encontrar um conjunto interessante de ferramentas geométricas. Como consequência, acreditamos ser possível estabelecer resultados importantes relacionados com os polinómios de ordem ímpar superior a três, como continuidade dos trabalhos iniciados em [27] e [73].



## Apêndice A

# Fibrados tangentes de ordem superior

O fibrado tangente de ordem dois numa variedade diferenciável assume um papel primordial na análise dos polinômios cúbicos Riemannianos, tanto na abordagem variacional como na abordagem Hamiltoniana discutidas nesta dissertação. Torna-se assim importante apresentar este apêndice, onde se descrevem as estruturas geométricas de base que envolvem os fibrados tangentes de ordem superior. Porque nos interessa o caso de ordem dois, este é apresentado como exemplo sempre que o assunto em questão for considerado relevante, para o contexto dos polinômios cúbicos Riemannianos. Para um estudo mais detalhado da teoria dos fibrados tangentes de ordem superior referimos [36, 49] e os trabalhos aí mencionados.

### A.1 Notas sobre variedades fibradas e fibrados gerais

Consideramos importante iniciar este apêndice com uma breve referência às variedades fibradas e aos fibrados gerais. Baseamo-nos essencialmente em [46, 50].

**Definição A.1.1.** *Sejam  $E$  e  $M$  duas variedades diferenciáveis de dimensão finita,*

com  $\dim E > \dim M$ . Dizemos que  $E$  é uma variedade fibrada sobre  $M$  com projecção  $\pi$ , ou simplesmente que o terno  $(E, \pi, M)$  é uma variedade fibrada, se  $\pi : E \rightarrow M$  é uma submersão<sup>1</sup> sobrejectiva. A variedade  $E$  diz-se o espaço total ou espaço fibrado e  $M$  é o espaço base. Para qualquer  $x \in M$ ,  $\pi^{-1}(x)$  designa-se por fibra de  $E$  sobre  $x$ .

**Definição A.1.2.** Uma secção de uma variedade fibrada  $(E, M, \pi)$  é uma aplicação  $s : M \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ s = id_M$ . Se  $s$  é definida num aberto  $U$  de  $M$ , dizemos que  $s : U \rightarrow E$  é uma secção local sobre  $U$ .

Uma variedade fibrada admite sempre secções locais, mas pode não ter secções globais.

**Definição A.1.3.** Sejam  $(E_1, M_1, \pi_1)$  e  $(E_2, M_2, \pi_2)$  duas variedades fibradas. Um morfismo fibrado  $(H, h) : (E_1, M_1, \pi_1) \rightarrow (E_2, M_2, \pi_2)$  é um par de aplicações suaves  $H : E_1 \rightarrow E_2$  e  $h : M_1 \rightarrow M_2$  tal que  $\pi_2 \circ H = h \circ \pi_1$ .

Note-se que um morfismo fibrado é uma aplicação que preserva as fibras.

**Definição A.1.4.** Um morfismo fibrado  $(H, h) : (E_1, M_1, \pi_1) \rightarrow (E_2, M_2, \pi_2)$  diz-se um isomorfismo se existir um morfismo fibrado  $(H', h') : (E_2, M_2, \pi_2) \rightarrow (E_1, M_1, \pi_1)$  tal que  $H' \circ H = id_{E_1}$  e  $h' \circ h = id_{M_1}$ . Neste caso diz-se que as variedades fibradas  $(E_1, M_1, \pi_1)$  e  $(E_2, M_2, \pi_2)$  são isomorfas.

**Definição A.1.5.** Sejam  $E, M$  e  $F$  variedades diferenciáveis. Uma estrutura de fibrado com tipo de fibra  $F$  na variedade  $M$  é uma variedade fibrada  $(E, M, \pi)$  tal que, para cada  $x \in M$ , existe uma vizinhança aberta  $U$  tal que  $\pi^{-1}(U)$  é difeomorfo a  $U \times F$  através do difeomorfismo  $\phi$  que satisfaz  $pr_1 \circ \phi = \pi$ , onde  $pr_1 : U \times F \rightarrow U$  representa a projecção no primeiro factor. Isto é, temos a comutatividade do seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times F \\ & \searrow \pi & \swarrow pr_1 \\ & U & \end{array} .$$

<sup>1</sup> Recorde-se que uma aplicação suave  $f : N \rightarrow M$  entre duas variedades diferenciáveis diz-se uma submersão se a aplicação linear  $T_n f : T_n N \rightarrow T_{f(n)} M$  (aplicação tangente de  $f$  em  $n$ ) é sobrejectiva para qualquer  $n \in N$ .

Dizemos que  $(E, M, \pi)$  é um *fibrado* de tipo de fibra  $F$ , ou que  $E$  é um fibrado sobre  $M$  com projecção  $\pi$  e tipo de fibra  $F$ . Por vezes, referimo-nos ao fibrado simplesmente por variedade fibrada. Para cada  $x \in M$ , a subvariedade  $E_x = \pi^{-1}(x)$ , designada por *fibra* de  $E$  sobre  $x$ , é homeomorfa a  $F$ .

Se a fibra  $F$  tiver uma estrutura adicional de espaço vectorial, dizemos que  $(E, M, \pi)$  é um *fibrado vectorial*.

**Exemplo A.1.6.** *Se  $M$  e  $E$  são duas variedades diferenciáveis e  $p : M \times E \rightarrow M$  é a projecção canónica no primeiro factor, então  $(M \times E, p, M)$  é um fibrado que se designa por fibrado trivial.*

**Exemplo A.1.7.** *Seja  $N$  um subconjunto aberto de uma variedade diferenciável  $M$ . Um fibrado  $(E, M, \pi)$  induz de forma natural um fibrado  $(\bar{E}, N, \bar{\pi})$ , designado por fibrado restrição, definido por  $\bar{E} = \pi^{-1}(N)$  e  $\bar{\pi} = \pi|_{\bar{E}}$ . Para cada  $x \in N$ , as fibras  $E_x$  e  $\bar{E}_x$  coincidem.*

**Exemplo A.1.8.** *O produto cartesiano de dois fibrados  $(E_1, M_1, \pi_1)$  e  $(E_2, M_2, \pi_2)$  (de tipo de fibra  $F_1$  e  $F_2$ , respectivamente) é o fibrado  $(E_1 \times E_2, \pi_1 \times \pi_2, M_1 \times M_2)$  de tipo de fibra  $F_1 \times F_2$ . Cada fibra  $(E_1 \times E_2)_{(x_1, x_2)}$  é identificada de forma natural com  $(E_1)_{x_1} \times (E_2)_{x_2}$ , para  $x_1 \in M_1$  e  $x_2 \in M_2$ .*

**Exemplo A.1.9.** *Dados dois fibrados  $(E_1, M, \pi_1)$  e  $(E_2, M, \pi_2)$  sobre a mesma variedade  $M$  (de tipo de fibra  $F_1$  e  $F_2$ , respectivamente), define-se o fibrado produto destes dois fibrados como sendo o fibrado  $(E, M, \pi)$  sobre  $M$  com tipo de fibra  $F_1 \times F_2$ , onde o espaço total é dado por*

$$E = E_1 \times_M E_2 = \{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 : \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)\}$$

e a projecção é a aplicação

$$\pi = \pi_{E_1 \times_M E_2},$$

definida por  $\pi_{E_1 \times_M E_2}(e_1, e_2) = \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)$ . Refira-se que se  $E_1$  e  $E_2$  são fibrados vectoriais sobre  $M$ , o fibrado produto  $E_1 \times_M E_2$  designa-se por soma de Whitney e denota-se por  $E_1 \oplus E_2$ .

## A.2 A geometria do fibrado tangente

Esta secção é apresentada como um preliminar à teoria desenvolvida nas secções seguintes. Até ao final deste apêndice,  $M$  é uma variedade diferenciável de dimensão finita  $n$ . Consideramos a notação  $(U, \varphi)$  ou  $(U, x^1, \dots, x^n)$  para representar uma carta (ou sistema de coordenadas locais) em  $M$  definida(o) num aberto  $U$  de  $M$ ,  $\varphi : U \subset M \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ , com correspondentes funções coordenadas  $x^1, \dots, x^n : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ .

Defina-se a seguinte relação de equivalência no conjunto das curvas suaves em  $M$ .

**Definição A.2.1.** *Dado um elemento  $x \in M$ , se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são duas curvas suaves em  $M$  tais que  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$ , dizemos que  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são tangentes em  $x$  se existe um sistema de coordenadas locais  $(U, x^1, \dots, x^n)$  em  $M$ , tal que  $x \in U$  e se verifica*

$$\left. \frac{d}{dt}(x^i \circ \gamma_1)(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(x^i \circ \gamma_2)(t) \right|_{t=0}, \quad i = 1, \dots, n.$$

É claro que a definição apresentada é independente da escolha do sistema de coordenadas locais. A classe de equivalência  $[\gamma]$  de uma curva  $\gamma$ , chama-se o *vector tangente a  $\gamma$  em  $x$* .

**Definição A.2.2.** *O conjunto dos vectores tangentes a  $M$  no ponto  $x$  designa-se por espaço tangente de  $M$  em  $x$  e denota-se por  $T_x M$ .*

Verifica-se com facilidade que  $T_x M$  possui uma estrutura natural de espaço vectorial de dimensão  $n$ .

**Definição A.2.3.** *Se  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ , com  $T \in \mathbb{R}^+$ , é uma curva suave em  $M$ , o vector tangente a  $\gamma$  em  $t$  é definido por  $d\gamma/dt \equiv \dot{\gamma}(t) = [\gamma_t]$ , para  $\gamma_t(s) = \gamma(s + t)$ .*

**Definição A.2.4.** *A família de todos os espaços tangentes de  $M$*

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

*diz-se o fibrado tangente de  $M$ .*

Cada ponto em  $y \in T_x M \subset TM$  é identificado de uma forma natural com o par  $(x, y)$ , para cada  $x \in M$ . O fibrado tangente  $TM$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $2n$ . Além disso, verifica-se que  $(TM, M, \pi_M)$  é um fibrado vectorial para a projecção canónica  $\pi_M : TM \rightarrow M$ ,  $(x, y) \mapsto x$ . Se  $(U, x^1, \dots, x^n)$  é um sistema de coordenadas em  $M$ , então qualquer vector  $y$  tangente a  $M$  em  $x \in U \subset M$  exprime-se de modo único como combinação linear dos elementos da base  $\{(\partial/\partial x^1)|_x, \dots, (\partial/\partial x^n)|_x\}$  de  $T_x M$  na forma

$$y = y^1(x, y) \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_x + \dots + y^n(x, y) \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_x.$$

Neste sentido,  $(\pi^{-1}(U), x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$  constitui um sistema de coordenadas naturais em  $TM$  que induz uma base natural no espaço tangente a  $TM$  em  $(x, y)$  dada por

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_{(x,y)}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_{(x,y)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^1} \Big|_{(x,y)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \Big|_{(x,y)} \right\}. \quad (\text{A.2.1})$$

A aplicação tangente  $T\pi_M : TTM \rightarrow TM$  da projecção canónica  $\pi_M$  é definida por

$$T\pi_M|_{(x,y)}(X) = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x,$$

para cada vector tangente  $X \in T_{(x,y)}TM$  com coordenadas  $(X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{2n})$  relativamente à base (A.2.1),  $(x, y) \in TM$ . Para cada  $(x, y) \in TM$  consideremos o subespaço vectorial de dimensão  $n$  de  $T_{(x,y)}TM$  dado por

$$\mathcal{V}_{(x,y)} = \text{Ker} \left( T\pi_M|_{(x,y)} \right).$$

**Definição A.2.5.** O fibrado vertical de  $TM$  é o subfibrado vectorial de  $TTM$  denotado por  $VTM$  e definido por

$$VTM = \bigcup_{(x,y) \in TM} \mathcal{V}_{(x,y)}.$$

Deste modo,  $VTM$  é o subfibrado vectorial de  $TTM$  constituído por todos os vectores tangentes a  $TM$  que são projectados em zero pela aplicação tangente  $T\pi_M$ .

Um campo de vectores  $X$  em  $TM$ ,  $X : TM \rightarrow TTM$ , diz-se um *campo de vectores vertical* se, para cada  $(x, y) \in TM$ , temos  $X(x, y) \in \mathcal{V}_{(x,y)}$ . Um dos objectos geométricos

importantes para a abordagem geométrica da mecânica Lagrangiana é o campo de vectores vertical em  $TM$  a seguir definido.

**Definição A.2.6.** *O campo de vectores vertical em  $TM$  dado por*

$$\Delta = \sum_{i=1}^n y^i \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{(x,y)}$$

*diz-se o campo de vectores de Liouville em  $TM$ .*

Uma outra estrutura geométrica essencial na mecânica Lagrangiana é a estrutura canónica quase-tangente no fibrado tangente, que passaremos a expor. Recordemos primeiro a definição genérica de estrutura quase-tangente.

**Definição A.2.7.** *Uma estrutura quase-tangente  $S$  numa variedade  $N$  de dimensão  $2n$  é um campo de tensores  $S$  do tipo  $(1,1)$  em  $N$  (ou seja, um endomorfismo de  $TN$ ) com característica constante  $n$  e que satisfaz  $S^2 = 0$ .*

**Definição A.2.8.** *A estrutura canónica quase-tangente em  $TM$  é a estrutura quase-tangente  $J$  em  $TM$  definida por*

$$J = \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{(x,y)} \otimes dx^i \Big|_{(x,y)}. \quad (\text{A.2.2})$$

Note-se que  $J$  transforma qualquer campo de vectores  $W = \sum_{i=1}^n w_i(x)(\partial/\partial x^i)$  em  $M$  num campo de vectores vertical  $W^v = J(W) = \sum_{i=1}^n w_i(\partial/\partial y^i)$  em  $TM$ , que se diz o levantamento vertical de  $W$ .

Consideramos pertinente terminar esta subsecção com dois conceitos do âmbito da geometria Riemanniana que são utilizados no capítulo 1, apesar de com isto nos afastarmos um pouco do objectivo deste apêndice. Assumimos que  $M$  é uma variedade Riemanniana, denotamos a correspondente conexão Riemanniana por  $\nabla$  e os símbolos de Christoffel desta conexão por  $\Gamma_{ij}^k$ .

**Definição A.2.9.** *A cada ponto  $(v, u) \in T_{(x,y)}TM$  com  $(x, y) \in TM$ , associemos a curva  $\alpha$  em  $TM$  com valor inicial  $(x, y)$  e velocidade inicial  $(v, u)$ . A aplicação conexão*

é a aplicação suave  $K : TTM \rightarrow TM$  definida por

$$K(x, y, v, u) = K|_{(x,y)}(v, u) = \nabla_{\frac{d(\pi_M \circ \alpha)}{dt}(t)} \alpha(t) \Big|_{t=0}.$$

Dado um vector tangente  $X \in T_{(x,y)}TM$ , onde  $(x, y) \in TM$ , com coordenadas  $(X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{2n})$  relativamente à base (A.2.1), podemos escrever

$$K|_{(x,y)}(X) = \sum_{i=1}^n \left( X_{n+i} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i y^j X_k \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x.$$

**Definição A.2.10.** O spray geodésico da conexão Riemanniana  $\nabla$  é o campo de vectores  $Z : TM \rightarrow TTM$  em  $TM$  tal que as suas curvas integrais, quando projectadas em  $M$  por  $\pi_M$ , são geodésicas relativamente a esta conexão. Isto é, se  $\alpha$  é uma curva integral de  $Z$ , então

$$\nabla_{\frac{d}{dt}(\pi_M \circ \alpha)(t)} \frac{d}{dt}(\pi_M \circ \alpha)(t) = 0.$$

Localmente, temos

$$Z = \sum_{i=1}^n \left( y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{(x,y)} - \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i y^j y^k \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{(x,y)} \right). \quad (\text{A.2.3})$$

### A.3 Fibrados tangentes de ordem $k$

#### A.3.1 Definição de fibrado tangente de ordem $k$

Apresentamos de seguida, uma generalização da noção de vector tangente à variedade num ponto. Mais concretamente, vamos ter uma definição de tangência de ordem superior, recorrendo a uma relação de equivalência entre curvas suaves na variedade que passam por um ponto fixo.

**Definição A.3.1.** Seja  $p \in M$  e consideremos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  duas curvas suaves em  $M$  tais que  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ . As curvas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  dizem-se tangentes de ordem  $k$  em  $p$  se, qualquer que seja a função suave  $f$  definida numa vizinhança de  $p$ , temos

$$\frac{d^s}{dt^s}(f \circ \gamma_1)(t) \Big|_{t=0} = \frac{d^s}{dt^s}(f \circ \gamma_2)(t) \Big|_{t=0}, \quad \text{para } s = 1, \dots, k.$$

Em alternativa à designação “tangentes de ordem  $k$ ”, podemos dizer que as curvas têm um contacto de ordem  $k$ . A relação acabada de definir é uma relação de equivalência no conjunto das curvas suaves em  $M$  que passam por  $p$ . As classes de equivalência determinadas por esta relação designam-se por  $k$ -velocidades, ou *jactos de ordem  $k$* , ou ainda  $k$ -*jactos*. Representamos por  $[\gamma]_0^k$  a classe de equivalência de uma curva  $\gamma$  em  $M$ .

**Definição A.3.2.** *O fibrado tangente de ordem  $k$  denota-se por  $T^k M$  e é definido como sendo o conjunto formado pelas classes de equivalência de curvas em  $M$  que têm um contacto de ordem  $k$ .*

Se considerarmos, na definição anterior,  $k = 0$  ou  $k = 1$ , facilmente se deduzem as identificações  $T^0 M \equiv M$  e  $T^1 M \equiv TM$ . O fibrado tangente  $T^k M$  pode ser munido de uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão  $(k+1)n$ . Além disso, a aplicação

$$\begin{aligned} \pi_k : T^k M &\longrightarrow M \\ [\gamma]_0^k &\longmapsto \gamma(0), \end{aligned}$$

é uma submersão sobrejectiva e portanto  $T^k M$  é uma variedade fibrada sobre  $M$  e cada uma das suas fibra é difeomorfa a  $\mathbb{R}^{(k+1)n}$ . Em geral,  $(T^k M, M, \pi_k)$  não tem a estrutura de fibrado vectorial, sendo as excepções os casos em que  $k = 0$  ou  $k = 1$ . Interessa-nos ainda considerar as seguintes projecções naturais:

$$\begin{aligned} \tau_k^l : T^k M &\longrightarrow T^l M && \text{para } 0 \leq l \leq k. \\ [\gamma]_0^k &\longmapsto [\gamma]_0^l \end{aligned} \tag{A.3.1}$$

Neste sentido,  $T^k M$  pode ser visto como um fibrado sobre  $T^l M$  para cada  $0 \leq l < k$ . É claro que  $\tau_k^0 = \pi_k$ .

### A.3.2 Sistema de coordenadas locais em $T^k M$

Podemos definir um sistema de coordenadas locais em  $T^k M$  a partir de um dado sistema de coordenadas locais em  $M$ , da forma a seguir descrita. Seja  $(U, x^1, \dots, x^n)$  um sistema de coordenadas locais em  $M$ . Para cada  $i = 1, \dots, n$ , construam-se os levantamentos



das funções coordenadas  $x^i : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ , definidos por

$$\begin{aligned} (x^i)_k^l : \pi_k^{-1}(U) \subset T^k M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\gamma]_0^k &\longmapsto \left. \frac{d^l}{dt^l} (x^i \circ \gamma)(t) \right|_{t=0}, \quad 0 \leq l \leq k. \end{aligned}$$

Consideramos as funções coordenadas definidas em  $\pi_k^{-1}(U) \subset T^k M$ , induzidas pelas funções coordenadas  $x^1, \dots, x^n$  em  $U \subset M$ , dadas por

$$x_0^1, \dots, x_0^n, x_1^1, \dots, x_1^n, \dots, x_k^1, \dots, x_k^n, \quad (\text{A.3.2})$$

onde  $x_l^i = (x^i)_k^l$ , para cada  $l = 0, \dots, k$  e  $i = 1, \dots, n$ . Por vezes, escrevemos simplesmente  $x_0^i = x^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Refira-se que em alguns casos, por motivos técnicos, torna-se mais útil considerar as funções coordenadas  $z_l^i = (1/l!)x_l^i$  em vez de  $x_l^i$ . Ao longo deste trabalho adoptamos o sistema de coordenadas em  $T^k M$  definido de acordo com (A.3.2), ou seja,  $(\pi_k^{-1}(U), x_0^1, \dots, x_0^n, x_1^1, \dots, x_1^n, \dots, x_k^1, \dots, x_k^n)$ .

Se  $[\gamma]_0^k \in T^k M$  é localmente representado por (A.3.2), um vector  $X \in T_{[\gamma]_0^k}(T^k M)$ , vector tangente a  $T^k M$  em  $[\gamma]_0^k$ , é dado por

$$X = \sum_{i=1}^n \left( X_i^0 \frac{\partial}{\partial x_0^i} + \dots + X_i^k \frac{\partial}{\partial x_k^i} \right). \quad (\text{A.3.3})$$

As projecções naturais  $\tau_k^l$  que definem  $T^k M$  como um fibrado sobre  $T^l M$ ,  $0 \leq l < k$ , ou seja, as aplicações (A.3.1), escrevem-se localmente como

$$\tau_k^l (x_0^1, \dots, x_0^n, \dots, x_k^1, \dots, x_k^n) = (x_0^1, \dots, x_0^n, \dots, x_l^1, \dots, x_l^n). \quad (\text{A.3.4})$$

Além disso, cada uma das aplicações tangentes  $T\tau_k^l : T(T^k M) \rightarrow T(T^l M)$  é definida, para cada vector tangente  $X$  da forma (A.3.3), por

$$(T\tau_k^l)(X) = \sum_{i=1}^n \left( X_i^0 \frac{\partial}{\partial x_0^i} + \dots + X_i^l \frac{\partial}{\partial x_l^i} \right). \quad (\text{A.3.5})$$

### A.3.3 Levantamentos

**Definição A.3.3.** *Seja  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  uma curva suave em  $M$ , com  $T \in \mathbb{R}^+$ . O levantamento de  $\gamma$  para  $T^k M$  é dado pela curva  $\gamma_k : [0, T] \rightarrow T^k M$ , definida por  $\gamma_k(t) = [\gamma_t]_0^k$ , onde  $\gamma_t(s) = \gamma(t + s)$ .*

Note-se que o levantamento de uma curva suave  $\gamma$  em  $M$  para  $TM$  (ou seja, considerando  $k = 1$  na definição anterior) é a curva  $\gamma_1$  em  $TM$  que a cada  $t \in [0, T]$  faz corresponder o vector tangente a  $\gamma$  em  $t$  dado na definição A.2.3.

Seja  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  uma curva suave em  $M$  com  $\gamma(t)$  representado localmente pelas coordenadas  $x^1(t), \dots, x^n(t)$ , para cada  $t \in [0, T]$ , onde  $T \in \mathbb{R}^+$ . Então, o levantamento  $\gamma_k : [0, T] \rightarrow T^k M$  de  $\gamma$  para  $T^k M$  é tal que cada elemento  $\gamma_k(t)$ , com  $t \in [0, T]$ , é representado localmente pelas coordenadas:

$$x^1(t), \dots, x^n(t), \frac{dx^1}{dt}(t), \dots, \frac{dx^n}{dt}(t), \frac{d^k x^1}{dt^k}(t), \dots, \frac{d^k x^n}{dt^k}(t).$$

Repare-se que o vector tangente a esta curva em  $t = 0$ ,  $(d\gamma_k/dt)(0)$ , é dado por

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{dx^i}{dt}(0) \frac{\partial}{\partial x_0^i} + \frac{d^2 x^i}{dt^2}(0) \frac{\partial}{\partial x_1^i} + \dots + \frac{d^{k+1} x^i}{dt^{k+1}}(0) \frac{\partial}{\partial x_k^i} \right).$$

Portanto, dadas duas curvas  $\gamma$  e  $\sigma$  em  $M$ , os seus correspondentes levantamentos  $\gamma_k$  e  $\sigma_k$  para  $T^k M$  são tangentes em  $t = 0$  se e só se  $\gamma$  e  $\sigma$  são tangentes de ordem  $(k + 1)$  em  $\gamma(0) = \sigma(0)$ .

### A.3.4 Operador de derivação total

Consideremos agora as injecções

$$\begin{aligned} i_{k,l} : T^{k+l} M &\longrightarrow T^k(T^l M) \\ [\gamma]_0^{k+l} &\longmapsto [\gamma_l]_0^k \end{aligned} \quad \text{para } 1 \leq l \leq k,$$

onde  $\gamma_l$  é o levantamento para  $T^l M$  da curva  $\gamma$ . Em particular, destacamos a injecção

$$\begin{aligned} i_{1,l} : T^{l+1} M &\longrightarrow T(T^l M) \\ [\gamma]_0^{l+1} &\longmapsto [\gamma_l]_0^1 \end{aligned} \tag{A.3.6}$$

que assume um papel importante na teoria dos fibrados tangentes de ordem superior. Note-se que, para um qualquer  $Q \in T^{l+1} M$ , a imagem  $i_{1,l}(Q)$  representa o vector tangente em  $t = 0$  ao levantamento natural  $\gamma_l$ , de uma qualquer curva  $\gamma$  na classe de equivalência representada por  $Q$ , para  $T^l M$ . Portanto, este vector tangente depende

do representante  $Q$  em geral e não da escolha particular de  $\gamma$  na classe de equivalência associada a  $Q$ .

Importa observar que  $i_{1,l}$  pode ser interpretada como um campo de vectores ao longo da projecção  $\tau_{l+1}^l$ , o que significa que satisfaz  $\tau_l \circ i_{1,l} = \tau_{l+1}^l$ , onde  $\tau_l : T(T^l M) \rightarrow T^l M$  é a projecção natural do fibrado tangente, ou seja, verifica-se a comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 T^{l+1}M & \xrightarrow{i_{1,l}} & T(T^l M) \\
 & \searrow \tau_{l+1}^l & \downarrow \tau_l \\
 & & T^l M
 \end{array}$$

De forma similar ao que acontece com os campos de vectores usuais em variedades, os campos de vectores ao longo de curvas definem operadores diferenciais de primeira ordem que actuam em funções. Neste sentido, a aplicação  $i_{1,l}$  permite-nos construir um operador diferencial que associa a cada função em  $T^l M$  uma função em  $T^{l+1} M$ . Denotaremos este operador por  $d_{T^l}$  ou simplesmente por  $d_T$ , caso não haja ambiguidade sobre o índice  $l$  que estamos a considerar.

**Definição A.3.4.** *O operador  $d_T$ , que associa a cada função  $f$  em  $T^l M$ , a função  $d_T f$  em  $T^{l+1} M$  definida por*

$$d_T f \left( [\gamma]_0^{l+1} \right) = i_{1,l} \left( [\gamma]_0^{l+1} \right) f,$$

para cada  $[\gamma]_0^{l+1} \in T^{l+1} M$ , designa-se por operador diferencial de Tulczyjew ou operador de derivação total (“total time derivative”).

Em alternativa à expressão apresentada na definição anterior, podemos escrever

$$d_T f \left( [\gamma]_0^{l+1} \right) = df \left( [\gamma]_0^l \right) \left( i_{1,l} \left( [\gamma]_0^{l+1} \right) \right).$$

Em coordenadas locais, a injeção  $i_{1,l}$  e o operador  $d_T$  são representados, respectiva-

mente, por

$$\begin{aligned} i_{1,l}(x_0^1, \dots, x_0^n, \dots, x_{l+1}^1, \dots, x_{l+1}^n) &= \\ &= (x_0^1, \dots, x_0^n, \dots, x_l^1, \dots, x_l^n, x_1^1, \dots, x_1^n, \dots, x_{l+1}^1, \dots, x_{l+1}^n) \end{aligned}$$

e

$$d_T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^l x_{j+1}^i \frac{\partial}{\partial x_j^i}.$$

**Observação A.3.5.** *Importa referir que o operador  $d_T$  se estende, de uma forma natural, a um operador que actua nas formas diferenciáveis. Este operador, que representaremos também por  $d_T$ , associa a cada  $p$ -forma em  $T^k M$  uma  $p$ -forma em  $T^{k+1} M$ . Além disso, verifica-se  $d_T \circ d = d \circ d_T$ , onde  $d$  é a diferenciação exterior na álgebra exterior das formas diferenciáveis em  $T^k M$ .*

## A.4 Campo de vectores de Liouville de ordem superior

Para o que se segue, interessa-nos considerar as projecções naturais

$$\tau_k^{r-1} : T^k M \rightarrow T^{r-1} M, [\gamma]_0^k \mapsto [\gamma]_0^{r-1}, \quad \text{para } 1 \leq r \leq k.$$

De acordo com (A.3.4) e (A.3.5), estas projecções são localmente definidas por

$$\tau_k^{r-1}(x_0^1, \dots, x_0^n, \dots, x_k^1, \dots, x_k^n) = (x_0^1, \dots, x_0^n, \dots, x_{r-1}^1, \dots, x_{r-1}^n)$$

e as respectivas aplicações tangentes  $T\tau_k^{r-1} : T(T^k M) \rightarrow T(T^{r-1} M)$  são dadas por

$$T\tau_k^{r-1}(X) = \sum_{i=1}^n \left( X_i^0 \frac{\partial}{\partial x_0^i} + \dots + X_i^{r-1} \frac{\partial}{\partial x_{r-1}^i} \right),$$

para cada  $X = \sum_{i=1}^n [X_i^0(\partial/\partial x_0^i) + \dots + X_i^k(\partial/\partial x_k^i)] \in T_{[\gamma]_0^k} T^k M$ , com  $[\gamma]_0^k \in T^k M$ .

**Definição A.4.1.** *O fibrado vertical de  $T^k M$  sobre  $T^{r-1} M$ , que denotaremos por*

$$V\tau_k^{r-1}(T^k M),$$

*é definido como sendo o conjunto de todos os vectores tangentes a  $T^k M$  que são projectados em zero por  $T\tau_k^{r-1}$ .*

De acordo com esta definição, se  $[\gamma]_0^k \in T^k M$  e  $X$  é um elemento de  $V^{\tau_k^{r-1}}(T^k M)$  em  $[\gamma]_0^k$ , então  $X$  escreve-se localmente como

$$X = \sum_{i=1}^n \left( X_i^r \frac{\partial}{\partial x_r^i} + \cdots + X_i^k \frac{\partial}{\partial x_k^i} \right).$$

**Observação A.4.2.** *No caso particular  $k = 1$  e  $r = 1$ , a projecção  $\tau_k^{r-1}$  é a aplicação projecção canónica do fibrado tangente  $TM$ ,  $\tau_1^0 = \pi_M : TM \rightarrow M$ . O fibrado vertical de  $TM$  sobre  $M$ ,  $V^{\pi_M}(TM)$ , é constituído por todos os vectores tangentes a  $TM$  que são projectados em zero por  $T\pi_M$ , ou seja,  $V^{\pi_M}(TM)$  é o fibrado vertical  $VTM$  da definição A.2.5.*

Seja  $T^k M \times_{T^{r-1}M} T(T^{r-1}M)$  o fibrado induzido do fibrado tangente  $T(T^{r-1}M)$  via  $\tau_k^{r-1}$ . Definam-se agora os isomorfismos de fibrados vectoriais sobre  $T^k M$  (ver página 18 de [49])

$$h_r : T^k M \times_{T^{r-1}M} T(T^{r-1}M) \longrightarrow V^{\tau_k^{k-r}}(T^k M) \quad (\text{A.4.1})$$

dados localmente por

$$h_r(x_0, \dots, x_k, x_0, \dots, x_{r-1}, X^0, \dots, X^{r-1}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \frac{(k-r+j)!}{(j-1)!} X_i^{j-1} \frac{\partial}{\partial x_{k-r+j}^i},$$

onde, para simplificarmos a notação, fizemos  $x_s = x_s^1, \dots, x_s^n$  e  $X^s = X_1^s, \dots, X_n^s$ , para qualquer índice  $s$  utilizado.

Com o intuito de melhor compreendermos os isomorfismos acabadas de introduzir, apresentamos uma observação onde se analisam as situações em que  $k = 1$  e  $k = 2$ .

**Observação A.4.3.** *No caso particular  $k = 1$ , temos apenas um isomorfismo de fibrado vectorial sobre  $TM$*

$$h : TM \times_M TM \longrightarrow V(TM)$$

localmente dado por

$$h(x_0, x_1, x_0, X^0) = (x_0, x_1, 0, X^0).$$

Se  $k = 2$ , definem-se dois isomorfismos fibrados sobre  $T^2 M$

$$h_1 : T^2 M \times_M TM \longrightarrow V^{\tau_2^1}(T^2 M) \quad e \quad h_2 : T^2 M \times_{TM} T(TM) \longrightarrow V^{\tau_2^0}(T^2 M),$$

localmente definidos por

$$h_1(x_0, x_1, x_2, x_0, X^0) = (x_0, x_1, x_2, 0, 0, 2X^0)$$

$$h_2(x_0, x_1, x_2, x_0, x_1, X^0, X^1) = (x_0, x_1, x_2, 0, X^0, 2X^1).$$

Observe-se que estamos a utilizar novamente a simplificação de notação  $x_s = x_s^1, \dots, x_s^n$ , para  $s = 0, 1, 2$  e  $X^s = X_1^s, \dots, X_n^s$ , para  $s = 0, 1$ .

Consideremos ainda as aplicações canónicas

$$\begin{aligned} j_r : T^k M &\longrightarrow T(T^{r-1}M) \\ [\gamma]_0^k &\longmapsto [\tau]_0^1 \end{aligned}, \quad 1 \leq r \leq k, \quad (\text{A.4.2})$$

onde  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow T^{r-1}M$ ,  $t \mapsto \tau(t) = [\gamma_t]_0^{r-1}$ , para  $\gamma_t(s) = \gamma(t+s)$ .

As aplicações (A.4.1) e (A.4.2) permitem-nos introduzir as estruturas geométricas que apresentamos na definição a seguir.

**Definição A.4.4.** O campo de vectores canónico de ordem  $r$  em  $T^k M$  é o campo de vectores  $C_r : T^k M \rightarrow V\tau_k^{r-1}(T^k M) \subset T(T^k M)$  definido pela seguinte composição

$$T^k M \xrightarrow{\text{Id} \times j_{k-r+1}} T^k M \times_{T^{k-r}M} T(T^{k-r}M) \xrightarrow{h_{k-r+1}} V\tau_k^{r-1}(T^k M),$$

ou seja,

$$C_r = h_{k-r+1} \circ (\text{Id} \times j_{k-r+1}),$$

onde  $\text{Id}$  representa a identidade em  $T^k M$ .

**Definição A.4.5.** O campo de vectores de Liouville de ordem  $k$  ou campo de vectores de Liouville em  $T^k M$  é o campo de vectores canónico de ordem 1 em  $T^k M$  definido de acordo com a definição anterior, ou seja,

$$C_1 = h_k \circ (\text{Id} \times j_k) : T^k M \longrightarrow V\tau_k^0(T^k M) \subset T(T^k M).$$

Efectuando alguns cálculos, deduz-se que  $C_r$  é definido localmente por

$$C_r = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k-r+1} \frac{(r+j-1)!}{(j-1)!} x_j^i \frac{\partial}{\partial x_{r+j-1}^i}.$$

Em particular, o campo de vectores de Liouville em  $T^k M$  é dado por

$$C_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k j x_j^i \frac{\partial}{\partial x_j^i}.$$

**Observação A.4.6.** Quando  $k = 1$ ,  $j_1 : TM \rightarrow TM$  é a aplicação identidade e temos simplesmente o campo de vectores de Liouville em  $TM$ ,  $\Delta : TM \rightarrow VTM \subset TTM$ , definido localmente por

$$\Delta := C_1 = \sum_{i=1}^n x_1^i \frac{\partial}{\partial x_1^i}.$$

Note-se que esta expressão está de acordo com a definição A.2.6.

Para  $k = 2$ , temos dois campos de vectores canónicos em  $T^2 M$ , o campo de vectores de Liouville em  $T^2 M$ , ou seja,  $C_1 : T^2 M \rightarrow V^{\tau_2^0}(T^2 M) \subset T(T^2 M)$ , e o campo de vectores  $C_2 : T^2 M \rightarrow V^{\tau_2^1}(T^2 M) \subset T(T^2 M)$ , que são dados localmente por

$$C_1 = \sum_{i=1}^n \left( x_1^i \frac{\partial}{\partial x_1^i} + 2x_2^i \frac{\partial}{\partial x_2^i} \right) \quad e \quad C_2 = \sum_{i=1}^n 2x_1^i \frac{\partial}{\partial x_2^i}. \quad (\text{A.4.3})$$

## A.5 Estrutura canónica quase-tangente de ordem superior

Com o intuito de generalizarmos para ordem superior a noção de estrutura canónica quase-tangente, começamos por introduzir  $k$  endomorfismos de  $T(T^k M)$  (ou seja, campos de tensores do tipo  $(1, 1)$  em  $T^k M$ ). Para tal, necessitamos de três aplicações: as aplicações  $h_{k-r+1}$  definidas de acordo com (A.4.1); as inclusões canónicas

$$i_{k-r+1} : V^{\tau_k^{r-1}}(T^k M) \rightarrow T(T^k M);$$

e ainda os homomorfismos de fibrados vectoriais sobre  $T^k M$  definidos por

$$\begin{aligned} s_{k-r+1} : T(T^k M) &\longrightarrow T^k M \times_{T^{r-1} M} T(T^{r-1} M) \\ X &\longmapsto (\pi_{T^k M}(X), T\tau_k^{r-1}(X)), \end{aligned}$$

onde  $\tau_k^{r-1}$  são as projecções naturais também consideradas na secção anterior e  $\pi_{T^k M}$  é a projecção canónica de  $T(T^k M)$  em  $T^k M$ . Note-se que

$$\text{Ker}(s_{k-r+1}) = V^{\tau_k^{r-1}}(T^k M).$$

**Definição A.5.1.** O endomorfismo  $J_r : T(T^k M) \rightarrow T(T^k M)$  definido por

$$J_r = i_{k-r+1} \circ h_{k-r+1} \circ s_r, \quad 1 \leq r \leq k,$$

designa-se por endomorfismo vertical de ordem  $r$  de  $T(T^k M)$ .

A relação existente entre os  $k$  endomorfismos acabados de definir é dada pela seguinte proposição:

**Proposição A.5.2.** O endomorfismo vertical  $J_r$  de ordem  $r$  de  $T(T^k M)$  tem característica constante igual a  $(k - r + 1)n$  e satisfaz

$$(J_r)^s = \begin{cases} 0 & \text{se } rs \geq k + 1 \\ J_{rs} & \text{se } rs < k + 1. \end{cases}$$

Observe-se que  $J_r$  é localmente definido por

$$J_r = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k-r+1} \frac{(r+j-1)!}{(j-1)!} \frac{\partial}{\partial x_{r+j-1}^i} \otimes dx_{j-1}^i.$$

Uma estrutura quase tangente de ordem  $k$  numa variedade  $E$  de dimensão  $(k+1)n$  é definida como sendo um endomorfismo  $J$  de  $TE$  que verifica  $J^{k+1} = 0$  e  $\text{rank } J = kn$ . Recorde-se que  $T^k M$  é uma variedade de dimensão  $(k+1)n$ . Assim, de acordo com a proposição anterior, podemos afirmar que o endomorfismo  $J_1$  determina uma estrutura quase-tangente de ordem  $k$  em  $T^k M$ , visto que  $(J_1)^{k+1} = 0$  e  $\text{rank } J_1 = kn$ .

**Definição A.5.3.** O endomorfismo  $J_1 : T(T^k M) \rightarrow T(T^k M)$ , isto é, o endomorfismo vertical de ordem 1 de  $T(T^k M)$ , designa-se por estrutura canónica quase-tangente de ordem  $k$  em  $T^k M$ , ou simplesmente, estrutura canónica quase-tangente em  $T^k M$ .

**Observação A.5.4.** Na situação particular  $k = 2$ , temos dois endomorfismos verticais de  $T(T^2 M)$ ,  $J_1$  e  $J_2$ , cujas representações matriciais são, respectivamente,

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & 2I_n & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2I_n & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5.1})$$



onde  $I_n$  e  $0$  representam a matriz identidade e a matriz nula de ordem  $n$ , respectivamente. Neste caso, tem-se  $(J_1)^3 = 0$  e  $\text{rank } J_1 = 2n$ , portanto  $J_1$  determina uma estrutura quase-tangente de ordem 2 em  $T^2M$ .  $J_1$  é a estrutura canónica quase-tangente em  $T^2M$ . Observe-se ainda que  $(J_1)^2 = J_2$ .

Fazendo uso da definição A.5.1 de endomorfismo vertical e da definição A.4.4 de campo de vectores canónico, facilmente se estabelece uma relação entre estes dois tipos de estruturas de  $T^kM$ , e que apresentamos na proposição a seguir.

**Proposição A.5.5.** *Sejam  $J_i$  os endomorfismos verticais de ordem  $i$  de  $T(T^kM)$  e  $C_i$  os campos de vectores canónicos de ordem  $i$  em  $T^kM$  ( $i=r,s$ ). Verificam-se as seguintes relações:*

$$J_r C_s = \begin{cases} 0 & \text{se } r + s \geq k + 1 \\ C_{r+s} & \text{se } r + s < k + 1 \end{cases}$$

$$[C_r, J_s] = \begin{cases} 0 & \text{se } r + s > k + 1 \\ -s J_{r+s-1} & \text{se } r + s \leq k + 1 \end{cases}$$

$$[J_r, J_s] = 0,$$

onde  $1 \leq r, s \leq k$ .

**Observação A.5.6.** *Tendo em atenção a proposição anterior, no caso do fibrado tangente  $T^2M$  ( $k = 2$ ), vem  $C_2 = J_1 C_1$ .*

## A.6 Derivações e diferenciação verticais

Seja  $\wedge(T^kM) := \bigoplus_{p \geq 0} \wedge^p(T^kM)$  a álgebra exterior de  $T^kM$ , onde  $\wedge^p(T^kM)$  representa o espaço vectorial das  $p$ -formas diferenciáveis em  $T^kM$ .

Consideremos os endomorfismos verticais  $J_r$  de ordem  $r$  de  $T(T^kM)$ ,  $1 \leq r \leq k$ , apresentados na secção anterior. Vamos necessitar do seguinte conceito de operador adjunto de  $J_r$ :

**Definição A.6.1.** O operador vertical de ordem  $r$  em  $T^k M$ , denotado por  $J_r^*$ , é o endomorfismo de  $\wedge(T^k M)$ , definido por

$$J_r^* \omega(X_1, \dots, X_p) = \omega(J_r X_1, \dots, J_r X_p),$$

onde  $\omega \in \wedge^p(T^k M)$  e  $X_1, \dots, X_p$  são campos de vectores em  $T^k M$ .

Se  $f$  é uma função em  $T^k M$ , então,  $J_r^* f = f$ . Além disso, localmente temos

$$J_r^*(dx_l^i) = \begin{cases} 0 & \text{se } l < r \\ \frac{l!}{(l-r)!} dx_{l-r}^i & \text{se } l \geq r \end{cases}, \quad \text{para } 1 \leq i \leq n, \quad 0 \leq l \leq k.$$

Da proposição A.5.2 resulta o seguinte:

**Proposição A.6.2.** O operador vertical  $J_r^*$  de ordem  $r$  em  $T^k M$  satisfaz

$$(J_r^*)^s = \begin{cases} 0 & \text{se } rs \geq k+1 \\ J_{rs}^* & \text{se } rs < k+1. \end{cases}$$

Da teoria geral das derivações em álgebras exteriores (consultar [49], em particular, as referências a Frölicher e Nijenhuis nesse artigo), sabemos que se  $E$  representa uma variedade diferenciável arbitrária, então a cada endomorfismo  $F$  de  $TE$  podemos associar duas derivações<sup>2</sup> na álgebra exterior de  $E$ :

- Uma derivação  $i_F$  de tipo  $i_*$  (ou seja, uma derivação que actua trivialmente nas 0-formas), definida, para qualquer  $p$ -forma  $\omega$  e quaisquer campos de vectores  $X_1, \dots, X_p$  em  $E$ , por  $i_F \omega(X_1, \dots, X_p) = \sum_{i=1}^p (X_1, \dots, F X_i, \dots, X_p)$ .

<sup>2</sup>Seguindo a abordagem de Frölicher e Nijenhuis para a teoria das derivações, uma derivação de grau  $r$  na álgebra exterior  $\wedge(E)$  é uma aplicação linear  $D: \wedge(E) \rightarrow \wedge(E)$  que satisfaz  $\text{grau}(D\omega) = \text{grau}(\omega) + r$ ; e  $D(\omega \wedge \eta) = D\omega \wedge \eta + (-1)^{pr} \omega \wedge D\eta$ , para quaisquer  $\omega \in \wedge^p(E)$ ,  $\eta \in \wedge(E)$  e onde  $\wedge$  representa o produto exterior de formas diferenciáveis. Para caracterizar uma derivação em  $\wedge(E)$  basta conhecer o seu comportamento em  $\wedge^0(E)$  e  $\wedge^1(E)$ , ou seja, em funções e 1-formas em  $E$ .

Dadas duas derivações  $D$  e  $D'$  de grau  $r$  e  $r'$ , respectivamente, define-se o comutador de  $D$  e  $D'$  como sendo  $[D, D'] = DD' - (-1)^{rr'} D'D$ .

- Uma derivação  $d_F$  de tipo  $d_*$  (ou seja, uma derivação que comuta com a diferenciação exterior em relação ao comutador de derivações,  $[d_F, d] = 0$ ), definida por  $d_F = [i_F, d] = i_F d - d i_F$ .

No âmbito do parágrafo anterior, associamos a cada endomorfismo vertical  $J_r$  de ordem  $r$  de  $T(T^k M)$ ,  $1 \leq r \leq k$ , duas derivações na álgebra exterior  $\Lambda(T^k M)$ : a derivação  $i_{J_r}$  de tipo  $i_*$  e a derivação  $d_{J_r}$  de tipo  $d_*$ . Estas duas aplicações lineares levam-nos aos conceitos de derivação e diferenciação verticais, que apresentamos a seguir.

**Definição A.6.3.** Para cada  $1 \leq r \leq k$ , a aplicação  $i_{J_r} : \Lambda(T^k M) \rightarrow \Lambda(T^k M)$ , definida para cada  $\omega \in \Lambda^p(T^k M)$ , por

$$i_{J_r} \omega(X_1, \dots, X_p) = \sum_{i=1}^p \omega(X_1, \dots, J_r X_i, \dots, X_p)$$

é a derivação de grau zero (aplica  $p$ -formas em  $p$ -formas) e de tipo  $i_*$  na álgebra exterior  $\Lambda(T^k M)$ , denominada por derivação vertical de ordem  $r$  em  $\Lambda(T^k M)$ .

As identidades apresentadas na proposição a seguir caracterizam por completo a derivação  $i_{J_r}$ .

**Proposição A.6.4.** A derivação vertical de ordem  $r$  em  $\Lambda(T^k M)$  satisfaz as seguintes identidades:

$$i_{J_r} f = 0 \quad e \quad i_{J_r} df = J_r^*(df),$$

para toda a função  $f$  em  $T^k M$ .

Por conseguinte,

$$i_{J_r}(dx_l^i) = \begin{cases} 0 & \text{se } l < r \\ \frac{l!}{(l-r)!} dx_{l-r}^i & \text{se } l \geq r \end{cases}, \quad \text{para } 1 \leq i \leq n, \quad 0 \leq l \leq k.$$

**Definição A.6.5.** A diferenciação vertical de ordem  $r$  em  $\Lambda(T^k M)$  é a derivação de grau 1 (a cada  $p$ -forma faz corresponder uma  $(p+1)$ -forma) e tipo  $d_*$  na álgebra exterior  $\Lambda(T^k M)$ , que denotaremos por  $d_{J_r}$ , dada pelo comutador

$$d_{J_r} = [i_{J_r}, d] = i_{J_r} d - d i_{J_r},$$

onde  $d$  representa a diferenciação exterior.

A diferenciação  $d_{J_r}$  fica caracterizada por inteiro através das identidades apresentadas no seguinte resultado:

**Proposição A.6.6.** *A diferenciação vertical  $d_{J_r}$  de ordem  $r$  em  $\wedge(T^k M)$  verifica as seguintes relações:*

$$d_{J_r} f = J_r^*(df) \quad e \quad d_{J_r} df = -d(J_r^* df),$$

para toda a função  $f$  em  $T^k M$ .

Assim, localmente temos

$$d_{J_r} f = \sum_{i=1}^n \sum_{l=r}^k \frac{l!}{(l-r)!} \frac{\partial f}{\partial x_l^i} dx_{l-r}^i$$

$$d_{J_r}(dx_l^i) = 0, \quad \text{para } 1 \leq i \leq n, \quad 0 \leq l \leq k.$$

**Observação A.6.7.** *Note-se que se estivermos em  $TM$  (ou seja com  $k = 1$ ) temos*

$$d_{J_1} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_1^i} dx_0^i, \quad \text{onde } f \text{ é uma função em } TM.$$

Por outro lado, na situação em que  $k = 2$ , obtemos

$$d_{J_1} f = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_1^i} dx_0^i + 2 \frac{\partial f}{\partial x_2^i} dx_1^i \right) \quad e \quad d_{J_2} f = \sum_{i=1}^n 2 \frac{\partial f}{\partial x_2^i} dx_0^i,$$

para  $f$  uma função em  $T^2 M$ .

## A.7 Formas semi-básicas

Seja  $J_r^*$  o operador vertical de ordem  $r$  em  $T^k M$  apresentado na definição A.6.1.

**Definição A.7.1.** *Uma  $p$ -forma  $\omega$  em  $T^k M$  diz-se semi-básica de tipo  $r$  se  $\omega \in \text{Im } J_r^*$ .*

Os conceitos de derivação e diferenciação verticais na álgebra exterior das formas diferenciáveis em  $T^k M$ , apresentados na secção anterior, podem ser analisados no contexto das formas diferenciáveis semi-básicas. Para um estudo aprofundado sobre o

assunto sugere-se [49], onde se encontram alguns resultados de que necessitamos nesta dissertação e que passamos a expor.

**Lema A.7.2.** *Uma forma diferenciável  $\omega$  de grau 1 (forma Pfaffiana ou 1-forma) em  $T^k M$  é semi-básica de tipo  $r$  se e só se pode ser localmente escrita como*

$$\omega = \sum_{i=1}^n \sum_{l=0}^{k-r} \omega_i^l dx_i^l,$$

para determinadas funções reais  $\omega_i^l = \omega_i^l(x_0^1, \dots, x_0^n, \dots, x_k^1, \dots, x_k^n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , onde  $(x_0^1, \dots, x_0^n, \dots, x_k^1, \dots, x_k^n)$  é um sistema de coordenadas locais em  $T^k M$ .

Consideremos as projecções naturais  $\tau_k^{k-r} : T^k M \rightarrow T^{k-r} M$  definidas de acordo com (A.3.1) e consideremos ainda as projecções canónicas  $\pi_{T^k M} : T(T^k M) \rightarrow T^k M$  e  $\tau_{T^{k-r} M} : T^*(T^{k-r} M) \rightarrow T^{k-r} M$ . Interessa-nos o seguinte teorema:

**Teorema A.7.3.** *A correspondência*

$$\omega(X) = ((D \circ \pi_{T^k M})(X)) \left( T\tau_k^{k-r}(X) \right), \quad X \in T(T^k M),$$

determina uma bijecção entre as 1-formas  $\omega$  semi-básicas de tipo  $r$  em  $T^k M$  e as aplicações

$$D : T^k M \rightarrow T^*(T^{k-r} M)$$

tais que

$$\tau_{T^{k-r} M} \circ D = \tau_k^{k-r}.$$

Note-se que a correspondência apresentada no teorema anterior se traduz por

$$\omega = \ll D \circ \pi_{T^k M}, T\tau_k^{k-r} \gg,$$

onde  $\ll \cdot, \cdot \gg$  representa o produto dualidade canónica de vectores e covectores em  $T^{k-r} M$ , isto é,  $\ll f, g \gg(z) = (f(z) \circ g)(z)$ .

Se a 1-forma semi-básica  $\omega$  do tipo  $r$  é dada localmente pela expressão apresentada no lema A.7.2, então facilmente se deduz que o morfismo de fibras  $D$  sobre  $T^{k-r} M$  do

teorema anterior, correspondente a  $\omega$ , se representa localmente por

$$\begin{aligned} D(x_0^1, \dots, x_0^n, \dots, x_k^1, \dots, x_k^n) &= \\ &= (x_0^1, \dots, x_0^n, \dots, x_{k-r}^1, \dots, x_{k-r}^n, \omega_1^0, \dots, \omega_n^0, \dots, \omega_1^{k-r}, \dots, \omega_n^{k-r}). \end{aligned}$$

**Corolário A.7.4.** *Se  $\lambda_{k-r}$  é a forma de Liouville em  $T^*(T^{k-r}M)$ , então*

$$D^*\lambda_{k-r} = \omega,$$

onde  $\omega$  é uma 1-forma semi-básica de tipo  $r$  em  $T^kM$  e  $D$  é a aplicação que se relaciona com  $\omega$  no sentido do teorema anterior.

## Apêndice B

# Grupos de Lie e acções de grupos de Lie

Este apêndice surge como um suporte ao estudo dos polinómios cúbicos Riemannianos em grupos de Lie. Neste sentido, começaremos por expor as definições de grupo de Lie e de álgebra de Lie, assim como algumas propriedades básicas. Em seguida, apresentaremos conceitos e resultados elementares que envolvem acções suaves de grupos de Lie em variedades diferenciáveis, usados essencialmente nos capítulos 2 e 3. Recordaremos a noção de aplicação momento que é uma generalização geométrica dos clássicos momentos linear e angular da mecânica. Esta é uma ferramenta que enriquece substancialmente o processo de redução de sistemas dinâmicos com grupos de simetrias. Abordaremos ainda o grupo de Lie produto semidirecto de um grupo de Lie e um espaço vectorial, descrito através de uma acção do grupo no espaço vectorial. As referências utilizadas são essencialmente [1, 17, 42, 46, 50, 55, 71]. Para um estudo detalhado sobre variedades diferenciáveis consultar, por exemplo, [22].

## B.1 Grupos de Lie e álgebras de Lie

**Definição B.1.1.** *Um grupo é um conjunto não vazio  $G$  com uma operação binária  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(g, h) \mapsto gh$ , usualmente designada por multiplicação, que satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) *A operação é associativa, ou seja, se  $g, h, k \in G$ , então  $g(hk) = (gh)k$ .*
- (ii) *Existe um elemento  $e \in G$  tal que  $eg = ge = g$ , para qualquer  $g \in G$ . O elemento  $e$  designa-se por identidade do grupo.*
- (ii) *Para cada  $g \in G$ , existe um elemento  $g^{-1} \in G$  tal que  $gg^{-1} = g^{-1}g = e$  e que se diz o inverso de  $g$ .*

**Definição B.1.2.** *Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável  $G$  munida com uma estrutura de grupo tal que as operações multiplicação  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(g, h) \mapsto gh$  e inversão  $G \rightarrow G$ ,  $g \mapsto g^{-1}$  são suaves.*

Neste trabalho assumimos que os grupos de Lie considerados têm dimensão finita.

**Exemplo B.1.3.** *O conjunto das matrizes reais  $n \times n$  e invertíveis é um grupo de Lie de dimensão  $n^2$ , designado por grupo geral linear e denotado por  $GL(n, \mathbb{R})$ . De facto,  $GL(n, \mathbb{R})$  é uma variedade diferenciável porque pode ser identificado com um subconjunto aberto do espaço vectorial real  $M(n, \mathbb{R})$  de dimensão  $n^2$  constituído por todas as matrizes reais  $n \times n$ . Mais concretamente, considerando o aberto  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  e a aplicação  $\det : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \mapsto \det A$ , temos  $GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  é um aberto de  $M(n, \mathbb{R})$ , uma vez que  $M(n, \mathbb{R})$  é uma variedade diferenciável (de dimensão  $n^2$  e isomorfa a  $\mathbb{R}^{n^2}$ ) e a aplicação  $\det$  é contínua (dado que  $\det A$  é uma função polinomial nas entradas da matriz  $A$ ). Além disso,  $GL(n, \mathbb{R})$  é um grupo com operações multiplicação e inversão dadas, respectivamente, pela multiplicação e pela inversão de matrizes. O elemento identidade é a matriz identidade. As operações de grupo são suaves uma vez que as fórmulas para o produto e a inversa de matrizes são suaves nas componentes da matriz. De facto, para cada  $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$ ,  $AB$  é uma função*



polinomial nas entradas de  $A$  e  $B$ ; o elemento inverso de cada  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  é dado por  $A^{-1} = A^*/\det A$ , onde  $A^*$  é a matriz que se obtém de  $A$  substituindo cada elemento pelo seu complemento algébrico e transpondo em seguida, e dado que  $\det A \neq 0$ ,  $A^{-1}$  é uma função racional nas entradas de  $A$  com denominador diferente de zero.

**Definição B.1.4.** *Seja  $G$  um grupo de Lie e  $g \in G$ . As aplicações*

$$\begin{array}{ccc} L_g : G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & gh \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} R_g : G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & hg \end{array}$$

*dizem-se, respectivamente, as translações à esquerda e à direita por  $g$ .*

**Proposição B.1.5.** *Seja  $G$  um grupo de Lie. Então,*

1. *As translações à esquerda e à direita por um elemento de  $G$  são difeomorfismos.*
2. *As aplicações tangentes das translações à esquerda e à direita num ponto são isomorfismos.*

*Demonstração.* Dado  $g \in G$ , é óbvio que as translações  $L_g$  e  $R_g$  são suaves pois escrevem-se como composições de funções suaves:  $L_g$  é a composição da operação multiplicação com a função  $G \rightarrow G \times G$ ,  $h \mapsto (g, h)$ ; e  $R_g$  é a composição da operação multiplicação com a função  $G \rightarrow G \times G$ ,  $h \mapsto (h, g)$ . Note-se que  $L_e = R_e = Id$ ,  $L_g \circ L_h = L_{gh}$  e  $R_g \circ R_h = R_{hg}$ , para quaisquer  $g, h \in G$ . Assim,  $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$  e  $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$ . Logo, as aplicações inversas de  $L_g$  e  $R_g$  também são suaves e, portanto,  $L_g$  e  $R_g$  são difeomorfismos. Para demonstrar o segundo ponto da proposição basta observar que, usando a regra da cadeia, podemos escrever  $T_{gh}L_{g^{-1}} \circ T_hL_g = T_h(L_{g^{-1}} \circ L_g) = Id$  e  $T_{hg}R_{g^{-1}} \circ T_hR_g = T_h(R_{g^{-1}} \circ R_g) = Id$ , para quaisquer  $g, h \in G$ . Logo, as aplicações tangentes  $T_hL_g$  e  $T_hR_g$ , respectivamente, de  $L_g$  e de  $R_g$  em  $h \in G$ , admitem inversas e portanto são isomorfismos. □

Refira-se ainda que as translações à esquerda e direita comutam uma com a outra, ou seja,  $L_g \circ R_h = R_h \circ L_g$ , para quaisquer  $g, h \in G$ .

**Definição B.1.6.** Um homomorfismo de grupos de Lie é uma aplicação suave  $f$  entre dois grupos de Lie  $G$  e  $H$  que preserva as operações de grupo. Se o homomorfismo de grupos de Lie  $f$  é uma bijecção, então  $f$  diz-se um isomorfismo de  $G$  em  $H$ .

**Definição B.1.7.** Seja  $G$  um grupo de Lie. Um subgrupo  $H$  de  $G$  diz-se um subgrupo de Lie se  $H$  é também um grupo de Lie e a inclusão  $i : H \hookrightarrow G$  é uma imersão<sup>1</sup>.

**Definição B.1.8.** Um espaço vectorial real  $\mathfrak{g}$  diz-se uma álgebra de Lie se estiver equipado com uma operação  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , designada por parêntesis de Lie de  $\mathfrak{g}$ , que verifica as seguintes propriedades:

- (i)  $[aY+bZ, W]=a[Y, W]+b[Z, W]$  (bilinearidade),
- (ii)  $[Y, Z]=-[Z, Y]$  (anti-simetria),
- (iii)  $[Y, [Z, W]]+[Z, [W, Y]]+[W, [Y, Z]]=0$  (identidade de Jacobi),

para quaisquer  $Y, Z, W \in \mathfrak{g}$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Definição B.1.9.** Seja  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  uma álgebra de Lie. Um subespaço vectorial  $\mathfrak{s}$  de  $\mathfrak{g}$  diz-se uma subálgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$  se  $[Y, Z] \in \mathfrak{s}$ , para quaisquer  $Y, Z \in \mathfrak{s}$ .

**Definição B.1.10.** Duas álgebras de Lie  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}})$  e  $(\mathfrak{h}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{h}})$  dizem-se isomorfas se existe um isomorfismo  $f$  entre os espaços vectoriais  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$  que satisfaz a identidade  $f([Y, Z]_{\mathfrak{g}}) = [f(Y), f(Z)]_{\mathfrak{h}}$ , para quaisquer  $Y, Z \in \mathfrak{g}$ .

Refira-se que o parêntesis de Lie de quaisquer dois elementos de uma álgebra de Lie se determina a partir dos parênteses de Lie dos elementos da base da álgebra. Se  $\mathfrak{g}$  é uma álgebra de Lie de dimensão  $n$  e  $\{X_1, \dots, X_n\}$  é uma base de  $\mathfrak{g}$ , temos

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k X_k,$$

<sup>1</sup> Recorde-se que uma aplicação suave  $f : N \rightarrow M$  entre duas variedades diferenciáveis diz-se uma imersão se a aplicação linear  $T_n f : T_n N \rightarrow T_{f(n)} M$  (aplicação tangente de  $f$  em  $n$ ) é injectiva para qualquer  $n \in N$ . Se para além disso, a aplicação  $f$  for injectiva, dizemos que  $f$  é uma imersão injectiva. (Consultar, por exemplo, página 5 de [71] ou páginas 11, 12 e 13 de [46].)

para quaisquer  $X_i, X_j$  elementos da base de  $\mathfrak{g}$  e onde  $C_{ij}^k$  são  $n^3$  constantes reais,  $i, j, k = 1, \dots, n$ , designadas por *constantes de estrutura da álgebra* relativamente à base  $\{X_1, \dots, X_n\}$ . Duas álgebras de Lie são isomorfas se e só se têm as mesmas constantes de estrutura (relativamente a uma certa base).

**Exemplo B.1.11.** *O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , munido com o produto externo  $\times$  como seu parêntesis de Lie, é uma álgebra de Lie. De facto, as propriedades de bilinearidade e anti-simetria são consequência imediata da definição de produto externo em  $\mathbb{R}^3$ . Por outro lado, a identidade de Jacobi resulta da identidade de Lagrange para o produto externo:*

$$u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w, \quad u, v, w \in \mathbb{R}^3, \quad (\text{B.1.1})$$

onde  $\cdot$  denota o produto interno em  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemplo B.1.12.** *O conjunto de todas as matrizes reais  $n \times n$ , equipado com o comutador de matrizes  $[A, B] = AB - BA$  como seu parêntesis de Lie, é uma álgebra de Lie que denotamos por  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ . As propriedades de bilinearidade e anti-simetria são consequência da definição de comutador de matrizes e do facto de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  ser um espaço vectorial relativamente à adição de matrizes e à multiplicação escalar. A identidade de Jacobi vem da propriedade associativa do produto de matrizes.*

**Exemplo B.1.13.** *O espaço vectorial  $\mathcal{X}(M)$  dos campos de vectores suaves de uma variedade diferenciável  $M$  é uma álgebra de Lie para o produto de Lie usual de campos de vectores em  $M$  dado por  $(Y, Z) \in \mathcal{X}(M) \mapsto [Y, Z] \in \mathcal{X}(M)$ , onde  $[Y, Z]$  é o campo de vectores em  $M$  que associa a cada  $p \in M$  um vector  $[Y, Z]_p \in T_p M$  definido por  $[Y, Z]_p(f) = Y_p(Zf) - Z_p(Yf)$ , para qualquer função suave  $f$  em  $M$ . Localmente, se  $(x^1, \dots, x^n)$  é um sistema de coordenadas locais em  $M$ , para cada  $Y = \sum_{i=1}^n Y^i(\partial/\partial x^i)$  e  $Z = \sum_{i=1}^n Z^i(\partial/\partial x^i)$ , temos  $[Y, Z] = \sum_{i,j=1}^n [Y^i(\partial Z^j/\partial x^i) - Z^i(\partial Y^j/\partial x^i)](\partial/\partial x^j)$ .*

*Para mais pormenores sobre esta álgebra de Lie consultar [22].*

**Definição B.1.14.** *Um campo de vectores  $Y$  num grupo de Lie  $G$  diz-se invariante à esquerda se para todo o  $g \in G$  o prolongamento (“push-forward”) de  $Y$  pela translação*

$L_g$  coincide com  $Y$ ,  $(L_g)_*Y = Y$ , ou seja,  $TL_g \circ Y = Y \circ L_g$ . O que significa que

$$(T_h L_g)(Y(h)) = Y(gh), \quad \text{para todo } h \in G.$$

Representamos por  $\mathcal{X}_L(G)$  o conjunto formado por todos os campos de vectores definidos no grupo de Lie  $G$  e invariantes à esquerda.

**Observação B.1.15.** *Note-se que qualquer  $Y \in \mathcal{X}_L(G)$  fica completamente determinado pela sua imagem na identidade do grupo. De facto, da definição B.1.14 vem*

$$Y(g) = (T_e L_g)(Y(e)), \quad \text{para qualquer } g \in G.$$

**Proposição B.1.16.**  $\mathcal{X}_L(G)$  é uma subálgebra de Lie da álgebra de Lie  $\mathcal{X}(G)$ .

*Demonstração.* Se  $Y, Z \in \mathcal{X}_L(G)$  e  $g \in G$ ,  $(L_g)_*[Y, Z] = [(L_g)_*Y, (L_g)_*Z] = [Y, Z]$ . Logo,  $[Y, Z] \in \mathcal{X}_L$  e de acordo com a definição B.1.9, a demonstração está concluída.  $\square$

**Exemplo B.1.17.** *Seja  $G$  um grupo de Lie e  $T_e G$  o espaço tangente a  $G$  no seu elemento identidade  $e$ . Note-se que a cada  $u \in T_e G$  podemos associar um campo de vectores invariante à esquerda  $X_u \in \mathcal{X}_L(G)$  considerando*

$$X_u(g) = T_e L_g u, \quad (\text{B.1.2})$$

para cada  $g \in G$ . O espaço vectorial  $T_e G$  é uma álgebra de Lie quando munido com o parêntesis de Lie definido, para cada  $u, v \in T_e G$ , por  $[u, v] = [X_u, X_v](e)$ .

**Definição B.1.18.** *A álgebra de Lie  $T_e G$ , definida de acordo com o exemplo anterior, designa-se por álgebra de Lie do grupo de Lie  $G$  e denota-se por  $\mathfrak{g}$ .*

**Proposição B.1.19.** *As álgebras de Lie  $\mathcal{X}_L(G)$  e  $T_e G$  são isomorfas.*

*Demonstração.* Face ao exposto na observação B.1.15, para demonstrar o pretendido é apenas necessário ter em atenção a igualdade  $[X_u, X_v] = X_{[u, v]}$ ,  $u, v \in T_e G$ , e observar que as seguintes aplicações lineares estão bem definidas

$$\zeta_1 : \mathcal{X}_L(G) \rightarrow T_e G, \quad Y \mapsto Y(e) \quad \text{e} \quad \zeta_2 : T_e G \rightarrow \mathcal{X}_L(G), \quad u \mapsto X_u,$$

onde  $X_u$  é definido por (B.1.2), e que satisfazem  $\zeta_1 \circ \zeta_2 = Id_{T_e G}$  e  $\zeta_2 \circ \zeta_1 = Id_{\mathcal{X}_L(G)}$ .  $\square$

Finalizamos a presente secção com algumas considerações sobre um conceito que nos permite uma abordagem alternativa (em termos de linguagem e notação) aos resultados associados à trivialização de  $TG$  descrita no capítulo 2. Referimo-nos à forma de Maurer-Cartan num grupo de Lie. Acerca da caracterização e propriedades da forma de Maurer-Cartan recomenda-se a consulta de [75].

**Definição B.1.20.** *A forma de Maurer-Cartan (invariante à esquerda) num grupo de Lie  $G$  é a 1-forma  $\lambda$  em  $G$  com valores em  $\mathfrak{g}$  definida, para cada  $x \in G$ , pelo isomorfismo  $\lambda_x : T_x G \rightarrow \mathfrak{g}$ , dado por*

$$\lambda_x(v_x) = T_x L_{x^{-1}} v_x,$$

para cada  $v_x \in T_x G$ .

Refira-se que, por vezes, escrevemos simplesmente  $\lambda(v_x)$  em vez de  $\lambda_x(v_x)$ .

Recordamos ainda a equação (estrutural da forma) de Maurer-Cartan, que caracteriza a derivada exterior da forma de Maurer-Cartan  $\lambda$  num grupo de Lie  $G$ , e que é dada por

$$d\lambda + \frac{1}{2}[\lambda, \lambda] = 0, \tag{B.1.3}$$

onde  $[\lambda, \lambda]$  é a 2-forma em  $G$  com valores em  $\mathfrak{g}$ , definida, para quaisquer campos de vectores  $Z$  e  $W$  em  $G$ , por  $[\lambda, \lambda](Z, W) := 2[\lambda(Z), \lambda(W)]$ . Importa referir que a equação de Maurer-Cartan assume um papel relevante na teoria dos grupos de Lie, no sentido em que permite caracterizar localmente o grupo de Lie ([75]).

## B.2 Acção de um grupo de Lie numa variedade

Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão finita e  $G$  um grupo de Lie.

**Definição B.2.1.** *Uma acção à esquerda (respectivamente, à direita) de  $G$  em  $M$  é uma aplicação suave  $\phi : G \times M \rightarrow M$  (respectivamente,  $\psi : M \times G \rightarrow M$ ) que satisfaz*

$$(i) \ \phi(e, x) = x \text{ (respectivamente, } \psi(x, e) = x),$$

$$(ii) \phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x) \text{ (respectivamente, } \psi(\psi(x, g), h) = \psi(x, gh)),$$

para todo o  $x \in M$  e  $g, h \in G$ .

Os conceitos e propriedades apresentados nesta e na próxima secção dizem respeito às acções à esquerda, considerações similares podem ser feitas para as acções à direita.

Se  $\phi$  é uma acção (à esquerda) de  $G$  em  $M$ , é comum usar-se qualquer uma das seguinte notações:

$$g \cdot x = \phi(g, x) = \phi_g(x) = \phi^x(g), \quad g \in G, x \in M.$$

O terno  $(M, G, \phi)$  diz-se um  $G$ -espaço ou uma  $G$ -variedade.

**Observação B.2.2.** Para cada  $g \in G$ , a aplicação  $\phi_g : M \rightarrow M$ ,  $x \mapsto \phi(g, x)$  é um difeomorfismo com inversa  $(\phi_g)^{-1} = \phi_{g^{-1}}$ . Note-se que as condições da definição de acção escrevem-se de forma equivalente como (i)  $\phi_e = id_M$  e (ii)  $\phi_{gh} = \phi_g \circ \phi_h$ . Neste sentido, em alternativa à definição apresentada, dizemos que temos uma acção de  $G$  em  $M$  quando a aplicação  $g \mapsto \phi_g$  é um homomorfismo de  $G$  no grupo de difeomorfismos de  $M$ . Neste âmbito, quando  $M$  é um espaço vectorial e  $\phi_g$  uma transformação linear, a acção de  $G$  em  $M$  diz-se uma representação de  $G$  em  $M$ .

A um  $G$ -espaço podemos associar novas acções de grupo construídas por restrição, da forma apresentada no lema a seguir (que pode ser encontrado em [71], página 51). Para formular o lema precisamos de recordar a noção de subvariedade inicial (consultar, por exemplo, página 5 de [71] ou páginas 11, 12 e 13 de [46]):

**Definição B.2.3.** Uma subvariedade  $N$  de uma variedade diferenciável  $M$  diz-se uma subvariedade inicial se a inclusão  $i : N \hookrightarrow M$  é uma imersão regular, isto é,  $i$  é uma imersão injectiva (recorde-se a nota de rodapé 1 deste apêndice) que satisfaz a seguinte condição: para qualquer variedade diferenciável  $P$ , uma aplicação arbitrária  $g : P \rightarrow N$  é suave se e só se  $i \circ g : P \rightarrow M$  é suave.

**Lema B.2.4.** Sejam  $(M, G, \phi)$  um  $G$ -espaço,  $H$  um subgrupo de Lie de  $G$ , e  $N$  uma subvariedade inicial  $H$ -invariante de  $M$  (ou seja,  $N$  é uma subvariedade inicial de  $M$

que verifica  $\phi(h, n) \in N, \forall (h, n) \in H \times N$ . A aplicação  $\Phi : H \times N \rightarrow N$  dada por  $\Phi(h, n) = \phi(h, n)$  torna  $(N, H, \Phi)$  num  $H$ -espaço.

Interessa-nos agora apresentar a descrição infinitesimal de uma acção. Seja  $(M, G, \phi)$  uma  $G$ -variedade. Se  $Y \in \mathfrak{g}$ , então a aplicação

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M \\ (t, x) &\longmapsto \phi(\exp(tY), x) \end{aligned}$$

é uma acção de  $\mathbb{R}$  em  $M$ . Esta acção pode ser interpretada como sendo o fluxo em  $M$  do campo de vectores completo<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} Y_M : M &\longrightarrow TM \\ x &\longmapsto \left. \frac{d}{dt} \phi(\exp(tY), x) \right|_{t=0}, \end{aligned} \tag{B.2.1}$$

que se pode definir como  $Y_M(x) = (T_e \phi^x)(Y)$ , para cada  $x \in M$ .<sup>3</sup>

**Definição B.2.5.** Se  $(M, G, \phi)$  é uma  $G$ -variedade, o campo de vectores  $Y_M$  em  $M$  definido por (B.2.1) designa-se por gerador infinitesimal da acção  $\phi$  correspondente a  $Y \in \mathfrak{g}$ .

**Teorema B.2.6.** ([1, 55]) Seja  $G$  um grupo de Lie. A aplicação  $Y \in \mathfrak{g} \mapsto Y_M \in \mathcal{X}(M)$  é um antihomomorfismo de álgebras de Lie, isto é, satisfaz as condições

$$(aY + bZ)_M = aY_M + bZ_M \quad e \quad [Y, Z]_M = -[Y_M, Z_M],$$

para  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $Y, Z \in \mathfrak{g}$ , e onde  $\mathcal{X}(M)$  denota a álgebra de Lie constituída pelos campos de vectores em  $M$  (do exemplo B.1.13).

<sup>2</sup>Um campo de vectores  $X$  numa variedade diferenciável  $M$  diz-se completo se o conjunto definido por  $\{(t, x) \in \mathbb{R} \times M : \text{existe uma curva integral } c : I \rightarrow M \text{ de } X \text{ em } x \text{ com } t \in I\}$  é igual a  $\mathbb{R} \times M$ .

Dado um campo de vectores completo  $X$  em  $M$ , define-se o fluxo de  $X$  como sendo a aplicação  $F : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  tal que  $F_x : t \mapsto F(t, x)$  é uma curva integral de  $X$  em  $x$ , para todo o  $x \in M$ , isto é,  $F_x(0) = x$  e  $\dot{F}_x(t) = X(F_x(t))$  (existe uma única aplicação  $F$  nestas condições).

<sup>3</sup>Seja  $\alpha(t) = \exp(tY)$  a geodésica em  $G$  com  $\alpha(0) = e$  e  $\dot{\alpha}(0) = Y$ , então, por definição temos  $(T_e \phi^x)(Y) = \left. \frac{d}{dt} (\phi^x \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \phi(\exp(tY), x) \right|_{t=0} = Y_M(x)$ .

No contexto do teorema anterior, uma *acção à esquerda de uma álgebra de Lie*  $\mathfrak{g}$  numa variedade diferenciável  $M$  é definida como sendo um antihomomorfismo de álgebras de Lie  $Y \in \mathfrak{g} \mapsto Y_M \in \mathcal{X}(M)$  tal que  $(x, Y) \in M \times \mathfrak{g} \mapsto Y_M(x) \in TM$  é uma aplicação suave.

**Definição B.2.7.** *Dada uma acção de um grupo de Lie, a acção da álgebra de Lie induzida pelos seus geradores infinitesimais chama-se a acção da álgebra de Lie associada à acção do grupo.*

Apresentamos de seguida algumas noções úteis para este trabalho.

**Definição B.2.8.** *Seja  $\phi$  uma acção suave do grupo de Lie  $G$  na variedade  $M$ . O grupo de isotropia (ou estabilizador ou grupo de simetria) de um elemento  $x \in M$  é o subgrupo fechado de  $G$  definido por*

$$G_x = \{g \in G : \phi_g(x) = x\}.$$

*A álgebra de Lie do grupo de isotropia de  $x$  é constituída pelos elementos da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  cujo correspondente gerador infinitesimal de  $\phi$  se anula em  $x$ , ou seja,*

$$\mathfrak{g}_x = \{Y \in \mathfrak{g} : Y_M(x) = 0\}$$

*e designa-se por álgebra de isotropia (ou estabilizadora ou álgebra de simetria) de  $x$ .*

Note-se que o facto de a aplicação  $\phi^x : G \rightarrow M, g \mapsto \phi(g, x)$  ser suave e de termos  $G_x = (\phi^x)^{-1}(x)$ , garante-nos que o subgrupo de isotropia  $G_x$  é um subgrupo fechado de  $G$ . Então,  $G_x$  é uma subvariedade de  $G$  e em particular um subgrupo de Lie de  $G$  (consultar, por exemplo, página 259 de [1] ou página 42 de [46]).

**Definição B.2.9.** *Seja  $\phi$  uma acção suave do grupo de Lie  $G$  na variedade  $M$ . A órbita de um ponto  $x \in M$  sob a acção do grupo (ou  $G$ -órbita por  $x$ ) é o conjunto*

$$\mathcal{O}_x \equiv G \cdot x = \{\phi_g(x) : g \in G\} \subset M.$$



O espaço das órbitas denota-se por  $M/G$  e é definido como sendo o espaço das classes de equivalência correspondentes à relação de equivalência de pertencer à mesma órbita, isto é, a relação  $x \sim y$  se e só se existe um elemento  $g \in G$  tal que  $\phi_g(x) = y$ , com  $x, y \in M$ . Seja

$$\pi_G : M \rightarrow M/G$$

a aplicação projecção que associa a cada  $x \in M$  a sua classe de equivalência em  $M/G$ . Podemos munir o espaço das órbitas com a topologia quociente, ou seja, tal que a seguinte condição se verifica: um subconjunto  $U$  de  $M/G$  é aberto se, por definição,  $\pi_G^{-1}(U)$  é aberto em  $M$ . Neste contexto, a projecção  $\pi_G$  é uma aplicação contínua e aberta (ver, por exemplo, página 56 de [71]). Refira-se que, em geral, o espaço das órbitas não é uma variedade diferenciável, para que tal aconteça a acção tem que satisfazer condições adicionais (como acontece, por exemplo, na situação apresentada mais à frente no lema B.2.18).

**Observação B.2.10.** *Seja  $H$  um subgrupo de Lie fechado de  $G$ . O co-conjunto  $gH$  de um elemento  $g \in G$  em relação ao subgrupo  $H$  é o subconjunto de  $G$  definido por  $gH = \{gh : h \in H\}$ . Representamos por  $G/H$  o conjunto dos co-conjuntos em relação a  $H$ . Na realidade,  $G/H$  é o espaço quociente de  $G$  pela relação de equivalência  $g_1 \sim g_2$  se e só se  $g_1^{-1}g_2 \in H$  ([50]); ou numa abordagem equivalente,  $G/H$  é o espaço das órbitas associado a uma acção à direita de  $H$  em  $G$  obtida por restrição (no sentido do lema B.2.4) da acção de  $G$  sobre si próprio por translações à direita ([71]). É possível mostrar, quer se considere a primeira ou a segunda abordagem mencionadas, que  $G/H$  é uma variedade diferenciável tal que a projecção canónica  $\pi : G \rightarrow G/H$  é uma submersão (isto é, a aplicação tangente de  $\pi$  em  $x$  é sobrejectiva, para qualquer  $x \in G$ ). Este tipo de variedades quocientes são designadas por variedades homogéneas.*

*Seja agora  $\phi$  uma acção suave do grupo de Lie  $G$  na variedade  $M$ . Em virtude de o subgrupo de isotropia  $G_x$  de um elemento  $x \in M$  ser sempre um subgrupo fechado de  $G$ , a construção exposta no parágrafo anterior garante-nos que o espaço quociente  $G/G_x$  é sempre uma variedade diferenciável homogénea. Seja  $\mathcal{O}_x \equiv G \cdot x$  a  $G$ -órbita por  $x$ . Uma vez que a aplicação  $\phi^x : G \rightarrow M$ ,  $g \mapsto \phi(g, x)$  é constante em cada  $gG_x$ ,  $g \in G$  (ou seja,*

se  $h \in G_x$ , então  $\phi^x(gh) = \phi^x(g)$ , esta aplicação induz uma bijecção de  $G/G_x$  em  $\mathcal{O}_x$  dada por  $gG_x \in G/G_x \mapsto \phi(x, g) \in \mathcal{O}_x$ . Neste contexto, podemos considerar a órbita  $\mathcal{O}_x$  como uma variedade equipada com a única estrutura diferenciável que torna esta bijecção um difeomorfismo. O espaço tangente à órbita num ponto  $z \in \mathcal{O}_x$  é dado por  $T_z\mathcal{O}_x \equiv T_z(G \cdot x) = \{Y_M(z) : Y \in \mathfrak{g}\}$ , onde  $Y_M$  é o gerador infinitesimal da acção  $\phi$  correspondente a  $Y$ . (Para uma leitura detalhada sobre este assunto, consultar página 422 de [50] ou página 62 de [71], ou ainda página 45 de [46].)

Seguem-se alguns exemplos de acções de grupos de Lie (os exemplos apresentados são todos de acções à esquerda, excepto um dos casos do primeiro exemplo).

**Exemplo B.2.11.** A acção de um grupo sobre si próprio por translações à esquerda:

$$\begin{aligned} \Lambda : G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto L_g h = gh. \end{aligned}$$

Repare-se que  $\Lambda_g = L_g$ , para cada  $g \in G$ . Por outro lado,  $\Lambda^h = R_h$ , para cada  $h \in G$ . O gerador infinitesimal para  $Y \in \mathfrak{g}$  é definido por  $Y_G(g) := (T_e\Lambda^g)(Y) = T_e R_g Y$ ,  $g \in G$ .

A acção de um grupo sobre si próprio por conjugação também é uma acção à esquerda:

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto (R_{g^{-1}} \circ L_g)(h) = g^{-1}hg. \end{aligned}$$

Refira-se que se considerarmos

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (h, g) &\longmapsto (R_g \circ L_{g^{-1}})(h) = ghg^{-1}, \end{aligned}$$

temos uma acção à direita do grupo sobre si próprio.

**Exemplo B.2.12.** A acção adjunta de um grupo na sua álgebra:

$$\begin{aligned} Ad : G \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (g, Y) &\longmapsto Ad_g Y = T_e (R_{g^{-1}} \circ L_g) Y. \end{aligned}$$

A acção adjunta dá-nos uma representação de  $G$  em  $\mathfrak{g}$  (no sentido descrito na observação B.2.2):

$$\begin{aligned} Ad : G &\longrightarrow Aut(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto Ad_g = T_e(R_{g^{-1}} \circ L_g). \end{aligned}$$

Fazendo uso da propriedade  $(d/dt)(Ad_{\exp(tY)}Z)|_{t=0} = [Y, Z] = ad_Y Z$ ,  $Z \in \mathfrak{g}$ , mostra-se que o gerador infinitesimal para  $Y \in \mathfrak{g}$  é dado por  $Y_{\mathfrak{g}} = ad_Y$ . Portanto, de acordo com a definição B.2.7,

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{g} &\longrightarrow End(\mathfrak{g}) \\ Y &\longmapsto ad_Y \end{aligned}$$

é a acção da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  associada à acção adjunta do grupo  $G$ , que se diz a representação adjunta de  $\mathfrak{g}$ .

**Exemplo B.2.13.** A acção coadjunta de um grupo no dual da sua álgebra:

$$\begin{aligned} Ad^* : G \times \mathfrak{g}^* &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ (g, \mu) &\longmapsto Ad_{g^{-1}}^* \mu, \end{aligned}$$

com  $(Ad_{g^{-1}}^* \mu)(Y) = \mu(Ad_g Y)$ ,  $Y \in \mathfrak{g}$ . A acção coadjunta dá-nos uma representação de  $G$  em  $\mathfrak{g}^*$  (no sentido descrito na observação B.2.2):

$$\begin{aligned} Ad^* : G &\longrightarrow Aut(\mathfrak{g}^*) \\ g &\longmapsto Ad_g^*. \end{aligned}$$

O gerador infinitesimal para  $Y \in \mathfrak{g}$  é dado por  $Y_{\mathfrak{g}^*} = -ad_Y^*$ , onde assumimos que  $ad_Y^* \mu = \mu \circ ad_Y$ ,  $\mu \in \mathfrak{g}^*$ . Assim, de acordo com a definição B.2.7,

$$\begin{aligned} ad^* : \mathfrak{g} &\longrightarrow End(\mathfrak{g}^*) \\ Y &\longmapsto -ad_Y^* \end{aligned}$$

é a acção da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  associada à acção coadjunta do grupo  $G$ , que se diz a representação coadjunta de  $\mathfrak{g}$ . No âmbito deste exemplo, é importante ainda observar o seguinte:

- Chamamos subgrupo de isotropia coadjunto de  $G$  ao subgrupo de isotropia  $G_\mu$  de um elemento  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  associado à acção coadjunta do grupo. Por conseguinte,

$$G_\mu = \{g \in G : Ad_{g^{-1}}^* \mu = \mu\} = \{g \in G : Ad_g^* \mu = \mu\}. \quad (\text{B.2.2})$$

- A álgebra de Lie de  $G_\mu$  diz-se a subálgebra de isotropia coadjunta e é definida por

$$\mathfrak{g}_\mu = \{Y \in \mathfrak{g} : ad_Y^* \mu = 0\}.$$

- A órbita coadjunta por  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  é por definição a órbita do elemento  $\mu$  sob a acção coadjunta  $Ad^*$ , isto é,

$$\mathcal{O}_\mu \equiv G \cdot \mu = \{Ad_{g^{-1}}^* \mu : g \in G\} \subset \mathfrak{g}^*. \quad (\text{B.2.3})$$

Neste caso, tem-se

$$T_\xi \mathcal{O}_\mu \equiv T_\xi (G \cdot \mu) = \{-ad_Y^* \xi : Y \in \mathfrak{g}\},$$

para cada  $\xi \in \mathcal{O}_\mu$ .

**Exemplo B.2.14.** *O levantamento tangente da acção do grupo.*

Uma acção suave  $\phi : G \times M \rightarrow M$  induz uma acção natural

$$\phi^T : G \times TM \rightarrow TM$$

de  $G$  no fibrado tangente  $TM$ , designada por levantamento tangente da acção do grupo e que é definida por  $\phi^T(g, v_x) = (T_x \phi_g)(v_x)$ , onde  $g \in G$ ,  $x \in M$  e  $v_x \in T_x M$ , isto é,  $\phi_g^T = T \phi_g$ .

**Exemplo B.2.15.** *O levantamento cotangente da acção do grupo.*

Uma acção suave  $\phi : G \times M \rightarrow M$  induz uma acção natural

$$\phi^{T^*} : G \times T^*M \rightarrow T^*M$$

de  $G$  no fibrado cotangente  $T^*M$  designada por levantamento cotangente da acção do grupo e definida por  $\phi_g^{T^*} = T^* \phi_{g^{-1}}$ , ou seja,  $\phi^{T^*}(g, \alpha_x) = (T_{\phi(g,x)}^* \phi_{g^{-1}})(\alpha_x)$ , para cada  $g \in G$ ,  $x \in M$  e  $\alpha_x \in T_x^* M$ .

Consideremos agora algumas propriedades que caracterizam diversos tipos de acções.

**Definição B.2.16.** *Uma acção  $\phi$  do grupo de Lie  $G$  na variedade  $M$  diz-se:*

- *Transitiva, se existe apenas uma órbita.*
- *Efectiva, se a aplicação  $g \mapsto \phi_g$  é injectiva, ou de forma equivalente, se a identidade  $\phi_g = id_M$  implica que  $g = e$ .*
- *Livre, se o grupo de isotropia de todo o elemento  $x \in M$  é constituído apenas pela identidade do grupo,  $G_x = \{e\}$ .*
- *Própria, se a aplicação  $\bar{\phi} : G \times M \rightarrow M \times M$ ,  $(g, x) \mapsto (x, \phi(g, x))$  é própria, isto é, se  $K \subset M \times M$  é compacto, então  $\bar{\phi}^{-1}(K)$  também é compacto.*

Importa observar que se o grupo de Lie  $G$  que actua na variedade  $M$  é um grupo de Lie compacto, então a condição apresentada na definição anterior para que a acção seja própria é automaticamente satisfeita. Portanto, temos o seguinte resultado:

**Lema B.2.17.** *Toda a acção de um grupo de Lie compacto é própria.*

O facto de uma acção de um grupo de Lie ser própria torna-se uma ferramenta extremamente útil, no sentido em que garante que algumas das importantes propriedades de âmbito técnico de acções de grupos compactos continuam a ser válidas. Exemplo disso é o lema a seguir apresentado e que é usado no capítulo 3 (consultar, por exemplo, página 266 de [1] ou página 61 de [71]).

**Lema B.2.18.** *Se uma acção do grupo de Lie  $G$  na variedade  $M$  é própria e livre, então,  $M/G$  é uma variedade diferenciável e a projecção quociente  $\pi_G : M \rightarrow M/G$  é uma submersão. (Para a definição de submersão, consultar nota de rodapé 1 do apêndice A.)*

**Observação B.2.19.** *As seguintes acções são exemplos de acções próprias: os grupos de Lie a actuar sobre si próprios por translações (exemplo B.2.11) e os levantamentos tangente e cotangente destas acções (acções do grupo nos seus próprios fibrados*

tangente e cotangente, casos particulares dos exemplos B.2.14 e B.2.15); as acções de grupos de Lie compactos (lema B.2.17); as acções restrição a subgrupos de Lie fechados de acções próprias (no sentido do lema B.2.4 e desde que as hipóteses do lema sejam satisfeitas). Para mais detalhes sobre estes exemplos, consulte-se a página 60 de [71].

### B.3 Diferenciação das aplicações adjunta e coadjunta

O objectivo desta secção é apresentar algumas propriedades de utilidade prática para o presente trabalho. Sejam  $G$  um grupo de Lie,  $\mathfrak{g}$  a correspondente álgebra de Lie e  $\mathfrak{g}^*$  o dual desta álgebra.

Se  $x$  é uma curva em  $G$  e  $Y$  é um elemento de  $\mathfrak{g}$ , então, como é demonstrado em [1] (exemplo 4.1.25-(c)), temos

$$\frac{d}{dt} (Ad_{x(t)}Y) = \left[ T_{x(t)}R_{x^{-1}(t)} \frac{dx}{dt}(t), Ad_{x(t)}Y \right].$$

Agora, se  $Y$  é uma curva em  $\mathfrak{g}$ , a fórmula de Leibniz para derivadas permite-nos deduzir

$$\frac{d}{dt} (Ad_{x(t)}Y(t)) = Ad_{x(t)} \frac{dY}{dt}(t) + \left[ T_{x(t)}R_{x^{-1}(t)} \frac{dx}{dt}(t), Ad_{x(t)}Y(t) \right]. \quad (\text{B.3.1})$$

Considerando em particular  $Y(t) = Ad_{x^{-1}(t)}Y$ , temos  $Y = Ad_{x(t)}Y(t)$  que derivando em ordem a  $t$  e usando (B.3.1), nos dá  $0 = Ad_{x(t)}(dY/dt)(t) + [T_{x(t)}R_{x^{-1}(t)}(dx/dt)(t), Y]$ . Logo,  $(dY/dt)(t) = -Ad_{x^{-1}(t)} [T_{x(t)}R_{x^{-1}(t)}(dx/dt)(t), Y]$ . Por fim, aplicando a propriedade  $Ad_g[Z, W] = [Ad_gZ, Ad_gW]$ , válida para todo  $g \in G$  e  $Z, W \in \mathfrak{g}$ , deduzimos

$$\frac{d}{dt} (Ad_{x^{-1}(t)}Y) = - \left[ T_{x(t)}L_{x^{-1}(t)} \frac{dx}{dt}(t), Ad_{x^{-1}(t)}Y \right]. \quad (\text{B.3.2})$$

Seja  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  e consideremos o vector tangente  $X_\mu \in \mathfrak{g}$  identificado com  $\mu$  através da métrica Riemanniana, isto é, satisfazendo (2.1.6). Se  $x$  é uma curva em  $G$ , aplicando (B.3.2) temos  $d(Ad_{x^{-1}(t)}X_\mu)/dt = - [T_{x(t)}L_{x^{-1}(t)}(dx/dt)(t), Ad_{x^{-1}(t)}X_\mu]$ . Atendendo agora às propriedades (2.1.7) facilmente se conclui que

$$\frac{d}{dt} (Ad_{x(t)}^* \mu) = ad_{T_{x(t)}L_{x(t)^{-1}}(dx/dt)(t)} Ad_{x(t)}^* \mu. \quad (\text{B.3.3})$$

A fórmula agora encontrada é usada no capítulo 3.

## B.4 Produto semidirecto de um grupo de Lie e um espaço vectorial

O produto semidirecto de um grupo de Lie e um espaço vectorial, pode ser descrito através de uma acção (à esquerda ou à direita) do grupo no espaço vectorial. Neste contexto, se a acção é descrita por isomorfismos do espaço vectorial, o produto semidirecto é um grupo de Lie. Destacaremos o caso em que o grupo actua à direita no espaço vectorial, visto ser a situação que interessa para esta dissertação. Refira-se que a utilização do produto semidirecto com representação à direita aparece essencialmente em trabalhos sobre modelos de mecânica contínua e plasmas, onde este tipo de representação é mais conveniente do que a representação à esquerda.

Seja  $V$  um espaço vectorial considerado como grupo abeliano aditivo. Representemos por  $Aut(V)$  o grupo de Lie dos isomorfismos lineares de  $V$  nele próprio, cuja álgebra de Lie é o espaço das aplicações lineares de  $V$  nele próprio que denotamos por  $End(V)$ . Suponhamos que o grupo de Lie  $G$  actua à esquerda em  $V$  por isomorfismos lineares. A representação de  $G$  em  $V$  é dada por

$$\begin{aligned} \sigma : G &\longrightarrow Aut(V) \\ g &\longmapsto \sigma(g) : V \longrightarrow V \\ &v \longmapsto \sigma(g)v \equiv v \cdot g. \end{aligned}$$

A representação da álgebra de Lie associada à representação do grupo é, de acordo com a definição B.2.7, a acção induzida pelos geradores infinitesimais da acção do grupo. Portanto, temos a acção da álgebra

$$\begin{aligned} \sigma' : \mathfrak{g} &\longrightarrow End(V) \\ Y &\longmapsto \sigma'(Y) : V \longrightarrow V \\ &v \longmapsto \sigma'(Y)v \equiv v \cdot Y, \end{aligned}$$

com  $v \cdot Y = Y_V(v)$ , onde  $Y_V$  representa o gerador infinitesimal da acção  $\sigma$  correspondente a  $Y \in \mathfrak{g}$  (consultar definição B.2.5).

O seguinte resultado estabelece o conceito do grupo de Lie produto semidirecto de

um grupo de Lie e um espaço vectorial:

**Proposição B.4.1.** [42] *A variedade diferenciável produto cartesiano  $G \times V$  munida com a multiplicação*

$$(g_1, v_1)(g_2, v_2) = (g_1 g_2, v_2 + v_1 \cdot g_2),$$

para  $g_1, g_2 \in G$  e  $v_1, v_2 \in V$  é um grupo de Lie. O elemento identidade é  $(e, 0)$  e o elemento inverso de um elemento  $(g, v) \in G \times V$  é dado por  $(g, v)^{-1} = (g^{-1}, -v \cdot g^{-1})$ .

Este grupo de Lie designa-se por produto semidirecto de  $G$  e  $V$  (ou produto semidirecto de  $G$  com  $V$ ) e denota-se por  $S := G \otimes_S V$ .

A estrutura de espaço vectorial para a álgebra de Lie  $\mathfrak{s} = \mathfrak{g} \otimes_S V$ , álgebra de Lie de  $S$ , é  $\mathfrak{g} \times V$ , e o seu parêntesis de Lie é definido por ([42])

$$[(Y_1, v_1), (Y_2, v_2)] = ([Y_1, Y_2], v_1 \cdot Y_2 - v_2 \cdot Y_1),$$

para  $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$  e  $v_1, v_2 \in V$ . Identifica-se o espaço dual  $\mathfrak{s}^*$  com  $\mathfrak{g}^* \times V^*$  usando a aplicação do par dual em cada factor.

## B.5 Aplicação momento

Apresentamos nesta secção a definição de aplicação momento para variedades simplécticas e alguns dos resultados que envolvem este conceito.

**Definição B.5.1.** *Uma acção simpléctica é uma acção suave  $\phi : G \times M \rightarrow M$  de um grupo de Lie  $G$  numa variedade simpléctica  $(M, \omega)$  que satisfaz  $\phi_g^* \omega = \omega$ , para cada elemento  $g \in G$ , ou seja,  $G$  actua em  $M$  por simplectomorfismos.*

**Definição B.5.2.** *Seja  $(M, \omega)$  uma variedade simpléctica e  $\phi : G \times M \rightarrow M$  uma acção simpléctica de  $G$  em  $M$ . Uma aplicação*

$$J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

diz-se uma aplicação momento (standard) para a acção  $\phi$ , se para cada elemento  $Y \in \mathfrak{g}$  o correspondente gerador infinitesimal  $Y_M : M \rightarrow TM$  coincide com o campo de vector



Hamiltoniano<sup>4</sup> da função  $J^Y : M \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $J^Y(x) := \langle J(x), Y \rangle$ ,  $x \in M$  e onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  é o par natural de dualidade. Isto é, tem-se  $Y_M = X_{J^Y}$  cujo significado é

$$i_{Y_M}\omega = dJ^Y.$$

Chama-se  $G$ -espaço Hamiltoniano ao quadruplo  $(M, \omega, \phi, J)$ .

Notemos que nem toda a acção simpléctica tem uma aplicação momento, uma vez que nem todo o campo de vectores localmente Hamiltoniano é (globalmente) Hamiltoniano. A acção simpléctica tem aplicação momento quando cada  $Y_M$  é globalmente Hamiltoniano, isto é, quando podemos garantir que para cada  $Y \in \mathfrak{g}$  existe uma função globalmente definida  $J^Y \in C^\infty(M)$  tal que  $Y_M = X_{J^Y}$ . Refira-se ainda que a aplicação momento para uma acção simpléctica pode não ser única. Contudo, se a variedade  $M$  é simpléctica e conexa, então a aplicação momento é determinada a menos de uma constante em  $\mathfrak{g}^*$ .

Existem diversas generalizações do conceito de aplicação momento que se tornam bastante úteis em diversas áreas de conhecimento tais como a mecânica e a geometria. Das notáveis propriedades das aplicações momento destacamos o facto de estas serem quantidades que se conservam no sentido descrito no teorema a seguir apresentado (lei fundamental da conservação).

**Teorema B.5.3.** [1, 55, 71] *Consideremos um  $G$ -espaço Hamiltoniano  $(M, \omega, \phi, J)$ . Seja  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  um Hamiltoniano  $G$ -invariante deste  $G$ -espaço Hamiltoniano, ou seja, tal que é satisfeita a condição*

$$H \circ \phi_g = H,$$

para todo o  $g \in G$ . Então,  $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$  é constante ao longo do fluxo do campo de vectores Hamiltoniano  $X_H : M \rightarrow TM$ . Podemos também dizer que  $J$  é um integral para  $X_H$  ou ainda que  $J$  é conservado ao longo das trajectórias de  $X_H$ . Isto significa

<sup>4</sup>O campo de vectores Hamiltoniano  $X_f$ , de uma função real  $f$  definida numa variedade simpléctica  $(M, \omega)$ , define-se como sendo o único campo de vectores em  $M$  que satisfaz  $i_{X_f}\omega = df$ .

que, se  $F_t : M \rightarrow M$  é o fluxo de  $X_H$ , então

$$J \circ F_t = J.$$

**Observação B.5.4.** *O teorema acima exposto é uma versão geométrica do conhecido teorema de E. Noether, cuja origem vem de métodos variacionais. As simetrias do sistema Hamiltoniano dão lugar a integrais do movimento cuja existência é bastante importante, uma vez que estes permitem reduzir a dimensão da variedade onde o movimento tem lugar. A teoria da redução é uma ferramenta fundamental na análise de sistemas com simetrias. Neste âmbito, um dos processos de maior relevância na nova era da teoria da redução é a redução simpléctica, que surgiu em 1974 no artigo [56] de Marsden e Weinstein, e na qual a aplicação momento desempenha um papel crucial (ver secção 3.1 do capítulo 3).*

**Definição B.5.5.** *Consideremos um  $G$ -espaço Hamiltoniano  $(M, \omega, \phi, J)$ . A aplicação momento  $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$  diz-se  $Ad^*$ -equivariante, ou simplesmente equivariante, se*

$$J(\phi_g(x)) = Ad_{g^{-1}}^* J(x),$$

para todo o  $g \in G$  e  $x \in M$ , isto é, se o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi_g} & M \\ J \downarrow & & \downarrow J \\ \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{Ad_{g^{-1}}^*} & \mathfrak{g}^* \end{array}.$$

Podemos afirmar que uma aplicação momento equivariante transporta uma acção do grupo de Lie  $G$  em  $M$ , para a acção coadjunta de  $G$  em  $\mathfrak{g}^*$  dada no exemplo B.2.13.

Existem variadas técnicas para a construção das aplicações momento, sendo que muitos dos resultados relativos a este assunto têm por base o teorema a seguir apresentado, que nos fornece um critério para construir uma aplicação momento equivariante para uma acção simpléctica associada a uma forma simpléctica exacta. Destacamos também um corolário deste teorema, onde se considera um dos casos particular mais importantes, o das acções levantamento cotangente abordadas no exemplo B.2.15. Referimos [1] (páginas 282 e 283) para uma consulta da demonstração destes resultados.

**Teorema B.5.6.** *Seja  $\phi$  uma acção simpléctica, de um grupo de Lie  $G$  numa variedade simpléctica  $(M, \omega)$ . Suponhamos que a forma simpléctica  $\omega$  em  $M$  é exacta ( $\omega = -d\theta$ ) e que a 1-forma  $\theta$  é invariante relativamente à acção, isto é,  $\phi_g^*\theta = \theta$  para todo o  $g \in G$ . Então, a aplicação  $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$  definida por  $[J(x)](Y) = (i_{Y_M}\theta)(x)$  é uma aplicação momento  $Ad^*$ -equivariante para a acção  $\phi$ , onde  $x \in M$ ,  $Y \in \mathfrak{g}$  e  $Y_M$  é o gerador infinitesimal da acção  $\phi$  correspondente a  $Y$ .*

**Corolário B.5.7.** *Consideremos a acção levantamento cotangente de  $G$  em  $T^*M$  de uma acção  $\phi$  de  $G$  em  $M$  (definida de acordo com o exposto no exemplo B.2.15). Então, esta acção levantamento é simpléctica em relação à forma simpléctica canónica de  $T^*M$  e tem uma aplicação momento  $Ad^*$ -equivariante dada por  $J : T^*M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ ,  $[J(\alpha_x)](Y) = \alpha_x(Y_M(x))$ , para todo o  $x \in M$ ,  $\alpha_x \in T_x^*M$  e  $Y \in \mathfrak{g}$  e onde  $Y_M$  é o gerador infinitesimal da acção  $\phi$  correspondente a  $Y$ .*

Finalizamos esta secção com um resultado, de que necessitamos no capítulo 3, que estabelece a relação entre valores regulares e simetrias e que foi apresentado pela primeira vez em [9]. Recordamos primeiro, da teoria das variedades, a definição de valor regular.

**Definição B.5.8.** *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação suave entre duas variedades diferenciáveis. Um elemento  $n \in N$  diz-se um valor regular de  $f$  se para cada  $m \in f^{-1}(n)$ , a aplicação linear  $T_m f$  (aplicação tangente de  $f$  em  $m$ ) é suave e sobrejectiva.*

**Teorema B.5.9.** *Seja  $(M, \omega, \phi, J)$  um  $G$ -espaço Hamiltoniano. Um elemento  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  é um valor regular de  $J$  se e só se a álgebra de isotropia de qualquer elemento  $z \in J^{-1}(\mu)$  é constituída apenas pelo elemento zero,  $\mathfrak{g}_z = \{0\}$ .*

*Demonstração.* Da definição anterior sabemos que  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  é um valor regular de  $J$  se  $T_z J : T_z M \rightarrow \mathfrak{g}^*$  é sobrejectiva, para qualquer  $z \in J^{-1}(\mu)$ . Esta condição é equivalente a afirmar que  $[(T_z J)(v)](Y) = 0$ ,  $\forall v \in T_z M$  implica  $Y = 0$ , onde  $Y \in \mathfrak{g}$ . Ora, da definição B.5.2 de aplicação momento, vem  $[(T_z J)(v)](Y) = [dJ^Y(z)](v) = \omega(Y_M(z), v)$ . Usando agora a não-degenerância da forma simpléctica  $\omega$ , concluímos que  $\mu$  é um valor regular de  $J$  se e só se  $Y_M(z) = 0$  implica  $Y = 0$ , ou seja,  $\mathfrak{g}_z = \{0\}$ .  $\square$

Refira-se que o teorema anterior fornece uma técnica para reconhecer os valores regulares no processo de redução que abordamos no capítulo 3.

Interessa-nos ainda recordar que se  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  é um valor regular de  $J$ , pelo teorema da função implícita,  $J^{-1}(\mu)$  é uma subvariedade. Então, a inclusão  $i : J^{-1}(\mu) \hookrightarrow M$  é uma imersão injectiva, ou seja, um homeomorfismo na sua imagem  $i(J^{-1}(\mu))$ , onde esta imagem está equipada com a topologia relativa induzida por  $M$ . Em particular,  $J^{-1}(\mu)$  é uma subvariedade inicial de  $M$  (ver definição B.2.3). Para mais detalhes sobre a caracterização de subvariedades, consultar página 5 de [71].

## Apêndice C

# Problemas de controlo óptimo

O princípio do máximo de Pontryagin tem um papel primordial na teoria de controlo óptimo, uma vez que fornece condições necessárias para a existência de solução do problema. Neste apêndice resumiremos a versão geométrica do princípio do máximo, escrevendo as equações Hamiltonianas associadas a um problema de controlo óptimo, também descrito geometricamente, em termos de uma equação simpléctica.

### C.1 Formulação geométrica de um problema de controlo óptimo

Sejam  $Q$  uma variedade diferenciável de dimensão finita  $n$  e  $B$  um fibrado sobre a variedade  $Q$  com projecção  $\tau : B \rightarrow Q$ . Consideremos ainda um campo de vectores  $\Pi : B \rightarrow TQ$  ao longo da projecção  $\tau$ , isto é, tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\Pi} & TQ \\ & \searrow \tau & \downarrow \pi_Q \\ & & Q \end{array}$$

onde  $\pi_Q$  representa a projecção canónica natural de  $TQ$  em  $Q$ . Um *problema de controlo óptimo* com espaço de estados  $Q$  e fibrado de controlos  $B$  consiste em:

Determinar as curvas  $\gamma : [0, T] \rightarrow B$  de classe  $C^2$ , seccionalmente suaves e com  $T \in \mathbb{R}^+$ , com condições iniciais e finais fixas no espaço de estados, que satisfazem a equação

$$\frac{d}{dt}(\tau \circ \gamma)(t) = \Pi(\gamma(t)) \quad (\text{C.1.1})$$

e minimizam a funcional integral  $\int_0^T L(\gamma(t))dt$ , onde  $L$  é uma função suave  $L : B \rightarrow \mathbb{R}$  designada por função custo.

Utilizamos a designação *sistema de controlo* para nos referirmos à equação (C.1.1), ou, em alternativa, ao campo de vectores  $\Pi$ . Uma curva integral de  $\Pi$ , ou seja, uma curva  $\gamma$  em  $B$  que satisfaz o sistema de controlo apresentado, diz-se uma *trajectória do sistema de controlo*.

Note-se que se considerarmos um sistema de coordenadas locais  $(x^1, \dots, x^n)$  em  $Q$  e  $(x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^m)$  representar o sistema de coordenadas naturais em  $B$  (onde  $n + m = \dim B$ ), então o sistema de controlo traduz-se pelo sistema de equações diferenciais

$$\dot{x}^i = \Pi^i(x, u), \quad i = 1, \dots, n,$$

para  $(x, u) \in B$  e onde  $\Pi^i$  são as componentes do campo de vectores  $\Pi$  ao longo de  $\tau$  relativamente à base natural do espaço tangente  $T_x Q$  induzida pelo sistema de coordenadas em  $Q$ .

## C.2 Descrição simpléctica do problema de controlo

Apresentamos nesta secção, a descrição Hamiltoniana do problema de controlo óptimo da secção precedente, baseada numa abordagem geométrica (simpléctica) do princípio do máximo de Pontryagin. Para tal, consideramos os seguintes elementos:

- O produto fibrado  $T^*Q \times_Q B$  do espaço de co-estados e do fibrado de controlos.
- A função Hamiltoniana  $H : T^*Q \times_Q B \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$H(x, p, u) = p[\Pi(x, u)] - L(x, u),$$

para  $(x, p, u) \in T^*Q \times_Q B$  (isto é,  $x \in Q$ ,  $p \in T_x^*Q$  e  $(x, u) \in B$ , com  $\tau(x, u) = x$ ).

- A projecção canónica  $pr_1 : T^*Q \times_Q B \rightarrow T^*Q$ .
- A forma simpléctica canónica  $\omega_0$  em  $T^*Q$ .

A  $H$  associamos o campo de vectores Hamiltoniano  $X_H : T^*Q \times_Q B \rightarrow TT^*Q$  que é um campo de vectores ao longo de  $pr_1$ , isto é, tal que se verifica a comutatividade do seguinte diagrama (onde  $\pi_{T^*Q}$  é a projecção canónica natural de  $TT^*Q$  em  $T^*Q$ ):

$$\begin{array}{ccc} T^*Q \times_Q B & \xrightarrow{X_H} & TT^*Q \\ & \searrow pr_1 & \downarrow \pi_{T^*Q} \\ & & T^*Q \end{array}$$

que satisfaz

$$i_{X_H}\omega_0 = dH, \tag{C.2.1}$$

onde estamos a usar o símbolo  $i_Z$  para representar o produto interior de um campo de vectores  $Z$  ao longo de uma aplicação  $f : N \rightarrow M$ . Isto é, se  $\omega$  é uma  $p$ -forma em  $M$ , então  $i_Z\omega$  é uma  $(p - 1)$ -forma em  $N$  dada por

$$(i_Z\omega)(n)(v_1, \dots, v_{p-1}) = \omega(f(n))(Z(n), T_n f(v_1), \dots, T_n f(v_{p-1})),$$

para qualquer  $n \in N$  e  $v_1, \dots, v_{p-1} \in T_n N$  (para mais detalhes, consultar [72]).

Representemos por  $(x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$  o sistema de coordenadas natural de  $T^*Q$  e consideremos  $X_H = \sum_{i=1}^n A^i(\partial/\partial x^i) + \sum_{i=1}^n B_i(\partial/\partial p_i)$ , onde  $A_i$  e  $B_i$  são funções suaves em  $T^*Q$ . Como é do conhecimento geral,  $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dp_i$ , logo,

$$i_{X_H}\omega_0 = \sum_{i=1}^n (A^i dp_i - B_i dx^i).$$

Por outro lado, considerando  $(x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^m, p_1, \dots, p_n)$  o sistema de coordenadas naturais em  $T^*Q \times_Q B$ , temos

$$dH = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x^i} dx^i + \sum_{a=1}^m \frac{\partial H}{\partial u^a} du^a + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i.$$

Face ao exposto, podemos concluir que a equação simpléctica (C.2.1) é equivalente a

$$A^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad B_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial u^a} = 0,$$

para  $i = 1, \dots, n$  e  $a = 1, \dots, m$ . Portanto, a solução da equação simpléctica é dada pelo campo de vectores

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

definido no subconjunto

$$\{(x, p, u) \in T^*Q \times_Q B : \frac{\partial H}{\partial u^a} = 0, a = 1, \dots, m\}.$$

Consequentemente, para estudar os candidatos a extremantes locais do problema temos de considerar o seguinte sistema de equações, denominadas por *equações críticas*,

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial u^a} = 0, \quad i = 1, \dots, n, a = 1, \dots, m,$$

cujas soluções são designadas por *trajectórias críticas*. Se os controlos  $u^a$ ,  $a = 1, \dots, m$ , se determinarem explicitamente como funções das variáveis  $x$  e  $p$ , conseguimos reduzir o problema ao estudo das  $2n$  equações diferenciais

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

as conhecidas *equações Hamiltonianas* ou *equações de Hamilton* (onde aqui  $H$  depende apenas de  $(x, p) \in T^*Q$ ).



# Bibliografia

- [1] R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics* (2nd edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.), 1978.
- [2] L. Abrunheiro and M. Camarinha, *Cubic polynomials on  $SO(3)$* , Proc. Int. Conf. on Differential Equations (EQUADIFF 2003, 22-26 July 2003, Hasselt, Belgium), ed F. Dumortier *et al* (Hackensack, NJ: World Sci. Publ.), pp 1036-1038, 2005.
- [3] L. Abrunheiro and M. Camarinha, Riemannian cubic polynomials, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino (Control Theory and Stabil., I)*, **63** (4), 297–303, 2005.  
  
(Pré-publicação 04-03 do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, Janeiro de 2004.)
- [4] L. Abrunheiro, M. Camarinha, J. F. Cariñena, J. Clemente-Gallardo, E. Martínez and P. Santos, Some applications of quasi-velocities in optimal control, *Int. J. Geomet. Meth. Mod. Phy.*, **8** (4), 835–851, 2011.  
  
(Pré-publicação 10-05 do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, Fevereiro de 2010.)
- [5] L. Abrunheiro, M. Camarinha and J. Clemente-Gallardo, *Geometry of a second order optimal control problem. Riemannian cubic polynomials*, Proc. XV Int. Fall Workshop on Geometry and Physics (11-16 September 2006, Tenerife, Canary Islands, Spain), vol 11, ed. D. Iglesias Ponte *et al* (RSME), pp 199–204, 2007.

- 
- [6] L. Abrunheiro, M. Camarinha and J. Clemente-Gallardo, *Minimum force optimal control of the spherical free rigid body*, Proc. Control'2010 9th Portuguese Conf. on Automatic Control (8-10 September 2010, Coimbra, Portugal), pp 333-338, 2010.
- [7] L. Abrunheiro, M. Camarinha and J. Clemente-Gallardo, Cubic polynomials on Lie groups: reduction of the Hamiltonian system, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44** (2011) 355203, 2011.
- [8] L. Abrunheiro, M. Camarinha and J. Clemente-Gallardo, *Reduction of the dynamic optimal control problem of the spherical free rigid body*, (*Mathematical Papers in Honour of Fátima Silva Leite, Textos de Matemática*, vol. 43) (Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, Portugal), pp 1–14, 2011.
- [9] J. M. Arms, J. E. Marsden and V. Moncrief, Symmetry and bifurcations of momentum mappings, *Commun. Math. Phys.*, **78**, 455–478, 1981.
- [10] V. I. Arnold, Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits, *Ann. Inst. Fourier*, **16**, 319–361, 1966.
- [11] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, ed. J. H. Ewing *et al* (2nd edition, New York: Springer-Verlag), 1989.
- [12] V. I. Arnold, V. V. Kozlov and A. I. Neishtadt, *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics (Dynamical Systems III, Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, vol. 3) (3rd edition, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag), 2006.
- [13] J. Arroyo, O. J. Garay e J. J. Mencía, Unit speed stationary points of the acceleration, *J. Math. Phys.*, **49**, 013508, 2008.
- [14] M. Barbero-Liñán, A. Echeverría-Enríquez, D. Martín de Diego, M. C. Muñoz-Lecanda and N. Román-Roy, Skinner-Rusk unified formalism for optimal control systems and applications, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**, 12071–12093, 2007.

- [15] M. Barbero-Liñán and M. C. Muñoz-Lecanda, *Optimal control problems for affine connection control systems: characterization of extremals*, Geometry and Physics: XVI Int. Fall Workshop (5-8 September 2007, Lisbon, Portugal), ed R. Loja Fernandes and R. Picken (American Inst. of Physics Conference Proceedings), vol. 1023, pp 127–131, 2008.
- [16] M. Barbero-Liñán and M. C. Muñoz-Lecanda, Presymplectic high order maximum principle, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Serie A, Matemáticas* (Milan: Springer-Verlag), DOI 10.1007/s13398-011-0022-x, 2011.
- [17] L. M. Bates and R. H. Cushman, *Global Aspects of Classical Integrable Systems* (Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag), 1997.
- [18] R. Benedito and D. Martín de Diego, *Hidden symplecticity in Hamilton's principle algorithms*, Proc. 9th Int. Conf. on Differential Geometry and Its Applications (30 August - 3 September 2004, Prague, Czech Republic), pp 411–419, 2005.
- [19] A. M. Bloch, *Nonholonomic Mechanics and Control (Interdisciplinary Applied Mathematics, vol. 24)*, ed. S. S. Antman *et al* (New York: Springer-Verlag), 2003.
- [20] A. Bloch and P. Crouch, Nonholonomic and vakonomic control systems on Riemannian manifolds, *Fields Inst. Commun.*, **1**, 25–52, 1993.
- [21] A. M. Bloch and P. Crouch P, *On the equivalence of higher order variational problems and optimal control problems*, Proc. 35th IEEE Conf. on Decision and Control (December 1996, Kobe, Japan), vol 2, pp 1648–1653, 1996.
- [22] W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry* (2nd edition, Orlando: Academic Press), 1986.
- [23] I. Bucataru e R. Miron, The geometry of systems of third order differential equations induced by second order regular Lagrangians, *Mediterr. J. Math.*, **6**, 483–500, 2009.

- 
- [24] F. Bullo and A. D. Lewis, *Geometric Control of Mechanical Systems: Modeling, Analysis, and Design for Simple Mechanical Control Systems (Texts in Applied Mathematics, vol. 49)*, ed. Marsden *et al* (New York: Springer-Verlag), 2005.
- [25] F. Bullo and A. D. Lewis, Low-order controllability and kinematic reductions for affine connection control systems, *SIAM J. Control Optimization*, **44** (3), 885–908, 2005.
- [26] M. Camarinha, *The Geometry of Cubic Polynomials on Riemannian Manifolds*, Ph. D. Thesis in Pure Mathematics, University of Coimbra, Portugal, 1996.
- [27] M. Camarinha, P. Crouch and F. Silva Leite, Splines of class  $C^k$  on non-euclidean spaces, *IMA J Math Control Info.*, **12** (4), 399-410, 1995.
- [28] M. Camarinha M, P. Crouch and F. Silva Leite, *Hamiltonian structure of generalized cubic polynomials*, Proc. IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control (16-18 March 2000, Princeton University, USA), pp 13-18, 2000.
- [29] M. Camarinha, P. Crouch and F. Silva Leite, On the geometry of Riemannian cubic polynomials, *Differential Geom. Appl.*, **15**, 107–135, 2001.
- [30] A. Cannas da Silva and A. Weinstein, *Geometric Models for Noncommutative Algebras (Berkeley Mathematics Lecture Notes)*, Vol. 10 (Providende, RI: American Mathematical Society), 1999.
- [31] J. F. Cariñena e C. López, Geometric study of Hamiltonian’s variational principle, *Rev. Math. Phys.*, **3** (4), 379–401, 1991.
- [32] J. F. Cariñena, J. M. Nunes da Costa e P. Santos, Quasi-coordinates from the point of view of Lie algebroid structures, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**, 10031–10048, 2007.
- [33] L. Colombo and D. Martín de Diego, *On the geometry of higher-order variational problems on Lie groups*, arXiv:1104.3221v1 [math-ph].

- [34] J. Cortés, M. de León, J. C. Marrero, E. Martínez, Nonholonomic Lagrangian systems on Lie algebroids, *Discret. Contin. Dyn. S. - Series A*, **24** (2), 213–271, 2009.
- [35] J. Cortés, M. de León, D. Martín de Diego and S. Martínez, General description of vakonomic and nonholonomic dynamics. Comparison of solutions, *SIAM J. Control Optim.*, **41** (5), 1389–1312, 2002.
- [36] M. Crampin, W. Sarlet and F. Cantrijn, Higher-order differential equations and higher-order Lagrangian mechanics, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **99**, 565–587, 1986.
- [37] P. Crouch and F. Silva Leite, The dynamic interpolation problem: on Riemannian manifolds, Lie groups and symmetric spaces, *J. Dynam. Control Systems*, **1** (2), 177–202, 1995.
- [38] M. Delgado-Téllez and A. Ibort, A panorama of geometrical optimal control theory, *Extracta Math.*, **18** (2), 129–151, 2003.
- [39] F. Gay-Balmaz, D. D. Holm, D. M. Meier, T. S. Ratiu and F.-X. Vialard, Invariant higher-order variational problems, *Commun. Math. Phys.*, DOI: 10.1007/s00220-011-1313-y, 2011.
- [40] R. Giambò, F. Giannoni and P. Piccione, An analytical theory for Riemannian cubic polynomials, *IMA J Math Control Info.*, **19**, 445-460, 2002.
- [41] M. J. Gotay and J. M. Nester, Presymplectic Lagrangian systems, I: the constraint algorithm and the equivalence theorem, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A*, **30** (2), 129–142, 1979.
- [42] D. D. Holm, J. E. Marsden and T. S. Ratiu, The Hamiltonian structure of continuum mechanics in material, inverse material, spatial and convective representations, *Séminaire de Mathématiques supérieures, Les Presses de L'Univ. de Montréal*, **100**, 11–122, 1986.

- [43] V. Jurdjevic, *Geometric Control Theory (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 51)*, ed. W. Fulton *et al* (Cambridge: Cambridge University Press), 1997.
- [44] V. Jurdjevic and H. Sussmann, Control systems on Lie groups, *J. Differ. Equations*, **12**, 313–329, 1972.
- [45] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, Vol. I and II* (New York: John Wiley & Sons), 1963 and 1969.
- [46] I. Kolář, P.W. Michor and J. Slovák, *Natural Operations in Differential Geometry* (Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag), 1993.
- [47] O. Krupková, Higher-order mechanical systems with constraints, *J. Math. Phys.*, **41** (8), 5304-5324, 2000.
- [48] M. de León, J. Cortés, D. Martín de Diego and S. Martínez, General symmetries in optimal control, *Rep. Math. Phys.*, **53** (1), 55–78, 2004.
- [49] M. de León and P. R. Rodrigues, *Generalized Classical Mechanics and Field Theory: a geometrical approach of Lagrangian and Hamiltonian formalisms involving higher order derivatives (North-Holland Math. Studies, vol. 112)*, ed. L. Nachbin (Amsterdam: North-Holland, Elsevier), 1985.
- [50] P. Libermann and C.-M. Marle, *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics (Mathematics and its Applications)*, ed. M. Hazewinkel *et al* (Holland: D. Reidel Publishing Company, Dordrecht), 1987.
- [51] C. López and E. Martínez, Sub-finslerian metric associated to an optimal control system, *J. Control Optim.*, **39**, 798–811, 2000.
- [52] L. Machado, F. Silva Leite and K. Krakowski, Higher-order smoothing splines versus least squares problems on Riemannian manifolds, *J. Dy. Control Syst.*, **16** (1), 121–148, 2010.

- 
- [53] K. C. H. Mackenzie, *Lie Groupoids and Lie algebroids in Differential Geometry (London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 124)* (Cambridge: Cambridge University Press), 1987.
- [54] K. C. H. Mackenzie, *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids (London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 213)* (Cambridge: Cambridge University Press), 2005.
- [55] J. E. Marsden and T. S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry: a Basic Exposition of Classical Mechanical Systems (Texts in Applied Mathematics, vol. 17)*, ed. F. John *et al* (New York: Springer-Verlag), 1994.
- [56] J. E. Marsden and A. Weinstein, Reduction of symplectic manifolds with symmetry, *Rep. Math. Phys.*, **5** (1), 121–130, 1974.
- [57] E. Martínez, Lagrangian mechanics on Lie algebroids, *Acta Appl. Math.*, **67**, 295–320, 2001.
- [58] E. Martínez, Reduction in optimal control theory, *Rep. Math. Phys.*, **53**, 79–90, 2004.
- [59] J. M. Maruskin, *On the Dynamical Propagation of Subvolumes and on the Geometry and Variational Principles of Nonholonomic Systems*, Ph. D. Thesis in in Philosophy (Applied and Interdisciplinary Mathematics), University of Michigan, USA, 2008.
- [60] J. M. Maruskin and A. M. Bloch., The Boltzmann-Hamel equations for the optimal control of mechanical systems with nonholonomic constraints, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, DOI: 10.1002/rnc.1598, 2010.
- [61] J. Milnor, *Morse Theory* (Princeton, New Jersey, USA: Princeton University Press), 1969.

- [62] R. Miron, *The Geometry of Higher-Order Hamilton Spaces. Applications to Hamiltonian Mechanics (Fundamental Theories of Physics, vol. 132)*, ed. A. van der Merwe *et al* (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers), 2003.
- [63] A. S. Mishchenko and A. T. Fomenko, Generalized Liouville method of integration of Hamiltonian systems, *Funct. Anal. Appl.*, **12**, 113–121, 1978.
- [64] N. Nekhoroshev, The Poincaré-Lyapunov-Liouville-Arnol'd theorem, *Funct. Anal. Appl.*, **28**, 128–129, 1994.
- [65] H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems* (New York: Springer-Verlag), 1990.
- [66] L. Noakes, Null cubics and Lie quadratics, *J. Math. Phys.*, **44** (3), 1436–1448, 2003.
- [67] L. Noakes, Non-null Lie quadratics in  $E^3$ , *J. Math. Phys.*, **45** (11), 4334–4351, 2004.
- [68] L. Noakes, Duality and Riemmanian cubics, *Adv. Comput. Math.*, **25**, 195–209, 2006.
- [69] L. Noakes, G. Heinzinger and B. Paden, Cubic splines on curved spaces, *IMA J. Math. Control Inform.*, **6**, 465–473, 1989.
- [70] L. Noakes and T. Popiel, Quadratures and cubics in  $SO(3)$  and  $SO(1, 2)$ , *IMA J. Math. Control Inform.*, **23** (4), 463–473, 2006.
- [71] J. P. Ortega and T. S. Ratiu, *Momentum Maps and Hamiltonian Reduction (Progress in Mathematics, vol. 222)*, ed. H. Bass *et al* (Boston: Birkhäuser), 2004.
- [72] G. Pidello and W. Tulczyjew, Derivations of differential forms on jet bundles, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **147** (4), 249–265, 1987.
- [73] T. Popiel, Higher order geodesics in Lie groups, *Math. Control Signals Syst.*, **19**, 235–253, 2007.



- 
- [74] S. Sastry and R. Montgomery, *The structure of optimal controls for a steering problem*, Proc. of IFAC Conference on Nonlinear Control Systems Design NOLCOS (June 1992, Bordeaux, France), pp 385–390, 1992.
- [75] R. W. Sharpe, *Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program (Graduate Texts in Mathematics, vol. 166)*, ed. S. Axler *et al* (New York: Springer-Verlag), 1997.
- [76] F. Silva Leite, M. Camarinha and P. Crouch, Elastic curves as solutions of Riemannian and sub-Riemannian control problems, *Math. Control Signals Syst.*, **13**, 140–155, 2000.
- [77] R. Skinner and R. Rusk, Generalized Hamiltonian dynamics I. Formulation on  $T^*Q \oplus TQ$ , *J. Math. Phys.*, **24** (11), 2589–2594, 1983.
- [78] A. Weinstein, Lagrangian mechanics and groupoids, *Mechanics Day, Fields Inst. Comm.*, **7**, ed. W. F. Shadwick *et al* (American Mathematical Society), 207–231, 1996.