

**Algoritmos e Estratégias de Gestão do Problema  
de Contacto com Atrito em Grandes Deformações**  
*Aplicação à Estampagem de Chapas Metálicas*

Marta Cristina Cardoso de Oliveira

Acção financiada no âmbito da *Medida 5 - Acção 5.3 - Formação Avançada de Docentes do Ensino Superior, Integrada no Eixo 3, Sociedade de Aprendizagem da Intervenção Operacional da Educação (PRODEP III)*.



Dissertação para Doutoramento em Ciências da  
Engenharia Mecânica na especialidade de  
Tecnologia da Produção.

Trabalho realizado sob a orientação do  
*Professor Doutor Luís Filipe Martins Menezes* e do  
*Professor Doutor Filipe Miguel Horta e Vale Teixeira -Dias.*

# **Algoritmos e Estratégias de Gestão do Problema de Contacto com Atrito em Grandes Deformações**

**Aplicação à Estampagem de Chapas Metálicas**

*Marta Cristina Cardoso de Oliveira*

Coimbra, 2005



*A modern-day technical version of Confucius' most famous saying, (...) might be, "One good theory is worth a thousand computer runs".*

*Luenberger D.G.  
em "Linear and nonlinear programming", 1984*

---

*À minha mãe, Amália*

## **Agradecimentos**

O trabalho que aqui se apresenta só foi possível graças à colaboração e apoio de algumas pessoas, às quais não posso deixar de prestar o meu reconhecimento.

*Ao Professor Doutor Luís Filipe Menezes, por partilhar comigo as elevadas competências científicas que possui, pela rigorosa orientação, pela disponibilidade constante, pelo encorajamento, pela confiança depositada e em particular por dividir comigo o seu entusiasmo por fazer sempre melhor.*

*Ao Professor Doutor Filipe Teixeira-Dias, pela disponibilidade constante, pelos ensinamentos preciosos e em particular pelo brio e rigor que impõe no seu trabalho e que procurou transmitir-me ao longo de toda a sua orientação.*

*Ao Professor Doutor Valdemar Fernandes, pelo seu apoio e amizade, pela pronta disponibilidade para todas as minhas solicitações e sobretudo pelo constante encorajamento.*

*Ao Professor Doutor Altino Loureiro e à Professora Doutora Dulce Rodrigues, pelo encorajamento e optimismo e em particular pela amizade que me dispensaram.*

*Ao Professor Doutor José Luís Alves, pelo apoio, pelo enorme encorajamento e amizade e em particular pelas inúmeras discussões científicas que em muito contribuíram para que este trabalho se concretizasse.*

*Aos restantes membros do Grupo de Tecnologia, por terem contribuído para o ambiente de amizade, boa disposição e confiança que reina no grupo tornando mais fácil a realização de um bom trabalho.*

*A todos com quem tive oportunidade de trabalhar no âmbito do projecto 3DS, pelas inúmeras discussões científicas e pelos ensinamentos preciosos.*

A todos os meus amigos, vocês sabem que eu sei que vocês sabem quem são, *por resistirem estoicamente aos meus momentos de má disposição, pela paciência, pelo apoio e encorajamento e sobretudo por todos os momentos de alegre convívio.*

Aos meus pais, irmãos Sandra e Luís, e ao Paulo, *pelo seu apoio incondicional, pelo seu incentivo e por relevarem todos os meus esquecimentos.*

Aos colegas e funcionários do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Coimbra, *pelo apoio e disponibilidade. Em particular, aqueles que comigo partilharam diariamente bons momentos de descontração e companheirismo.*

À Fundação para a Ciência e Tecnologia, *pelo apoio através do projecto POCTI/EME/35945/99.*

A todos um enorme

Bem-haja

# Índice

<b>Capítulo 1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
1.1	Enquadramento .....	9
1.2	Objectivos .....	19
1.3	O Programa DD3IMP .....	20
1.4	Guia de Leitura .....	22
<b>Capítulo 2</b>	<b>Modelo Mecânico</b>	<b>25</b>
2.1	Enquadramento .....	25
2.2	Mecânica dos Meios Contínuos .....	27
2.2.1	Relações Cinemáticas .....	28
2.2.2	Lei de Comportamento Elastoplástica.....	31
2.2.2.1	Leis de Encruamento.....	35
2.2.2.2	Critérios de Plasticidade .....	38
2.2.3	Equações de Equilíbrio e Condições de Fronteira .....	40
2.2.4	Formulação Variacional do Problema Clássico .....	41
2.3	Mecânica do Contacto .....	42
2.3.1	Cinemática do Contacto .....	42
2.3.2	Lei de Contacto Unilateral .....	44
2.3.3	Lei de Atrito puro .....	45
2.3.4	Lei de Contacto com Atrito .....	46
2.3.5	Formulação do Problema Misto .....	48
<b>Capítulo 3</b>	<b>Algoritmos de Integração Temporal e Espacial</b>	<b>51</b>
3.1	Enquadramento .....	51
3.2	Integração Temporal .....	56
3.2.1	<i>Previsão</i> : Cálculo Tangente Explícito.....	57
3.2.1.1	Determinação do Tamanho do Incremento – Estratégia $r_{\min}$ .....	59
3.2.2	<i>Correcção</i> : Cálculo Implícito.....	61
3.2.2.1	Integração da Lei de Comportamento.....	63
3.2.2.2	Linearização do Princípio das Potências Virtuais.....	68
3.2.2.3	Módulo Elastoplástico Consistente.....	69
3.3	Integração Espacial .....	70
3.3.1	Elementos Finitos .....	70
3.3.2	Métodos de Integração .....	71
3.3.2.1	Integração Completa e Integração Reduzida Uniforme.....	72
3.3.2.2	Integração Reduzida Selectiva.....	72
3.3.3	Equações Elementares .....	73
3.3.3.1	Equações Elementares: <i>Previsão</i> .....	73
3.3.3.2	Equações Elementares: <i>Correcção</i> .....	74

<b>Capítulo 4</b>	<b>Definição Geométrica das Ferramentas</b>	<b>77</b>
4.1	Enquadramento .....	77
4.2	Superfícies de Bézier.....	81
4.3	Algoritmo de Detecção de Contacto .....	83
4.3.1	Algoritmos de Detecção de Contacto Global .....	84
4.3.1.1	Algoritmo do Ponto Médio .....	84
4.3.1.2	Algoritmo dos Vértices e Ponto Médio.....	84
4.3.2	Algoritmos de detecção de contacto Local.....	86
4.3.2.1	Algoritmo de Impacto .....	87
4.3.2.2	Algoritmo de Projecção.....	89
4.3.3	Interação entre os Algoritmos de Detecção de Contacto Global e Local .....	91
4.4	Algoritmo de Gestão do Contacto.....	97
4.5	Descrição das Ferramentas.....	98
4.5.1	Aproximação de um Arco de Círculo por uma Curva de Bézier.....	99
4.5.2	Continuidade de Superfícies Adjacentes .....	101
4.5.3	Exemplo Numérico .....	102
4.5.3.1	Definição Manual da Geometria .....	103
4.5.3.2	Definição da Geometria com Recurso ao CAD .....	105
<b>Capítulo 5</b>	<b>Regularização do Problema de Contacto com Atrito</b>	<b>111</b>
5.1	Enquadramento .....	111
5.2	Regularização da Condição de Contacto Unilateral .....	115
5.3	Regularização da Condição de Atrito .....	120
5.4	Método do Lagrangeano Aumentado.....	122
5.4.1	Operador de Contacto com Atrito.....	127
5.4.2	Gestão Implícita das Condições de Fronteira .....	128
5.4.2.1	Matrizes Tangentes Associadas ao Estatuto <i>Gap</i> .....	129
5.4.2.2	Matrizes Tangentes Associadas ao Estatuto <i>Stick</i> .....	129
5.4.2.3	Matrizes Tangentes Associadas ao Estatuto <i>Slip</i> .....	130
5.4.3	O Sistema de Equações Lineares Global Misto.....	131
5.4.4	O Sistema de Equações Lineares Global Reduzido.....	132
5.4.4.1	Ferramentas a Força Imposta .....	133
5.4.4.2	Resolução do Sistema de Equações Lineares.....	138
5.4.5	Convergência Global do Algoritmo de Newton-Raphson.....	139
<b>Capítulo 6</b>	<b>Parâmetro de Penalidade</b>	<b>143</b>
6.1	Enquadramento .....	143
6.2	Parâmetro de Penalidade Variável para cada Nó de Contacto.....	147
6.2.1	Algoritmo Baseado na Força Normal de Contacto.....	148
6.2.2	Algoritmo Baseado na Força e Distância Normais de Contacto .....	150
6.3	Parâmetro de Penalidade Distinto para as Condições de Contacto Unilateral de Contacto e com Atrito.....	153
6.4	Testes Elementares: Ensaio de Compressão .....	155
6.5	Conformação de uma Taça Quadrada .....	163
<b>Capítulo 7</b>	<b>Atrito</b>	<b>175</b>
7.1	Enquadramento .....	175



7.2	Implementação no Programa DD3IMP .....	184
7.2.1	Algoritmo do Estatuto de Contacto .....	185
7.2.2	Algoritmo da Distância Normal e do Estatuto de Contacto .....	186
7.3	Exemplo Numérico .....	187
7.3.1	Conclusões.....	204
<b>Capítulo 8</b>	<b>Modelação e Simulação de Casos Reais</b>	<b>205</b>
8.1	Enquadramento .....	205
8.2	Simulação do Retorno Elástico: DD3OSS .....	205
8.3	Modelação das Ferramentas a Força Imposta.....	214
8.4	Lei de Encruamento .....	222
8.5	Força de Aperto do Cerra-chapas .....	228
8.5.1	Perfil U .....	229
8.5.2	Perfil Curvo .....	232
8.6	Deslocamento do Punção.....	237
8.7	Distribuição Assimétrica da Força Imposta pelo Cerra-chapas.....	239
8.7.1	Desvio da Posição Horizontal do Cerra-chapas .....	240
8.7.1.1	Força de Aperto do Cerra-chapas de 90 kN.....	240
8.7.1.2	Força de Aperto do Cerra-chapas de 300 kN.....	244
8.7.2	Distribuição Assimétrica do Coeficiente de Atrito .....	249
8.7.2.1	Força de Aperto do Cerra-chapas de 90 kN.....	249
8.7.2.2	Força de Aperto do Cerra-chapas de 300 kN.....	251
8.7.2.3	Conclusões .....	253
<b>Capítulo 9</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>255</b>
9.1	Conclusões .....	255
9.2	Perspectivas de Trabalho Futuro .....	259
<b>Anexo A</b>	<b>Notação, Nomenclatura e Siglas</b>	<b>261</b>
A.1	Notações Algébricas .....	261
A.2	Operadores e Funções.....	261
A.3	Sub-índices e Super-índices.....	262
A.4	Mecânica dos Meios Contínuos.....	263
A.5	Modelos de Comportamento e Propriedades dos Materiais .....	264
A.6	Mecânica do Contacto .....	265
A.7	Descrição das Ferramentas .....	266
A.8	Discretização por Elementos Finitos .....	266
A.9	Métodos Numéricos.....	267
A.10	Siglas e Abreviaturas .....	268
<b>Anexo B</b>	<b>Parâmetro de Penalidade Único</b>	<b>269</b>
B.1	Operador de Contacto com Atrito.....	269
B.2	Matrizes Jacobianas .....	270
B.3	Sistema de Equações Lineares Global Misto.....	272
B.4	Sistema de Equações Lineares Global Reduzido .....	273
<b>Anexo C</b>	<b>Parâmetro de Penalidade Variável para cada Nó de Contacto</b>	<b>275</b>

C.1	Algoritmo Baseado na Força Normal de Contacto .....	275
C.2	Algoritmo Baseado na Força e Distância Normais de Contacto.....	277
Anexo D	Parâmetro de Penalidade Distinto para as Condições de Contacto Unilateral e de Contacto com Atrito	279
D.1	Operador de Contacto com Atrito .....	279
D.2	Matrizes Jacobianas .....	280
D.3	Sistema de Equações Lineares Global Misto .....	281
D.4	Sistema de Equações Lineares Global Reduzido .....	283
Anexo E	Propriedades Mecânicas dos Materiais	285
	Referências Bibliográficas	287

# Capítulo 1

## Introdução

*Faz-se o enquadramento global do problema da simulação numérica do processo de estampagem, dando ênfase a aspectos tais como os desafios tecnológicos e o interesse industrial. Expõem-se os objectivos estabelecidos para o trabalho desenvolvido no âmbito desta tese com base nos desafios descritos. Apresenta-se a estrutura e conteúdo da dissertação de modo a melhor conduzir o leitor no decurso do texto e a facilitar a sua consulta.*

---

### 1.1 Enquadramento

Nos processos tecnológicos de conformação plástica, a geometria inicial do material é modificada, através da aplicação de esforços externos que induzem deformação plástica no material. Deste modo obtém-se a geometria final pretendida. A estampagem de chapas metálicas enquadra-se neste grupo de processos tecnológicos. Consiste em dar forma a uma chapa metálica fina, de superfície inicialmente plana, que é transformada numa geometria de superfície não-planificável.

No processo de estampagem recorre-se, geralmente, a três tipos de ferramentas distintas: o punção, a matriz e o cerra-chapas (ver Figura 1.1). A chapa, previamente cortada com dimensões pré-estabelecidas, é designada por esboço. Este é fixo entre o cerra-chapas e a matriz. Nesta primeira fase do processo, designada por aperto, o cerra-chapas exerce uma força pré-definida sobre a chapa, de modo a prevenir a ocorrência de defeitos e a controlar o escoamento do material. Posteriormente, inicia-se a fase de avanço do punção, em que este se desloca para a cavidade definida pela matriz. Promove-se, assim, o movimento do material para esta cavidade. Na última fase removem-se as ferramentas, de modo a libertar a chapa da sua influência. A fase de remoção das ferramentas é muito importante, pois o processo de deformação tende a acumular uma grande quantidade de energia de deformação elástica no corpo deformável. A energia é eliminada quando o corpo é libertado da influência das ferramentas, e actua como a força motriz do fenómeno de retorno elástico. Este fenómeno pode ser definido como a diferença dimensional e de geometria entre a peça estampada e a geometria que lhe é imposta pelas ferramentas antes da sua remoção. Deste modo, a geometria final do componente estampado depende não só da geometria das ferramentas de estampagem, mas também da energia de deformação elástica acumulada ao longo do processo de conformação.

Um processo de estampagem como o descrito na Figura 1.1 envolve apenas uma etapa. Em função da complexidade da geometria do componente pode ser necessário recorrer a mais do que uma etapa para obter a geometria pretendida. A determinação do número de etapas necessárias é uma das variáveis mais importantes do projecto de um componente estampado. Este compreende diferentes fases. Numa primeira fase, definida a geometria do componente pretendido, deve avaliar-se a viabilidade da sua produção e

analisar possíveis alterações. A fase seguinte envolve a definição de eventuais restrições ao projecto, como sejam: (i) propriedades do material e espessura inicial; (ii) qualidade e precisão desejadas; (iii) volume e cadência da série a produzir e (iv) características das máquinas ferramenta disponíveis para a produção. Segue-se a fase de projecto e concepção das ferramentas de estampagem. Nesta, determina-se a geometria do esboço e o número de etapas necessárias para a produção do componente. Para cada etapa é necessário definir: (i) a geometria das ferramentas de estampagem; (ii) o recurso ou não ao cerra-chapas e o valor da força aplicada; (iii) os parâmetros tribológicos e a necessidade de utilização de freios e (iv) a capacidade da prensa.

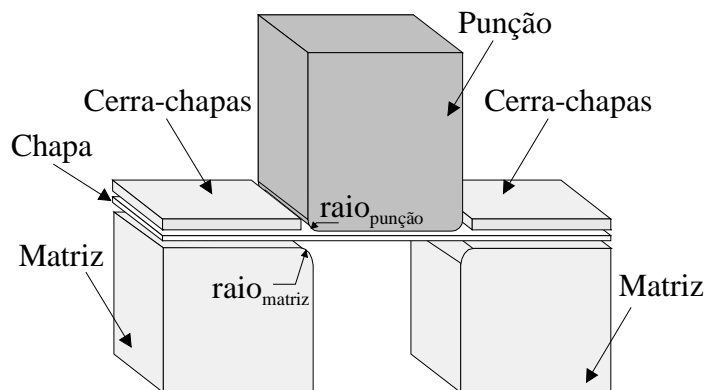


Figura 1.1 – Representação esquemática do processo de estampagem.

O conjunto de parâmetros tecnológicos envolvidos e a complexidade inerente a esta tecnologia fez com que, durante muito tempo, fosse considerada como uma arte. Tal fica a dever-se, também, ao facto desta tecnologia depender dos conhecimentos associados à experiência do projectista. O projecto de um componente estampado era, por isso, baseado num conjunto de regras empíricas resultantes da experiência acumulada. Deste modo, era necessário construir ferramentas-protótipo. Uma vez afinado o processo em laboratório construía-se as ferramentas de estampagem e iniciavam-se os testes finais. Nesta fase, a introdução de alterações às ferramentas e ao processo tornavam-se muito dispendiosas. Este procedimento de projecto, empírico, baseava-se em ciclos de tentativa-erro para obtenção do conjunto de parâmetros de processo que permitisse a realização do componente dentro das especificações de projecto.

Apesar destas dificuldades, a estampagem é uma tecnologia essencial na indústria moderna. A título de exemplo os dados mundiais referentes ao ano 2000 indicam que foram processados por conformação por deformação plástica aproximadamente 310 milhões de toneladas de chapa de aço e 12 milhões de toneladas de chapa de alumínio. Estes valores correspondem a cerca de 35% do total da produção mundial de aço e alumínio [IISI 2004, CRU 2001]. Esta tecnologia é utilizada para produzir um enorme conjunto de produtos, com uma vasta gama de aplicações, na indústria automóvel, electrónica, aeronáutica, alimentar, construção, de fabricação de aparelhos domésticos ou de máquinas de uso geral, etc. A sua enorme capacidade de produção de componentes leves, com índices de produtividade superiores aos de outras tecnologias, constitui a principal vantagem do processo de estampagem relativamente a outros processos tecnológicos.

As primeiras unidades de estampagem de produção em massa eram pouco flexíveis, permitindo introduzir apenas pequenas variações num mesmo produto. Nos anos 60 e 70

desenvolveram-se as primeiras unidades de estampagem automáticas. Aumentou-se a capacidade de produção e minimizou-se a mão-de-obra necessária. No entanto, estas unidades ainda se caracterizavam pela reduzida flexibilidade. Com a introdução, na década de 80, das tecnologias de informação e dos meios computacionais, as unidades de produção tornaram-se mais flexíveis possibilitando a produção de diferentes geometrias apenas com pequenas alterações nas ferramentas e condições do processo. Entretanto, o aumento das exigências por parte dos consumidores, tanto em termos de qualidade como de diversidade, tem conduzido a indústria a produzir mais produtos, melhorando a qualidade e diminuindo os ciclos de vida, obrigando à diminuição do tempo de projecto de cada novo produto.

O desenvolvimento dos meios computacionais tornou possível a simulação numérica do processo tecnológico de estampagem de chapas metálicas. O recurso à simulação numérica permite obter um grande número de soluções de forma rápida, reduzindo o número de ensaios experimentais associados aos ciclos de tentativa-erro necessários para a optimização do processo. Além disso, a introdução da simulação numérica como ferramenta de apoio ao projecto contribuiu para reduzir a componente empírica da concepção das ferramentas de estampagem. Com efeito, muitos dos avanços ocorridos na tecnologia de estampagem devem-se à forma como a simulação numérica facilitou a análise da influência de algumas das variáveis tecnológicas fundamentais do processo, como por exemplo: (i) as propriedades mecânicas do material; (ii) as condições de lubrificação; (iii) os mecanismos de deformação, o escoamento do material e as forças envolvidas; (iv) a geometria das ferramentas e (v) a definição das tolerâncias de fabrico e de aplicação. Em face destas enormes potencialidades, a simulação numérica do processo de estampagem impôs-se como uma ferramenta indispensável para a fase de concepção e projecto de componentes estampados, contribuindo de forma decisiva para a redução de custos e de tempo de duração do projecto. Porém, devido ao enorme conjunto de parâmetros tecnológicos envolvidos, a optimização do processo de estampagem depende ainda da experiência e de ciclos tentativa-erro, embora o recurso à simulação numérica permita a realização de um menor número de testes experimentais.

Actualmente, depois de definida a geometria do componente, o projecto das ferramentas de estampagem e a definição das condições do processo são desenvolvidos com o auxílio da simulação numérica. A noção de projecto assistido por simulação numérica envolve o recurso a esta ferramenta em diferentes etapas do projecto. Definida a geometria do embutido pode recorrer-se à simulação numérica para avaliar a viabilidade de produção do componente e propor eventuais alterações à sua geometria. Na fase de concepção de ferramentas e definição dos parâmetros do processo pode recorrer-se à simulação numérica para optimizar a geometria inicial do esboço, o número de etapas e a geometria das ferramentas para cada etapa. Após a optimização do processo de conformação, constroem-se as ferramentas e procede-se a testes iniciais. Se estes testes revelarem defeitos no embutido, recorre-se novamente à simulação numérica, de modo a procurar uma solução para minimizar os defeitos previstos. Depois do início da fase de produção do componente, o recurso à simulação numérica do processo pode ainda ser necessário para avaliar a influência, no sucesso da operação, de alterações pontuais, como sejam pequenas correcções à ferramenta, etc.

Actualmente, é ainda inevitável o recurso à fase de testes experimentais das ferramentas para os ajustes finais (soldadura, polimento, etc.). Esta fase é essencialmente executada com base na experiência dos técnicos, sendo uma etapa muito dispendiosa [Im

1999]. Por exemplo, os ajustes finais das ferramentas para a produção de um painel de grandes dimensões da indústria automóvel necessitam de um a dois meses. Os custos associados a esta fase de correcção podem atingir 20% dos custos totais de produção das ferramentas [Hongzhi e Zhongqin 2000]. O desafio que se coloca à simulação numérica do processo de estampagem é que esta permita eliminar todas as fases de testes e correcções das ferramentas reais [Makinouchi e Kawka 1994].

O processo de optimização em ambiente virtual é fortemente dependente da exactidão dos resultados fornecidos pelo método dos elementos finitos. Para isso é necessário garantir uma correcta caracterização do comportamento do material bem como das condições do processo. Por outro lado, a correcta interpretação dos resultados exige ao utilizador do programa de simulação um bom conhecimento do processo tecnológico que está a simular e um bom conhecimento dos métodos e algoritmos numéricos utilizados pelo programa [Ahmetoglu *et al.* 1994, Haar 1996].

O processo de estampagem de chapas metálicas pode ser caracterizado como um processo *quasi*-estático ou dinâmico, que envolve o contacto entre um corpo deformável e um conjunto de ferramentas. O problema de contacto com atrito é matematicamente caracterizado por condições de impenetrabilidade e de atrito. Os modelos matemáticos que descrevem este problema envolvem sistemas de inequações não-lineares, cuja resolução não é simples e requer conceitos matemáticos complexos. Só existem soluções analíticas para modelos muito simples, pelo que a sua aplicação a problemas reais é muito limitada. O método dos elementos finitos surgiu como a primeira ferramenta numérica disponível para a resolução de problemas de contacto com atrito que envolvem geometrias complexas [Francavilla e Zienkiewicz 1975, Hughes *et al.* 1976].

Para além das não-linearidades resultantes do contacto e do fenómeno de atrito, a modelação matemática de processos que envolvem grandes deformações, como a estampagem, engloba outros dois grupos de não-linearidades. O primeiro grupo corresponde às não-linearidades geométricas, resultantes da cinemática do problema. O segundo resulta das não-linearidades materiais resultantes das leis constitutivas. Estas são geralmente associadas ao comportamento elastoplástico dos materiais. Deste modo, a resolução deste tipo de problemas exige: (i) correcta modelação dos fenómenos; (ii) desenvolvimento de técnicas numéricas capazes de lidar com geometrias complexas; (iii) modelos para descrever o atrito nas superfícies, a deformação plástica de corpos em contacto, as grandes deformações e o escorregamento entre corpos [Gontier 1994]. Esta enorme complexidade justifica o facto de, até meados dos anos 80, não existirem programas de cálculo capazes de simular o processo de estampagem. O facto de actualmente muitos dos problemas associados à simulação numérica deste processo estarem resolvidos, ou serem pelo menos melhor compreendidos, deve-se a um enorme esforço e investimento nesta área de investigação. Tal esforço foi possível devido à enorme importância deste processo de conformação plástica na economia dos países industrializados. A enorme complexidade do problema tem levado a que o desenvolvimento da simulação numérica do processo de estampagem seja realizado em parceria pela indústria, universidades e centros de investigação. Outro factor que contribui para o estudo cooperativo é a interdisciplinaridade associada ao problema, que engloba áreas como a matemática, física, materiais, mecânica dos sólidos, mecânica dos fluidos, mecânica computacional, métodos numéricos, entre outras.

Uma forma de constatar o enorme investimento na área da simulação numérica do processo de estampagem é analisar a evolução da produção científica. O livro publicado

sobre o processo de estampagem em 1978 [Koistinen e Wang 1978], com um total de 15 contribuições, apresentava apenas dois artigos sobre a análise deste processo, com recurso ao método dos elementos finitos. Nas conferências NUMIFORM (*International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes*) de 1983 e 1986 surgem apenas três e seis artigos nesta área, respectivamente. Esta tendência inverte-se definitivamente nas conferências seguintes, com 25 artigos na conferência NUMIFORM'89 e 29 artigos na conferência NUMIFORM'92. Na primeira conferência NUMISHEET (*FE-simulation and 3-D Sheet Metal Forming Process in Automotive Industry*), realizada em Zurique em 1991, foram apresentados 39 trabalhos dedicados à simulação numérica do processo de estampagem. O trabalho cooperativo desenvolvido por diferentes instituições conduziu à rápida passagem da simulação do processo de estampagem, dos laboratórios de investigação para a prática industrial, ainda na primeira metade da década de 90 [Zhou e Wagoner 1995].

A segunda metade da década de 90 pauta-se por uma utilização massiva dos programas de simulação numérica do processo de estampagem na indústria. O recurso à simulação numérica do processo de estampagem centra-se em responder a questões associadas com a viabilidade do componente e a identificação de zonas críticas, à ocorrência de rotura ou defeitos. Para cada ciclo tentativa-erro procede-se à simulação do processo para um determinado conjunto de parâmetros tecnológicos pré-definidos, de modo a analisar os resultados e determinar possíveis alterações. Deste modo, a aplicação do método dos elementos finitos permite apenas retirar conclusões acerca dos conjuntos de parâmetros testados. O estudo da influência dos diferentes parâmetros tecnológicos com o auxílio destes programas exige a realização de um enorme conjunto de análises, de modo a otimizar a sua combinação. Por esta razão, o factor tempo de computação é crítico na avaliação de um programa de simulação numérica. Refira-se, a título de exemplo, que o tempo total de uma simulação (incluindo a discretização por elementos finitos, definição do processo, cálculo e visualização dos resultados), no caso de um painel frontal de um automóvel, reduziu-se de 50 dias em 1990 para 15 dias em 1994. Actualmente, um caso como este pode ser analisado em menos de uma semana [El Khaldi e Lambriks 2002]. Esta redução drástica deve-se em parte à evolução da tecnologia informática e, principalmente, ao enorme investimento na optimização dos algoritmos dos programas de simulação.

A indústria automóvel é das que mais tem contribuído para o desenvolvimento da simulação numérica do processo de estampagem. Esta indústria é actualmente confrontada com importantes desafios, para os quais a simulação numérica do processo de estampagem de chapas metálicas dá um contributo decisivo. O *design* dos veículos automóveis evoluiu, dando origem a concepções mais arrojadas, com superfícies de geometria complexa caracterizadas por bruscas variações de curvatura. Devido às exigências dos consumidores o ciclo de vida dos produtos é cada vez mais reduzido. Estes dois aspectos comportam dificuldades acrescidas para o projecto de novos produtos. Por um lado, existe uma pressão evidente na indústria automóvel para a produção de veículos cada vez mais seguros e mais eficientes do ponto de vista energético e ambiental. Por outro lado, a enorme quantidade de materiais disponíveis implica uma correcta optimização da sua aplicação, que passa obrigatoriamente por uma correcta modelação do seu comportamento mecânico e tribológico [Sinou e Macquaire 2003]. A indústria automóvel acordou com a Comissão da União Europeia uma redução para um valor médio de emissão de dióxido de carbono inferior a 140 gramas por quilómetro

(correspondente a 6 litros de gasolina aos 100 quilómetros), até 2008. O cumprimento destes requisitos passa, obrigatoriamente, por construir automóveis mais leves, mas que satisfaçam as exigências dos consumidores em termos de conforto, segurança, eficiência e custo. Para tal, é necessário recorrer a novos materiais como, por exemplo, as ligas de alumínio e os aços de elevada tensão limite de elasticidade. Deste modo é possível reduzir/controlar o peso, aumentando os níveis de segurança passiva. No entanto, a introdução de novos materiais reduz a base de experiência, criando novas dificuldades na concepção e desenvolvimento das ferramentas de estampagem. A conformação plástica dos novos materiais é mais complexa, exigindo um nível de precisão superior na definição dos parâmetros tecnológicos do processo. Também têm sido adoptadas inovações ao nível do processo tecnológico que introduzem novos requisitos à simulação do processo de estampagem. Por exemplo, a substituição da soldadura por pontos pela soldadura laser implica um maior controlo do fenómeno de retorno elástico uma vez que esta tecnologia de ligação exige tolerâncias mais apertadas [El Khaldi e Lambriks 2002].

A optimização baseada em técnicas de tentativa-erro é pouco precisa e dispendiosa pois exige a competência de engenheiros qualificados, durante longos períodos de tempo. Neste sentido, tem havido um crescente interesse no desenvolvimento de procedimentos automáticos de optimização do processo de estampagem. As tentativas de desenvolver uma ferramenta numérica que permita determinar automaticamente os parâmetros tecnológicos óptimos, tem seguido essencialmente duas estratégias: (i) a análise de sensibilidades e (ii) os algoritmos de optimização. Devido ao reduzido tempo de cálculo os métodos inversos<sup>1</sup> têm sido preferidos nesta área, em detrimento dos métodos incrementais. A essência dos métodos inversos é a simplificação dos fenómenos físicos, associados ao processo de estampagem. Neste tipo de análise, admite-se apenas como conhecida a geometria final do componente pretendido, de modo a obter a geometria inicial num tempo de cálculo muito reduzido. Os métodos inversos podem ser combinados com diferentes algoritmos de optimização, de acordo com a função objectivo pretendida como, por exemplo: (i) a optimização da sequência de estampagem, de modo a garantir uma peça final com uma espessura o mais uniforme possível; (ii) a optimização do esboço, de modo a minimizar o retorno elástico; (iii) a optimização do posicionamento e geometria dos freios, etc. [Batoz *et al.* 2000]. Os parâmetros tecnológicos “óptimos” do processo são determinados com a minimização da função objectivo, que é sujeita a um determinado número de restrições.

Um passo essencial para assegurar uma fase de teste das ferramentas completamente virtual é garantir que a simulação numérica preveja efectivamente os defeitos de estampagem, em particular os defeitos geométricos. A melhoria da capacidade dos programas de simulação, na previsão de defeitos geométricos, conduzirá a reduções no tempo de desenvolvimento, que beneficiarão todas as indústrias que recorrem às tecnologias de conformação plástica. Permitirá também, introduzir mais facilmente na produção industrial novos materiais ou chapas mais finas, contribuindo para a redução de desperdícios de matérias-primas e de consumo energético [Col 2001].

Actualmente, a simulação numérica do processo de estampagem permite prever a ocorrência de defeitos como a ruptura ou a formação de rugas, mas outros defeitos geométricos como o abaulamento, o empeno, as orelhas de estampagem e em particular os resultantes do fenómeno de retorno elástico, são ainda difíceis de prever

---

<sup>1</sup> Do Inglês: *Inverse Approach (One step methods)*.



numericamente, pelo menos dentro de tempos de computação considerados razoáveis em termos industriais [Kawka *et al.* 2001]. De facto, um dos aspectos que mais tem contribuído para dificultar a concepção virtual do componente estampado é o fenómeno de retorno elástico. Em teoria, o processo de estampagem é uma operação simples, em que uma chapa é deformada plasticamente para obter uma geometria não planificável. Na prática, inevitáveis flutuações nas dimensões do esboço, nas propriedades do material, nas condições de lubrificação e mesmo nas condições ambientais, tornam difícil a reprodutibilidade e previsão, deste tipo de processos. Para além disso, o fenómeno de retorno elástico contribui fortemente para dificultar a optimização das ferramentas de estampagem. Como a quantidade de energia de deformação elástica acumulada depende de inúmeros parâmetros, o retorno elástico é um fenómeno difícil de quantificar. A concepção final da geometria das ferramentas passa, obrigatoriamente, pela construção de protótipos que são iterativamente corrigidos. Na indústria automóvel, como resultado da incorrecta previsão do retorno elástico, a concepção de uma ferramenta pode envolver entre 5 a 10 iterações para obter uma geometria satisfatória [Narasimhan e Lovell 1999]. O retorno elástico tem sido alvo de intenso estudo nas últimas três décadas, tendo sido inicialmente estudado analiticamente para geometrias simples. O recurso à simulação numérica do processo de estampagem introduziu um maior conhecimento sobre o enorme conjunto de parâmetros que o influenciam, mas ainda não permite simplificar e esclarecer devidamente a sua análise.

A constante preocupação na avaliação de defeitos geométricos, em particular do retorno elástico, é bem patente na análise dos casos de estudo propostos ao longo das várias conferências NUMISHEET (*International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3-D Sheet Forming Processes*). Estes casos de estudo têm por objectivo avaliar o estado de arte, através da comparação entre resultados numéricos e experimentais, obtidos por diferentes instituições de todo o mundo. Nos casos de estudo propostos na conferência de 1993 pretendia-se avaliar a capacidade dos programas de simulação numérica de prever: (i) o retorno elástico bidimensional (*Benchmark 2D Bending Problem*); (ii) a ocorrência de defeitos geométricos do tipo rugas (*Benchmark Square Cup*) e (iii) a formabilidade para uma geometria complexa (*Benchmark Front Fender*). Na conferência de 2002 foram igualmente propostos três casos de estudo que pretendiam aferir a capacidade dos métodos numéricos na avaliação: (i) da influência da descrição do comportamento anisotrópico e a formação de rugas no embutido (*Benchmark Test A: Deep Drawing of a Cylindrical Cup*); (ii) da evolução das zonas de contacto e do retorno elástico (*Benchmark Test B: Unconstrained Cylindrical Bending*) e (iii) dos resultados associados a multi-processos (estampagem, corte, conformação da flange e retorno elástico) (*Benchmark Test C: Forming of Front Fender*).

A análise dos resultados dos casos de estudo propostos nas conferências NUMISHEET, reflecte os desafios actuais que se colocam à simulação numérica do processo de estampagem. As primeiras conferências caracterizaram-se por uma dispersão dos resultados numéricos, em consequência da imaturidade das diferentes formulações e estratégias adoptadas. Com a contínua evolução dos programas de simulação esta dispersão reduziu-se enormemente. Para ilustrar este facto apresentam-se na Figura 1.2 e na Figura 1.3 os resultados de deslizamento de uma aba de dois casos de estudo propostos nas conferências NUMISHEET em 1999 e 2002, respectivamente.

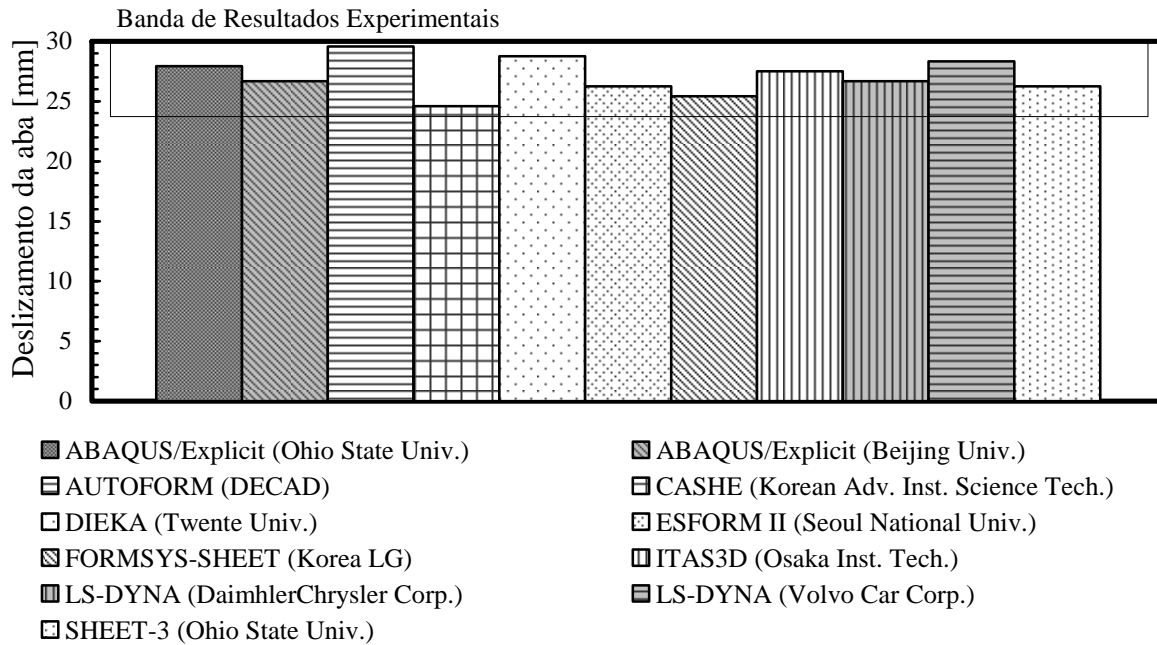


Figura 1.2 – Deslizamento da aba na direcção que faz um ângulo de 90° com a direcção de laminagem, para um aço macio: resultados obtidos para o *Benchmark B1: Limiting Drawing Height of a Cilyndrical Cup* [NUMISHEET'99].

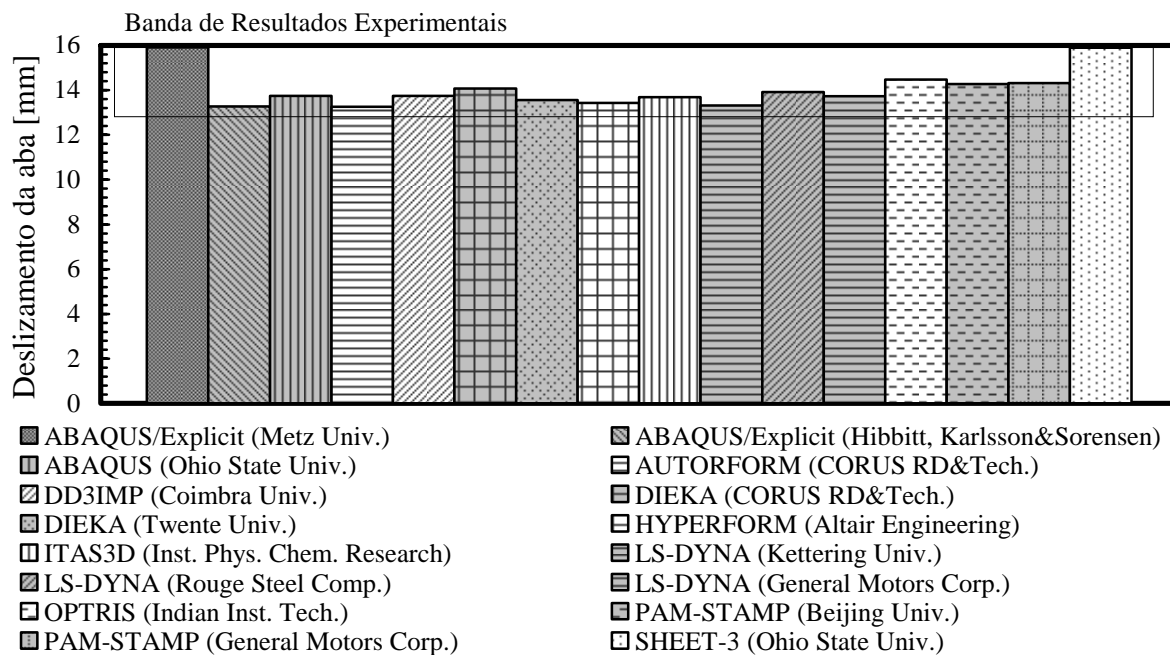


Figura 1.3 – Deslizamento da aba na direcção que faz para um ângulo de 90° com a direcção de laminagem, para um aço macio: resultados obtidos para o *Benchmark Test A: Deep Drawing of a Cylindrical Cup* [NUMISHEET'02].

Um pormenor a realçar nestas duas figuras refere-se ao aumento do número de participantes nos casos de estudo (da conferência de 1999 para a de 2002), acompanhado por uma redução do número efectivo de programas de simulação. Tal tendência é uma consequência da globalização, mas também resulta da crescente necessidade de programas que permitam a simulação de operações complexas, envolvendo várias fases de conformação, corte, conformação da flange, retorno elástico, etc. A título de exemplo,

após a realização da conferência de 2002 assistiu-se à fusão dos programas comerciais OPTRIS e PAM-STAMP, o que conduziu ao aparecimento do programa PAM-STAMP 2G.

O empenho dos participantes na apresentação de resultados rigorosos conduz ao recurso a parâmetros numéricos que distanciam os casos de estudo da prática industrial, na utilização dos programas de simulação [Makinouchi 1996]. No entanto, as pequenas variações obtidas para o mesmo programa de simulação numérica do processo de estampagem, permitem constatar a influência do parâmetro *utilizador*. Nas figuras anteriores constata-se que a redução da dispersão dos resultados numéricos tornou evidente a dispersão dos resultados experimentais, obtidos pelas diversas instituições participantes. Apesar dos programas utilizados recorrerem a formulações e estratégias numéricas distintas é difícil avaliar a robustez de cada proposta, uma vez que a banda de resultados experimentais abrange todos os resultados numéricos. Este facto impossibilita a comparação de estratégias e dificulta a determinação das vantagens reais das melhorias introduzidas na modelação do processo.

Das sucessivas conferências NUMISHEET realizadas, tornou-se evidente a necessidade de reunir um conjunto de resultados experimentais cuidados e precisos para conseguir avaliar a eficiência dos programas de simulação numérica de estampagem. Este foi um dos propósitos estabelecidos para o projecto de investigação 3DS (acrónimo de *Digital Die Design System*), projecto integrado no programa mundial IMS (*Industrial Manufacturing System*). A relevância e impacto económico dos objectivos definidos para o projecto 3DS justificam o número e tipo de parceiros envolvidos, realçando os desafios com que se confronta a simulação numérica do processo de estampagem de chapas metálicas. Este projecto reuniu um total de vinte parceiros: (i) sete universidades e institutos de investigação; (ii) parceiros da indústria automóvel (DaimlerChrysler, Volvo, Renault e Nissan); (iii) produtores de aço e alumínio (Sollac-Arcelor, Cockerill Sambre e Pechiney); (iv) empresas dedicadas ao projecto e fabrico de ferramentas de estampagem (por exemplo, Tsubamex, Press Kogyo e Comau-UTS) e (v) empresas dedicadas ao desenvolvimento de programas de simulação (ESI Group, Autoform Engineering GmbH e Famotik). Um dos parceiros institucionais do projecto 3DS foi a Universidade de Coimbra, integrada na área de desenvolvimento de programas de simulação do processo de estampagem, com o programa DD3IMP (contração de *Deep Drawing 3D IMPLICIT code*).

As três áreas de acção definidas para o projecto 3DS foram as seguintes: (i) avaliação e melhoria da capacidade dos programas de simulação numérica em prever defeitos geométricos; (ii) identificação e selecção dos modelos constitutivos para a descrição do comportamento mecânico e tribológico dos materiais e (iii) desenvolvimento de uma metodologia robusta para avaliação dos defeitos geométricos.

Para cumprir os objectivos da primeira área de acção definiram-se oito geometrias representativas do tipo de defeitos típicos do processo de estampagem: cinco perfis, um painel e duas peças axissimétricas (ver Figura 1.4). Cada geometria foi testada com cinco materiais diferentes, de utilização corrente na indústria automóvel: duas ligas de alumínio (uma da série 5000 e outra da série 6000) e três aços (um aço macio, um aço de alta resistência e um aço *dual-phase*<sup>1</sup>). Os ensaios experimentais foram realizados por vários laboratórios diferentes, com condições de processo muito bem definidas de modo a

---

<sup>1</sup> Adopta-se a expressão em inglês uma vez que a sua tradução não é consensual.

garantir a obtenção de resultados experimentais de referência de elevada reprodutibilidade.

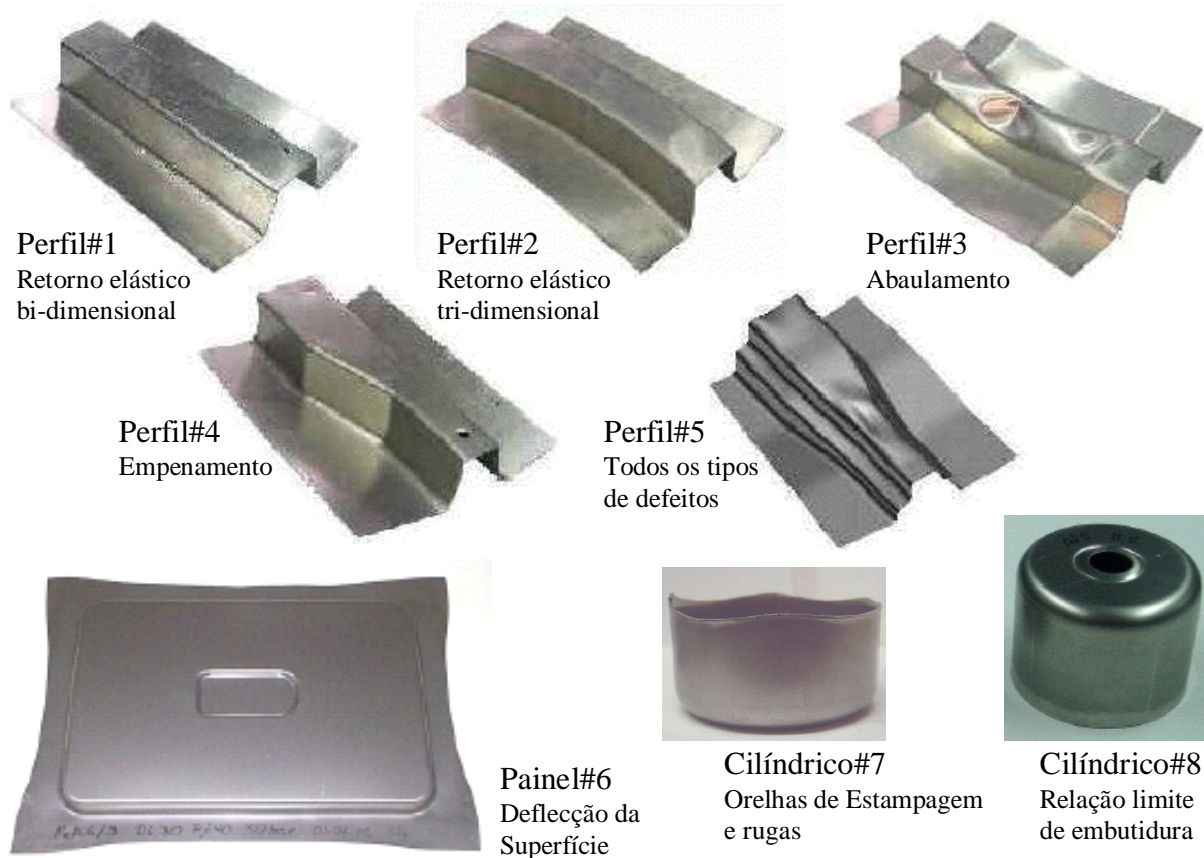


Figura 1.4 – Geometrias definidas no âmbito do projecto 3DS para avaliação dos diferentes tipos de defeitos geométricos associados ao processo tecnológico de estampagem de chapas metálicas.

A segunda área envolveu a caracterização do comportamento mecânico e tribológico dos materiais utilizados. Seleccionaram-se os modelos constitutivos mais relevantes e realizaram-se os ensaios mecânicos para identificação dos parâmetros constitutivos [LPMTM 2001]. Em relação à caracterização tribológica, realizou-se um vasto conjunto de ensaios experimentais para a determinação dos coeficientes de atrito a utilizar nas simulações [Wouters *et al.* 2002].

A terceira área procurou responder à dificuldade em quantificar as diferenças entre a geometria pretendida e a obtida experimentalmente ou por simulação. Devido à dificuldade em definir de modo claro e simples os defeitos de estampagem, não existe uma forma sistemática para a sua quantificação e representação. Numa tentativa de colmatar este problema foi desenvolvido, no âmbito do projecto 3DS, um programa de avaliação e quantificação de defeitos de estampagem, denominado *NXT Post Processor II*. A base deste programa é a comparação da superfície obtida, no final do processo de estampagem, com a superfície ideal de CAD pretendida (superfície nominal) [Kase *et al.* 1999]. Os defeitos de forma são avaliados comparando a superfícies nominal e efectiva. A superfície efectiva resulta da medição da peça obtida experimentalmente ou por simulação numérica. Na Figura 1.5 apresenta-se um exemplo de aplicação deste programa na análise do retorno elástico previsto para o Perfil #2 definido na Figura 1.4.

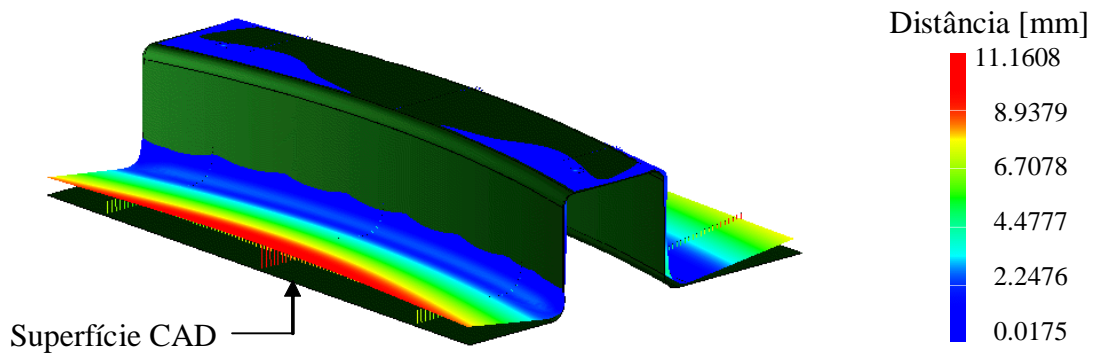


Figura 1.5 – Exemplo de utilização do programa NXT Post Processor II para avaliação do retorno elástico para o Perfil#2. A figura traduz a sobreposição da superfície nominal (CAD) com a superfície efectiva, obtida, neste caso, por simulação numérica.

## 1.2 Objectivos

A aplicação do método dos elementos finitos à simulação numérica do processo de estampagem de chapas metálicas evoluiu de modo significativo no decorrer dos últimos anos. No entanto, como se procurou realçar na secção anterior, existem velhos e novos desafios a superar. A maioria dos componentes científicos necessários para elaborar um programa de simulação de processos de conformação plástica necessitam de melhoramentos, de modo a aumentar a precisão e robustez do programa, reduzir o tempo de computação e as exigências em termos de memória necessária. Neste contexto, a análise do contacto com atrito é um elemento fulcral. O problema do contacto com atrito é, ainda, um dos de mais difícil resolução, em particular em modelos tridimensionais, em que o escorregamento relativo entre as duas superfícies pode ocorrer em várias direcções. Este tipo de problemas é caracterizado por descontinuidades geométricas e materiais na interface dos corpos em contacto, conduzindo a modelos não-lineares e muitas vezes descontínuos. A solução destes problemas envolve a utilização de métodos numéricos eficazes para a resolução de inequações variacionais e problemas de minimização sujeitos a restrições.

Na maioria dos processos de conformação plástica o contacto entre as ferramentas e o corpo deformável pode representar uma limitação ao processo, mas também a possibilidade de otimizar a sequência de conformação. Esta é a razão do enorme esforço que tem sido dispendido nesta área de investigação, na tentativa de determinar de modo correcto as interacções devidas ao contacto com atrito. A razão para que se continue a investigar a resolução de problemas de contacto com o auxílio do método dos elementos finitos reside no facto de, actualmente, não existir um método suficientemente versátil para que aplicado aos diferentes tipos de problemas em análise, seja sempre eficaz, óptimo e de fácil utilização. Para obter esse método de resolução, é necessário garantir que: (i) as restrições associadas ao contacto sejam sempre satisfeitas, independentemente da geometria das superfícies e das condições da análise; (ii) ele seja independente de parâmetros pré-definidos pelo utilizador e (iii) obedeça a certas condições matemáticas fundamentais como sejam a convergência e estabilidade da solução.

Com este trabalho pretende-se contribuir para o melhoramento dos modelos e algoritmos utilizados no tratamento e gestão do contacto com atrito. Neste contexto ao longo do trabalho foram exploradas quatro áreas distintas: (i) a descrição das ferramentas;

(ii) o algoritmo de detecção de contacto; (iii) o método de regularização do problema de contacto com atrito e (iv) o modelo de atrito. A definição dos objectivos deste trabalho compreende, igualmente, aspectos globais que contribuem para o aumento da robustez e eficiência numérica dos programas de simulação, essencial para ultrapassar as fortes não-linearidades do modelo mecânico e do problema de contacto com atrito. Incluem ainda, aspectos relacionados com a optimização da modelação mecânica do processo, de modo a garantir o rigor dos resultados obtidos.

O trabalho está enquadrado no desenvolvimento do programa de simulação numérica DD3IMP, dedicado à simulação numérica do processo de estampagem de chapas metálicas. Este programa é o resultado da actividade de investigação do Grupo de Tecnologia do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Coimbra na área da modelação e simulação numérica de processos de conformação por deformação plástica. Este grupo iniciou a sua actividade científica nesta área em 1988, com o objectivo de desenvolver um programa que permitisse simular os diferentes fenómenos associados ao processo de estampagem. O programa DD3IMP nasce em 1993, alicerçado numa série de importantes contribuições científicas, das quais se destacam Cao [1990], Ladreyt [1992], Heege [1992] e Menezes [1995].

### 1.3 O Programa DD3IMP

O programa DD3IMP adopta uma formulação lagrangeana reactualizada, que é a mais apropriada para lidar com as condições de fronteira evolutivas impostas pelo contacto com atrito. O modelo mecânico do programa baseia-se na teoria das grandes transformações. A grande fiabilidade deste modelo tem permitido a introdução de aspectos como a anisotropia [Teodosiu e Genevois 1988, Doege e Seydel 1988], o encruamento cinemático [Menezes *et al.* 2002] ou mesmo modelos de encruamento baseados na microestrutura dos materiais [Chaparro *et al.* 2004].

O programa DD3IMP apoia-se numa formulação *quasi*-estática. Assim, as equações de equilíbrio não contemplam quaisquer termos de inércia. O equilíbrio da estrutura em qualquer instante de cálculo é garantido através da utilização de um algoritmo de integração temporal implícito. Para definir as condições de fronteira, associadas ao processo de conformação plástica, é necessário determinar a superfície de contacto com as ferramentas. Para avaliar a superfície de contacto em cada instante, recorre-se às condições de Signorini, que definem as restrições impostas pelo contacto unilateral. Estas restrições ao movimento traduzem-se, matematicamente, por desigualdades que actuam como estrangimentos para o problema de optimização global. As desigualdades são difíceis de tratar e contribuem para a forte não-linearidade do modelo, pelo que é necessário recorrer a métodos numéricos robustos para a sua resolução. Na formulação implementada no programa DD3IMP recorre-se ao método do lagrangeano aumentado que permite reformular o problema de optimização, eliminando os estrangimentos [Alart e Curnier 1991]. O problema assim reformulado é resolvido com um algoritmo de integração temporal implícito, do tipo Newton-Raphson. O algoritmo implementado no programa DD3IMP, recorre a um único ciclo iterativo para resolver as não-linearidades resultantes do comportamento elastoplástico do material e do contacto com atrito.

A definição da geometria das ferramentas é um aspecto muito importante na modelação do processo de estampagem. No programa DD3IMP tira-se partido do facto de as propriedades mecânicas do corpo deformável e das ferramentas serem muito

distintas. Deste modo, é admissível considerar que o contacto ocorre entre um corpo deformável e um corpo rígido e, conseqüentemente, descrever as ferramentas com o auxílio de superfícies paramétricas. A geometria das ferramentas é determinada directamente a partir de um sistema de CAD, o que permite minimizar as etapas necessárias à sua definição.

A biblioteca de elementos finitos do programa DD3IMP contém elementos finitos sólidos, combinados com diferentes algoritmos de integração espacial [Menezes 1995, Alves e Menezes 2001]. Estes elementos finitos permitem o tratamento do contacto simultâneo nas duas faces sem ser necessário recorrer a quaisquer artifícios. Os elementos finitos sólidos permitem também calcular, sem recurso a nenhuma estratégia específica, os gradientes de tensão em espessura bem como a evolução de espessura da chapa ao longo do processo, sendo possível prever e visualizar instabilidades, como o aparecimento de estricção localizada [Menezes *et al.* 1991, Teodosiu *et al.* 1995].

Desde a sua génese que a estrutura do programa DD3IMP apresenta uma concepção modular, que torna possível a optimização independente dos diferentes algoritmos utilizados e confere ao programa uma grande versatilidade. Esta estrutura permite a fácil introdução de novas leis de comportamento ou de contacto com atrito, de outros elementos finitos ou mesmo de outras estruturas algorítmicas, como métodos de resolução de sistemas, algoritmos de gestão de contacto com atrito, etc. [Menezes 1995]. Esta versatilidade do programa constitui um dos seus grandes trunfos, pois permite a sua utilização como um laboratório de ensaio para diferentes estratégias. De facto, o programa tem sido continuamente aditado com novas estratégias numéricas [Menezes e Teodosiu 2000], novas leis de comportamento [Alves 2003], novas leis e estratégias de gestão de contacto com atrito [Oliveira *et al.* 2003].

O contínuo desenvolvimento do programa DD3IMP conduziu igualmente ao aparecimento de novos programas com o objectivo de o apoiar em diferentes áreas, dando assim origem à família de programas DD3. Para além do programa DD3IMP, esta família integra actualmente os programas DD3MAT (*Deep Drawing 3D MATerials parameters identification*), DD3OSS (*Deep Drawing 3D One Step Springback*), DD3LT (*Deep Drawing 3D Learning and Teaching*) e DD3TRIM (*Deep Drawing 3D TRIMming*).

O programa DD3MAT foi desenvolvido com o objectivo de determinar os parâmetros dos diferentes modelos constitutivos implementados no programa DD3IMP, a partir de resultados de ensaios mecânicos experimentais [Alves 2003, Alves *et al.* 2004].

O programa DD3OSS foi desenvolvido para simular as fases de retorno elástico num só incremento. Devido às suas enormes vantagens em termos de tempo de cálculo, funciona, actualmente, de forma completamente integrada no programa DD3IMP [Alves 2003, Oliveira *et al.* 2003a].

Um dos desafios que surge para o desenvolvimento da mecânica computacional é o seu ensino de forma atractiva à nova geração de engenheiros [Bathe 2004]. Neste contexto desenvolveu-se o programa DD3LT, que procura responder a este desafio e, ao mesmo tempo, alertar os estudantes de engenharia para os problemas associados à utilização menos avisada dos programas de simulação [Menezes *et al.* 2004]. O programa DD3LT é uma versão simplificada do programa DD3IMP, que procura colmatar as necessidades didácticas do ensino e da aprendizagem dos métodos de produção virtual, associados às tecnologias de estampagem de chapas metálicas.

O programa DD3TRIM foi desenvolvido para cortar malhas de elementos finitos, operação fundamental para poder simular multi-processos de conformação. Este



programa baseia-se num modelo numérico que envolve procedimentos de remoção de elementos, remalhagem, mapeamento das variáveis de estado das zonas afectadas pelo corte, e reequilíbrio do corpo deformável após a operação de corte [Baptista *et al.* 2004].

## 1.4 Guia de Leitura

Nesta dissertação enquadram-se os desenvolvimentos introduzidos no programa de simulação de processos de conformação de chapa DD3IMP, em particular os referentes à gestão do problema de contacto com atrito. Para facilitar a leitura, apresenta-se aqui um resumo da estrutura deste texto.

**Capítulo 1** – Enquadra-se o problema da simulação numérica do processo de estampagem, dando ênfase a aspectos tais como, os desafios tecnológicos e o interesse industrial. Definem-se e justificam-se os objectivos estabelecidos para o trabalho desenvolvido no âmbito desta tese.

**Capítulo 2** – Detalham-se as noções teóricas associadas à modelação mecânica dos processos de conformação por deformação plástica de materiais metálicos. Apresenta-se a descrição cinemática do problema em grandes transformações e formula-se a lei de comportamento elastoplástica. Enunciam-se as leis de encruamento e os critérios de plasticidade fenomenológicos disponíveis no programa DD3IMP. Descrevem-se as equações de equilíbrio do corpo deformável, associadas à formulação *quasi*-estática e as condições de fronteira clássicas. Formula-se o problema clássico de equilíbrio do corpo deformável. Enunciam-se as bases teóricas da formulação contínua do problema de contacto com atrito e descrevem-se as variáveis cinemáticas e estáticas que definem a interacção entre os corpos. Apresenta-se a formulação variacional do problema de contacto com atrito.

**Capítulo 3** – Introduzem-se as técnicas de discretização temporal e espacial adoptadas no programa DD3IMP. Em termos de integração temporal, apresenta-se o esquema de integração implícita, associado à formulação *quasi*-estática. Descreve-se o algoritmo iterativo de Newton-Raphson, implementado no programa, evidenciando as duas fases que o compõem: (i) a *Previsão* e (ii) a *Correcção*. Descreve-se o algoritmo de integração da lei de comportamento elastoplástica do material. Na secção dedicada à discretização espacial apresenta-se a biblioteca de elementos finitos e de métodos de integração utilizados no programa DD3IMP. Descreve-se a formulação do sistema de equações lineares resultante da discretização espacial do princípio das potências virtuais.

**Capítulo 4** – Apresentam-se os algoritmos de detecção de contacto que têm por base a descrição das ferramentas por superfícies paramétricas do tipo Bézier. Descrevem-se os algoritmos de pré-selecção das superfícies candidatas ao contacto. Discutem-se os resultados obtidos pelas diferentes estratégias na simulação numérica da conformação de um perfil curvo, bem como a sua influência no comportamento do algoritmo de detecção de contacto. Avalia-se o erro cometido pela utilização de superfícies de Bézier na descrição das superfícies das ferramentas.

**Capítulo 5** – Discutem-se alguns dos métodos mais utilizados para impor a condição de impenetrabilidade e a condição de contacto com atrito no âmbito do método dos elementos finitos, nomeadamente multiplicadores de Lagrange, penalidade,



lagrangeano perturbado e método de barreira. Apresenta-se o método do lagrangeano aumentado, utilizado na regularização do problema de contacto com atrito. Descreve-se a formulação variacional do problema de contacto com atrito que traduz um problema de optimização, sujeito a constrangimentos. Desenvolvem-se as matrizes tangentes associadas a cada estatuto de contacto. Apresenta-se o sistema de equações lineares global resultante da aplicação do método de Newton-Raphson e da linearização e discretização do princípio variacional. Descreve-se o tratamento e redução associados à construção de um sistema de equações lineares global reduzido, cujas incógnitas são apenas os deslocamentos, bem como o método utilizado na sua resolução. No final, tecem-se alguns comentários acerca da convergência do método iterativo utilizado.

**Capítulo 6** – Optimiza-se o parâmetro de penalidade de modo a reduzir as instabilidades numéricas associadas ao método do lagrangeano aumentado e a minimizar a sensibilidade que a velocidade de convergência do algoritmo implícito apresenta em relação a este parâmetro. Para isso utilizam-se duas estratégias distintas. A primeira admite um único parâmetro de penalidade para controlar a condição de impenetrabilidade e de contacto com atrito. O seu valor é no entanto variável ao longo do processo iterativo, para cada nó potencial de contacto. No âmbito desta estratégia, discutem-se dois algoritmos para a selecção automática do parâmetro de penalidade variável. Um baseia-se apenas na força normal de contacto. O outro considera a força e a distância normais de contacto. A segunda estratégia admite parâmetros de penalidade diferentes para controlar as restrições associadas ao contacto unilateral e ao atrito. Esta hipótese obriga à reformulação do operador de contacto com atrito e, conseqüentemente, do sistema de equações lineares global reduzido. A eficiência dos algoritmos propostos é testada no programa DD3IMP. Apresentam-se resultados referentes a um teste elementar, que considera um ensaio de compressão e um teste mais complexo, que corresponde à conformação de uma taça quadrada.

**Capítulo 7** – Descreve-se uma lei empírica de evolução do coeficiente de atrito bem como a sua implementação no programa DD3IMP. A lei de atrito evolutiva seleccionada considera como variável interna a pressão de contacto. Para o seu cálculo é necessário avaliar a área de contacto associada a cada nó da malha de elementos finitos. Propõem-se duas funções distintas para a determinação da área de contacto. Avalia-se a influência da lei de atrito evolutiva nos resultados numéricos da conformação de um perfil U. Neste estudo analisam-se parâmetros relacionados com as solicitações mecânicas na fase de conformação, os perfis obtidos após retorno elástico e a sensibilidade ao refinamento de malha e tempo de cálculo.

**Capítulo 8** – Apresentam-se estudos numéricos que evidenciam a importância de uma correcta modelação das condições de processo da conformação real. Avalia-se a influência da estratégia seleccionada para a simulação da fase de retorno elástico, recorrendo ao deslocamento ou remoção das ferramentas e descreve-se o programa DD3OSS. Analisa-se a definição das ferramentas a força imposta, avaliando a influência da sua distribuição e evolução ao longo do processo de conformação, em parâmetros como, por exemplo, a evolução da força do punção e a geometria final do componente. Realiza-se um estudo referente à descrição do comportamento elastoplástico do material no qual se avaliam as diferenças induzidas em parâmetros

como as solicitações mecânicas na fase de conformação, o retorno elástico e as tensões residuais. Analisa-se a influência do deslocamento do punção, do valor da força de aperto do cerra-chapas e da distribuição assimétrica da força exercida pelo cerra-chapas, no nível de retorno elástico obtido nas simulações.

**Capítulo 9** – Apresentam-se as principais conclusões resultantes dos diferentes estudos apresentados e discutidos ao longo da dissertação. Indicam-se algumas perspectivas de trabalho futuro.

Incluem-se neste texto quatro anexos, nos quais se apresentam alguns desenvolvimentos matemáticos relevantes.

**Anexo A** – Descreve-se a notação, nomenclatura e siglas utilizadas no presente trabalho. As definições são agrupadas em notações algébricas, operadores e funções, sub-índices e super-índices, simbologia relacionada com a mecânica dos meios contínuos, com os modelos de comportamento e propriedades dos materiais, com a mecânica do contacto, com a descrição das ferramentas, com a discretização em elementos finitos, com os métodos numéricos e, finalmente, faz-se a descrição de siglas e abreviaturas utilizadas.

**Anexo B** – Apresentam-se alguns desenvolvimentos matemáticos associadas ao método do lagrangeano aumentado. Estes conduzem à determinação do operador de contacto com atrito e da matriz jacobiana, associada a cada estatuto de contacto. Descrevem-se os desenvolvimentos necessários para a determinação do sistema de equações lineares global misto e reduzido em função do estatuto de contacto de cada nó da malha de elementos finitos.

**Anexo C** – Detalha-se a aproximação utilizada na elaboração dos algoritmos de determinação automática do parâmetro de penalidade variável, em cada nó potencial de contacto.

**Anexo D** – Procede-se a desenvolvimentos idênticos aos apresentados no Anexo B, admitindo que o parâmetro de penalidade que controla a condição de impenetrabilidade é distinto do parâmetro de penalidade que controla a condição de atrito. Esta distinção impede o recurso a algumas simplificações e introduz alguns termos suplementares no sistema de equações lineares global reduzido.

**Anexo E** – Apresentam-se tabelas resumo de propriedades mecânicas dos materiais utilizados nas simulações realizadas.

## Capítulo 2

# Modelo Mecânico

*Introduzem-se as noções teóricas associadas à modelação mecânica dos processos de conformação por deformação plástica de chapas metálicas.*

*Apresenta-se a descrição cinemática dos meios contínuos em grandes transformações, adoptando uma formulação lagrangeana reactualizada e formula-se a lei de comportamento elastoplástica.*

*Apresentam-se as bases teóricas necessárias para a formulação contínua do problema de contacto com atrito. Introduzem-se as variáveis cinemáticas e estáticas que permitem a definição das leis de contacto e de atrito.*

*Descreve-se a formulação variacional do problema de contacto com atrito.*

---

### 2.1 Enquadramento

A simulação numérica de um processo de conformação por deformação plástica envolve a deformação macroscópica de um corpo deformável, que é geralmente considerado um meio contínuo. Para modelar a deformação de um meio contínuo é necessário estabelecer o conjunto de equações que definem as relações entre as diferentes variáveis que influenciam a configuração do corpo deformável. Esta configuração deve obedecer aos princípios de conservação de massa, energia e movimento característicos de todos os processos termo-mecânicos. O conjunto de equações estabelece o modelo mecânico do problema. As equações que o constituem podem ser divididas em dois grupos: (i) as equações de equilíbrio e condições de fronteira e (ii) as equações que descrevem a lei de comportamento do material. O primeiro grupo garante o equilíbrio do meio contínuo, compatível com as condições de fronteira a que está sujeito. O segundo grupo estabelece a relação entre os estados de tensão e de deformação, associados à configuração de equilíbrio. Este grupo é usualmente designado por modelo constitutivo do material.

O modelo constitutivo caracteriza o comportamento do material sujeito a um determinado conjunto de condições de fronteira. No caso dos materiais metálicos a deformação pode ser dividida em duas fases distintas. A primeira fase corresponde a um comportamento linear entre a tensão e a deformação. A deformação é designada por elástica uma vez que, eliminado o carregamento que a origina, a geometria inicial do corpo deformável é recuperada. A segunda fase é caracterizada por ocorrer também deformação plástica (irreversível) do material. No caso específico das chapas metálicas, devido ao processo de laminagem a que são sujeitas durante a sua produção, o comportamento mecânico é caracterizado pela anisotropia de propriedades. Este comportamento anisotrópico pode ser simplificado para ortotrópico, uma vez que a chapa apresenta três planos de simetria de propriedades, mutuamente ortogonais em cada ponto material. O comportamento ortotrópico induz fenómenos específicos num processo de conformação por deformação plástica, pelo que a sua correcta modelação requer um

modelo constitutivo do material que contemple este tipo de comportamento [Yoon *et al.* 1999, Geng e Wagoner 2002, Li *et al.* 2003].

Nos primeiros anos de utilização do método dos elementos finitos para a análise de processos de conformação por deformação plástica, foi dado particular ênfase a aspectos relacionados com a formulação e a eficiência computacional. À medida que estes aspectos foram sendo melhor entendidos, e o método utilizado num maior conjunto de aplicações, começaram a surgir questões relacionadas com a validade e limitações dos modelos constitutivos utilizados. Os últimos anos têm sido profícuos no desenvolvimento de modelos constitutivos, mais ou menos complexos, que podem ser divididos em três grupos distintos. O primeiro grupo é constituído pelos modelos fenomenológicos. Estes baseiam-se na premissa de que o comportamento plástico do material pode ser descrito apenas com base em observações macroscópicas. Os modelos fenomenológicos recorrem a equações analíticas que aproximam curvas de comportamento determinadas a partir de resultados de ensaios experimentais. O segundo grupo contempla os modelos que têm por base os mecanismos de deformação plástica de monocristais. Estes modelos permitem avaliar o comportamento de um policristal à escala macroscópica, através de relações específicas de cada modelo. No entanto, os cálculos envolvidos na passagem da escala microscópica para a macroscópica tornam a utilização destes modelos nos programas de simulação numérica com elementos finitos muito dispendiosa, em termos de tempo de cálculo. O terceiro grupo envolve a aproximação de uma função analítica a resultados de ensaios experimentais, à semelhança dos modelos fenomenológicos. A diferença reside no facto de os vários parâmetros da função de aproximação traduzirem a contribuição dos mecanismos de deformação microestruturais para o comportamento macroscópico do material [Hu *et al.* 1998]. Este grupo de modelos, normalmente designados por modelos microestruturais, permite combinar as vantagens dos dois anteriores. Ou seja, os parâmetros da função de aproximação podem ser determinados com o auxílio de resultados obtidos de ensaios experimentais e de modelos baseados nos mecanismos de deformação plástica de monocristais. Nessas circunstâncias, os modelos microestruturais aplicados à simulação de processos de conformação por deformação plástica conduzem ainda a tempos de cálculo inaceitáveis, apesar de serem substancialmente mais económicos que os modelos baseados nos mecanismos de deformação de monocristais [Duchene *et al.* 2002]. Por esta razão, os modelos fenomenológicos continuam a ser os modelos constitutivos mais utilizados na simulação numérica por elementos finitos de processos de conformação por deformação plástica, apesar das suas limitações na descrição do comportamento elastoplástico dos materiais.

A simulação numérica do processo de estampagem de chapas metálicas envolve, igualmente, a modelação do contacto que se estabelece entre a chapa metálica a conformar e as ferramentas. O fenómeno do contacto é essencial para o estudo de sistemas compostos por corpos que interagem entre si. Os corpos entram ou não em contacto entre si em função do seu movimento, mas nunca podem ocupar a mesma posição no espaço. Esta condição de impenetrabilidade traduz-se, em termos de formulação matemática, por desigualdades sobre as variáveis que descrevem a interacção dos dois corpos em cada instante. A condição de impenetrabilidade é uma condição unilateral, mais difícil de manipular matematicamente do que as condições bilaterais, que são traduzidas por igualdades. Associado à condição de contacto surge o fenómeno físico do atrito. Na simulação numérica do processo de estampagem de chapas metálicas este é normalmente definido com a lei de atrito de Coulomb, à qual estão igualmente associadas

condições unilaterais. A noção de atrito seco, ou de Coulomb, baseado num único coeficiente de atrito, traduz apenas de forma aproximada a complexidade deste fenómeno, que depende de variáveis mais ou menos mensuráveis (rugosidade, temperatura, pressão, etc.). No entanto, permite descrever um vasto conjunto de situações reais com o mínimo de informação [Alart 1993].

Os problemas que envolvem contacto com atrito são bastante complexos, quer do ponto de vista teórico, quer do ponto de vista numérico. Caracterizam-se por descontinuidades geométricas e materiais na interface onde se estabelece o contacto, não se observando a propriedade de continuidade, tradicional dos problemas de mecânica dos meios contínuos. Os problemas de contacto com atrito são intrinsecamente não-lineares, envolvendo inequações variacionais e minimização sujeita a constrangimentos. Neste contexto, podem ser identificadas duas questões distintas na modelação e simulação deste tipo de problemas. A primeira questão está relacionada com o desenvolvimento de um modelo mecânico e de uma formulação matemática que caracterize o comportamento dos corpos em contacto, quando sujeitos a grandes deformações e escorregamento. De modo a evitar a desproporção entre um tratamento sofisticado para o interior dos corpos e uma modelação grosseira para a interface onde se estabelece o contacto, é essencial uma teoria consistente que integre o contacto com atrito na formulação clássica da mecânica dos meios contínuos. A segunda questão está relacionada com a resolução matemática do modelo estabelecido. O modelo deve ser desenvolvido de um ponto de vista contínuo, ou seja, as equações que governam o problema para grandes deformações devem ser estabelecidas sem ter em conta as técnicas numéricas utilizadas na sua resolução. Por outro lado, a formulação desenvolvida deve ser válida para duas ou três dimensões, e independente da discretização por elementos finitos [Pietrzak e Curnier 1999]. Para problemas elásticos, envolvendo pequenas deformações, uma formulação rigorosa dos constrangimentos impostos pelo contacto pode ser encontrada, por exemplo, na monografia de [Kikuchi e Oden 1988]. Para problemas envolvendo grandes deformações as primeiras formulações contínuas do problema de contacto com atrito surgem com os trabalhos de [Alart e Curnier 1991, Simo e Laursen 1992].

Em suma, a modelação dos processos de conformação por deformação plástica, conduz a problemas bastante complexos, devido às não-linearidades das leis de comportamento, à presença de grandes deformações elastoplásticas e à evolução temporal das condições de contacto com atrito. O modelo mecânico deverá ter em conta estes aspectos, de modo a garantir uma representação correcta do problema em estudo.

## 2.2 Mecânica dos Meios Contínuos

A resolução de um problema que envolve grandes deformações passa por determinar a distribuição espacial e temporal das variáveis que caracterizam o corpo deformável. Isto é, conhecida a configuração do corpo deformável no instante inicial  $C_0$ , o objectivo é determinar a configuração posterior  $C$ , associada a um instante  $t$ . Para descrever o movimento do corpo deformável é necessário estabelecer as relações cinemáticas entre estas configurações. Para isso, podem ser consideradas duas descrições cinemáticas. Na descrição euleriana, ou espacial, as únicas variáveis independentes são a configuração corrente  $C$ , e o instante de tempo correspondente. Esta descrição é particularmente apropriada para problemas estacionários, uma vez que o observador ocupa uma posição fixa no espaço. Em oposição, na descrição lagrangeana, o observador acompanha o

movimento do material. Nesta descrição consideram-se variáveis independentes a configuração inicial  $C_0$  e o instante de tempo  $t$ . Esta definição corresponde à descrição lagrangeana total, que admite que a configuração inicial corresponde sempre ao instante de tempo em que teve início o processo de deformação. Esta descrição revela-se apropriada para problemas não-estacionários, mas em que ocorrem pequenas alterações às condições de fronteira. Para problemas não-estacionários caracterizados por fortes alterações das condições de fronteira, recomenda-se o recurso à descrição lagrangeana reactualizada. Nesta descrição actualiza-se sistematicamente a configuração inicial, de modo que a configuração final  $C$ , associada ao instante  $t$ , é tida como configuração inicial para um instante de tempo posterior  $t + \Delta t$ . Por esta razão, na descrição lagrangeana reactualizada  $C_0$  designa-se por configuração de referência.

Na modelação do processo de estampagem de chapas metálicas opta-se por uma formulação lagrangeana reactualizada, uma vez que esta é a mais apropriada para lidar com a evolução das condições de contacto com atrito [Cao 1990]. O modelo mecânico baseia-se na teoria das grandes transformações, de modo a contemplar as grandes deformações e rotações que ocorrem durante o processo.

### 2.2.1 Relações Cinemáticas

Para estabelecer as relações cinemáticas que descrevem o movimento do corpo deformável considera-se que este ocupa, no instante de tempo  $t_0$ , uma região do espaço  $\Omega_0$ . Este domínio espacial associa-se à configuração de referência, designada por  $C_0$ . Num instante posterior  $t$ , o corpo passa a ocupar um domínio espacial  $\Omega$ , associado a uma nova configuração  $C$ , denominada configuração corrente. Na configuração  $C_0$  qualquer ponto material  $\mathcal{A}$ , pertencente ao corpo deformável, é definido pelo seu vector de posição,  $\mathbf{x}_0$ . Na configuração  $C$  o mesmo ponto tem um vector de posição  $\mathbf{x}$ . Este vector depende da posição ocupada pelo ponto material na configuração de referência e do instante de tempo, ou seja,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ . O deslocamento sofrido pelos pontos materiais que definem o corpo deformável, da configuração  $C_0$  para a configuração  $C$ , é descrito pelo campo vectorial de deslocamento  $\mathbf{u}$ , tal que

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0. \quad (2.1)$$

O campo de velocidades é definido por

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t}. \quad (2.2)$$

O gradiente da transformação entre a configuração de referência e a configuração corrente define-se do seguinte modo:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_0} + \mathbf{I}. \quad (2.3)$$

Este gradiente corresponde à transformação finita de  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{x}$ , isto é, define o movimento local do meio contínuo e permite definir a deformação local, na vizinhança do ponto material. Ao campo de velocidades definido na equação (2.2) pode associar-se um gradiente de velocidade  $\mathbf{L}$ , que é definido por

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}. \quad (2.4)$$

Como o corpo deformável apresenta um comportamento elastoplástico, é conveniente distinguir a contribuição elástica e plástica do gradiente da transformação,  $\mathbf{F}$ . Para tal, define-se a uma nova configuração local, designada por configuração relaxada  $C^R$ . Esta é obtida a partir da configuração corrente  $C$ , por relaxação total das tensões de natureza elástica [Teodosiu 1989, Cao 1990]. A cada ponto material na configuração  $C^R$  associa-se um vector de posição, designado por  $\mathbf{x}^R$ . Define-se então a deformação elástica como a deformação de  $C$  em relação a  $C^R$ , e a deformação plástica como a deformação de  $C^R$  em relação a  $C_0$ , isto é:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}^e d\mathbf{x}^R \quad \text{e} \quad d\mathbf{x}^R = \mathbf{F}^p d\mathbf{x}_0. \quad (2.5)$$

Na expressão anterior  $\mathbf{F}^e$  e  $\mathbf{F}^p$  designam as componentes elástica e plástica do gradiente da transformação, respectivamente. A introdução da configuração relaxada  $C^R$ , esquematizada na Figura 2.1, permite definir a decomposição multiplicativa do gradiente da transformação  $\mathbf{F}$ , dada pela expressão

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p. \quad (2.6)$$

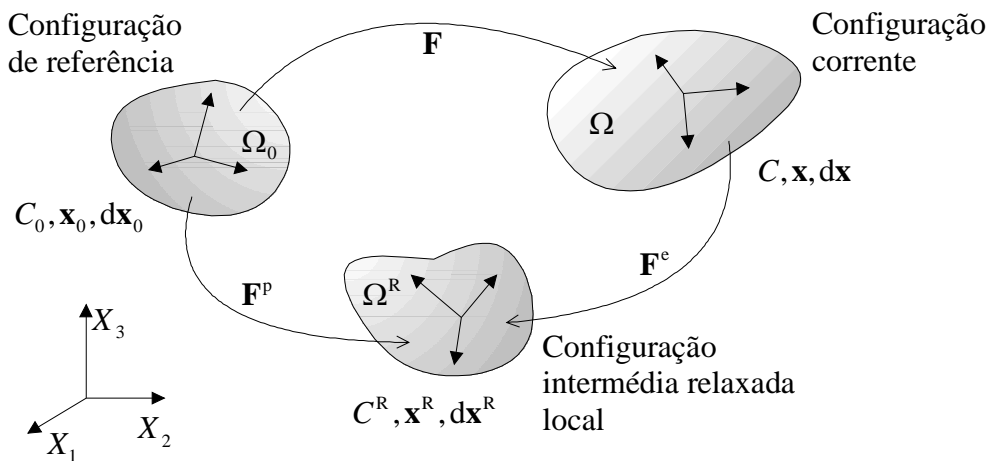


Figura 2.1 – Representação esquemática da decomposição multiplicativa do gradiente da transformação  $\mathbf{F}$  nas suas partes elástica,  $\mathbf{F}^e$ , e plástica,  $\mathbf{F}^p$ .

O gradiente de velocidade  $\mathbf{L}$ , definido na equação (2.4), pode ser igualmente decomposto em partes elástica e plástica:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^p = \left[ \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{e-1} \right] + \left[ \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1} \mathbf{F}^{e-1} \right]. \quad (2.7)$$

A componente elástica do gradiente da transformação pode ser decomposta numa rotação seguida de deformação, ou *vice-versa*. Esta decomposição, designada de polar, pode ser escrita na forma

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{V} \mathbf{R}. \quad (2.8)$$

A decomposição polar define dois novos tensores.  $\mathbf{V}$  é um tensor de deformação simétrico definido positivo.  $\mathbf{R}$  é um tensor ortogonal de rotação elástica, ou seja, que verifica as seguintes propriedades  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$  e  $\det \mathbf{R} = 1$ .

Na conformação por deformação plástica a frio de chapas metálicas é admissível considerar que a transformação elástica  $\mathbf{F}^e$  gera pequenas deformações, quando comparadas com a unidade, embora possam ocorrer grandes rotações [Cao 1990]. Com base nesta hipótese o tensor de deformação  $\mathbf{V}$  pode ser decomposto do seguinte modo:

$$\mathbf{V} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad \text{em que} \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}^e\| \ll 1. \quad (2.9)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^e$  é o tensor das deformações elásticas. Introduzindo a decomposição polar enunciada em (2.8) na definição do gradiente da velocidade, dada pela equação (2.7), obtém-se

$$\mathbf{L}^e = \dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T\mathbf{V}^{-1} \quad \text{e} \quad \mathbf{L}^p = \dot{\mathbf{V}}\mathbf{R}\dot{\mathbf{F}}^p\mathbf{F}^{p-1}\mathbf{R}^T\mathbf{V}^{-1}. \quad (2.10)$$

Admitindo a hipótese da decomposição do tensor  $\mathbf{V}$ , apresentada na expressão (2.9), e desprezando em  $\mathbf{L}^p$  os termos de ordem  $\|\boldsymbol{\varepsilon}^e\|$ , e em  $\mathbf{L}^e$  os termos de ordem  $\|\boldsymbol{\varepsilon}^e\|^2$ , resulta que

$$\mathbf{L}^e = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \quad \text{e} \quad \mathbf{L}^p = \mathbf{R}\dot{\mathbf{F}}^p\mathbf{F}^{p-1}\mathbf{R}^T. \quad (2.11)$$

$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  é a derivada temporal objectiva de  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ , calculada com a velocidade associada à rotação elástica  $\mathbf{R}$ , ou seja:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^e\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T - \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T\boldsymbol{\varepsilon}^e. \quad (2.12)$$

O gradiente da velocidade  $\mathbf{L}$  pode ser igualmente decomposto numa parte simétrica  $\mathbf{L}^s = \mathbf{D}$ , designada velocidade de deformação, e numa parte anti-simétrica  $\mathbf{L}^a = \mathbf{W}$ , correspondente à velocidade de rotação, isto é,

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^s + \mathbf{L}^a = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \quad (2.13)$$

em que:

$$\mathbf{D} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{R}\left(\dot{\mathbf{F}}^p\mathbf{F}^{p-1}\right)^s\mathbf{R}^T \quad \text{e} \quad \mathbf{W} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\left(\dot{\mathbf{F}}^p\mathbf{F}^{p-1}\right)^a\mathbf{R}^T. \quad (2.14)$$

Para cada um dos tensores  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{W}$  podem distinguir-se as componentes elástica e plástica. A velocidade de deformação elástica ( $\mathbf{D}^e$ ) e plástica ( $\mathbf{D}^p$ ), são definidas por

$$\mathbf{D}^e = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{e} \quad \mathbf{D}^p = \mathbf{R}\left(\dot{\mathbf{F}}^p\mathbf{F}^{p-1}\right)^s\mathbf{R}^T. \quad (2.15)$$

A velocidade de rotação elástica ( $\mathbf{W}^e$ ) e plástica ( $\mathbf{W}^p$ ) são definidas por:

$$\mathbf{W}^e = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \quad \text{e} \quad \mathbf{W}^p = \mathbf{R}\left(\dot{\mathbf{F}}^p\mathbf{F}^{p-1}\right)^a\mathbf{R}^T. \quad (2.16)$$

Na conformação de chapas metálicas finas é admissível considerar que as solicitações de corte na direcção perpendicular ao plano da chapa são pouco significativas [Teodosiu e Genevois 1988, Menezes 1995]. Esta hipótese permite assumir que a velocidade de rotação plástica é desprezável em relação à velocidade de rotação elástica ( $\mathbf{W}^p \approx \mathbf{0}$ ). Assim, de acordo com as definições anteriores, a velocidade de rotação é dada por

$$\mathbf{W} \approx \mathbf{W}^e = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T. \quad (2.17)$$

Consequentemente, a derivada temporal objectiva  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , reduz-se à derivada objectiva de Jaumann de  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ , designada por  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^J$ , e definida por

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^J = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^e\mathbf{W} - \mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon}^e. \quad (2.18)$$

A definição da velocidade de rotação, apresentada na expressão (2.17), permite avaliar a evolução da rotação elástica com o tempo, através da expressão:

$$\dot{\mathbf{R}} = (\mathbf{W} - \mathbf{W}^p)\mathbf{R} \approx \mathbf{W}\mathbf{R}. \quad (2.19)$$

Para quantificar a deformação recorre-se ao gradiente da transformação para definir o tensor  $\mathbf{C}$  das deformações de Cauchy-Green à direita



$$\mathbf{C} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T, \quad (2.20)$$

ou ao tensor  $\mathbf{E}$  das deformações de Green-Lagrange

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T - \mathbf{I}). \quad (2.21)$$

Ambos os tensores permitem descrever a deformação do ponto material  $\mathcal{A}$ , com base na configuração de referência  $C_0$ .

### 2.2.2 Lei de Comportamento Elastoplástica

As relações cinemáticas apresentadas na secção anterior permitem avaliar o estado de deformação da chapa metálica ao longo do processo de conformação. Porém, para simular o processo de conformação é igualmente indispensável estabelecer uma relação entre os estados de tensão e de deformação, ou seja, definir um modelo constitutivo. O modelo constitutivo elastoplástico adoptado assume o comportamento elástico como isotrópico e o plástico como anisotrópico.

No caso específico dos processos que envolvem grandes transformações, como é o caso da estampagem de chapas metálicas, a lei de comportamento deve ser invariante com a mudança do referencial de observação, ou seja, deve obedecer ao princípio da objectividade ou da indiferença material [Sidoroff 1981]. A extensão do formalismo de pequenas deformações às grandes deformações permite garantir a objectividade da lei de comportamento através da introdução de um referencial associado ao corpo em deformação, no qual se formula a lei de comportamento em pequenas deformações. O princípio da objectividade será satisfeito desde que a lei seja formulada no referencial associado à configuração relaxada  $C^R$  [Sidoroff 1981]. O tensor das tensões  $\boldsymbol{\sigma}$  é redefinido nesta configuração com o auxílio do tensor de rotação elástica  $\mathbf{R}$ , através da operação de rotação seguinte:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}. \quad (2.22)$$

$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  é um tensor lagrangeano em termos da sua orientação, tendo como valores próprios as tensões principais, uma vez que resulta da rotação de  $\boldsymbol{\sigma}$  [Menezes 1995]. Do mesmo modo, outros tensores podem ser rodados para a configuração relaxada. A rotação do tensor velocidade de deformação resulta em

$$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R} = \hat{\mathbf{D}}^e + \hat{\mathbf{D}}^p, \quad (2.23)$$

em que:

$$\hat{\mathbf{D}}^e = \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \mathbf{R}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^J \mathbf{R} \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{D}}^p = \left( \dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1} \right)^S = \dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1}. \quad (2.24)$$

Para descrever o comportamento elástico é necessário definir a lei que traduz a transformação entre a configuração relaxada  $C^R$  e a configuração corrente  $C$ . Dado o carácter incremental da deformação plástica a lei de comportamento plástica deve ser formulada em velocidade. Para facilitar o acoplamento entre a componente plástica e a componente elástica é preferível recorrer a uma lei de comportamento hipoeelástica, igualmente definida em termos de velocidades [Simo 1985]. Esta lei, escrita na configuração relaxada, tem a seguinte forma:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} = \hat{\mathbf{C}}^e : \hat{\mathbf{D}}^e = \hat{\mathbf{C}}^e : \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^e. \quad (2.25)$$

$\hat{\mathbf{C}}^e$  é o tensor de quarta ordem das constantes elásticas, definido na configuração relaxada  $\mathbf{C}^R$ . Atendendo à relação (2.18), a formulação hipoeelástica da lei de comportamento de Hooke pode ser escrita na configuração corrente  $\mathbf{C}$  como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J = \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^J. \quad (2.26)$$

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J$  é a derivada objectiva de Jaumann do tensor  $\boldsymbol{\sigma}$ , definida como

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W} - \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}. \quad (2.27)$$

Atendendo a que se assume que o comportamento elástico é isotrópico, o tensor das constantes elásticas resulta invariante com a rotação. Assim, é válida a relação

$$\mathbf{C}^e = \hat{\mathbf{C}}^e = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{I}_4. \quad (2.28)$$

$\lambda$  e  $\mu$  são os coeficientes de Lamé,  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade de segunda ordem e  $\mathbf{I}_4$  é o tensor identidade de quarta ordem, definido por  $I_{ijkl} = 1/2(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ . O módulo elástico pode ser reescrito como

$$\mathbf{C}^e = \hat{\mathbf{C}}^e = 2G \left\{ \mathbf{I}_4 + \frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right\}, \quad (2.29)$$

em que  $G$  é o módulo de elasticidade transversal e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

Para descrever o comportamento plástico é necessário definir: (i) uma lei de plasticidade; (ii) um critério de plasticidade e (iii) uma lei de encruamento. O critério de plasticidade e a lei de encruamento permitem a definição da superfície de plasticidade ou limite de elasticidade. A superfície de plasticidade define a condição de carregamento plástico com o auxílio de uma função  $\mathcal{F}$ , que depende da tensão equivalente  $\bar{\sigma}$  e do estado de encruamento do material,  $Y$ . Assim, pode ser modelada através de uma função  $\mathcal{F}$ , tal que

$$\mathcal{F}(\bar{\sigma}, Y) = \bar{\sigma} - Y = 0. \quad (2.30)$$

A superfície de plasticidade definida no espaço das tensões, corresponde a todos os estados de tensão cuja tensão equivalente é igual ao valor da tensão limite de elasticidade em tracção uniaxial  $Y$ . A tensão limite de elasticidade em tracção uniaxial (por vezes designada de tensão de escoamento em tracção uniaxial) evolui com a história da deformação. A evolução da superfície é tal que o ponto representativo do carregamento é sempre definido sobre ela. Este facto é traduzido pela condição de coerência, que impõe que a derivada temporal de  $\mathcal{F}$  seja nula, isto é,

$$\dot{\mathcal{F}}(\bar{\sigma}, Y) = 0. \quad (2.31)$$

A definição de tensão limite de elasticidade em tracção uniaxial  $Y$  depende da lei de encruamento adoptada. Considere-se que a evolução do encruamento isotrópico pode ser descrita com o auxílio de um parâmetro escalar genérico  $h$ . Assim, a tensão limite de elasticidade é uma função do tipo

$$Y = Y(h). \quad (2.32)$$

A definição da tensão equivalente  $\bar{\sigma}$  depende do critério de plasticidade adoptado. No entanto, será sempre função do tensor das tensões efectivo  $\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}$  e dos parâmetros de anisotropia, aqui designados genericamente por  $\alpha_i$ . O tensor das tensões inversas<sup>1</sup>,  $\mathbf{X}$ , é um tensor de segunda ordem, simétrico e desviador. A sua definição depende da lei de

<sup>1</sup> Do Inglês: *Back stress tensor*.

encruamento cinemático seleccionada. Atendendo à condição de incompressibilidade plástica, pode considerar-se que o critério de plasticidade depende apenas da componente desviadora do tensor  $\boldsymbol{\sigma}$ , designada por  $\boldsymbol{\sigma}'$ . Assim, a tensão equivalente,  $\bar{\sigma}$ , pode ser definida como uma função destes parâmetros, isto é

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}, \alpha_i). \quad (2.33)$$

As chapas laminadas apresentam, geralmente, ortotropia plástica inicial. Admite-se que durante o processo de conformação o comportamento ortotrópico se mantém e que os eixos de ortotropia rodam com velocidade  $\mathbf{W}$ . Atendendo à hipótese de anulação da velocidade de rotação plástica (ver equação (2.17)), os eixos de ortotropia são coincidentes com o referencial da configuração relaxada local,  $C^R$  [Teodosiu 1989]. Por esta razão, a formulação da superfície de plasticidade resulta mais simples se efectuada na configuração relaxada local. Consequentemente,

$$\mathcal{F}(\bar{\sigma}, Y) = \bar{\sigma}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}' - \hat{\mathbf{X}}, \hat{\alpha}_i) - Y(h) = 0. \quad (2.34)$$

A definição da superfície de plasticidade no espaço das tensões permite determinar a condição de carregamento de um ponto material, uma vez que este será:

$$\text{Elástico se: } \mathcal{F} < 0 \text{ ou } (\mathcal{F} = 0 \text{ e } \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\hat{\boldsymbol{\sigma}}' - \hat{\mathbf{X}})} : (\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}' - \dot{\hat{\mathbf{X}}}) \leq 0); \quad (2.35)$$

$$\text{Plástico se: } \mathcal{F} = 0 \text{ e } \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\hat{\boldsymbol{\sigma}}' - \hat{\mathbf{X}})} : (\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}' - \dot{\hat{\mathbf{X}}}) > 0. \quad (2.36)$$

No modelo constitutivo adoptado considera-se que a lei de plasticidade é associada. Esta abordagem, adequada à descrição do comportamento mecânico de materiais metálicos, impõe que a função utilizada para determinar a velocidade de deformação plástica (potencial plástico  $\mathcal{G}$ ), seja igual à função utilizada para descrever a superfície de plasticidade  $\mathcal{F}$ . Admitindo então que  $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ , o tensor velocidade de deformação plástica é determinado por

$$\hat{\mathbf{D}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(\hat{\boldsymbol{\sigma}}' - \hat{\mathbf{X}})} = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial(\hat{\boldsymbol{\sigma}}' - \hat{\mathbf{X}})}, \quad (2.37)$$

que impõe que, no espaço das tensões, o vector velocidade de deformação plástica é sempre normal à superfície de plasticidade no ponto de carregamento.  $\dot{\lambda}$  é um valor escalar designado por multiplicador plástico.

De modo a simplificar a expressão (2.37), introduz-se a grandeza tensorial auxiliar  $\hat{\mathbf{V}}$ , definida por [Alves 2003]

$$\hat{\mathbf{V}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial(\hat{\boldsymbol{\sigma}}' - \hat{\mathbf{X}})}. \quad (2.38)$$

O tensor  $\hat{\mathbf{V}}$  depende directamente do critério de plasticidade adoptado. Deste modo, o tensor velocidade de deformação plástica é dado por

$$\hat{\mathbf{D}}^p = \dot{\lambda} \hat{\mathbf{V}}. \quad (2.39)$$

A evolução da superfície limite de elasticidade está associada ao encruamento do material. A expansão da superfície de plasticidade é modelada por uma lei de encruamento isotrópico. A translação da superfície de plasticidade é modelada por uma

lei de encruamento cinemático. O parâmetro escalar  $h$ , que caracteriza o encruamento isotrópico (equação (2.34)), pode ser definido como sendo a deformação plástica equivalente  $\bar{\varepsilon}^p$ , uma vez que esta é uma propriedade intrinsecamente plástica do material. A deformação plástica equivalente é definida por

$$\bar{\varepsilon}^p = \int_0^t \dot{\varepsilon}^p dt, \quad (2.40)$$

em que:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{(\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\mathbf{X}}) : \hat{\mathbf{D}}^p}{\bar{\sigma}}. \quad (2.41)$$

Nestas circunstâncias, é possível demonstrar que [Cao 1990]

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda}. \quad (2.42)$$

A partir da definição da superfície de plasticidade, e impondo a condição de coerência (equação (2.31)), obtém-se

$$\dot{\mathcal{F}}(\bar{\sigma}, Y) \dot{\bar{\sigma}} - H' \dot{\varepsilon}^p = 0, \quad (2.43)$$

em que:

$$H' = \partial Y / \partial \bar{\varepsilon}^p \quad (2.44)$$

se designa por módulo de encruamento isotrópico. O encruamento cinemático é considerado no modelo constitutivo através do tensor das tensões inversas  $\hat{\mathbf{X}}$  (ver equação (2.34)).

A relação entre os estados de tensão e deformação que caracteriza a formulação elastoplástica pode ser apresentada na forma seguinte [Menezes 1995]

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J = \mathbf{C}^{ep} : \mathbf{D}. \quad (2.45)$$

Nesta expressão,  $\mathbf{C}^{ep}$  é o módulo elastoplástico na configuração  $C$ , cuja determinação depende dos algoritmos utilizados para a integração da lei de comportamento e do tipo de relação considerada entre os estados inicial e final do incremento de carga.  $\mathbf{C}^{ep}$  pode ser determinado a partir do módulo elastoplástico na configuração  $C^R$ , através da relação

$$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{R} \left( \mathbf{R} \hat{\mathbf{C}}^{ep} \mathbf{R}^T \right) \mathbf{R}^T. \quad (2.46)$$

O módulo elastoplástico tangente permite relacionar a velocidade de tensão e de deformação, independentemente da relação entre os estados da configuração de referência,  $C_0$  e corrente,  $C$ . Na configuração relaxada local  $C^R$  o módulo elastoplástico tangente pode ser definido como [Alves 2003]

$$\hat{\mathbf{C}}^{ep} \Big|_{tangente} = \mathbf{C}^e - \alpha f_0 \hat{\mathbf{V}} \otimes \hat{\mathbf{V}}. \quad (2.47)$$

Na expressão anterior, o parâmetro  $\alpha$  toma o valor zero se o material estiver em regime elástico ou em descarga. Se o material estiver em carregamento elastoplástico  $\alpha$  toma o valor um. O parâmetro  $f_0$  depende da lei de encruamento cinemático adoptada e  $\hat{\mathbf{V}}$  depende do critério de plasticidade e da lei de encruamento isotrópico.

Na simulação numérica de processos de conformação por deformação plástica de chapas metálicas, o modelo constitutivo mais utilizado para a descrição do comportamento elastoplástico do material recorre ao critério de anisotropia de Hill'48 e a uma lei de potência para a descrição do encruamento. Tipicamente, as constantes destas leis são identificadas a partir de resultados experimentais provenientes de ensaios de

tracção, realizados segundo diferentes orientações dos provetes em relação à direcção de laminagem. No entanto, durante uma operação de estampagem de chapa, as solicitações nem sempre correspondem a condições de tensão uniaxial, podendo inclusive ocorrer mudanças de trajectória de deformação durante o processo. Deste modo, o recurso a uma simples lei de potência não é suficiente para descrever correctamente o encruamento do material durante o processo de estampagem [Teodosiu e Hu 1998]. Para garantir uma correcta avaliação de variáveis tais como a evolução da força de estampagem, o retorno elástico ou as tensões residuais, o modelo constitutivo tem de conseguir prever o comportamento do material em situações que envolvem mudanças de trajectória, deformação localizada e ruptura prematura após mudanças de trajectória ortogonais. Uma forma de melhorar a descrição da evolução da superfície de plasticidade inicial consiste na utilização de variáveis internas adicionais que procuram descrever fenómenos microscópicos como, por exemplo, a evolução da estrutura de deslocações no interior do cristal. Esta abordagem permite a definição de um modelo de evolução de encruamento anisotrópico, de que é exemplo o modelo microestrutural de Teodosiu e Hu [1998].

### 2.2.2.1 Leis de Encruamento

No programa DD3IMP estão actualmente disponíveis quatro leis de encruamento isotrópico (lei de Swift, lei de Voce, Modelo microestrutural de Teodosiu completo e Modelo microestrutural de Teodosiu simplificado) e duas leis de encruamento cinemático (lei de Prager e lei de Lemaître e Chaboche) [Alves 2003].

No caso da lei de Swift, a função  $Y = Y(\bar{\varepsilon}^p)$  é dada por

$$Y_{\text{Swift}}(\bar{\varepsilon}^p) = C(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p)^n, \quad (2.48)$$

em que  $C$ ,  $\varepsilon_0$  e  $n$  são parâmetros do material e podem ser obtidos a partir de resultados experimentais de ensaios mecânicos. A lei de Swift é adequada para descrever o comportamento de materiais que apresentam encruamento isotrópico sem saturação até à rotura, e encruamento cinemático desprezável. Este comportamento é típico de alguns aços macios. Neste caso, o valor do módulo de encruamento isotrópico é dado por

$$H'_{\text{Swift}} = Cn(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p)^{n-1}. \quad (2.49)$$

Para a lei de Voce tem-se que

$$Y_{\text{Voce}}(\bar{\varepsilon}^p) = Y_0 + (Y_{\text{sat}} - Y_0) \left[ 1 - \exp(-C_Y \bar{\varepsilon}^p) \right], \quad (2.50)$$

em que  $Y_0$ ,  $Y_{\text{sat}}$  e  $C_Y$  são parâmetros do material. Estes parâmetros podem ser obtidos a partir de resultados experimentais de ensaios mecânicos. A lei de Voce é adequada para descrever o comportamento de materiais que apresentam encruamento isotrópico com saturação, e encruamento cinemático desprezável. Este comportamento é típico de algumas ligas de alumínio. O módulo de encruamento isotrópico é definido por

$$H'_{\text{Voce}} = C_Y (Y_{\text{sat}} - Y_0) \exp(-C_Y \bar{\varepsilon}^p). \quad (2.51)$$

No modelo microestrutural de Teodosiu completo, a função  $Y = Y(\bar{\varepsilon}^p)$  é dada por:

$$Y_{\text{TeodosiuC}} = Y_0 + R + f \left\| \hat{\mathbf{S}} \right\|. \quad (2.52)$$

$Y_0$  é a tensão limite de elasticidade inicial e  $f$  é um parâmetro material, que traduz a contribuição da estrutura persistente de deslocações para o encruamento isotrópico ( $0 \leq f \leq 1$ ).  $R$  é um valor escalar que descreve o encruamento isotrópico cuja evolução é dada por uma expressão análoga à lei de Voce

$$\dot{R} = C_R (R_{\text{sat}} - R_0) \bar{\varepsilon}^p \quad \text{com} \quad R(0) = 0. \quad (2.53)$$

Na expressão anterior  $C_R$  e  $R_{\text{sat}}$  são parâmetros do material. Na equação (2.52)  $\mathbf{S}$  é um tensor de quarta ordem, que descreve a resistência da estrutura persistente de deslocações, que se desenvolve durante a deformação. Este tensor pode ser decomposto em duas contribuições,  $\mathbf{S}_L$  e  $S_D$ , tal que,

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_L + S_D \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}. \quad (2.54)$$

$\mathbf{S}_L$  está associado à componente latente da estrutura persistente de deslocações.  $S_D$  representa a resistência associada às deslocações dos sistemas de escorregamento activos definida por

$$S_D = \mathbf{N} : \mathbf{S} : \mathbf{N}. \quad (2.55)$$

O tensor  $\mathbf{N}$ , que intervém também na definição de  $\mathbf{S}$ , é a direcção do tensor velocidade de deformação plástica  $\mathbf{D}^p$ . Na configuração relaxada local, o tensor  $\mathbf{N}$  corresponde à norma do tensor  $\hat{\mathbf{V}}$ ,  $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{V}} / \|\hat{\mathbf{V}}\|$ .

As leis de evolução de  $\mathbf{S}_L$  e  $S_D$  são dadas por

$$\dot{\mathbf{S}}_L = -C_{SL} \left( \frac{\|\mathbf{S}_L\|}{S_{\text{sat}}} \right)^n \mathbf{S}_L \dot{\varepsilon}^p, \quad (2.56)$$

$$\dot{S}_D = C_{SD} \left[ g(S_{\text{sat}} - S_D) - h S_D \right] \dot{\varepsilon}^p, \quad (2.57)$$

em que  $C_{SL}$ ,  $S_{\text{sat}}$ ,  $n$  e  $C_{SD}$  são parâmetros do material.  $g$  é uma função que descreve a influência da polaridade da estrutura persistente de deslocações sobre  $S_D$ , sendo dada por

$$g = \begin{cases} 1 - \frac{C_P}{C_P + C_{SD}} \left| \frac{S_D}{S_{\text{sat}}} - P_D \right| & \text{se } P_D \geq 0 \\ (1 + P_D)^{n_p} \left[ 1 - \frac{C_P}{C_P + C_{SD}} \frac{S_D}{S_{\text{sat}}} \right] & \text{se } P_D < 0, \end{cases} \quad (2.58)$$

em que  $n_p$  é um parâmetro do material e  $P_D = \mathbf{P} : \mathbf{N}$ , onde  $\mathbf{P}$  é um tensor associado à polaridade da estrutura persistente de deslocações, cuja lei de evolução é definida por:

$$\dot{\mathbf{P}} = C_P (\mathbf{N} - \mathbf{P}) \dot{\varepsilon}^p \quad \text{com} \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{0}. \quad (2.59)$$

$C_P$  é um parâmetro do material que caracteriza a taxa de polarização de estrutura persistente de deslocações [Teodosiu e Hu 1998].

Na expressão (2.57) o termo  $h$  é uma função que descreve a variação suave de  $S_D$ , que ocorre imediatamente após inversão de trajectória de deformação. Esta função é definida por:

$$h = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\mathbf{X} : \mathbf{N}}{X_{\text{sat}} (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}) : \mathbf{N}} \bar{\sigma} \right]. \quad (2.60)$$

A lei de evolução do tensor das tensões inversas  $\mathbf{X}$  é dada por

$$\dot{\mathbf{X}} = C_X \left[ \frac{X_{\text{sat}}}{\bar{\sigma}} (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}) - \mathbf{X} \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad \text{com} \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{0}, \quad (2.61)$$

em que  $C_X$  é um parâmetro do material. O termo  $X_{\text{sat}}$  é função da estrutura persistente de deslocamentos através da variável interna  $\mathbf{S}$ , sendo a sua evolução definida por

$$X_{\text{sat}} = X_0 + (1-f) \sqrt{r \|\mathbf{S}\|^2 + (1-r) S_D^2}, \quad (2.62)$$

em que  $X_0$  e  $r$  são parâmetros do material.

Após alguma manipulação matemática é possível definir o módulo de encruamento do modelo microestrutural de Teodosiu completo na seguinte forma:

$$H'_{\text{TeodosiuC}} = C_R (R_{\text{sat}} - R_F) + \frac{f}{\|\hat{\mathbf{S}}_I\|} \left\{ C_{\text{SD}} \left[ g_F (S_{\text{sat}} - S_{D_F}) - h_F S_{D_F} \right] S_{D_F} - C_{\text{SL}} \left( \frac{\|\hat{\mathbf{S}}_{L_F}\|}{S_{\text{sat}}} \right)^n \|\hat{\mathbf{S}}_{L_F}\|^2 \right\}. \quad (2.63)$$

Os índices I e F referem-se a grandezas definidas nas configurações inicial e final, respectivamente, para um incremento de tempo arbitrário  $N$ . A expressão apresentada é deduzida admitindo que o valor da variável de estado  $\mathbf{S}$  permanece constante durante o incremento. De facto, a evolução da variável de estado  $\mathbf{S}$  é muito lenta [Teodosiu e Hu 1998, Bouvier *et al.* 2005]. Assim, para incrementos de tempo suficientemente pequenos, pode assumir-se que em cada incremento  $\mathbf{S}$  é constante e igual ao seu valor no início do incremento. Adicionalmente, admite-se que a direcção normal à superfície de plasticidade,  $\hat{\mathbf{N}}$ , é igualmente constante [Alves 2003].

Resumindo, o modelo microestrutural de Teodosiu completo envolve treze parâmetros materiais:  $Y_0$ ,  $f$ ,  $C_R$ ,  $R_{\text{sat}}$ ,  $C_{\text{SL}}$ ,  $S_{\text{sat}}$ ,  $n$ ,  $C_{\text{SD}}$ ,  $C_P$ ,  $n_p$ ,  $C_X$ ,  $X_0$  e  $r$ , que são determinados a partir de resultados experimentais de ensaios mecânicos.

O modelo microestrutural de Teodosiu completo pode ser simplificado para materiais que não são sensíveis à direccionalidade das estruturas persistentes de deslocamentos, como é o caso das ligas de alumínio. Nestas circunstâncias, elimina-se o tensor  $\mathbf{P}$ , associado à polaridade da estrutura persistente de deslocamentos. O tensor  $\mathbf{S}$  é substituído pelo escalar  $S$ . Deste modo, a função  $Y$  para o modelo microestrutural de Teodosiu simplificado é dada por

$$Y_{\text{TeodosiuS}} = Y_0 + R + fS. \quad (2.64)$$

As leis de evolução de  $R$  e de  $\mathbf{X}$  são as mesmas que no modelo completo (equações (2.53) e (2.61), respectivamente). A lei de evolução da variável  $X_{\text{sat}}$  assume a forma seguinte:

$$X_{\text{sat}} = X_0 + (1-f)S. \quad (2.65)$$

A lei de evolução da variável escalar  $S$  é agora dada por

$$\dot{S} = C_S (S_{\text{sat}} - S) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad \text{com} \quad S(0) = 0, \quad (2.66)$$

em que  $C_S$  é um parâmetro do material. O módulo de encruamento isotrópico é definido por:

$$H'_{\text{TeodosiuS}} = C_R (R_{\text{sat}} - R_F) + fC_S (S_{\text{sat}} - S_F). \quad (2.67)$$

A versão simplificada do modelo microestrutural de Teodosiu compreende oito parâmetros determinados a partir de resultados de ensaios experimentais:  $Y_0$ ,  $f$ ,  $C_R$ ,  $R_{\text{sat}}$ ,  $S_{\text{sat}}$ ,  $C_S$ ,  $C_X$  e  $X_0$ . A determinação dos parâmetros do material associados ao modelo microestrutural de Teodosiu envolve a realização de ensaios mecânicos de tracção e corte monótonos, Bauschinger e ensaios com mudanças de trajectória ortogonais [LPMTM 2001]. A lei de Swift e de Voce exigem apenas a realização de ensaios mecânicos de tracção.

Caso se opte por utilizar apenas leis de encruamento isotrópico (ver equações (2.48) e (2.50)), o parâmetro  $f_0$ , do módulo elastoplástico tangente (equação (2.47)), é definido por:

$$f_0 = \frac{4\mu^2}{2\mu\hat{\mathbf{V}} : \hat{\mathbf{V}} + H'} \quad (2.68)$$

Porém, as duas leis de encruamento isotrópico podem ser combinadas com leis de encruamento cinemático. A lei de Prager descreve, de forma linear, a evolução do encruamento cinemático com o tensor velocidade de deformação plástica, através da equação:

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}} = k\hat{\mathbf{D}}^p \quad (2.69)$$

$k$  é um parâmetro do material. Neste caso o parâmetro  $f_0$  é definido por

$$f_0|_{\text{Prager}} = \frac{4\mu^2}{(k + 2\mu)\hat{\mathbf{V}} : \hat{\mathbf{V}} + H'} \quad (2.70)$$

A outra lei de encruamento cinemático disponível no programa DD3IMP é a lei proposta por Lemaître e Chaboche [1985], dada pela expressão

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}} = C_X \left[ \frac{X_{\text{sat}}}{\bar{\sigma}} (\hat{\boldsymbol{\sigma}}' - \hat{\mathbf{X}}) - \hat{\mathbf{X}} \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad \text{com} \quad \hat{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{0}, \quad (2.71)$$

onde  $C_X$  e  $X_{\text{sat}}$  são duas constantes do material. Nestas circunstâncias, o parâmetro  $f_0$  é definido por:

$$f_0|_{\text{LeC, TeodosiuC, TeodosiuS}} = \frac{4\mu^2}{2\mu\hat{\mathbf{V}} : \hat{\mathbf{V}} + C_X \hat{\mathbf{V}} : \left[ \frac{X_{\text{sat}}}{\bar{\sigma}} (\hat{\boldsymbol{\sigma}}' - \hat{\mathbf{X}}) + \hat{\mathbf{X}} \right] + H'} \quad (2.72)$$

Esta última definição é igualmente válida para o modelo microestrutural de Teodosiu completo e simplificado, uma vez que a lei de evolução da variável  $\mathbf{X}$  é idêntica.

### 2.2.2.2 Critérios de Plasticidade

Actualmente estão disponíveis no programa DD3IMP cinco critérios de plasticidade anisotrópicos: (i) Hill'48, (ii) Barlat'91, (iii) Drucker +L, (iv) Karafillis e Boyce'93 e (v) Cazacu e Barlat 2001. Como o único critério de plasticidade utilizado posteriormente nos exemplos de estudo é o critério de Hill'48, de seguida apresenta-se de forma sucinta as expressões mais relevantes, bem como os parâmetros materiais necessários à sua caracterização<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Para mais detalhes acerca dos outros critérios disponíveis e sua implementação no programa DD3IMP, recomenda-se a consulta de [Alves 2003].



O critério de plasticidade proposto por Hill em 1948 é uma generalização para materiais ortotrópicos do critério isotrópico de von Mises. No referencial de ortotropia,  $Oxyz$ , o critério é definido por:

$$F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{xz}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 = Y^2. \quad (2.73)$$

$F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $L$ ,  $M$  e  $N$  são os parâmetros de anisotropia. Estes podem ser condensados num tensor simétrico de quarta ordem,  $\mathbf{M}$ , de forma que a expressão (2.73) pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M} : \boldsymbol{\sigma} = Y^2. \quad (2.74)$$

Os parâmetros de anisotropia permitem definir o tensor inicial de ortotropia  $\hat{\mathbf{M}}$ . O tensor  $\mathbf{M}$  pode ser determinado para qualquer instante, recorrendo à expressão:

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}(\hat{\mathbf{M}}\mathbf{R}^T)\mathbf{R}^T. \quad (2.75)$$

Para o critério de Hill'48 a tensão equivalente  $\bar{\sigma}$  é definida na configuração relaxada local pela expressão:

$$\bar{\sigma}|_{\text{Hill'48}} = \sqrt{(\hat{\boldsymbol{\sigma}}' - \hat{\mathbf{X}}) : \hat{\mathbf{M}} : (\hat{\boldsymbol{\sigma}}' - \hat{\mathbf{X}})}, \quad (2.76)$$

O tensor  $\hat{\mathbf{V}}$  (equação (2.38)) é determinado pela expressão

$$\hat{\mathbf{V}}|_{\text{Hill'48}} = \frac{\hat{\mathbf{M}} : (\hat{\boldsymbol{\sigma}}' - \hat{\mathbf{X}})}{\bar{\sigma}}. \quad (2.77)$$

O critério de Hill'48 é o mais utilizado na simulação de processos de estampagem uma vez que: (i) descreve adequadamente a anisotropia inicial da chapa; (ii) aplica-se a qualquer estado de tensão e (iii) é simples de implementar. A determinação dos parâmetros de anisotropia envolve a realização de três ensaios de tracção uniaxial, em que o eixo de sollicitação faz  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $90^\circ$  com a direcção de laminagem. Com os dados resultantes destes ensaios determinam-se os coeficientes de anisotropia,  $r_0$ ,  $r_{45}$  e  $r_{90}$ . Estes permitem a definição de

$$F = \frac{H}{r_{90}}, \quad G = \frac{1}{r_0 + 1}, \quad H = r_0 G \quad \text{e} \quad N = \frac{1}{2} \frac{(r_0 + r_{90})(2r_{45} + 1)}{r_{90}(r_0 + 1)}. \quad (2.78)$$

No caso específico de chapas metálicas não é possível a determinação experimental dos parâmetros de anisotropia  $L$  e  $M$ . Estes podem ser considerados iguais a  $N$ , o que corresponde a admitir tensões limite de elasticidade ao corte idênticas para os planos  $Oxy$ ,  $Oxz$  e  $Oyz$ . Alternativamente  $L$  e  $M$  podem ser considerados iguais a 1,5, valor que corresponde à situação de isotropia.

O critério de Hill'48 ajusta-se ao comportamento mecânico de aços mas, principalmente, a materiais que apresentem um valor médio dos coeficientes de anisotropia  $\bar{r}$  superior a 1, em que

$$\bar{r} = \frac{1}{4}(r_0 + 2r_{45} + r_{90}). \quad (2.79)$$

De facto, para valores de  $\bar{r}$  inferiores a 1, o critério de Hill'48 conduz a estimativas para a tensão de tracção biaxial inferiores às determinadas experimentalmente. É por essa razão que têm sido desenvolvidos outros critérios aplicáveis às ligas de alumínio. Estas ligas caracterizam-se por apresentarem valores do coeficiente de anisotropia médios

inferiores a 1. Stoughton [2002] advoga que este mau comportamento do critério de Hill'48 resulta do facto de considerar uma lei de plasticidade associada. Consta que o comportamento dos materiais viola a condição imposta pela lei de plasticidade associada, para valores de  $\bar{r}$  inferiores a 1.

A utilização de critérios de plasticidade fenomenológicos mais complexos reveste-se da dificuldade acrescida na determinação dos parâmetros constitutivos. A determinação dos parâmetros de anisotropia de cada critério pode ser realizada minimizando uma função de erro, que avalia a aproximação aos resultados obtidos de ensaios experimentais. Esta é a estratégia utilizada no programa DD3MAT. O facto de alguns dos parâmetros de anisotropia não estarem directamente associados a propriedades físicas, dificulta a interpretação dos resultados obtidos da sua optimização. Os valores dos parâmetros constitutivos podem ser fortemente influenciados pelo conjunto de valores experimentais considerados na sua determinação [Alves 2003, Alves *et al.* 2003].

### 2.2.3 Equações de Equilíbrio e Condições de Fronteira

Considere-se que o corpo deformável ocupa o domínio  $\Omega$  de fronteira  $\Sigma$ . No instante  $t$ ,  $\Omega$  está submetido a forças exteriores volúmicas, a forças exteriores de superfície na fronteira  $\Sigma_1$  e apresenta deslocamentos prescritos na fronteira  $\Sigma_2$ . O equilíbrio dinâmico de  $\Omega$  é dado pela equação

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \mathbf{a} \quad \text{em} \quad \Omega, \quad (2.80)$$

e pelas condições de fronteira seguintes:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^* \quad \text{em} \quad \Sigma_1, \quad (2.81)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* \quad \text{em} \quad \Sigma_2, \quad (2.82)$$

$$\text{com} \quad \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2. \quad (2.83)$$

Em que  $\operatorname{div}$  é o operador divergente,  $\rho$  é a massa volúmica,  $\mathbf{f}$  é o vector de força volúmica por unidade de massa,  $\mathbf{a}$  é o vector aceleração,  $\mathbf{t}$  é o vector tensão de Cauchy e  $\mathbf{v}$  é o vector velocidade. Uma vez que as forças de superfície são prescritas em  $\Sigma_1$ , o seu valor é conhecido e igual a  $\mathbf{t}^*$ . Ao impor um deslocamento prescrito em  $\Sigma_2$ , a velocidade torna-se conhecida e igual  $\mathbf{v}^*$ . Definindo a normal exterior à superfície  $\Sigma$  por  $\mathbf{n}$ , então o vector tensão de Cauchy é tal que

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}. \quad (2.84)$$

No caso específico dos processos de conformação de chapas metálicas, as forças volúmicas (forças de gravidade) e de inércia podem ser desprezadas. Tal conduz a uma formulação *quasi*-estática do processo, para a qual a equação de equilíbrio se reduz a

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{em} \quad \Omega. \quad (2.85)$$

É conveniente realçar que, nos processos de conformação de chapas metálicas, a fronteira  $\Sigma$ , e em particular as suas componentes  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , evoluem ao longo do tempo [Menezes 1995]. De facto, as componentes da fronteira  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  dependem directamente das condições de contacto entre o corpo deformável e as ferramentas utilizadas no processo.

### 2.2.4 Formulação Variacional do Problema Clássico

A formulação diferencial do problema de equilíbrio do sólido deformável, apresentada na equação (2.80), é de difícil resolução. Assim, adopta-se uma formulação variacional que tem por base o princípio das potências virtuais e que se revela apropriada à aplicação do método dos elementos finitos. Na formulação variacional do problema, o corpo está em equilíbrio *se e só se*, para todo o campo de velocidade virtual  $\delta \mathbf{v}$  definido sobre  $\Omega$ , se verificar

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D} d\Omega = \int_{\Sigma_1} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{v} d\Sigma_1, \quad (2.86)$$

sendo que  $\delta \mathbf{v}$  tem que respeitar as condições de fronteira prescritas, ou seja:

$$\delta \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{em} \quad \Sigma_2. \quad (2.87)$$

Na equação (2.86)  $\delta \mathbf{D}$  é o tensor velocidade de deformação virtual, definido por

$$\delta \mathbf{D} = \frac{1}{2} \left[ \delta \mathbf{L} + (\delta \mathbf{L})^T \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(\delta \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial(\delta \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right]. \quad (2.88)$$

A formulação variacional do problema de equilíbrio apresentada na equação (2.86) é designada por formulação “fraca”, uma vez que diminui o grau de diferenciabilidade exigido ao campo de velocidade  $\mathbf{v}$ . Por outro lado, nesta formulação apenas é necessário conhecer o campo de tensão e não o seu gradiente, como é exigido na formulação diferencial.

A formulação variacional apresentada na equação (2.86) é formulada em relação ao domínio ocupado pelo corpo deformável no instante de tempo  $t$ , ou seja, na configuração corrente. Assim, a equação (2.86) representa a forma euleriana do princípio das potências virtuais. No caso específico da conformação de chapas metálicas recomenda-se a utilização deste princípio na forma lagrangeana reactualizada. Neste caso o princípio das potências virtuais toma a forma

$$\int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Pi} : \delta \dot{\mathbf{E}} d\Omega_0 = \int_{\Sigma_{1|0}} \mathbf{s}^* \cdot \delta \mathbf{v} d\Sigma_{1|0}, \quad (2.89)$$

em que  $\Omega_0$  e  $\Sigma_0$  representam o domínio espacial e a respectiva fronteira na configuração de referência  $C_0$ .  $\boldsymbol{\Pi}$  é o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, definido em relação à configuração  $C_0$ , em que

$$\boldsymbol{\Pi} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad \text{sendo} \quad J = \det \mathbf{F}, \quad (2.90)$$

$$\delta \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{F}^T \delta \dot{\mathbf{F}} + (\delta \dot{\mathbf{F}})^T \mathbf{F} \right] \quad \text{e} \quad \delta \dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial(\delta \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}_0}. \quad (2.91)$$

Por último,  $\mathbf{s}^*$  designa o vector de tensão nominal prescrito. Para a formulação lagrangeana reactualizada o princípio das potências virtuais pode ser igualmente formulado em função do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff,  $\mathbf{S} = \mathbf{F} \boldsymbol{\Pi}$ , obtendo-se a expressão seguinte:

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \dot{\mathbf{F}} d\Omega_0 = \int_{\Sigma_{1|0}} \mathbf{s}^* \cdot \delta \mathbf{v} d\Sigma_{1|0}. \quad (2.92)$$

Esta última expressão é a adoptada para a linearização do princípio variacional na formulação implícita.

## 2.3 Mecânica do Contacto

Para além das condições de fronteira clássicas, referidas na secção anterior, os processos de conformação plástica caracterizam-se por apresentarem condições de fronteira evolutivas, resultantes do contacto entre o corpo deformável e as ferramentas. O problema de contacto com atrito impõe condições de fronteira peculiares à equação de equilíbrio. Apesar das forças impostas pelo contacto poderem ser interpretadas como forças externas, são desconhecidas à partida. Por outro lado, a superfície de contacto é igualmente desconhecida *a priori*.

Devido às diferentes propriedades mecânicas dos dois corpos em contacto, é aceitável considerar a hipótese simplificativa de que este contacto ocorre entre um corpo deformável (chapa) e um corpo rígido (ferramentas). Neste contexto, apenas é necessário avaliar o equilíbrio do corpo deformável. Adopta-se a formulação contínua proposta por Alart e Curnier [1991] devido ao seu maior rigor matemático e por permitir evidenciar a diferença entre a formulação e a resolução do problema de contacto com atrito.

Para definir as condições de fronteira associadas ao contacto com atrito é necessário determinar as variáveis cinemáticas que definem o movimento relativo entre os corpos, bem como as variáveis estáticas que surgem devido à interacção entre o corpo deformável e o corpo rígido. Com base nestas variáveis definem-se as restrições associadas ao problema de contacto unilateral e de contacto com atrito. O atrito é descrito pela lei de Coulomb.

Ao considerar-se o fenómeno do atrito perde-se a simplicidade e a clareza da teoria do contacto unilateral, devido ao facto de as forças de atrito serem inerentemente não-conservativas. Tal obriga à resolução de um problema evolutivo, cuja solução pode não ser única [Klarbring 1986]. Se a área de contacto não for evolutiva, a interacção entre dois corpos em contacto pode ser modelada considerando condições de fronteira bilaterais, isto é, deslocamentos prescritos e/ou campos de forças em zonas fixas da fronteira [Heegaard e Curnier 1993]. Caso contrário surgem condições unilaterais impostas em zonas evolutivas da fronteira, o que torna impossível a definição de um problema clássico de optimização. Para realçar a complexidade do problema em análise discutem-se três situações distintas: (i) contacto unilateral; (ii) contacto com atrito com força normal de contacto conhecida e (iii) contacto com atrito.

### 2.3.1 Cinemática do Contacto

Para definir o deslocamento relativo de dois corpos em contacto é conveniente considerar um deles como referência e descrever o movimento do outro em relação a este. Tal corresponde a adoptar uma estratégia do tipo *master/slave* [Hallquist *et al.* 1985]. No caso específico da conformação plástica, como um dos corpos é assumido como rígido, a sua superfície  $\mathcal{G}^{\text{rig}}$  considera-se como a de referência (*master*). A cada ponto material  $\mathcal{A}^{\text{def}}$ , pertencente à fronteira do corpo deformável (*slave*)  $\mathcal{G}^{\text{def}}$  associa-se um vector de posição  $\mathbf{x}^{\text{def}}$ . Independentemente do ponto material  $\mathcal{A}^{\text{def}}$  estar ou não em contacto, é possível associar-lhe um ponto material de referência sobre  $\mathcal{G}^{\text{rig}}$ , designado por  $\mathcal{A}^{\text{ref}}$  e definido pelo vector de referência

$$\mathbf{x}^{\text{ref}} \in \left\{ \mathbf{z} : \mathbf{z} \in \mathcal{G}^{\text{rig}}, \left| \mathbf{z} - \mathbf{x}^{\text{def}} \right| = \text{mínimo} \right\}. \quad (2.93)$$

Em cada ponto material de referência sobre  $\mathcal{G}^{\text{rig}}$  é igualmente definido um referencial local. Este é construído a partir da normal exterior à superfície de referência  $\mathbf{n}^{\text{def}}(\mathcal{A}^{\text{ref}})$ . Define-se então a distância normal de contacto,  $d^n$ , como um campo escalar tal que

$$d^n(\mathcal{A}^{\text{def}}) = \left\{ \mathbf{x}^{\text{def}}(\mathcal{A}^{\text{def}}) - \mathbf{x}^{\text{ref}}[\mathcal{A}^{\text{ref}}(\mathcal{A}^{\text{def}})] \right\} \cdot \mathbf{n}^{\text{def}}. \quad (2.94)$$

A variável distância normal de contacto é essencial à definição da condição de contacto: caso exista penetração entre os dois corpos em contacto tem-se que  $d^n < 0$ , para o ponto material  $\mathcal{A}^{\text{def}}$ . No caso de existir contacto tem-se que  $d^n = 0$ , e na ausência de contacto  $d^n > 0$ . Na Figura 2.2 representam-se esquematicamente as variáveis cinemáticas do contacto.

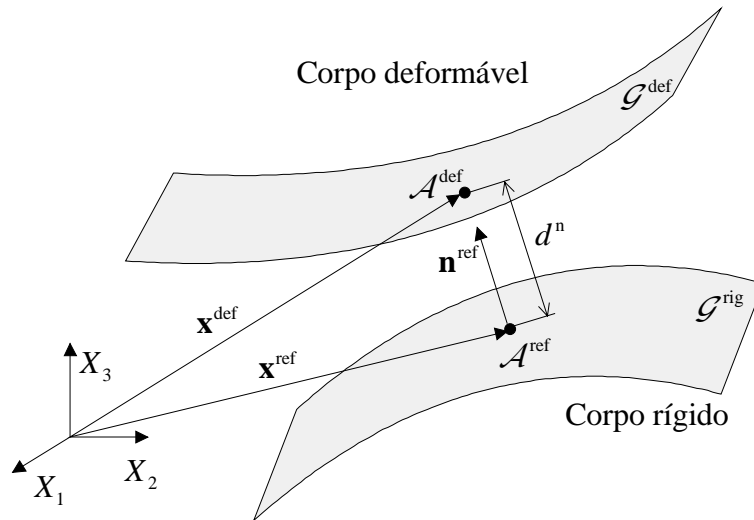


Figura 2.2 – Definição das variáveis cinemáticas em mecânica do contacto.

O campo vectorial de velocidade relativa  $\dot{\delta}$  é definido como

$$\dot{\delta}(\mathcal{A}^{\text{def}}, t) = \dot{\mathbf{x}}^{\text{def}}(\mathcal{A}^{\text{def}}, t) - \dot{\mathbf{x}}^{\text{ref}}(\mathcal{A}^{\text{ref}}, t), \quad (2.95)$$

o qual, pode ser decomposto numa componente normal  $\delta^n$  e numa componente tangencial  $\delta^t$ , dadas por

$$\delta^n(\mathcal{A}^{\text{def}}, t) = \dot{\delta}(\mathcal{A}^{\text{def}}, t) \cdot \mathbf{n}^{\text{def}} \quad \text{e} \quad \delta^t(\mathcal{A}^{\text{def}}, t) = \dot{\delta}(\mathcal{A}^{\text{def}}, t) - \delta^n(\mathcal{A}^{\text{def}}, t) \mathbf{n}^{\text{def}}. \quad (2.96)$$

A componente tangencial da velocidade relativa representa a projecção de  $\dot{\delta}$  no plano tangente à superfície  $\mathcal{G}^{\text{rig}}$ , no ponto  $\mathcal{A}^{\text{ref}}$ . Define as direcções tangentes à superfície  $\mathcal{G}^{\text{rig}}$  que, conjuntamente com  $\mathbf{n}^{\text{def}}$ , estabelecem o referencial local associado a cada ponto material  $\mathcal{A}^{\text{def}}$ .

Para formular o comportamento em contacto é necessário introduzir o campo vectorial de força de contacto  $\lambda$ . Este campo actua em  $\mathcal{A}^{\text{def}}$  devido à interacção entre  $\mathcal{G}^{\text{def}}$  e  $\mathcal{G}^{\text{rig}}$ . É conveniente decompor o vector força de contacto nas suas componentes normal  $\lambda^n$  e tangencial  $\lambda^t$ , definidas por

$$\lambda^n = \lambda \cdot \mathbf{n}^{\text{ref}} \quad \text{e} \quad \lambda^t = \lambda - \lambda^n \mathbf{n}^{\text{ref}}. \quad (2.97)$$

Também as variáveis  $\dot{\delta}$  e  $\lambda$  são definidas independentemente de existir ou não contacto. São elas que permitem avaliar as condições de contacto com atrito. É importante realçar que as variáveis cinemáticas e as variáveis estáticas de contacto dependem da posição do ponto material do corpo deformável  $\mathcal{A}^{\text{def}}$ , bem como da posição de referência sobre o

corpo rígido  $\mathcal{A}^{\text{ref}}$ . Assim, tendo em conta que na formulação lagrangeana reactualizada a posição de  $\mathcal{A}^{\text{def}}$  é função do seu deslocamento incremental, também as variáveis cinemáticas e estáticas são função do deslocamento incremental [Heege 1992]. Por outro lado, a definição da posição de referência  $\mathcal{A}^{\text{ref}}$  não é única, a menos que a superfície do corpo rígido seja convexa ou que os corpos estejam em contacto ( $d^n = 0$ ). Assim, é necessário recorrer a algoritmos estáveis e robustos, que permitam a selecção de uma das posições de referência de entre o conjunto de soluções possível.

### 2.3.2 Lei de Contacto Unilateral

Dois corpos podem separar-se mas não traccionarem-se mutuamente. Da mesma forma, dois corpos podem comprimir-se, mas sem que penetrem um no outro. Estes dois estatutos: ausência de contacto<sup>1</sup> ( $d^n > 0, \lambda^n = 0$ ) ou contacto ( $d^n = 0, \lambda^n < 0$ ) são formulados recorrendo às três condições seguintes<sup>2</sup>:

$$\text{Condição de impenetrabilidade: } d^n \geq 0, \quad (2.98)$$

$$\text{Condição de compressão: } \lambda^n \leq 0, \quad (2.99)$$

$$\text{Relação de complementaridade: } d^n \lambda^n = 0. \quad (2.100)$$

A relação de complementaridade indica que  $d^n$  e  $\lambda^n$  não podem ser simultaneamente não nulos. Caso se verifique a condição de compressão e  $\lambda^n < 0$  então existe contacto, pelo que  $d^n = 0$ . Por outro lado, caso se verifique a condição de impenetrabilidade e  $d^n > 0$  então não existe contacto, logo  $\lambda^n = 0$ . Os dois estatutos de contacto são claramente identificados no gráfico da relação entre  $\lambda^n$  e  $d^n$ , apresentado na Figura 2.3.

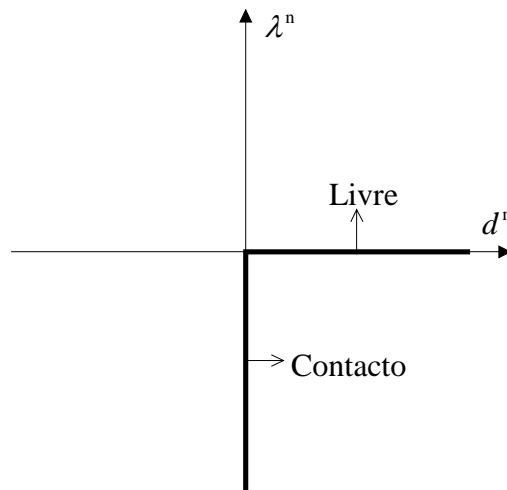


Figura 2.3 – Lei de contacto unilateral: gráfico da relação entre  $\lambda^n$  e  $d^n$ .

A lei de contacto unilateral é não-diferenciável e para  $d^n = 0$  pode assumir um número infinito de valores. Recorrendo ao formalismo da análise convexa, proposto por [Moreau 1979], a lei de contacto  $\lambda^n(d^n)$  e a sua inversa  $d^n(\lambda^n)$  podem ser representadas numa única inclusão sub-diferenciável pelas relações seguintes:

$$\lambda^n \in \partial\psi_{\mathbb{R}^+}(d^n) \quad \text{ou} \quad d^n \in \partial\psi_{\mathbb{R}^-}(\lambda^n). \quad (2.101)$$

<sup>1</sup> O estatuto de ausência de contacto será normalmente designado pela expressão inglesa *Gap*.

<sup>2</sup> Condições e problema de Signorini, nome do autor que as formulou [Signorini 1933].

$\psi_{\mathbb{R}^+}$  é a função indicatriz dos números reais positivos.  $\partial\psi_{\mathbb{R}^+}$  é o gradiente generalizado de  $\psi_{\mathbb{R}^+}$ , ou seja, o cone normal a  $\mathbb{R}^+$  no ponto  $d^n$ .  $\psi_{\mathbb{R}^-}$  é a função conjugada de  $\psi_{\mathbb{R}^+}$  e  $\partial\psi_{\mathbb{R}^-}$  o seu gradiente generalizado, ou seja, o cone normal a  $\mathbb{R}^-$  no ponto  $\lambda^n$ . Na Figura 2.4, representam-se as inclusões correspondentes às condições de contacto unilateral.

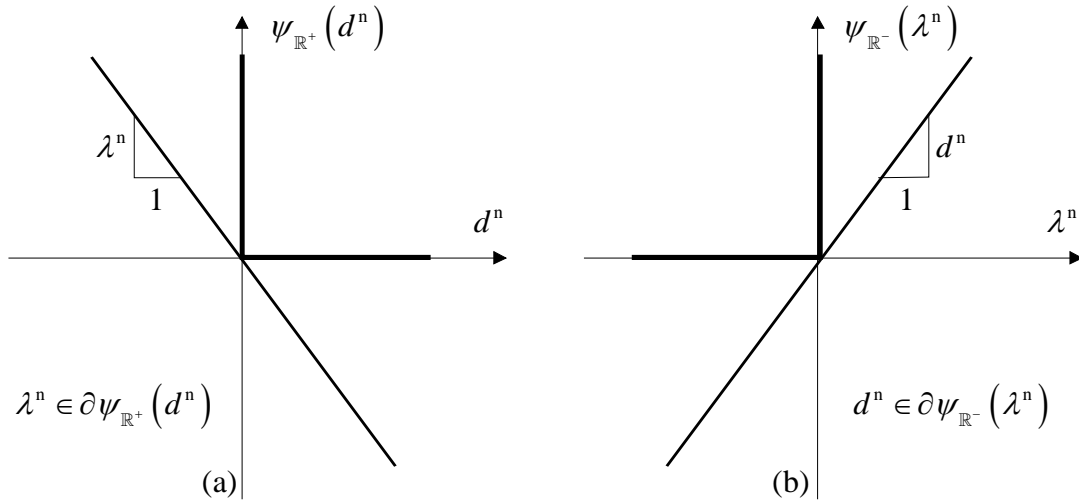


Figura 2.4 – Representação gráfica das inclusões sub-diferenciáveis: (a) associada à tensão de contacto e (b) associada à distância normal de contacto.

### 2.3.3 Lei de Atrito puro

Por atrito puro entende-se atrito a pressão de contacto constante conhecida (força e área de contacto constantes), como ocorre, por exemplo, entre dois corpos em contacto estático. Nestas condições, os dois corpos ou estão em contacto aderente ou escorregam entre si. Definem-se assim dois estatutos de contacto distintos: (i) contacto aderente<sup>1</sup> ( $\|\dot{\delta}^t\| = 0$ ,  $\|\lambda^t\| < k_L$ ) ou (ii) escorregamento<sup>2</sup> ( $\|\dot{\delta}^t\| > 0$ ,  $\|\lambda^t\| = k_L$ ,  $\dot{\delta}^t = \|\dot{\delta}^t\| \lambda^t / \|\lambda^t\|$ ). Estes estatutos são formulados recorrendo às três condições seguintes:

$$\text{Lei de atrito:} \quad \|\lambda^t\| \leq k_L, \quad (2.102)$$

$$\text{Lei de escorregamento:} \quad \dot{\delta}^t = \|\dot{\delta}^t\| \frac{\lambda^t}{\|\lambda^t\|}, \quad (2.103)$$

$$\text{Relação de complementaridade:} \quad \|\dot{\delta}^t\| (\|\lambda^t\| - k_L) = 0. \quad (2.104)$$

A lei de atrito define o valor máximo da força de contacto tangencial, para que se inicie o escorregamento relativo entre os corpos em contacto. Esta força limite para o atrito é aqui designada por  $k_L$ . A lei de atrito de Coulomb define uma força limite de atrito proporcional à força normal de contacto:  $k_L = -\mu\lambda^n$ ;  $\mu$  é o coeficiente de atrito de Coulomb. No caso de atrito puro a força normal de contacto  $\lambda^n$  considera-se conhecida e constante. A lei de escorregamento impõe a colinearidade entre os vectores velocidade de escorregamento e força de contacto tangencial. A relação de complementaridade indica que  $\dot{\delta}^t$  e  $\|\lambda^t\| - k_L$  não podem ser simultaneamente não nulos. Assim, garante que quando existe contacto aderente  $\|\lambda^t\| - k_L < 0$ , a velocidade de escorregamento é nula. Por outro

<sup>1</sup> O estatuto de contacto aderente será normalmente designado pela expressão inglesa *Stick*.

<sup>2</sup> O estatuto de contacto com escorregamento será normalmente designado pela expressão inglesa *Slip*.

lado, caso ocorra escorregamento entre os corpos  $\|\dot{\delta}^t\| \neq 0$ , pelo que  $\|\lambda^t\| - k_L = 0$ . Na Figura 2.5 apresenta-se o gráfico bidimensional correspondente à lei de atrito, com a clara distinção entre os estatutos de contacto definidos.

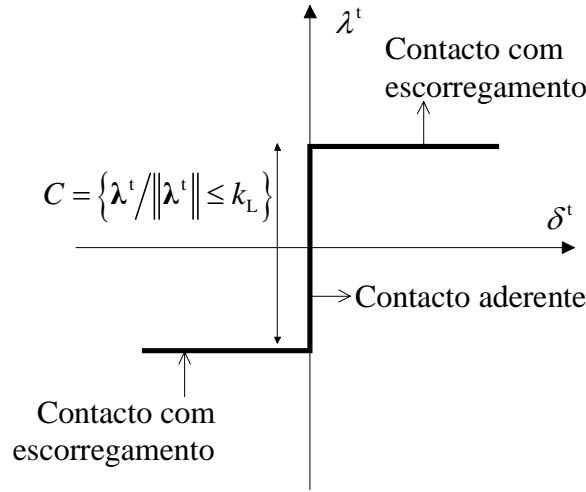


Figura 2.5 – Lei de Atrito: gráfico bidimensional da relação entre  $\lambda^t$  e  $\delta^t$ .

Tal como para o contacto unilateral, também a lei de escorregamento  $\dot{\delta}^t(\lambda^t)$  e a sua inversa, a lei de atrito  $\lambda^t(\dot{\delta}^t)$ , podem ser condensadas sob a forma de uma inclusão sub-diferenciável:

$$\dot{\delta}^t \in \partial\psi_C(\lambda^t) \quad \text{ou} \quad \lambda^t \in \partial\psi_C^*(\dot{\delta}^t). \quad (2.105)$$

$\psi_C$  é a função indicatriz do disco convexo  $C$ , de raio  $k_L$ , centrado na origem

$$C = \left\{ \lambda^t / \|\lambda^t\| \leq k_L \right\}. \quad (2.106)$$

$\partial\psi_C$  é o gradiente generalizado de  $\psi_C$ .  $\psi_C^*$  é a função conjugada da função indicatriz  $\psi_C$  e  $\partial\psi_C^*$  o seu gradiente generalizado [Alart e Curnier 1991]. Este conjunto convexo pode descrever o atrito anisotrópico, caso se considere um disco elíptico em vez de circular [Alart 1992].

### 2.3.4 Lei de Contacto com Atrito

O contacto unilateral e o atrito são fenómenos fortemente acoplados. A lei de atrito de Coulomb estabelece que a componente tangencial da força de contacto é proporcional à pressão de contacto. Uma das questões da formulação do problema de contacto com atrito surge do facto desta relação não ser simétrica, isto é, a pressão de contacto é independente da força de atrito. Este facto traduz a não-associatividade da lei de atrito de Coulomb.

A condição de escorregamento definida pela condição  $\phi = \|\lambda^t\| - \mu\lambda^n \leq 0$  pode ser interpretada do mesmo modo que a condição limite de elasticidade para um material rígido-plástico. No entanto, a lei de escorregamento é não-associada porque o potencial de escorregamento, cujo gradiente define a direcção de escorregamento, não coincide com a função de escorregamento  $\phi$ . Uma consequência importante deste facto é que não existe nenhum princípio de dissipação máxima para o problema de contacto com atrito. Em termos computacionais esta não-associatividade manifesta-se numa não-simetria das equações linearizadas [Laursen 1992].



A lei de contacto com atrito é construída combinando a lei de contacto unilateral com a lei de atrito tangencial, isto é,

$$\lambda^n \in \partial\psi_{\mathbb{R}^+}(d^n) \quad \text{ou} \quad d^n \in \partial\psi_{\mathbb{R}^-}(\lambda^n) \quad \text{e} \quad (2.107)$$

$$\lambda^t \in \partial\psi_{C(\lambda^n)}^*(\dot{\delta}^t) \quad \text{ou} \quad \dot{\delta}^t \in \partial\psi_{C(\lambda^n)}(\lambda^t), \quad (2.108)$$

onde o convexo de atrito é agora função da força normal de contacto,  $C = C(\lambda^n)$ . Na Figura 2.6 representam-se as inclusões associadas às condições de atrito.

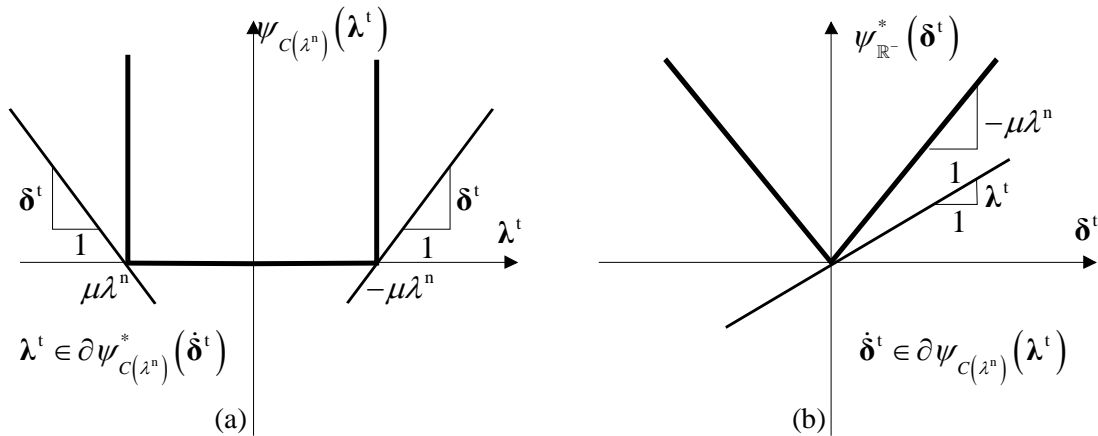


Figura 2.6 – Representação gráfica das inclusões sub-diferenciáveis: (a) associada à velocidade de escorregamento e (b) associada à força de atrito.

Considerando a lei de atrito de Coulomb com atrito isotrópico, o convexo  $C(\lambda^n)$  é definido: (i) em problemas bidimensionais, pelo intervalo  $C(\lambda^n) = [-\mu\lambda^n, \mu\lambda^n]$  e (ii) em problemas tridimensionais, pelo disco fechado, centrado na origem, de raio igual ao produto da força normal de contacto  $(-\lambda^n)$  pelo coeficiente de atrito  $\mu$ .  $C(\lambda^n)$  é assim uma secção do cone de Coulomb (Figura 2.7) definido por

$$C(\lambda^n) = \{\lambda^t / \|\lambda^t\| \leq -\mu\lambda^n\}. \quad (2.109)$$

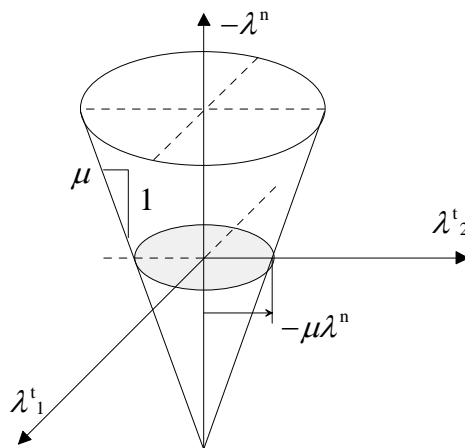


Figura 2.7 – Cone tridimensional de Coulomb.

No caso de ausência de contacto ( $d^n > 0$ ,  $\lambda^n = 0$ ), o convexo de atrito reduz-se ao vértice do cone de Coulomb. No caso de contacto aderente ( $d^n = 0$ ,  $\lambda^n < 0$ ,  $\|\dot{\delta}^t\| = 0$ ,  $\|\lambda^t\| < -\mu\lambda^n$ ) o valor da força de atrito é desconhecido. Finalmente, no caso de contacto

com escorregamento ( $d^n = 0$ ,  $\lambda^n < 0$ ,  $\|\dot{\delta}^t\| > 0$ ,  $\|\lambda^t\| = -\mu\lambda^n$ ) o valor do deslocamento relativo é desconhecido.

Para problemas *quasi*-estáticos, o vector velocidade relativa  $\dot{\delta}$  pode ser substituído pelo incremento de deslocamento relativo  $\delta = \Delta t \dot{\delta}$ . Esta operação deve ser realizada para a componente tangencial que surge na lei de escorregamento e na lei de atrito. Devido à propriedade de invariância de um cone convexo com vértice na origem quando multiplicado por um valor real positivo, esta operação resume-se a substituir directamente  $\dot{\delta}^t$  por  $\delta^t$ . Deste modo, as inclusões sub-diferenciáveis da equação (2.108) podem ser reescritas na forma:

$$\lambda^t \in \partial \psi_{C(\lambda^n)}^*(\delta^t) \quad \text{ou} \quad \delta^t \in \partial \psi_{C(\lambda^n)}(\lambda^t). \quad (2.110)$$

### 2.3.5 Formulação do Problema Misto

Para a formulação completa do problema em estudo é necessário acoplar às equações de equilíbrio do corpo deformável as leis de contacto com atrito. Alguns autores optam pelo acoplamento directo na formulação variacional. Nesse caso, adiciona-se ao problema variacional clássico, formulado na secção 2.2.4, o funcional associado ao contacto com atrito. Esta é a estratégia adoptada por Simo e Laursen [1992] na formulação do princípio dos trabalhos virtuais para o problema de contacto com atrito. O funcional associado ao contacto com atrito é nessa formulação avaliado como:

$$\int_{\Sigma_c} \lambda^n \delta d^n d\Sigma_c + \int_{\Sigma_c} \lambda^t \delta \delta^t d\Sigma_c. \quad (2.111)$$

Esta definição intuitiva recorre à noção de variáveis conjugadas de trabalho<sup>1</sup>. Por exemplo, a variável conjugada de trabalho do tensor velocidade de deformação é o tensor das tensões de Cauchy. Isto porque o produto destas variáveis conjugadas conduz a uma avaliação do trabalho virtual. O par de variáveis conjugadas de trabalho é constituído por uma medida de deformação e uma medida de tensão, que definem o modelo constitutivo. Da mesma forma, definem-se relações constitutivas para avaliar o funcional de contacto com atrito. A condição de impenetrabilidade é definida pelas variáveis conjugadas de trabalho, força e distância normais de contacto. A condição de atrito recorre às variáveis conjugadas de trabalho, força de contacto tangencial e vector de escorregamento [Klarbring 1995, Kloosterman *et al.* 2001].

Esta formulação mais intuitiva pode ser estendida ao princípio das potências virtuais, sendo nesse caso necessário recorrer às componentes de velocidade relativa entre os corpos em contacto [Kloosterman *et al.* 2001]. A formulação variacional do problema de contacto com atrito pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D} d\Omega - \int_{\Sigma_1} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{v} d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_c} \lambda^n \delta v^n d\Sigma_c + \int_{\Sigma_c} \lambda^t \delta \mathbf{v}^t d\Sigma_c = 0, \quad (2.112)$$

em que  $\Sigma_c$  é a fronteira do corpo deformável que estabelece contacto com o corpo rígido.

Alart e Curnier [1991] propõem um acoplamento do problema de contacto com atrito mais rigoroso, do ponto de vista matemático, a partir de uma formulação potencial do equilíbrio do corpo deformável. O recurso à formulação potencial surge do facto das leis de contacto com atrito derivarem de pseudo-potenciais, por não serem diferenciáveis. Na

<sup>1</sup> Do Inglês: *Work conjugate pairs*.

ausência de contacto, a resolução do problema variacional traduzido pela equação (2.86), reduz-se a calcular o vector de deslocamentos que minimiza o potencial  $\Phi$ ,

$$\mathbf{u} = \min \{ \Phi(\mathbf{v}) \} \Leftrightarrow \Phi(\mathbf{u}) \leq \Phi(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v}. \quad (2.113)$$

A condição necessária para garantir o equilíbrio do corpo deformável pode ser escrita na forma

$$\nabla \Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}^{\text{ext}} = 0, \quad (2.114)$$

onde  $\nabla$  é o operador gradiente,  $\mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{u})$  é o vector de forças internas e  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  o vector de forças externas.  $\nabla \Phi(\mathbf{u})$  pode ser associado ao princípio das potências virtuais obtido da formulação variacional do problema clássico. Esta estratégia matemática permite apresentar de forma simples a associação entre o problema de equilíbrio definido na equação (2.114) e o problema de contacto com atrito [Mijar e Arora 2000].

Para acoplar o problema de contacto unilateral torna-se necessário definir, para cada ponto material susceptível de estabelecer contacto, um novo conjunto  $\mathcal{M}$  de deslocamentos admissíveis

$$\mathcal{M} = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R} : d^n(\mathbf{v}) \geq 0 \}. \quad (2.115)$$

Deste modo, o problema de contacto unilateral corresponde a determinar o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$ , solução da inequação variacional

$$\Phi(\mathbf{u}) \leq \Phi(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in \mathcal{M}. \quad (2.116)$$

Recorrendo ao pseudo-potencial  $\psi_{\mathbb{R}^+}(d^n)$  este problema pode ser reformulado como um problema de optimização com constrangimentos, definido por

$$\mathbf{u} = \min \{ \Phi(\mathbf{v}) + \psi_{\mathbb{R}^+} [d^n(\mathbf{v})] \}. \quad (2.117)$$

Para acoplar o problema de atrito puro define-se o conjunto  $\mathcal{M}_0$  de deslocamentos admissíveis, para cada ponto material susceptível de estabelecer contacto, da forma seguinte:

$$\mathcal{M}_0 = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R} : d^n(\mathbf{v}) = 0 \}. \quad (2.118)$$

A resolução do problema de atrito puro corresponde a determinar o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$ , solução da inequação variacional

$$\Phi(\mathbf{u}) - \mu \lambda^n \|\delta^t(\mathbf{u})\| \leq \Phi(\mathbf{v}) - \mu \lambda^n \|\delta^t(\mathbf{v})\|, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{M}_0. \quad (2.119)$$

Recorrendo ao pseudo-potencial  $\psi_c^*(\delta^t)$  obtém-se um problema equivalente de optimização com constrangimentos, definido por:

$$\mathbf{u} = \min \{ \Phi(\mathbf{v}) + \psi_c^* [\delta^t(\mathbf{v})] \}. \quad (2.120)$$

Neste caso, o convexo  $C$  não depende da solução  $\mathbf{u}$ , porque a força normal de contacto é conhecida, pelo que  $C = C(\lambda^n)$ . Tal permite definir o problema de contacto com atrito puro como um problema de optimização.

A solução  $\mathbf{u}$  dos dois problemas desacoplados é definida de forma clássica como sendo a solução das inequações variacionais (2.116) e (2.119). Formalmente, o acoplamento do contacto e do atrito reduz-se a adicionar os dois pseudo-potenciais ao problema clássico de equilíbrio. No entanto, no problema geral de contacto com atrito a força normal de contacto não é constante, nem conhecida *a priori*. De facto, a força de

contacto  $\lambda$ , em cada ponto material susceptível de estabelecer contacto, é função da solução do problema, o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$ . Sendo assim, o convexo  $C$  passa a ser função da solução do problema, pelo que  $C = C(\mathbf{u})$ . A solução do problema de contacto com atrito corresponde à determinação do campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$ , tal que

$$\Phi(\mathbf{u}) - \psi_{C(\mathbf{u})}^*[\delta^t(\mathbf{u})] \leq \Phi(\mathbf{v}) - \psi_{C(\mathbf{u})}^*[\delta^t(\mathbf{v})], \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{M}, \quad (2.121)$$

o qual corresponde ao problema de optimização com constrangimentos definido por:

$$\mathbf{u} = \min \left\{ \Phi(\mathbf{v}) + \psi_{\mathbb{R}^+}[d^n(\mathbf{v})] + \psi_{C(\mathbf{u})}^*[\delta^t(\mathbf{v})] \right\}. \quad (2.122)$$

Uma vez que o convexo  $C$  depende da solução  $\mathbf{u}$  através de  $\lambda^n$  este não é um problema de optimização clássico, mas um problema de *quasi*-optimização. Da mesma forma, a solução do problema acoplado é caracterizada por uma inequação *quasi*-variacional. A ausência de um potencial genuíno, associado ao problema de contacto com atrito, reflecte o carácter não-associado da lei de escorregamento.

Ambas as formulações do problema de contacto com atrito conduzem a um problema de optimização sujeito a constrangimentos. Existem diferentes métodos disponíveis para a resolução deste tipo de problemas, alguns dos quais serão analisados no Capítulo 5.

## Capítulo 3

# Algoritmos de Integração Temporal e Espacial

*Introduzem-se as técnicas de discretização temporal e espacial adoptadas no programa DD3IMP. Na secção dedicada à integração temporal descreve-se em detalhe as duas fases em que o algoritmo é dividido: a Previsão e a Correção. Apresenta-se a estratégia utilizada na determinação do tamanho do incremento e o algoritmo de integração da lei de comportamento elastoplástica do material. Na secção dedicada à discretização espacial apresentam-se os elementos finitos e os métodos de integração disponíveis no programa DD3IMP. Aborda-se o sistema de equações lineares resultante da discretização espacial do princípio das potências virtuais linearizado em relação à configuração inicial (Previsão) e em relação à configuração final (Correção).*

---

### 3.1 Enquadramento

A modelação mecânica do problema de contacto coloca em evidência três categorias distintas de não-linearidades: (i) geométricas, resultantes da descrição cinemática do problema; (ii) materiais, associadas aos modelos constitutivos utilizados para descrever o comportamento elastoplástico e (iii) as resultantes do contacto com atrito. Para além destas não-linearidades inerentes ao processo, em alguns casos surgem ainda instabilidades numéricas que se podem associar à ocorrência de defeitos como, por exemplo, rugas ou a estricção localizada, e que também contribuem para o carácter fortemente não-linear do problema. A sua resolução é necessariamente incremental obrigando à utilização de algoritmos de integração temporal que devem ser suficientemente robustos e estáveis. Estes algoritmos podem ser baseados em duas formulações cinemáticas do problema: *quasi*-estática ou dinâmica.

Na selecção do método de integração temporal confrontam-se dois factores na decisão: (i) a eficiência e (ii) a precisão da simulação. Em termos da eficiência é necessário ter em conta a fase de projecto do componente estampado em que se recorre à simulação numérica. Na fase preliminar de avaliação da viabilidade do componente o ideal é um tempo de cálculo inferior a uma hora. Na fase de desenvolvimento, são toleráveis simulações que exijam tempos de cálculo correspondente a uma noite. No entanto, a pressão sobre o factor tempo de cálculo é enorme, pois só a sua redução permite o recurso a ferramentas de optimização do processo. Entretanto, com o aumento da utilização da simulação numérica dos processos de conformação, é cada vez maior a exigência dos utilizadores na precisão dos resultados. Para melhorar a precisão dos resultados é necessário garantir uma correcta descrição do comportamento mecânico e

tribológico dos materiais e aumentar a robustez dos algoritmos associados à simulação numérica do processo de conformação.

Na formulação *quasi*-estática, os termos de inércia assumem-se como desprezáveis nas equações de equilíbrio do corpo deformável, quando comparados com os termos associados às forças envolvidas no processo de conformação. Geralmente, associa-se a esta formulação um algoritmo de integração temporal implícito. Assim, em cada incremento de tempo resolve-se um sistema de equações não-lineares, de forma iterativa. O processo iterativo termina quando o critério de convergência é atingido, altura em que se actualiza a solução e se avança para o incremento de tempo seguinte. O tamanho do incremento de tempo pode ser pré-definido ou determinado automaticamente. Teoricamente, o tamanho do incremento pode ser grande, mas na prática é fortemente condicionado pelas condições de contacto. Este esquema de integração temporal foi muito utilizado na análise bidimensional de processos de estampagem. A passagem para problemas tridimensionais levanta questões relacionadas com a capacidade de memória e dificuldades numéricas associadas à resolução de sistemas de equações não-lineares. Com o aumento do número de elementos o tempo de computação aumenta quase quadraticamente e aumenta também a capacidade de memória necessária [Tekkaya 2000]. Em resumo, os inconvenientes do método implícito são o elevado tempo de cálculo, os elevados recursos de memória necessários e os problemas de convergência. O facto do processo poder divergir pode não ser considerado como uma desvantagem, uma vez que garante o controlo sobre a precisão da solução obtida. A inquestionável vantagem do método implícito é a garantia de equilíbrio da estrutura na configuração final de cada incremento.

Na formulação dinâmica, as equações de equilíbrio do corpo deformável contêm os termos de inércia. Neste caso é comum associar-se um algoritmo de integração temporal explícito. O processo é igualmente dividido em incrementos de tempo, porém o procedimento não envolve iterações de equilíbrio em cada incremento, pelo que este esquema não apresenta problemas de convergência. A robustez é a principal vantagem da formulação dinâmica explícita. Porém, o equilíbrio do corpo deformável não é garantido em cada incremento. O tamanho de cada incremento é ditado pela condição de estabilidade de Courant. Numa simulação típica do processo de estampagem esta condição pode ditar um tamanho do incremento de tempo máximo admissível da ordem dos microssegundos. Tendo em conta que uma operação de estampagem é na realidade um processo *quasi*-estático (que demora alguns segundos) uma simulação realizada com um algoritmo dinâmico explícito nas condições reais pode necessitar de milhões de incrementos. Este inconveniente é ultrapassado aumentando artificialmente a velocidade das ferramentas, conseguindo deste modo diminuir o tempo total da simulação. No entanto, o aumento artificial da velocidade do processo pode introduzir efeitos de inércia indesejáveis. Para reduzir estes efeitos procede-se a um amortecimento da solução com o auxílio de uma matriz de amortecimento. A estratégia de aumento da velocidade do processo não é viável para materiais sensíveis à velocidade de deformação, nem em processos que considerem fenómenos termo-mecânicos. Nestas situações, a simulação pode ser acelerada aumentando a densidade do material. Todos estes artifícios numéricos exigem um cuidado suplementar na análise dos resultados da simulação e utilizadores experientes.

Os algoritmos dinâmicos explícitos são claramente mais vantajosos que os implícitos, em termos de tempo de cálculo [Gelin *et al.* 1995, Rojek *et al.* 2001]. No entanto, nos

algoritmos explícitos, a cada incremento de tempo corresponde um desvio em relação à configuração de equilíbrio. Assim, mesmo que a geometria final pareça correcta, o estado final de tensões e deformações é questionável. Deste modo, as grandes vantagens destes algoritmos podem desaparecer quando se pretende simular o fenómeno de retorno elástico. Por um lado, nesta fase não é possível acelerar artificialmente o processo, e por outro surgem fortes oscilações em resultado das velocidades artificiais introduzidas. Estas oscilações, associadas à energia cinética produzida durante a fase de conformação, têm de ser controladas através de um amortecimento conveniente. A introdução deste amortecimento conduz facilmente a tempos de cálculo que podem ultrapassar o tempo necessário para a simulação da fase de conformação. A simulação do fenómeno de retorno elástico exige um número elevado de incrementos de tempo, pelo que se constata uma maior acumulação de desvios numéricos associados ao facto de não ser exigido o equilíbrio do corpo, que podem conduzir a soluções finais erróneas [Finn *et al.* 1995].

Actualmente, os métodos dinâmicos explícitos são os mais utilizados na simulação numérica do processo de conformação, sendo cada vez mais combinados com métodos estáticos implícitos para simular o fenómeno do retorno elástico. A imposição dos métodos dinâmicos explícitos para a simulação do processo de conformação resulta da maior velocidade de computação e dos menores requisitos em termos de memória disponível. No entanto, as desvantagens associadas aos métodos dinâmicos explícitos são também relevantes. Assim, é convicção de vários autores que, caso se continue a verificar o aumento de velocidade de cálculo e robustez da formulação estática implícita, a médio prazo esta será a ferramenta *standard* para a simulação de todo o processo de estampagem, pois permite a obtenção de resultados mais fidedignos [Bathe *et al.* 1997, Tekkaya 2000, Bathe 2004].

O programa DD3IMP adopta um algoritmo totalmente implícito. Como o processo de estampagem é fortemente não-linear, o algoritmo iterativo pode ser muito lento ou mesmo divergente, pelo que deve ser utilizado um método robusto para a resolução do sistema de equações não-lineares, em cada incremento de tempo. No programa DD3IMP, recorre-se ao método de Newton-Raphson. Este método iterativo parte de uma solução inicial e define uma direcção de busca em função do gradiente das forças, que fornece informação da variação das forças com a deformação. Para garantir a convergência do método de Newton-Raphson é necessário determinar uma solução inicial dentro do raio de convergência. Existem dois grupos de métodos para gerar uma solução inicial: (i) os que recorrem a soluções de incrementos anteriores e (ii) os que recorrem a algoritmos alternativos. Os métodos baseados nas soluções de incrementos anteriores propõem extrapolações ou médias de dois ou três incrementos. Cada uma destas estratégias pode ser a mais indicada numa situação específica, pelo que devem avaliar-se as soluções geradas e procurar-se a que apresenta maiores probabilidades de convergir, em função da norma do resíduo das forças não-equilibradas [Esche *et al.* 1997]. No entanto, nenhuma garante uma solução globalmente convergente. A utilização de um algoritmo alternativo, para calcular a solução inicial, é um método mais eficiente. A solução adoptada no programa DD3IMP consiste no cálculo da solução inicial com o auxílio de um algoritmo de integração explícito [Teodosiu *et al.* 1991].

Para além da discretização temporal do processo é necessário proceder a uma discretização espacial. O comportamento macroscópico dos corpos pode ser descrito recorrendo a equações de derivadas parciais. O método dos elementos finitos é, actualmente, a técnica numérica mais utilizada para determinar a solução aproximada de

uma equação de derivadas parciais, sujeita a condições de fronteira. O conceito matemático fundamental do método dos elementos finitos é a partição do domínio de aplicação da equação de derivadas parciais. Cada elemento dessa partição contém pontos nodais nos quais são definidas variáveis físicas. O valor destas variáveis é interpolado entre pontos nodais. O primeiro passo do método dos elementos finitos é a discretização cinemática do problema, de forma a discretizar a equação de equilíbrio, substituindo as quantidades originais pelas discretizadas. A discretização de um domínio  $\Omega$  em elementos finitos consiste na divisão desse domínio em sub-domínios de tamanho finito, designados por elementos, e na definição das respectivas funções interpoladoras. Cada elemento é definido por um conjunto de pontos, designados por nós. As funções de interpolação devem permitir definir funções contínuas para os campos interpolados, em cada elemento, bem como para as variáveis de estado.

As características fundamentais que um elemento finito deve apresentar para ser utilizado na simulação numérica de processos de estampagem de chapas metálicas é ser simples, barato e fisicamente correcto. Atendendo às características geométricas de uma chapa metálica, nomeadamente a sua pequena espessura, esta pode ser discretizada com elementos finitos do tipo membrana, casca e sólido. Os elementos finitos baseados na teoria de membrana são os mais simples de utilizar. No entanto, são de aplicação limitada porque não contemplam efeitos de flexão. O programa comercial implícito mais utilizado a nível industrial, o AUTOFORM, utiliza elementos do tipo membrana e um algoritmo de integração específico que permite minimizar o tempo de cálculo na simulação numérica da operação de conformação [Kubli e Reissner 1995]. No entanto, a necessidade de resultados fidedignos na simulação do retorno elástico e de multi-processos, em que os efeitos de flexão são muito relevantes, obrigou à introdução de um elemento do tipo casca como alternativa ao elemento membrana [Schönbach *et al.* 2004]. Entretanto, continuam a ser propostas diferentes estratégias para melhorar o comportamento destes elementos em problemas dominados pelo fenómeno de flexão. Este esforço justifica-se pelo facto de os elementos baseados na teoria da membrana conduzirem a tempos de cálculo entre 5 a 20 vezes inferiores aos obtidos com elementos casca [Sriram e Wagoner 2000].

Os elementos casca apresentam também alguns cuidados específicos, apesar de surgirem naturalmente como os mais indicados para a simulação de processos de conformação de chapa. Os elementos casca baseados na teoria de Kirchhoff-Love exigem continuidade do tipo  $C^1$ , ou seja, continuidade do campo de deslocamentos e suas derivadas. Esta condição é difícil de garantir pelo que, na prática, este tipo de elementos é pouco utilizado. Efectivamente, este campo de investigação é dominado pelos elementos casca baseados na teoria de Mindlin-Reissner, que exigem apenas continuidade  $C^0$ . Estes podem ser divididos em elemento casca espessa ou fina, em função de contemplarem ou não variações transversais de deformação, respectivamente [Hauptmann *et al.* 2000]. As variações transversais de deformação revelam-se de enorme importância para a correcta modelação do contacto na zona de influência do cerra-chapas [Tekkaya 2000]. As complexidades relacionadas com a gestão do problema de contacto com atrito favorecem, geralmente, a opção por elementos casca de baixa ordem. No entanto, em problemas que envolvem grandes deformações e deformações plásticas, este tipo de elementos apresentam problemas próximo do limite de incompressibilidade. O seu comportamento é demasiado rígido (*locking effect*) em consequência da dificuldade que os polinómios de baixo grau têm em representar campos de deslocamentos que preservem a hipótese de



conservação de volume. A alternativa é recorrer a métodos de integração que permitam compensar os fenómenos descritos. No entanto, nesta situação constata-se que os modos de deformação próprio do elemento (*zero-energy modes*) podem também afectar a solução do problema. Nem sempre é fácil identificar quais são os elementos mais eficazes, ou seleccionar estratégias adequadas de melhorias. O comportamento dos elementos casca é difícil de avaliar, sendo mesmo imprevisível, uma vez que pequenas alterações à geometria ou às condições de fronteira podem conduzir a resultados completamente diferentes. Os elementos casca são mesmo designados como as *prima donnas* dos elementos finitos [Chapelle e Bathe 1998].

Os elementos finitos sólidos garantem a descrição tridimensional do corpo deformável, o que permite proceder ao tratamento do contacto nas duas faces da chapa sem ter de recorrer a estratégias numéricas específicas. Tal facilita a gestão do contacto em ambas as superfícies. Deste modo, os elementos sólidos permitem uma melhor previsão da distribuição da pressão de contacto do cerra-chapas, em função das variações de espessura [Rojek *et al.* 1996]. Os elementos finitos sólidos apresentam também alguns problemas numéricos associados à sua rigidez e à condição de incompressibilidade plástica. Para os ultrapassar, recorre-se a técnicas de integração específicas [Kawka e Makinouchi 1995]. A utilização de tais técnicas garante que os elementos finitos de baixo grau continuem a ser preferíveis para a simulação de processos de conformação, pela sua clara vantagem em termos de tempo de cálculo [Alves e Menezes 2001]. As simulações com elementos sólidos exigem, à partida, modelos com um número de graus de liberdade superior ao do modelo correspondente com elementos casca. Consequentemente, as simulações são mais lentas no primeiro caso. No entanto, para geometrias complexas e em trajectórias de deformação também complexas, o elemento sólido é superior na previsão dos resultados [Kawka *et al.* 1998].

Em resumo, a selecção do tipo de elemento finito utilizado na simulação numérica do processo de conformação, envolve uma relação de compromisso entre o tempo de cálculo e a precisão exigida. Actualmente, da biblioteca de elementos finitos do programa DD3IMP constam apenas elementos finitos sólidos.

Em problemas que envolvem grandes deformações, a configuração “óptima” para a discretização do corpo deformável altera-se continuamente ao longo do processo de conformação. Qualquer método numérico aplicado à resolução de problemas da mecânica dos meios contínuos conduz a soluções com erros associados à interpolação geométrica e à discretização do espaço e do tempo. Para controlar o erro associado à discretização é essencial que esta evolua de acordo com as condições do processo. Neste contexto, surgem as técnicas de adaptabilidade da malha de elementos finitos. O objectivo é obter uma discretização, em cada incremento, que garanta que o erro da solução obtida pelo método dos elementos finitos está abaixo de um certo limite controlado, minimizando o tempo de computação [Rieger e Wriggers 2004]. A proliferação deste tipo de técnicas surge associada à enorme pressão para minimizar o tempo de cálculo e, ao mesmo tempo, responder à crescente exigência em relação à precisão dos resultados da simulação. Os custos de computação são reduzidos pois é possível iniciar a simulação com uma malha grosseira, e recorrer a melhores discretizações apenas quando os elementos não forem capazes de descrever correctamente a geometria ou os gradientes das variáveis de estado. Deste modo, reduz-se, igualmente, o tempo dispendido na preparação da discretização inicial e a quantidade de informação armazenada. Por outro lado, as técnicas de adaptabilidade previnem situações de instabilidade ou divergência da solução e permitem

melhorar a capacidade dos programas de simulação do processo de estampagem de prever defeitos de superfície do tipo rugas [Nordlund 1998]. O procedimento de adaptabilidade de malha pode ser dividido em três fases distintas: (i) estimativa do erro cometido pela malha utilizada; (ii) construção da nova discretização e (iii) transferência das variáveis de estado e das condições de fronteira para a nova discretização [Péric *et al.* 1999]. Para definir o erro associado a uma determinada discretização, no caso específico do processo de estampagem, recorre-se a indicadores de erro baseados em variáveis geométricas [Meinders 2000]. Para gerar a nova malha de elementos finitos, com melhor discretização nas zonas em que o erro é maior, distinguem-se claramente três tipos de estratégias de adaptabilidade: dos tipos  $r$ ,  $p$  e  $h$ . A adaptabilidade do tipo  $r$  engloba estratégias que procedem apenas ao reposicionamento dos nós. As estratégias de adaptabilidade do tipo  $p$  alteraram o grau da função de interpolação. A adaptabilidade do tipo  $h$  inclui estratégias em que se altera a dimensão média dos elementos.

### 3.2 Integração Temporal

O processo de conformação de uma chapa metálica é simulado de forma incremental, dividindo o processo em intervalos de tempo  $[t, t + \Delta t]$ . Cada intervalo de tempo é designado por incremento  $N$ . A configuração de referência para o incremento  $N$ , correspondente ao instante  $t$ , é designada por  $C^{[N-1]}$  e a configuração final, correspondente ao instante  $t + \Delta t$ , por  $C^{[N]}$ . A resolução do problema consiste em calcular para cada incremento  $N$ , a configuração final  $C^{[N]}$ , partindo da configuração inicial  $C^{[N-1]}$ . O programa DD3IMP utiliza um algoritmo de integração temporal implícito do tipo Newton-Raphson. Neste, é necessária uma aproximação inicial da configuração  $C^{[N]}$ , aqui designada por  $C^{[N,0]}$ . Esta configuração é determinada recorrendo a um método tangente explícito na fase denominada de *Previsão*. Esta solução inicial aproximada é então corrigida, iterativamente, na fase de *Correcção*. O processo iterativo garante a obtenção de uma configuração que satisfaz o princípio variacional e o modelo constitutivo do material, no final do incremento  $N$ . A Tabela 3.1 resume o algoritmo geral do programa DD3IMP.

Tabela 3.1 – Algoritmo geral do programa DD3IMP.

<p><b>INÍCIO</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Ler e verificar os dados de entrada: parâmetros do cálculo; discretização do corpo deformável; definição geométrica das ferramentas; descrição e parâmetros do processo; parâmetros do(s) material(is); condições de fronteira; condições de contacto e atrito.</li> <li>3. Inicializar o número do incremento <math>N = 1</math>.</li> </ol> <p>REPETIR</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▫ <i>Previsão</i>.</li> <li>▫ <i>Correcção</i>.</li> <li>▫ Validar eventual mudança de fase do processo.</li> <li>▫ Actualizar o número do incremento <math>N = N + 1</math>.</li> </ul> <p>ATÉ fim do processo.</p> <p><b>FIM</b></p>
---

### 3.2.1 Previsão: Cálculo Tangente Explícito

No início de cada incremento de cálculo recorre-se a um método tangente explícito, de forma a obter uma primeira estimativa para a configuração  $C^{[N]}$ , designada por  $C_{\text{ensaio}}^{[N,0]}$ , e otimizar o tamanho do próprio incremento. Este deve ser suficientemente pequeno para respeitar a história de evolução das condições de fronteira e suficientemente grande para assegurar um tempo de cálculo razoável [Menezes 1998]. Para se obter a configuração  $C_{\text{ensaio}}^{[N,0]}$  recorre-se a um incremento de tempo fixo, imposto pelo utilizador como dado de entrada. Ao adoptar uma formulação *quasi*-estática, pode substituir-se o incremento de tempo por qualquer outro parâmetro cuja velocidade seja constante como, por exemplo, o incremento de deslocamento da ferramenta que controla o processo em cada incremento.

Considere-se que, no incremento  $N$ , a fase do processo é controlada pela ferramenta  $M$ , para a qual foi definido um valor do incremento de deslocamento de ensaio  $d\omega_{\text{imp}}$ . Este incremento é imposto através da relação

$$d\mathbf{u}_M^{[N]} = d\omega_{\text{imp}}, \quad (3.1)$$

em que  $d\mathbf{u}_M^{[N]}$  é o deslocamento incremental da ferramenta  $M$ , para o incremento  $N$ . A configuração  $C_{\text{ensaio}}^{[N,0]}$  é calculada a partir da linearização do princípio das potências virtuais na vizinhança da configuração  $C^{[N-1]}$ .

A resolução do sistema de equações que resulta desta linearização fornece os incrementos de ensaio dos deslocamentos e das forças de contacto. Tal permite determinar os incrementos das variáveis de estado (deformação, rotação e tensão) e definir a configuração  $C_{\text{ensaio}}^{[N,0]}$ . No entanto, nem sempre esta configuração pode ser utilizada como ponto de partida para a fase de *Correcção*. De facto, o processo de estampagem é composto por diferentes fases, com características distintas. Em cada fase as condições de deformação evoluem, pelo que é recomendável que o tamanho do incremento varie de acordo com as condições de deformação em cada instante. Para tal, uma vez obtida a configuração de ensaio  $C_{\text{ensaio}}^{[N,0]}$ , analisam-se os incrementos de ensaio das variáveis cinemáticas e de estado, em função de critérios de variação máxima. Estes critérios definem um coeficiente adimensional,  $r_{\min} \in [0,1]$ , de redução do tamanho do incremento. Caso os critérios de variação máxima adoptados o indiquem, ( $r_{\min} \neq 1$ ), corrige-se a configuração  $C_{\text{ensaio}}^{[N,0]}$ . A utilização de um método tangente explícito garante a proporcionalidade entre os incrementos das variáveis do problema e o incremento de ensaio  $d\mathbf{u}_M^{[N]}$ . Assim, a configuração de ensaio corrigida  $C^{[N,0]}$  é obtida considerando que o incremento real  $\Delta\mathcal{G}$ , de uma variável genérica  $\mathcal{G}$ , é dado por

$$\Delta\mathcal{G} = r_{\min} d\mathcal{G}, \quad (3.2)$$

em que  $d\mathcal{G}$  representa o incremento de ensaio da variável  $\mathcal{G}$ , correspondente ao deslocamento imposto no início da fase de *Previsão*,  $d\omega_{\text{imp}}$ . As variáveis de estado da configuração de previsão  $C^{[N,0]}$  são obtidas através da adição dos incrementos de ensaio corrigidos aos valores destas variáveis na configuração  $C^{[N-1]}$ ,

$$\mathcal{G}^{[N,0]} = \mathcal{G}^{[N-1]} + r_{\min} d\mathcal{G}. \quad (3.3)$$

Na Tabela 3.2 apresenta-se, de forma resumida, o algoritmo da fase de *Previsão*.

Tabela 3.2 – Algoritmo da fase de *Previsão* do programa DD3IMP.

<p>INÍCIO da fase de <i>Previsão</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Impor incremento de ensaio <math>\mathbf{d}\mathbf{u}_M^{[N]} = \mathbf{d}\mathbf{w}_{imp}</math>.</li> <li>2. Impor condições de fronteira e de contacto com atrito.</li> <li>3. Calcular matriz de rigidez <math>[K^{\tan}]</math> e vector de forças nodais <math>\{\Delta F\}</math>.</li> <li>4. Resolver sistema de equações <math>[K^{\tan}]\{d\mathbf{u}, d\lambda\} = \{\Delta F\}</math>.</li> <li>5. Calcular deformações e tensões incrementais tangentes.</li> <li>6. Optimizar tamanho do incremento. Estratégia <math>r_{\min}</math>.</li> <li>7. Determinar configuração tangente <math>C^{[N,0]}</math>: <math>\mathcal{G}^{[N,0]} = \mathcal{G}^{[N-1]} + r_{\min} d\mathcal{G}</math>.</li> <li>8. Actualizar posição das ferramentas.</li> </ol> <p>FIM</p>
---

A determinação da configuração  $C^{[N,0]}$  implica a resolução de um sistema de equações lineares que resulta da linearização do princípio das potências virtuais (equação (2.89)) em torno da configuração de partida. Admite-se que, durante o intervalo de tempo  $[t, t + \Delta t]$ , as condições de fronteira permanecem inalteradas e que na configuração de referência, correspondente ao instante  $t$ , o estado de tensões é conhecido e definido por  $\boldsymbol{\sigma}_0$  e o vector de força nominal é definido por  $\mathbf{t}_0^*$ . Assim, o princípio das potências virtuais no instante  $t$  pode ser escrito na forma:

$$\int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma}_0 : \delta \mathbf{D} d\Omega_0 = \int_{\Sigma_{|0}} \mathbf{t}_0^* \cdot \delta \mathbf{v} d\Sigma_{|0}. \quad (3.4)$$

$\delta \mathbf{D}$  é definido pela equação (2.88). Com o princípio das potências virtuais formulado nos instantes de tempo,  $t$  e  $t + \Delta t$ , a linearização é obtida subtraindo o estado inicial ao estado final:

$$\int_{\Omega_0} \left\{ (\boldsymbol{\Pi} - \boldsymbol{\sigma}_0) : \delta \dot{\mathbf{E}} + \boldsymbol{\sigma}_0 : \left[ (\mathbf{F}^T - \mathbf{I}) \delta \dot{\mathbf{F}} \right] \right\} d\Omega_0 = \int_{\Sigma_{|0}} (\mathbf{s}^* - \mathbf{t}_0^*) \cdot \delta \mathbf{v} d\Sigma_{|0}. \quad (3.5)$$

Calculando o limite quando  $\Delta t$  tende para 0, da expressão anterior obtém-se [Menezes 1995]:

$$\int_{\Omega} \left\{ (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - 2\boldsymbol{\sigma}\mathbf{D}) : \delta \mathbf{D} + (\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}) : \delta \mathbf{L} \right\} d\Omega = \int_{\Sigma_1} \dot{\mathbf{s}}^* \cdot \delta \mathbf{v} d\Sigma_1, \quad (3.6)$$

em que  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ , representa a derivada de Truesdell do tensor das tensões de Cauchy, definida como

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^J + \boldsymbol{\sigma} \text{tr}(\mathbf{D}). \quad (3.7)$$

Na hipótese de incompressibilidade plástica, e uma vez que se considera um comportamento hipoeelástico do material, o termo  $\text{tr}(\mathbf{D})$  pode ser desprezado. Esta simplificação permite a substituição directa de  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  pela derivada objectiva de Jaumann do tensor das tensões,  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J$  (equação (2.27)). Assim, reescreve-se a equação (3.6) na formulação de Mc-Meeking e Rice [1975], isto é:

$$\int_{\Omega} \left\{ (\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J - 2\boldsymbol{\sigma}\mathbf{D}) : \delta \mathbf{D} + (\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}) : \delta \mathbf{L} \right\} d\Omega = \int_{\Sigma_1} \dot{\mathbf{s}}^* \cdot \delta \mathbf{v} d\Sigma_1. \quad (3.8)$$

Esta formulação tem a vantagem de fazer aparecer directamente o tensor das tensões de Cauchy,  $\boldsymbol{\sigma}$ , e os tensores que intervêm na formulação da lei de comportamento elastoplástica (equação (2.45)). Uma vez que a lei de comportamento utilizada não é sensível à velocidade de deformação, a escala temporal não intervêm na formulação do

modelo incremental. Nestas circunstâncias, a derivada temporal de qualquer variável genérica  $\mathcal{G}$ , pode ser substituída pelo seu incremento

$$d\mathcal{G} = \dot{\mathcal{G}}dt. \quad (3.9)$$

O princípio das potências virtuais linearizado em torno da configuração de referência pode ser reescrito na forma seguinte [Menezes 1995]:

$$\int_{\Omega} \left\{ (\mathbf{C}^{\text{ep}} : d\boldsymbol{\varepsilon} - 2\boldsymbol{\sigma}d\boldsymbol{\varepsilon}) : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + (d\mathbf{l}\boldsymbol{\sigma}) : \delta(d\mathbf{l}) \right\} d\Omega = \int_{\Sigma_1} d\mathbf{s}^* \cdot \delta(d\mathbf{u}) d\Sigma_1. \quad (3.10)$$

$\mathbf{C}^{\text{ep}}$  é o módulo elastoplástico tangente definido pela equação (2.47).

### 3.2.1.1 Determinação do Tamanho do Incremento – Estratégia $r_{\min}$

De modo a limitar a ocorrência de divergência durante a fase de *Correcção*, a solução obtida pelo método explícito,  $C_{\text{ensaio}}^{[N,0]}$ , é analisada para determinar se o tamanho do incremento deve ser ou não corrigido. Para tal, adopta-se uma estratégia de  $r_{\min}$  que é uma extensão do método proposto por Yamada *et al.* [1968]. A estratégia consiste na análise das variáveis de estado, bem como na análise da evolução das condições de fronteira da configuração  $C^{[N-1]}$  para a configuração  $C_{\text{ensaio}}^{[N,0]}$ . O controle da solução inicial é feito com o auxílio da variável adimensional  $r_{\min}$ . Na estratégia implementada no programa DD3IMP, o parâmetro  $r_{\min}$  é função de seis critérios de controlo do tamanho do incremento, cada um associado a um coeficiente de redução auxiliar:

1. Incrementos das deformações principais – coeficiente de redução  $r_{\varepsilon}$ ;
2. Normas das rotações incrementais – coeficiente de redução  $r_{\omega}$ ;
3. Incrementos de tensão normal e tangencial – coeficiente de redução  $r_{\sigma}$ ;
4. Mudanças de estatuto de contacto livre para contacto – coeficiente de redução  $r_{\text{ct}}$ ;
5. Mudanças de fase no processo – coeficiente de redução  $r_{\text{fase}}$ ;
6. Valores prescritos de deslocamento ou força para uma ferramenta – coeficiente de redução  $r_{\text{out}}$ .

As três primeiras condições avaliam variáveis de estado em cada ponto de integração, procurando controlar as não-linearidades associadas às grandes deformações, às grandes rotações e à lei de comportamento elastoplástico. Os três coeficientes de redução associados a estes critérios são agrupados num coeficiente de redução global,  $r_{\text{mel}}$ . Este coeficiente de redução global é definido ao nível dos pontos de integração e é combinado com dois outros parâmetros auxiliares,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . O parâmetro  $\alpha_1$  considera a história dos incrementos no cálculo de  $r_{\text{mel}}$ . Ou seja, caso os incrementos anteriores tenham convergido sem dificuldade pode admitir-se uma relaxação do tamanho do incremento ( $\alpha_1 > 1$ ). Por outro lado, quando se trata do primeiro incremento de uma nova fase, uma vez que a experiência mostra que este se caracteriza por uma convergência difícil,  $\alpha_1$  toma valores muito inferiores a 1. O parâmetro  $\alpha_2$  é introduzido de modo a contabilizar as grandes diferenças entre os valores admissíveis na fase de *Previsão* para os incrementos de deformação, rotação e tensão e os determinados na fase de *Correcção*. Consequentemente, o parâmetro  $r_{\text{mel}}$  é calculado como [Alves 2003]

$$r_{\text{mel}} = \alpha_1 \alpha_2 \min \{ r_{\varepsilon}, r_{\omega}, r_{\sigma} \}. \quad (3.11)$$

Conhecido o campo de deslocamentos incrementais  $d\mathbf{u}$ , associado à configuração  $C_{\text{ensaio}}^{[N,0]}$  é possível determinar cada um dos coeficientes de redução. O coeficiente  $r_{\varepsilon}$  corresponde ao mínimo valor obtido do cálculo da expressão

$$r_\varepsilon = \min \left\{ \frac{\Delta \varepsilon_{\max}}{\max \{ |\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_1|, |\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_2|, |\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_3| \}} \right\}, \quad (3.12)$$

em cada ponto de integração.  $\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_1$ ,  $\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_2$  e  $\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}_3$  são as deformações principais no ponto de integração corrente e  $\Delta \varepsilon_{\max}$  representa o incremento máximo de deformação admissível, definido pelo utilizador. Este parâmetro toma, em geral, valores entre 0,01 e 0,05 [Menezes 1995, Alves 2003].

O coeficiente  $r_\omega$  corresponde ao mínimo valor calculado para todos os pontos de integração da seguinte expressão:

$$r_\omega = \min \left\{ \frac{\Delta \omega_{\max}}{|\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}|} \right\}. \quad (3.13)$$

$\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}$  é o incremento de rotação no ponto de integração corrente e  $\Delta \omega_{\max}$  o incremento máximo de rotação admissível, definido pelo utilizador, normalmente entre 0,5° e 2,5° [Menezes 1995, Alves 2003].

Para o cálculo do coeficiente de redução  $r_\sigma$  é necessário decompor o vector incremento de tensão  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$  do ponto de integração corrente nas suas componentes normal ( $\Delta \sigma^n$ ) e tangencial ( $\Delta \sigma^t$ ), em relação à superfície de plasticidade. Deste modo, é possível limitar os incrementos de tensão a uma zona no espaço das tensões definida por

$$\frac{\Delta \sigma^n}{bY} + \frac{|\Delta \sigma^t|}{aY} < 1. \quad (3.14)$$

$a$  e  $b$  são parâmetros reais definidos pelo utilizador. É ainda necessário determinar o ângulo  $\theta$ , entre a normal exterior à superfície de plasticidade e o vector incremento de tensão, que é definido por

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{V} : \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}}{\|\mathbf{V}\| \|\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}\|}. \quad (3.15)$$

O tensor  $\mathbf{V}$  (equação (2.38)) depende do critério de plasticidade adoptado. O coeficiente de redução  $r_\sigma$  corresponde ao valor mínimo da expressão

$$r_\sigma = \min \left\{ \frac{Y}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}\| \left( \frac{\cos \theta}{a} + \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{b} \right)} \right\}, \quad (3.16)$$

que é avaliada para todos os pontos de integração em carregamento plástico. Os parâmetros  $a$  e  $b$  tomam geralmente valores entre 1,0 e 10,0, com uma relação entre ambos de aproximadamente,  $b/a = 3$  [Menezes 1995, Alves 2003].

O coeficiente de redução  $r_{ct}$  controla a evolução das condições de fronteira impostas pelo contacto. Se um determinado nó é livre na configuração  $C^{[N-1]}$  e está em contacto na configuração  $C_{\text{ensaio}}^{[N,0]}$  então o valor de penetração na superfície da ferramenta,  $d^n$ , deve ser avaliado. Deste modo, define-se o coeficiente  $r_{ct}$  como o valor mínimo da expressão

$$r_{ct} = \min \left\{ \frac{\Delta d_{\max}^n}{-d^n} \right\}, \quad (3.17)$$

calculada para todos os nós nessas condições.  $\Delta d_{\max}^n$  corresponde ao valor máximo admissível de penetração e que deve ser fixo entre 0,01 e 0,1 [Alves 2003].

Os restantes coeficientes de redução,  $r_{\text{fase}}$  e  $r_{\text{out}}$ , dependem exclusivamente das condições do processo. Entretanto, a eficiência da simulação em termos de tempo de cálculo fica claramente comprometida para um tamanho do incremento demasiado pequeno. Para um tamanho de incremento demasiado grande não é possível assegurar a convergência do processo iterativo. Assim, é necessário definir um limite inferior e um limite superior para o cálculo do parâmetro  $r_{\text{min}}$ , isto é  $r_{\text{min}} \in [r_{\text{inf}}, r_{\text{sup}}]$ . Deduz-se então a expressão seguinte para a determinação deste parâmetro,

$$r_{\text{min}} = \max \left\{ \min \left\{ r_{\text{mel}}, r_{\text{ct}}, r_{\text{fase}}, r_{\text{out}}, r_{\text{sup}} \right\}, r_{\text{inf}} \right\}. \quad (3.18)$$

### 3.2.2 Correção: Cálculo Implícito

A solução obtida na fase de *Previsão*,  $C^{[N,0]}$ , não satisfaz nem o princípio variacional nem a lei de comportamento para o instante  $t + \Delta t$ . Isto porque é obtida a partir da linearização do princípio variacional em torno da configuração de referência, sem tomar em consideração a configuração final. Como o problema em causa é fortemente não-linear, torna-se indispensável proceder à correção da solução obtida na fase de *Previsão*. Ou seja, é necessário impor as equações de equilíbrio e a condição de coerência para a configuração correspondente ao instante  $t + \Delta t$ , que é desconhecida *a priori*. Para tal, recorre-se ao método implícito de Newton-Raphson, que determina a configuração  $C^{[N]}$  por aproximações sucessivas  $C^{[N,j]}$ , sendo  $j$  o número da iteração de equilíbrio.

O método de Newton-Raphson tem por base a minimização das forças não-equilibradas ou resíduos. O resíduo é uma função não-linear dos deslocamentos incrementais  $\Delta \mathbf{u}$  e pode escrever-se na forma

$$\mathcal{R}(\Delta \mathbf{u}) = \mathbf{0}. \quad (3.19)$$

Admitindo como conhecida uma aproximação inicial  $\Delta \mathbf{u}^{[0]}$ , pode construir-se uma nova aproximação linear de  $\mathcal{R}(\Delta \mathbf{u})$  por desenvolvimento em série de Taylor, na vizinhança de  $\Delta \mathbf{u}^{[0]}$  denominada  $\Delta \mathbf{u}^{[1]}$ . Desprezando no desenvolvimento os termos de ordem superior a um obtém-se

$$\mathcal{R}(\Delta \mathbf{u}) \approx \mathcal{R}(\Delta \mathbf{u}^{[1]}) = \mathcal{R}(\Delta \mathbf{u}^{[0]}) + \mathcal{J}(\Delta \mathbf{u}^{[0]})(\Delta \mathbf{u}^{[1]} - \Delta \mathbf{u}^{[0]}), \quad (3.20)$$

em que  $\mathcal{J}(\nabla \mathbf{u}^{[0]})$  é a matriz jacobiana de  $\mathcal{R}$ , dada por

$$\mathcal{J}(\Delta \mathbf{u}^{[0]}) = \left. \frac{\partial \mathcal{R}(\Delta \mathbf{u})}{\partial (\Delta \mathbf{u})} \right|_{\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}^{[0]}}. \quad (3.21)$$

Para melhorar a aproximação à solução do sistema de equações procede-se de forma iterativa, isto é, assumindo que numa iteração genérica  $j$ ,  $\mathcal{R}(\Delta \mathbf{u}^{[j]}) = \mathbf{0}$ , tem-se que:

$$\mathcal{R}(\Delta \mathbf{u}^{[j-1]}) + \mathcal{J}(\Delta \mathbf{u}^{[j-1]})\mathbf{u}^{[j]} = \mathbf{0}, \quad \text{com} \quad \mathbf{u}^{[j]} = \Delta \mathbf{u}^{[j]} - \Delta \mathbf{u}^{[j-1]}. \quad (3.22)$$

Para que a sucessão de iterações seja convergente é necessário que a solução inicial  $\Delta \mathbf{u}^{[0]}$ , seja suficientemente próxima da solução do problema, o que justifica o recurso à estratégia  $r_{\text{min}}$ , descrita na secção anterior.

Para o problema em análise conhece-se a configuração de referência  $C^{[N-1]}$ , para o instante  $t$ , que satisfaz o princípio variacional (equação (2.89)), bem como a lei de comportamento (equação (2.45)). O método explícito, apresentado na secção anterior,

permite calcular os deslocamentos incrementais  $\Delta \mathbf{u}^{[0]}$ , que definem a configuração  $C^{[N,0]}$ , para o instante  $t + \Delta t$ . Esta configuração é dada por

$$\mathbf{x}^{[N,0]} = \mathbf{x}^{[N-1]} + \Delta \mathbf{u}^{[0]}. \quad (3.23)$$

Este campo de coordenadas espaciais permite calcular as deformações e rotações incrementais e integrar a lei de comportamento. Determinam-se então as tensões e as deformações para o instante  $t + \Delta t$ . Da linearização do princípio das potências virtuais, na vizinhança da configuração final definida por  $C^{[N,0]}$ , resulta um sistema de equações cujas incógnitas são o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}^{[1]}$ . Uma vez resolvido o sistema é possível calcular os deslocamentos incrementais corrigidos  $\Delta \mathbf{u}^{[1]}$ , dados por

$$\Delta \mathbf{u}^{[1]} = \Delta \mathbf{u}^{[0]} + \mathbf{u}^{[1]}. \quad (3.24)$$

Este campo de deslocamentos permite definir uma nova configuração  $C^{[N,1]}$ , para o instante de tempo  $t + \Delta t$ , dada pelo campo de coordenadas espaciais

$$\mathbf{x}^{[N,1]} = \mathbf{x}^{[N-1]} + \Delta \mathbf{u}^{[1]}. \quad (3.25)$$

Esta nova configuração permite reavaliar as variáveis de estado, de modo a obter uma nova correcção  $\mathbf{u}^{[2]}$  e definir uma configuração  $C^{[N,2]}$ . Procede-se deste modo, sucessivamente, até atingir a convergência no incremento. Ou seja, em cada iteração  $j$ , recalculam-se as variáveis de estado e resolve-se um sistema de equações lineares que conduzem a uma correcção ao campo de deslocamentos  $\mathbf{u}^{[j]}$ , que permite definir uma configuração corrigida  $C^{[N,j]}$  dada por

$$\mathbf{x}^{[N,j]} = \mathbf{x}^{[N-1]} + \Delta \mathbf{u}^{[j]} \quad \text{com} \quad \Delta \mathbf{u}^{[j]} = \Delta \mathbf{u}^{[j-1]} + \mathbf{u}^{[j]}. \quad (3.26)$$

Os sistemas de equações de equilíbrio são mistos, isto é, para além dos deslocamentos  $\mathbf{u}^{[j]}$ , são também incógnitas as forças de contacto  $d\lambda^{[j]}$  (ver secção 5.4). O procedimento para avaliar as forças de contacto é análogo ao descrito para os deslocamentos.

Tabela 3.3 – Algoritmo da fase de *Correcção* do programa DD3IMP.

<p>INÍCIO da fase de <i>Correcção</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Inicializar o contador das iterações de equilíbrio <math>j = 1</math>.</li> </ul> <p>REPETIR</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Actualizar condições de contacto com atrito.</li> <li>2. Calcular incrementos de deformação e rotação.</li> <li>3. Integrar lei de comportamento do material.</li> <li>4. Calcular a matriz de rigidez <math>[K]^{[j-1]}</math> e o vector de forças não-equilibradas <math>\{F\}^{[j-1]}</math>.</li> </ol> <p>SE <math> \{F\}^{[j-1]}  &gt; TOLEQ</math> ENTÃO</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▫ Resolver o sistema de equações <math>[K]^{[j-1]} \{u, d\lambda\}^{[j]} = \{F\}^{[j-1]}</math>.</li> <li>▫ Incrementar o número de iterações de equilíbrio <math>j = j + 1</math>.</li> </ul> <p>SENÃO</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▫ Sair do algoritmo de <i>Correcção</i>.</li> </ul> <ol style="list-style-type: none"> <li>6. Reactualizar configuração <math>C^{[N,j]}</math> e variáveis de estado.</li> </ol> <p>ATÉ <math> \{F\}^{[j-1]}  \leq TOLEQ</math>.</p> <p>FIM</p>
--



O processo iterativo converge para uma configuração  $C^{[N,j]}$ , para a qual as forças não-equilibradas atingem um valor inferior ao limite imposto (*TOLEQ*). Essa configuração é definida como a configuração final  $C^{[M]}$ , e configuração de referência para o incremento seguinte. Na Tabela 3.3 apresenta-se o algoritmo da fase de *Correcção*.

### 3.2.2.1 Integração da Lei de Comportamento

Após a determinação de cada nova correcção aos campos de deslocamento e de forças de contacto é necessário proceder ao cálculo das deformações e rotações incrementais e à actualização das variáveis de estado. Em grandes transformações a lei de comportamento deve ser integrada no referencial de ortotropia. Tendo por base as hipóteses enunciadas no Capítulo 2, deve proceder-se a uma rotação elástica  $\mathbf{R}$  das grandezas intervenientes (equação (2.22)). Uma vez que se considera que o comportamento elástico do material é isotrópico, a lei de comportamento hipoeelástica (equação (2.25)) pode ser reescrita, no referencial de ortotropia como

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} = C^e : (\hat{\mathbf{D}} - \hat{\mathbf{D}}^p) \quad \text{com} \quad C^e = \hat{C}^e. \quad (3.27)$$

A integração desta equação no intervalo de tempo  $[t, t + \Delta t]$  conduz ao incremento de tensão

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_F - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 = C^e : \Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - C^e : \Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p. \quad (3.28)$$

em que os índices 0 e F traduzem os instantes  $t$  e  $t + \Delta t$ , respectivamente. Para determinar  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_F$  é necessário calcular o tensor incremento de deformação  $\Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , dado pela expressão

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \int_t^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{D}} dt, \quad (3.29)$$

e o tensor incremento de deformação plástica  $\Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ , dado por

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \int_t^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{D}}^p dt. \quad (3.30)$$

A avaliação destes tensores obriga ao cálculo das deformações e rotações incrementais. Para tal, designam-se por  $\mathbf{x}_n$  e  $\mathbf{x}_{n+1}$  os vectores de posição correspondentes às configurações nos instantes  $t$  e  $t + \Delta t$ , respectivamente, e assume-se uma variação linear das coordenadas dos pontos materiais no intervalo de tempo  $[t, t + \Delta t]$ , de acordo com o proposto por Hughes e Winget [1980], ou seja:

$$\mathbf{x}_{n+\gamma} = (1 - \gamma) \mathbf{x}_n + \gamma \mathbf{x}_{n+1} \quad \text{com} \quad \gamma \in [0, 1]. \quad (3.31)$$

O vector dos deslocamentos incrementais é, por definição:

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n. \quad (3.32)$$

Define-se o gradiente dos deslocamentos incrementais como

$$\mathbf{G}_\gamma = \frac{\partial(\Delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}_{n+\gamma}} = (\mathbf{I} - \gamma \mathbf{G}_0)^{-1} \mathbf{G}_0 = [\mathbf{I} - (1 - \gamma) \mathbf{G}_1]^{-1} \mathbf{G}_1. \quad (3.33)$$

O incremento de deformação é definido por [Hughes e Winget 1980]:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{G}_\gamma + \mathbf{G}_\gamma^T) = \frac{1}{2} \left\{ [\mathbf{I} - (1 - \gamma) \mathbf{G}_1]^{-1} \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_1^T [\mathbf{I} - (1 - \gamma) \mathbf{G}_1]^{-T} \right\}. \quad (3.34)$$

$\Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  obtém-se da rotação de  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ , isto é

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{R}_0^T \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{R}_0, \quad (3.35)$$

sendo  $\mathbf{R}_0$  o tensor de rotação dos eixos de ortotropia no início do incremento.  $\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  é o incremento de deformação  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ , rodado com a rotação incremental  $\mathbf{r}_\gamma$  [Hughes e Winget 1980]:

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{r}_\gamma^T \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r}_\gamma. \quad (3.36)$$

A rotação incremental  $\mathbf{r}$  é igual à rotação incremental associada à velocidade de rotação  $\mathbf{W}$  [Hughes e Winget 1980]. A integração da equação diferencial  $\dot{\mathbf{r}} \mathbf{r}^T = \mathbf{W}$ , pelo método do ponto médio generalizado, conduz então a

$$\mathbf{r}_\gamma = \mathbf{I} + (\mathbf{I} - \gamma \mathbf{W}_\gamma)^{-1} \mathbf{W}_\gamma, \quad (3.37)$$

uma vez que  $\mathbf{r} = \mathbf{I}$  para o instante inicial  $t$ . Por definição

$$\mathbf{W}_\gamma = \frac{1}{2} (\mathbf{G}_\gamma - \mathbf{G}_\gamma^T). \quad (3.38)$$

Segundo Hughes e Winget [1980] para  $\gamma = 1/2$  obtém-se a melhor aproximação para os tensores de deformação e rotação incrementais. Considera-se então  $\gamma = 1/2$  no desenvolvimento em série das expressões (3.34) e (3.37). Desprezando todos os termos de ordem superior a 2 em  $|\mathbf{G}_1|$ , obtém-se [Cao 1990]

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_1^T) + \frac{1}{4} (\mathbf{G}_1^2 - \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_1^T + (\mathbf{G}_1^T)^2 + \mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1), \quad (3.39)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{I} + \frac{1}{2} (\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_1^T) + \frac{1}{8} (3\mathbf{G}_1^2 - (\mathbf{G}_1^T)^2 - \mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_1^T). \quad (3.40)$$

A rotação incremental  $\mathbf{r}$  permite, igualmente, proceder à actualização da rotação elástica inicial  $\mathbf{R}_0$ . A rotação do referencial de ortotropia para o instante  $t + \Delta t$  é dada por

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} \mathbf{R}_0. \quad (3.41)$$

A avaliação do tensor das deformações plásticas incrementais  $\Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ , é efectuada a partir do cálculo do integral (3.30). Neste cálculo é necessário admitir uma função de evolução para a variável  $\hat{\mathbf{D}}^p$ , pelo que se recorre ao método do ponto médio generalizado, obtendo-se:

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \int_t^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{D}}^p dt = \Delta t \hat{\mathbf{D}}^p \Big|_{t+\gamma \Delta t} \quad \text{com} \quad \gamma \in [0,1]. \quad (3.42)$$

Uma vez que  $\hat{\mathbf{D}}^p = \lambda \hat{\mathbf{V}}$ , a expressão anterior pode reescrever-se na forma:

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \Delta \lambda \hat{\mathbf{V}}_\gamma \quad \text{com} \quad \hat{\mathbf{V}}_\gamma = (1-\gamma) \hat{\mathbf{V}}_0 + \gamma \hat{\mathbf{V}}_F. \quad (3.43)$$

A escolha do parâmetro  $\gamma$  influencia a precisão do cálculo do integral (3.42). Neste caso adopta-se uma aproximação completamente implícita, ou seja  $\gamma = 1$ , visto corresponder a uma solução mais estável [Cao 1990]. Para calcular  $\Delta \lambda$  e  $\hat{\mathbf{V}}_F$  é necessário proceder à determinação de  $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F)$ . Para determinar  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_F$  retoma-se a equação (3.28). A componente desviadora é dada por

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F = \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_0 + 2G \Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}' - 2G \Delta \lambda \hat{\mathbf{V}}_F, \quad (3.44)$$

enquanto que para a componente hidrostática se obtém

$$\text{tr}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_F) = \text{tr}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0) + \frac{E}{1+2\nu}(\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}). \quad (3.45)$$

A determinação do tensor das tensões inversas  $\hat{\mathbf{X}}_F$  depende da lei adoptada para a descrição do encruamento cinemático. Caso se adopte a lei de Prager:

$$\hat{\mathbf{X}}_F = \hat{\mathbf{X}}_0 + k\Delta\lambda\hat{\mathbf{V}}_F. \quad (3.46)$$

Subtraindo a expressão anterior à equação (3.44) obtém-se

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F = \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_0 - \hat{\mathbf{X}}_0 + 2G\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}' - (k+2G)\Delta\lambda\hat{\mathbf{V}}_F. \quad (3.47)$$

Caso se adopte a lei proposta por Lemaître e Chaboche:

$$\hat{\mathbf{X}}_F = \hat{\mathbf{X}}_0 + \left[ \frac{X_{\text{sat}}}{\bar{\sigma}} (\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F) - \hat{\mathbf{X}}_0 \right] (1 - e^{-C_x \Delta\bar{\varepsilon}^p}). \quad (3.48)$$

Subtraindo a expressão anterior à equação (3.44) obtém-se

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F = \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_0 - \hat{\mathbf{X}}_0 + 2G\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}' - 2G\Delta\lambda\hat{\mathbf{V}}_F + \left[ \frac{X_{\text{sat}}}{\bar{\sigma}} (\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F) - \hat{\mathbf{X}}_0 \right] (1 - e^{-C_x \Delta\bar{\varepsilon}^p}). \quad (3.49)$$

Nas expressões (3.47) e (3.49) as incógnitas são o tensor  $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F)$  e o incremento de deformação plástica equivalente  $\Delta\bar{\varepsilon}^p$ , uma vez que  $\Delta\bar{\varepsilon}^p = \Delta\lambda$  (equação (2.42)). Para determinar estas incógnitas impõe-se a condição de coerência para a configuração no final do incremento, isto é,

$$\bar{\sigma}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F) - Y_F(\bar{\varepsilon}_0^p + \Delta\bar{\varepsilon}^p) = 0, \quad (3.50)$$

em que  $Y_F(\bar{\varepsilon}_0^p + \Delta\bar{\varepsilon}^p)$  é função da lei de encruamento isotrópico. Deste modo define-se um sistema de equações não-lineares em  $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F)$  e  $\Delta\bar{\varepsilon}^p$ ,

$$\mathcal{Q}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F, \Delta\bar{\varepsilon}^p) = \begin{bmatrix} \mathcal{G} \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

A função  $\mathcal{G}$  depende da lei de encruamento cinemático seleccionada. Para a lei de Prager corresponde à função definida na equação (3.47) e para a lei de Lemaître e Chaboche é a função da equação (3.49). A função  $g$  é definida pelo primeiro membro da equação (3.50).

O sistema de equações definido em (3.51) é não-linear pelo que se recorre ao método iterativo de Newton-Raphson para a sua resolução. Tal obriga, em cada iteração, a determinar  $\mathcal{Q}$  e a matriz jacobiana definida por

$$\mathcal{J}(\mathcal{Q}) = \begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial (\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F)} \right] & \left[ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \Delta\bar{\varepsilon}^p} \right] \\ \left[ \frac{\partial g}{\partial (\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F)} \right] & \frac{\partial g}{\partial \Delta\bar{\varepsilon}^p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{c} \\ \mathbf{b}^T & d \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

No algoritmo de actualização das variáveis de estado implementado no programa DD3IMP, o tratamento matemático da plasticidade, em cada ponto de integração, é realizado num espaço desviador pentadimensional [Alves 2003]. Assim, o número de incógnitas do sistema de equações definido em (3.52) é 6: 5 componentes do tensor  $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F)$  e o incremento de deformação plástica equivalente  $\Delta\bar{\varepsilon}^p$ . Nestas circunstâncias,

$\mathbf{A}$  é uma matriz quadrada de dimensão 5,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  são vectores de dimensão 5 e  $d$  é um escalar. O método de Newton-Raphson necessita de uma solução inicial. No algoritmo implementado no programa DD3IMP, o incremento de deformação plástica equivalente é inicializado a zero. Para valor inicial do tensor  $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F)$  considera-se apenas a componente elástica da equação (3.44). Na Tabela 3.4 apresenta-se um resumo do algoritmo de actualização das variáveis de estado  $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F)$  e  $\Delta\bar{\varepsilon}^p$ , em cada ponto de integração.

Tabela 3.4 – Algoritmo de Newton-Raphson para a actualização das variáveis de estado  $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F)$  e  $\Delta\bar{\varepsilon}^p$ , em cada ponto de integração.

<p><b>1.</b> Inicializar <math>(\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F, \Delta\bar{\varepsilon}^p)</math>, assumindo que:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▫ <math>\Delta\bar{\varepsilon}^p = 0</math>;</li> <li>▫ <math>\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F = \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_0 - \hat{\mathbf{X}}_0 + 2G\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'</math>;</li> </ul> <p><b>2.</b> Inicializar o contador das iterações <math>k = 1</math>.</p> <p>REPETIR</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▫ Calcular <math>\mathcal{Q}^{[k]} = \mathcal{Q}\left((\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F)^{[k]}, \Delta\bar{\varepsilon}^{p[k]}\right)</math>.</li> <li>▫ Calcular a matriz <math>\mathcal{J}\left(\mathcal{Q}^{[k]}\right)</math>.</li> <li>▫ Resolver o sistema <math>\mathcal{J}\left(\mathcal{Q}^{[k]}\right)\left[\Delta(\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F)^{[k+1]}, \Delta(\Delta\bar{\varepsilon}^{p[k+1]})\right] = -\mathcal{Q}^{[k]}</math>.</li> <li>▫ Actualizar as variáveis de estado: <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>\Delta\bar{\varepsilon}^{p[k+1]} = \Delta\bar{\varepsilon}^{p[k]} + \Delta(\Delta\bar{\varepsilon}^{p[k+1]})</math>;</li> <li>▪ <math>(\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F)^{[k+1]} = (\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F)^{[k]} + \Delta(\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F)^{[k+1]}</math>;</li> </ul> </li> <li>▫ Incrementar o contador da iteração <math>k = k + 1</math>.</li> </ul> <p>ATÉ <math>\left \Delta(\Delta\bar{\varepsilon}^{p[k+1]})\right  &lt; \varepsilon_{\text{tol}}</math>.</p>
---

Na equação (3.52) o vector  $\mathbf{b}$  é igual a  $\hat{\mathbf{V}}_F$ , de acordo com a expressão (2.38). A definição de módulo de encruamento isotrópico (equação (2.44)) permite concluir que o escalar  $d = -H'$ . A matriz  $\mathbf{A}$  e o vector  $\mathbf{c}$  dependem da lei de encruamento cinemático seleccionada [Alves 2003]. Ao optar-se pela lei de Prager

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_4 + (k + 2G)\Delta\bar{\varepsilon}^p\hat{\mathbf{Q}}_F \quad \text{e} \quad \mathbf{c} = \hat{\mathbf{V}}_F, \quad (3.53)$$

onde

$$\hat{\mathbf{Q}}_F = \frac{\partial^2 \bar{\sigma}}{\partial (\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F)^2}, \quad (3.54)$$

Caso se opte pela lei de encruamento cinemático de Lemaître e Chaboche:

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_4 + 2G\Delta\bar{\varepsilon}^p\hat{\mathbf{Q}}_F + \frac{X_{\text{sat}}}{\bar{\sigma}}\left(1 - e^{-C_x\Delta\bar{\varepsilon}^p}\right)\mathbf{I}_4, \quad (3.55)$$

$$\mathbf{c} = 2G\hat{\mathbf{V}}_F + C_x e^{-C_x\Delta\bar{\varepsilon}^p} \left[ \frac{X_{\text{sat}}}{\bar{\sigma}} (\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F) - \hat{\mathbf{X}}_0 \right]. \quad (3.56)$$

A definição dos tensores  $\hat{\mathbf{V}}_F$  e  $\hat{\mathbf{Q}}_F$  depende do critério de plasticidade seleccionado [Alves 2003]. Para o critério de Hill'48 o tensor  $\hat{\mathbf{V}}_F$  foi já definido na equação (2.77). O tensor  $\hat{\mathbf{Q}}_F$  é dado por

$$\hat{\mathbf{Q}}_{\text{Hill'48}} = \frac{\partial^2 \bar{\sigma}}{\partial (\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F)^2} = \frac{\hat{\mathbf{M}} \bar{\sigma} - [\hat{\mathbf{M}} : (\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F)] \otimes \hat{\mathbf{V}}}{\bar{\sigma}}. \quad (3.57)$$

Para critérios de plasticidade quadráticos, como é exemplo o critério de Hill'48, é possível obter expressões analíticas para a variável de estado  $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F)$ . Este tensor é calculado em função dos seus valores no início do incremento, e do incremento de deformação plástica equivalente,  $\Delta \bar{\epsilon}^p$ . Este é determinado pela resolução iterativa da equação (3.50), que resulta da imposição da condição de coerência [Menezes 1995].

Na Tabela 3.5 apresenta-se um resumo do algoritmo de integração da lei de comportamento elastoplástico descrito nesta secção. No algoritmo adoptado recorre-se a um parâmetro numérico  $\beta \in [0,1]$ , que identifica a percentagem do incremento de deformação  $\Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'$  que ocorre em regime elástico. Se todo o incremento ocorre em regime elastoplástico  $\beta = 0$ . Se  $\beta = 1$ , todo o incremento é efectuado no domínio elástico. Caso o incremento de tensão se inicie em regime elástico é então necessário calcular o ponto de intersecção

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_0)^* = \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_0 + \beta 2G \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}' \quad (3.58)$$

entre a superfície limite de elasticidade no início do incremento e as tensões de ensaio.  $\beta$  é tal que,  $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_0)^*$  verifica a condição de coerência:  $\bar{\sigma}[(\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_0)^* - \hat{\mathbf{X}}_0] - Y_0 = 0$ .

Tabela 3.5 – Algoritmo de integração da lei de comportamento elastoplástico.

1. Calcular  $\Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}$  e  $\mathbf{R}$ .
2. Calcular  $\text{tr}(\Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}})$  e  $\Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'$ .
3. Rodar os tensores  $\boldsymbol{\sigma}'_0$  e  $\mathbf{X}$ , para o referencial de ortotropia.
4. Inicializar o estado de tensão efectivo desviador de ensaio:  
 $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}' - \hat{\mathbf{X}})'_T = \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_0 - \hat{\mathbf{X}}_0 + 2G \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'$ .
5. Calcular a tensão equivalente,  $\bar{\sigma}_T$ .  
 SE  $\bar{\sigma}_T \leq Y_0$  ENTÃO
  - Actualizar  $\hat{\mathbf{X}}_F = \hat{\mathbf{X}}_0$ ;
  - Actualizar  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F = (\hat{\boldsymbol{\sigma}}' - \hat{\mathbf{X}})'_T + \hat{\mathbf{X}}_0$ ;
 SENÃO
  - SE  $\bar{\sigma}_0 \leq Y_0$ , ENTÃO
    - Calcular  $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_0)^* = \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_0 + \beta 2G \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'$  e  $\beta$ .
      - Corrigir  $\Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}' = (1 - \beta) \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'$ ;
      - Corrigir  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_0 = (\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_0)^*$ ;
    - Calcular o estado de tensão efectivo desviador final  $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F)$  e o incremento de deformação plástica  $\Delta \bar{\epsilon}^p$ .
    - Actualizar  $\hat{\mathbf{X}}_F$ .
    - Actualizar  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F = (\hat{\boldsymbol{\sigma}}' - \hat{\mathbf{X}})'_F + \hat{\mathbf{X}}_F$ .
6. Voltar ao referencial global.
7. Actualizar  $\boldsymbol{\sigma}_F = \boldsymbol{\sigma}'_F + [1/3 \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_0) + K \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\epsilon})] \mathbf{I}$ .

### 3.2.2.2 Linearização do Princípio das Potências Virtuais

Uma vez conhecida uma primeira aproximação para a configuração e estado do corpo deformável no instante  $t + \Delta t$ , torna-se necessário proceder à linearização do princípio das potências virtuais, na vizinhança da configuração final. A linearização do princípio variacional entre as configurações  $C^{[N,j]}$  e  $C^{[N,j+1]}$  é necessária para a resolução do sistema definido em (3.22) com o auxílio do método iterativo de Newton-Raphson. Para assegurar a convergência quadrática deste método implícito é necessário que o módulo elastoplástico seja consistente. Ou seja, a forma linearizada do princípio das potências virtuais tem de ser determinada utilizando as mesmas aproximações consideradas no cálculo das deformações e das tensões incrementais [Simo e Taylor 1984].

A forma linearizada do princípio das potências virtuais na vizinhança da configuração  $C^{[N,j]}$  é dada por [Menezes 1995]

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^j} \left[ \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^j (\text{div}\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}^j (\text{gradu})^T \right] : (\text{grad}\delta\mathbf{v}) d\Omega^j \\ = \int_{\Sigma_1^j} \mathbf{t}^{*N} \cdot \delta\mathbf{v} d\Sigma_1^j - \int_{\Omega^j} \boldsymbol{\sigma}^j : (\text{grad}\delta\mathbf{v}) d\Omega^j, \end{aligned} \quad (3.59)$$

em que os operadores divergência ( $\text{div}$ ) e gradiente ( $\text{grad}$ ) são calculados em relação a  $\mathbf{x}^j$ . O operador  $\mathbf{D}$  designa o incremento de uma grandeza genérica linearizada em relação ao incremento de deslocamento  $\mathbf{u}$ .  $\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}$  deve ser determinado com as mesmas aproximações utilizadas no cálculo das deformações e tensões incrementais. Assim,

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R}^j (\mathbf{D}\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{R}^{jT} + (\mathbf{D}\mathbf{W})\boldsymbol{\sigma}^j - \boldsymbol{\sigma}^j (\mathbf{D}\mathbf{W}), \quad (3.60)$$

em que

$$\mathbf{D}\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{C}}^{\text{ep}} : \mathbf{D}(\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}), \quad (3.61)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{W} = (\text{gradu})^A + \left[ (\text{gradu})^S \mathbf{G}_1^{jS} \right]^A, \quad (3.62)$$

$$\mathbf{D}(\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \mathbf{R}^{jT} (\text{gradu})^S \mathbf{R}^j, \quad (3.63)$$

$$\mathbf{G}_1^j = \frac{\partial(\Delta\mathbf{u}^j)}{\partial\mathbf{x}^j}. \quad (3.64)$$

O modelo mecânico considerado assume que a deformação plástica ocorre sem variação de volume, e que o seu valor é significativamente maior do que o valor da deformação elástica. Isto levanta dificuldades na resolução numérica conduzindo a que, os erros cometidos no cálculo da deformação volúmica sejam compensados por uma deformação volúmica de natureza elástica. Tal introduz tensões hidrostáticas artificialmente elevadas. Para contornar este efeito numérico pode recorrer-se, por exemplo, a um esquema de integração numérica que permite tratar as componentes hidrostáticas de forma diferenciada das componentes desviadoras. No método  $\bar{B}$ , proposto por Hughes [1980], assume-se a decomposição do tensor gradiente de transformação  $\mathbf{F}$  em

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^v \mathbf{F}' = J^{1/3} \mathbf{F}', \quad (3.65)$$

em que  $\mathbf{F}^v$  é a componente volúmica dada por  $\mathbf{F}^v = J^{1/3} \mathbf{I}$  e  $J$  é o determinante do tensor  $\mathbf{F}$ .  $\mathbf{F}'$  é a componente desviadora definida por  $\mathbf{F}' = J^{-1/3} \mathbf{F}$ . A base do método  $\bar{B}$  consiste

na substituição de  $J$  por uma outra quantidade  $\bar{J}$ , a definir na secção 3.3.2.2. Então, substitui-se  $\mathbf{F}$  por

$$\bar{\mathbf{F}} = \left( \frac{\bar{J}}{J} \right)^{1/3} \mathbf{F}. \quad (3.66)$$

Com esta nova definição para o gradiente de transformação,  $\bar{\mathbf{F}}$ , é possível determinar novos gradientes de velocidade  $\bar{\mathbf{L}}$  e de velocidade de deformação  $\bar{\mathbf{D}}$ .

A utilização destas novas relações na forma incremental do princípio variacional, definido na equação (3.59), conduz à seguinte expressão [Menezes 1995]

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^j} \left[ \mathbf{D}\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^j (\overline{\text{divu}}) - \bar{\boldsymbol{\sigma}}^j (\overline{\text{gradu}})^T \right] : (\overline{\text{grad}\delta\mathbf{v}}) d\Omega^j \\ & + \int_{\Omega^j} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^j : \left[ \mathbf{D}(\overline{\text{grad}\delta\mathbf{v}}) + (\overline{\text{grad}\delta\mathbf{v}})(\overline{\text{gradu}}) \right] d\Omega^j \\ & = \int_{\Sigma_1^j} \mathbf{t}^{*N} \cdot \delta\mathbf{v} d\Sigma_1^j - \int_{\Omega^j} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^j : (\overline{\text{grad}\delta\mathbf{v}}) d\Omega^j, \end{aligned} \quad (3.67)$$

em que

$$\mathbf{D}\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{\text{ep}} : (\overline{\text{gradu}})^S + (\mathbf{D}\mathbf{W})\bar{\boldsymbol{\sigma}}^j - \bar{\boldsymbol{\sigma}}^j (\mathbf{D}\mathbf{W}), \quad (3.68)$$

$$(\overline{\text{gradu}}) = \text{gradu} + \frac{1}{3} (\overline{\text{divu}} - \text{divu}) \mathbf{I}, \quad (3.69)$$

$$\mathbf{D}(\overline{\text{grad}\delta\mathbf{v}}) = -(\text{grad}\delta\mathbf{v})(\text{gradu}) + \frac{1}{3} \left[ \mathbf{D}(\overline{\text{div}\delta\mathbf{v}}) - \mathbf{D}(\text{div}\delta\mathbf{v}) \right] \mathbf{I}, \quad (3.70)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{W} = (\overline{\text{gradu}})^A + \left[ (\overline{\text{gradu}})^S \bar{\mathbf{G}}_1^{jS} \right]^A, \quad (3.71)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_1^j = \overline{\text{grad}}(\Delta\mathbf{u}^j). \quad (3.72)$$

### 3.2.2.3 Módulo Elastoplástico Consistente

Para explicitar  $D\boldsymbol{\sigma}$  ou  $D\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ , e concluir a linearização do princípio variacional em torno da configuração final, resta definir o módulo elastoplástico consistente, nas relações (3.61) e (3.68),  $\hat{\mathbf{C}}^{\text{ep}}$  e  $\mathbf{C}^{\text{ep}}$ , definido no referencial de ortotropia e global, respectivamente. A linearização da expressão (3.44) em torno de  $\mathbf{u}$ , conduz à relação [Alves 2003]

$$\mathbf{D}\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F = \left[ 2\mu\mathbf{I}_4 - 4\mu^2 \left( \frac{\hat{\mathbf{V}}_F \otimes \hat{\mathbf{V}}_F}{H'_F} + \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \hat{\mathbf{Q}}_F \right) \boldsymbol{\Lambda} \right] : \mathbf{D}(\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'). \quad (3.73)$$

O tensor  $\boldsymbol{\Lambda}$  depende da lei de encruamento adoptada. Como o incremento de deformação  $\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'$  pode ocorrer simultaneamente em regime elástico e elastoplástico, recorre-se ao parâmetro  $\beta \in [0,1]$ , definido anteriormente. O tensor das tensões incremental pode então ser decomposto da seguinte forma

$$\mathbf{D}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_0) = \beta\mathbf{C}^e : \mathbf{D}(\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}') + (1-\beta)\hat{\mathbf{C}}^{\text{ep}*} : \mathbf{D}(\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'). \quad (3.74)$$

Atendendo às expressões anteriores é possível deduzir que:

$$\hat{\mathbf{C}}^{\text{ep}} = \beta\mathbf{C}^e + (1-\beta)\hat{\mathbf{C}}^{\text{ep}*}. \quad (3.75)$$

Então, o módulo elastoplástico consistente pode ser determinado como [Alves 2003]:

$$\hat{\mathbf{C}}^{\text{ep}} = \mathbf{C}^e - 4G^2(1-\beta) \left( \frac{\hat{\mathbf{V}}_F \otimes \hat{\mathbf{V}}_F}{H'_F} + \Delta\bar{\varepsilon}^p \hat{\mathbf{Q}}_F \right) \mathbf{\Lambda}. \quad (3.76)$$

O módulo de encruamento isotrópico  $H'$  foi definido na secção 2.2.2.1, para as diferentes leis de encruamento isotrópico. Os tensores  $\hat{\mathbf{V}}$  e  $\hat{\mathbf{Q}}$ , que dependem do critério de plasticidade seleccionado, foram apresentados na secção 3.2.2.1 para o critério de Hill'48. O tensor  $\mathbf{\Lambda}$  depende directamente da lei de encruamento cinemático adoptada no modelo constitutivo. Caso se opte pela lei de Prager o tensor  $\mathbf{\Lambda}$  é dado por

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} \Big|_{\text{Prager}} = \mathbf{I}_4 + (k + 2G) \left( \frac{\hat{\mathbf{V}}_F \otimes \hat{\mathbf{V}}_F}{H'_F} + \Delta\bar{\varepsilon}^p \hat{\mathbf{Q}}_F \right). \quad (3.77)$$

Caso se opte pela lei de encruamento cinemático de Lemaître e Chaboche tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}^{-1} \Big|_{\text{LeC}} = & \frac{\bar{\sigma} + X_{\text{sat}} \left( 1 - e^{-C_X \Delta\bar{\varepsilon}^p} \right)}{\bar{\sigma}} \mathbf{I}_4 + 2G \left( \frac{\hat{\mathbf{V}}_F \otimes \hat{\mathbf{V}}_F}{H'_F} + \Delta\bar{\varepsilon}^p \hat{\mathbf{Q}}_F \right) \\ & + \frac{C_X e^{-C_X \Delta\bar{\varepsilon}^p}}{H'_F} \left[ \frac{X_{\text{sat}}}{\bar{\sigma}} \left( \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_F - \hat{\mathbf{X}}_F \right) - \hat{\mathbf{X}}_0 \right] \otimes \hat{\mathbf{V}}_F. \end{aligned} \quad (3.78)$$

### 3.3 Integração Espacial

Nesta secção descrevem-se os elementos finitos que constam na biblioteca do programa DD3IMP, bem como os métodos de integração espacial disponíveis. A discretização do corpo deformável por elementos finitos permite definir a matriz de rigidez elementar bem como o vector elementar das forças nodais. Para tal, procede-se à reformulação da forma linearizada do princípio das potências virtuais, apresentada na secção anterior, sobre um elemento finito. A “assemblagem” da matriz de rigidez elementar e do vector elementar das forças nodais de cada elemento finito conduz à obtenção da matriz de rigidez global e do vector global de forças nodais. Estes definem o sistema de equações lineares que deve ser resolvido tanto na fase de *Previsão* como em cada iteração da fase de *Correcção*.

A matriz de rigidez global e o vector global de forças nodais formulados nesta secção consideram apenas o problema de equilíbrio do corpo deformável, não considerando o acoplamento com o problema de contacto com atrito. As correcções resultantes deste acoplamento serão discutidas no Capítulo 5.

#### 3.3.1 Elementos Finitos

No método dos elementos finitos o corpo deformável é dividido num conjunto de elementos, cada um definido por um conjunto de nós. A posição espacial de qualquer ponto do corpo deformável é obtida por interpolação da posição espacial dos nós associados. Assim, o vector posição  $\mathbf{x}$  de um ponto genérico  $\mathcal{A}$  do interior do elemento é obtido da expressão

$$\mathbf{x} = \sum_{a=1}^{n_{el}} N_a^e \mathbf{x}_a^e, \quad (3.79)$$



em que  $n_{el}$  designa o número de nós do elemento finito  $e$ .  $\mathbf{x}_a^e$  é o vector posição do nó  $a$ .  $N_a^e$  é o valor da função de forma, ou de interpolação, do elemento  $e$  associada ao nó  $a$  no ponto  $\mathcal{A}$ .

Da biblioteca de elementos finitos do programa DD3IMP, constam os seguintes elementos (ver Figura 3.1):

- Tetraedro com 4 nós e funções de interpolação trilineares. Este elemento possui um só ponto de integração.
- Pentaedro com 6 nós, dois pontos de Gauss para integração completa e um para integração reduzida e funções de interpolação trilineares.
- Hexaedro com 8 nós, oito pontos de Gauss para integração completa e um para integração reduzida e funções de interpolação trilineares.
- Hexaedro com 20 nós, vinte e sete pontos de Gauss para integração completa, e oito para integração reduzida e funções de interpolação triquadráticas (elemento Serendipity).
- Hexaedro com 27 nós, vinte e sete pontos de Gauss para integração completa, e oito para integração reduzida e funções de interpolação triquadráticas.

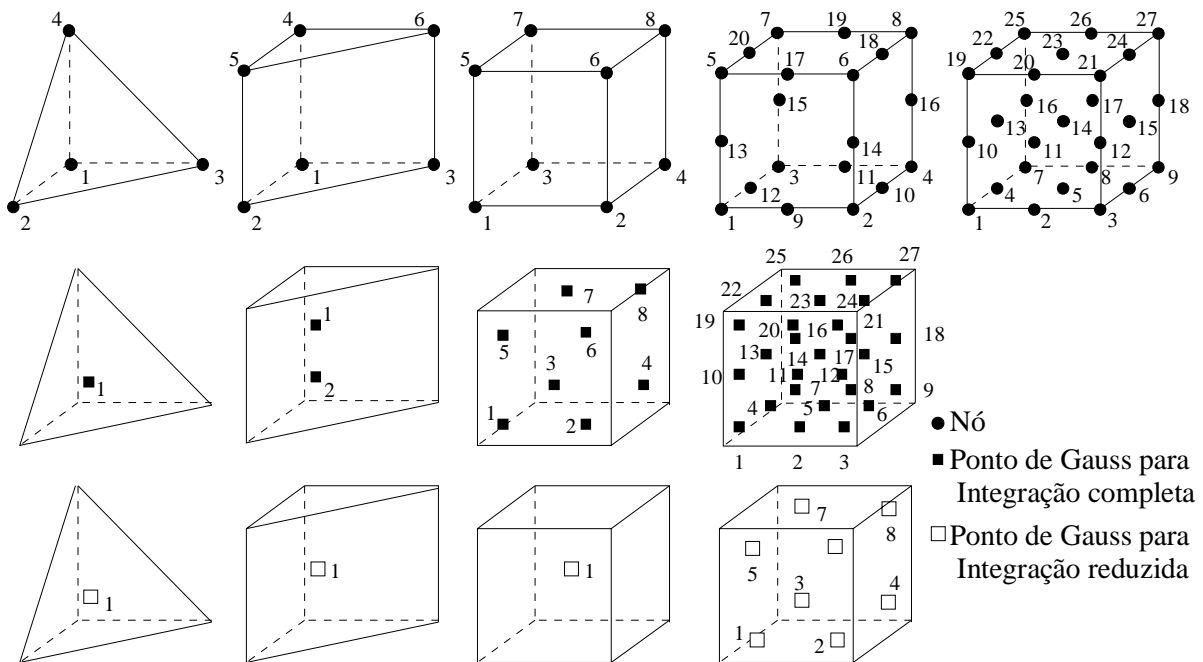


Figura 3.1 – Elementos finitos disponíveis na biblioteca do programa DD3IMP.

### 3.3.2 Métodos de Integração

A integração no domínio contínuo, definida no princípio das potências virtuais, é realizada com o auxílio do método de integração de Gauss. Este método pode ser dividido em duas etapas. A primeira consiste numa passagem do integral sobre o elemento finito  $e$ , de domínio especial  $\Omega_e$ , a um integral sobre o elemento canónico correspondente, ou seja:

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{F}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Omega_e^c} \mathbf{F}(\xi) |J(\xi)| d\xi d\eta d\zeta, \quad \text{com} \quad J(\xi) = \det \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right). \quad (3.80)$$

$J(\xi)$  representa o jacobiano da transformação, que permite a passagem do referencial canónico para o referencial cartesiano global, em que  $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$  são as coordenadas canónicas do elemento finito  $e$ .

A segunda etapa consiste na aplicação do método de quadratura de Gauss, ou seja:

$$\int_{\Omega_e^c} \mathbf{F}(\xi) |J(\xi)| d\xi d\eta d\zeta = \sum_{g=1}^{n_{gp}^e} w_g \mathbf{F}(\xi_g) |J(\xi_g)|, \quad (3.81)$$

$n_{gp}^e$  é o número de pontos de integração (pontos de Gauss) do elemento finito  $e$ .  $\xi_g$  e  $w_g$  representam o vector de posição em coordenadas canónicas e o peso de integração do ponto de Gauss  $g$ , respectivamente.

Os elementos finitos implementados no programa DD3IMP apresentam um comportamento muito deficiente quando utilizados em problemas de elastoplasticidade associados a integração completa [Nagtegaal *et al.* 1974]. Este comportamento deficiente está associado ao carácter isocórico da deformação plástica, o que leva a que todos os afastamentos à conservação de volume sejam compensados por uma deformação volúmica de natureza elástica. De modo a contornar este problema, pode recorrer-se a métodos de integração que não utilizam todos os pontos de Gauss do elemento. No entanto, a simples redução do número de pontos de integração, denominada integração reduzida uniforme, pode conduzir ao aparecimento de modos de deformação própria do elemento ou modos de energia zero que deterioram a solução. Um método alternativo consiste na integração reduzida selectiva, referido na secção 3.2.2.2. O método  $\bar{B}$ , por exemplo, substitui a componente hidrostática do gradiente de velocidade e de velocidade virtual, calculado em cada ponto de integração do elemento, por outra que é considerada constante em cada elemento.

No programa DD3IMP estão implementados três métodos de integração: (i) integração completa (FI *Full Integration*); (ii) integração reduzida uniforme (URI *Uniform Reduced Integration*) e (iii) integração reduzida selectiva (SRI *Selective Reduced Integration*).

### 3.3.2.1 Integração Completa e Integração Reduzida Uniforme

Nos métodos de integração completa e reduzida uniforme o gradientes de velocidade  $\mathbf{L}$  e de velocidade virtual  $\delta\mathbf{L}$ , é dado por

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial N_a}{\partial x_j} v_{ai} = N_{a,j} v_{ai}, \quad \text{com} \quad a = 1, \dots, n_{el}, \quad (3.82)$$

$$\delta L_{ij} = \frac{\partial (\delta v_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial N_a}{\partial x_j} \delta v_{ai} = N_{a,j} \delta v_{ai}, \quad \text{com} \quad a = 1, \dots, n_{el}. \quad (3.83)$$

Na integração completa os tensores  $\mathbf{L}$  e  $\delta\mathbf{L}$  são avaliados em todos os pontos de integração do elemento. Na integração reduzida uniforme  $\mathbf{L}$  e  $\delta\mathbf{L}$  são determinados apenas nos pontos de integração reduzida.

### 3.3.2.2 Integração Reduzida Selectiva

O método de integração reduzida selectiva  $\bar{B}$  introduz uma nova definição para o gradiente de transformação, como foi apresentado na secção 3.2.2.2. Esta nova definição

permite determinar novos gradientes de velocidade. A decomposição do gradiente da velocidade  $\mathbf{L}$  nas suas partes desviadora ( $\mathbf{L}^{\text{des}}$ ) e hidrostática  $\mathbf{L}^{\text{hid}}$ , permite escrever

$$L_{ij} = L_{ij}^{\text{dev}} + L_{ij}^{\text{hid}} \quad \text{com} \quad L_{ij}^{\text{hid}} = \frac{1}{3} L_{kk} \delta_{ij}. \quad (3.84)$$

Consequentemente, substitui-se o tensor gradiente de velocidade  $\mathbf{L}$  por um novo tensor  $\bar{\mathbf{L}}$ , de forma que:

$$\bar{L}_{ij} = L_{ij}^{\text{dev}} + \bar{L}_{ij}^{\text{hid}} = L_{ij} - L_{ij}^{\text{hid}} + \bar{L}_{ij}^{\text{hid}}. \quad (3.85)$$

$\bar{\mathbf{L}}^{\text{hid}}$  é a componente hidrostática do gradiente de velocidade, avaliada nos pontos de integração reduzida uniforme do elemento. Nos elementos trilineares a componente  $\bar{\mathbf{L}}^{\text{hid}}$  é calculada no ponto central do elemento. Nos elementos triquadráticos  $\bar{\mathbf{L}}^{\text{hid}}$  corresponde à média do gradiente calculado nos pontos de integração reduzida [Alves 2003].

No caso particular dos elementos trilineares o gradiente  $\bar{\mathbf{L}}^{\text{hid}}$  é determinado como

$$\bar{L}_{ij}^{\text{hid}} = \frac{1}{3} [\bar{N}_{a,k} v_{ak}] \delta_{ij}, \quad \text{com} \quad a = 1, \dots, n_{el}. \quad (3.86)$$

$\bar{N}_{a,k}$  é o valor da função  $N_{a,k}$  no ponto central do elemento. Logo, o tensor  $\bar{\mathbf{L}}$  é definido por

$$\bar{L}_{ij} = N_{a,j} v_{ai} + a_{ak} v_{ak} \delta_{ij}, \quad \text{com} \quad a = 1, \dots, n_{el}, \quad (3.87)$$

em que

$$a_{ak} = \frac{1}{3} (\bar{N}_{a,k} - N_{a,k}). \quad (3.88)$$

Para o tensor gradiente de velocidade virtual  $\delta\mathbf{L}$  procede-se de forma análoga. Este método é equivalente à utilização de um método de integração completa em que os tensores  $\mathbf{L}$  e  $\delta\mathbf{L}$  são discretizados de acordo com a equação (3.87).

### 3.3.3 Equações Elementares

Nesta secção apresentam-se as equações que resultam da discretização espacial do princípio das potências virtuais linearizado, quer em relação à configuração inicial (*Previsão*), quer em relação à configuração final (*Correcção*). As soluções são distintas em função do método de integração seleccionado [Menezes 1995].

#### 3.3.3.1 Equações Elementares: *Previsão*

A forma linearizada do princípio variacional definido na equação (3.10) pode ser reescrita na forma seguinte [Menezes 1995]

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{dl}_{ij}) \mathcal{D}_{ijkl} \mathbf{dl}_{kl} d\Omega = \int_{\Sigma_1} \mathbf{ds}_i^* \cdot \delta(\mathbf{du}_i) d\Sigma_1, \quad (3.89)$$

em que

$$\mathcal{D}_{ijkl} = C_{ijkl}^{\text{ep}} + \Sigma_{ijkl}, \quad \text{com} \quad \Sigma_{ijkl} = \frac{1}{2} (\sigma_{jl} \delta_{ik} - \sigma_{ik} \delta_{jl} - \sigma_{il} \delta_{jk} - \sigma_{jk} \delta_{il}). \quad (3.90)$$

A discretização do corpo deformável conduz à aplicação do princípio variacional, expresso pela equação (3.89), a cada elemento finito  $e$ . A discretização dos incrementos

do gradiente de velocidade  $d\mathbf{l}$ , e do gradiente de velocidade virtual  $\delta(d\mathbf{l})$  conduz ao sistema de equações lineares elementares:

$$\left[ K_{ab}^{e,\tan} \right]_{ij} \left\{ \Delta u_b^e \right\}_j = \left\{ \Delta F_a^e \right\}_i, \quad \text{com} \quad a, b = 1, \dots, n_{el}. \quad (3.91)$$

$\left[ K_{ab}^{e,\tan} \right]$  é a matriz de rigidez elementar, aqui designada de tangente por ser calculada, na fase de *Previsão*, com o módulo elastoplástico tangente.  $\left\{ \Delta u_b^e \right\}$  é o vector dos deslocamentos incrementais elementares e corresponde ao vector de incógnitas de cada elemento.  $\left\{ \Delta F_a^e \right\}$  é o vector de forças incrementais elementares determinadas, neste caso, a partir do incremento de ensaio  $d\omega_{\text{imp}}$ .

O método de integração seleccionado dita a forma da matriz de rigidez tangente e do vector de forças incrementais. Ao optar-se pelos métodos de integração completa ou integração reduzida uniforme, recorre-se às expressões (3.82) e (3.83) para definir  $d\mathbf{l}$  e  $\delta(d\mathbf{l})$ , pelo que

$$\left[ K_{ab}^{e,\tan} \right]_{ij} \Big|_{\text{FL,URI}} = \int_{\Omega^e} N_{a,k} \mathcal{D}_{ijkl} N_{b,l} d\Omega^e, \quad e, \quad (3.92)$$

$$\left\{ \Delta F_a^e \right\}_i \Big|_{\text{FL,URI}} = \int_{\Sigma^{1e}} N_a ds_i^* d\Sigma^{1e}, \quad \text{com} \quad a, b = 1, \dots, n_{el}. \quad (3.93)$$

Caso se opte pela integração reduzida selectiva a discretização do gradiente de velocidade  $d\mathbf{l}$  é dada pela expressão (3.87). Deste modo tem-se que:

$$\left[ K_{ab}^{e,\tan} \right]_{ij} \Big|_{\text{SRI}} = \int_{\Omega^e} \left\{ N_{a,k} \mathcal{D}_{ijkl} N_{b,l} + N_{a,k} \mathcal{D}_{ikmn} a_{bj} + a_{ai} \mathcal{D}_{nmjl} N_{b,l} + a_{ai} \mathcal{D}_{mnnn} N_{b,j} \right\} d\Omega^e, \quad e \quad (3.94)$$

$$\left\{ \Delta F_a^e \right\}_i \Big|_{\text{SRI}} = \int_{\Sigma^{1e}} N_a ds_i^* d\Sigma^{1e}, \quad \text{com} \quad a, b = 1, \dots, n_{el}. \quad (3.95)$$

Agrupando as matrizes de rigidez e os vectores de forças incrementais elementares, definidos para cada um dos  $n_{el}$  elementos que definem o corpo deformável, obtém-se um sistema global de equações lineares, dado por

$$\sum_{B=1}^{n_n} \left[ K_{AB}^{\tan} \right]_{kl} \left\{ \Delta u_B \right\}_l = \left\{ \Delta F_A \right\}_k, \quad \text{com} \quad k, l = 1, \dots, 3 \quad \text{e} \quad A, B = 1, \dots, n_n, \quad (3.96)$$

em que  $A$  e  $B$  traduzem a numeração global dos nós do corpo deformável. Na ausência do problema de contacto com atrito, a resolução deste sistema de equações permite determinar o campo de deslocamentos incrementais  $\left\{ \Delta u \right\}$ , correspondentes ao incremento de ensaio  $d\omega_{\text{imp}}$ , que define a configuração  $C_{\text{ensaio}}^{[N,0]}$ .

### 3.3.3.2 Equações Elementares: *Correcção*

Na fase de *Correcção*, caso se opte pela integração completa ou reduzida uniforme, o princípio variacional das potências virtuais a ser discretizado é o definido na expressão (3.59). De modo a simplificar essa expressão, adopta-se a seguinte notação:

$$\text{gradu} = \mathbf{l}, \quad \text{gradv} = \delta\mathbf{l} \quad \text{e} \quad \mathbf{G}_1^j = \mathbf{h}. \quad (3.97)$$

Omite-se o índice  $j$ , já que todas as variáveis são definidas na configuração  $C^{[N,j]}$ . O princípio variacional, aplicado a cada elemento finito  $e$ , pode reescrever-se na forma [Menezes 1995]

$$\int_{\Omega^e} \delta l_{km} (\mathcal{D}_{kmnt} + \Sigma_{kmnt}) l_{nt} d\Omega^e = \int_{\Sigma_1^e} t_k^* \delta v_k d\Sigma_1^e - \int_{\Omega^e} \sigma_{km} \delta l_{km} d\Omega^e, \quad (3.98)$$

com:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{kmnt} &= C_{kmnt}^{\text{ep}} + \frac{1}{2} [\sigma_{tm} \delta_{nk} - \sigma_{kt} \delta_{mn} - \sigma_{nm} \delta_{kt} - \sigma_{nk} \delta_{mt}] \\ &+ \frac{1}{8} [-(h_{nk} + h_{kn}) \sigma_{tm} - (h_{mn} + h_{nm}) \sigma_{tk} - (h_{kt} + h_{tk}) \sigma_{nm} - (h_{mt} + h_{tm}) \sigma_{nk}], \end{aligned} \quad (3.99)$$

$$\Sigma_{kmnt} = \frac{1}{8} [(h_{tp} + h_{pt}) (\sigma_{pm} \delta_{kn} + \sigma_{pk} \delta_{mn}) + (h_{np} + h_{pn}) (\sigma_{pm} \delta_{kt} + \sigma_{pk} \delta_{mt})] + \sigma_{km} \delta_{nt}. \quad (3.100)$$

A discretização dos campos tensoriais  $\mathbf{u}$ ,  $\delta \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{l}$  e  $\delta \mathbf{l}$  conduz a um sistema de equações lineares definido por

$$[K_{ab}^{e,j}]_{ij} \{u_b^{e,j+1}\}_j = \{F_a^{e,j}\}_i, \quad \text{com} \quad a, b = 1, \dots, n_{el}, \quad (3.101)$$

em que  $[K_{ab}^{e,j}]$ , é a matriz de rigidez elementar.  $\{u_b^{e,j+1}\}$  é o vector das correcções aos deslocamentos incrementais nodais elementares, que corresponde ao vector de incógnitas do sistema.  $\{F_a^{e,j}\}$  é o vector de forças elementares não-equilibradas. A definição destes tensores é dada por

$$[K_{ab}^e]_{ij} \Big|_{\text{FL,URI}} = \int_{\Omega^e} N_{a,k} (\mathcal{D}_{ijkl} + \Sigma_{ijkl}) N_{b,l} d\Omega^e, \quad \text{com} \quad a, b = 1, \dots, n_{el}, \quad e, \quad (3.102)$$

$$\{F_a^e\}_i \Big|_{\text{FL,URI}} = \int_{\Sigma_1^e} N_{a,i} t_i^* d\Sigma_1^e - \int_{\Omega^e} N_{a,m} \sigma_{im} d\Omega^e, \quad \text{com} \quad a, b = 1, \dots, n_{el}, \quad (3.103)$$

Caso se opte pela integração reduzida selectiva, o princípio variacional das potências virtuais a ser discretizado é o definido na expressão (3.67). Nesta expressão é necessário definir o operador  $\overline{\text{divu}}$ . Para tal, recorre-se à expressão [Hughes e Winget 1980]

$$\overline{\text{divu}} = \sum_{k=1}^{\bar{n}_{gp}} \bar{N}_k(\xi) \text{divu}(\bar{\xi}_k) \quad \text{com} \quad \text{divu}(\bar{\xi}_k) = \sum_{a=1}^{n_{el}} \frac{\partial N_a}{\partial x_i}(\bar{\xi}_k) u_{ai}, \quad (3.104)$$

em que  $\bar{n}_{gp}$  é o número total de pontos de integração reduzida do elemento.  $\bar{\xi}$  é o vector de coordenadas canónicas dos pontos de integração  $\bar{n}_{gp}$ .  $\bar{N}_k$  são  $\bar{n}_{gp}$  funções associadas a cada um dos pontos de integração reduzida  $\bar{n}_{gp}$  e  $N_a$  são as  $n_{ne}$  funções de forma associadas aos  $n_{ne}$  nós do elemento finito. Para elementos finitos trilineares, caracterizados por um único ponto de integração reduzida no centro do elemento tem-se que:  $\bar{\xi} = \mathbf{0}$ ,  $\bar{n}_{gp} = 1$  e  $\bar{N} = 1$ . A expressão (3.104) pode assim ser reescrita como

$$\overline{\text{divu}} = \text{divu}(\mathbf{0}), \quad (3.105)$$

ou seja, admite-se que  $\overline{\text{divu}}$  é constante e igual ao valor calculado no centro do elemento.

De modo a simplificar a expressão definida em (3.67), adopta-se a notação:

$$\text{gradu} = \mathbf{l}, \quad \overline{\text{gradu}} = \bar{\mathbf{l}}, \quad \text{gradv} = \delta \mathbf{l}, \quad \overline{\text{gradv}} = \delta \bar{\mathbf{l}} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{G}}_1^j = \bar{\mathbf{h}}. \quad (3.106)$$

Deste modo, a expressão (3.67) pode ser reescrita e aplicada a cada elemento finito, o que conduz a [Menezes 1995]

$$\int_{\Omega^e} \delta \bar{l}_{km} (\bar{\mathcal{D}}_{kmnt} + \bar{\Sigma}_{kmnt}) \bar{l}_{nt} + \mathcal{F} d\Omega^e = \int_{\Sigma_1^e} t_k^* \cdot \delta v_k d\Sigma_1^e - \int_{\Omega^e} \bar{\sigma}_{km} \delta \bar{l}_{km} d\Omega^e, \quad (3.107)$$

com

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{D}}_{kmnt} = & C_{kmnt}^{\text{ep}} + \frac{1}{2} [\bar{\sigma}_{tm} \delta_{nk} - \bar{\sigma}_{kt} \delta_{mn} - \bar{\sigma}_{nm} \delta_{kt} - \bar{\sigma}_{nk} \delta_{mt}] \\ & + \frac{1}{8} [ -(\bar{h}_{nk} + \bar{h}_{kn}) \bar{\sigma}_{tm} - (\bar{h}_{mn} + \bar{h}_{nm}) \bar{\sigma}_{tk} - (\bar{h}_{kt} + \bar{h}_{tk}) \bar{\sigma}_{nm} - (\bar{h}_{mt} + \bar{h}_{tm}) \bar{\sigma}_{nk} ], \end{aligned} \quad (3.108)$$

$$\bar{\Sigma}_{kmnt} = \frac{1}{8} [ (\bar{h}_{tp} + \bar{h}_{pt}) (\bar{\sigma}_{pm} \delta_{kn} + \bar{\sigma}_{pk} \delta_{mn}) + (\bar{h}_{np} + \bar{h}_{pn}) (\bar{\sigma}_{pm} \delta_{kt} + \bar{\sigma}_{pk} \delta_{mt}) ] + \bar{\sigma}_{km} \delta_{nt}, \quad (3.109)$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{3} (\delta l_{km} \bar{\sigma}_{pp} \delta_{mn} \delta_{kt} l_{nt} - \bar{\sigma}_{pp} \delta l_{km} |_{\bar{x}} \delta_{mn} \delta_{kt} l_{nt} |_{\bar{x}}) + \delta \bar{l}_{km} \bar{\sigma}_{kt} \delta_{mn} \bar{l}_{nt} - \delta l_{km} \bar{\sigma}_{kt} \delta_{mn} l_{nt}. \quad (3.110)$$

Nas expressões anteriores o índice  $j$  é omitido uma vez que todas as variáveis são definidas na configuração  $C^{[N,j]}$ .  $\bar{\mathbf{x}}$  é o vector de posição do ponto de integração reduzida do elemento.

Para obter um sistema de equações lineares na forma dada pela expressão (3.101), discretizam-se os campos  $\mathbf{u}$ ,  $\delta \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{l}$  e  $\delta \mathbf{l}$  com o auxílio das funções de forma, e os campos  $\bar{\mathbf{l}}$  e  $\delta \bar{\mathbf{l}}$  por

$$\bar{\mathbf{l}}_{nt} = N_{b,t} \mathbf{u}_{nb} + a_{bq} \mathbf{u}_{qb} \delta_{nt} \quad \text{e} \quad \delta \bar{\mathbf{l}}_{km} = N_{a,m} \delta v_{ka} + a_{ap} \delta v_{pa} \delta_{km}, \quad (3.111)$$

com  $a_{bq}$  definido de acordo com a expressão (3.88). Os campos  $\mathbf{l}|_{\bar{x}}$  e  $\delta \mathbf{l}|_{\bar{x}}$  são discretizados por

$$\mathbf{l}_{nt} |_{\bar{x}} = \bar{N}_{b,t} \mathbf{u}_{nb} \quad \text{e} \quad \delta \mathbf{l}_{km} |_{\bar{x}} = \bar{N}_{a,m} \delta v_{ka}. \quad (3.112)$$

Obtém-se assim, um sistema de equações lineares definido pelas expressões seguintes:

$$\begin{aligned} [K_{ab}^e]_{ij} |_{\text{SRI}} = & \int_{\Omega^e} N_{a,k} \left( \mathcal{D}_{ikjl} + \Sigma_{ikjl} + \frac{1}{3} \bar{\sigma}_{pp} \delta_{kj} \delta_{il} \right) N_{b,l} d\Omega^e \\ & + \int_{\Omega^e} N_{a,k} \left( \mathcal{D}_{ikqj} + \Sigma_{ikqj} + \bar{\sigma}_{ik} \right) a_{bj} + a_{bi} \left( \mathcal{D}_{ppjl} + \Sigma_{ppjl} + \bar{\sigma}_{jl} \right) N_{b,l} d\Omega^e \quad \text{e} \quad (3.113) \\ & + \int_{\Omega^e} a_{ai} \left( \mathcal{D}_{ppqj} + \Sigma_{ppqj} + \bar{\sigma}_{pp} \right) a_{bj} + \bar{N}_{a,k} \frac{1}{3} \bar{\sigma}_{pp} \delta_{kj} \delta_{il} \bar{N}_{b,l} d\Omega^e, \end{aligned}$$

$$\{F_a^e\}_i |_{\text{SRI}} = \int_{\Sigma^{1e}} N_a t_i^* d\Sigma^{1e} - \int_{\Omega^e} N_{a,m} \bar{\sigma}_{im} + \bar{\sigma}_{pp} a_{ai} d\Omega^e, \quad \text{com} \quad a, b = 1, \dots, n_{el}. \quad (3.114)$$

A operação de “assemblagem” de todos os termos elementares permite construir um sistema global de equações lineares dado por

$$\sum_{B=1}^{n_n} [K_{AB}^j]_{kl} \{u_B^{j+1}\}_l = \{F_A^j\}_k, \quad \text{com} \quad k, l = 1, \dots, 3 \quad \text{e} \quad A, B = 1, \dots, n_n, \quad (3.115)$$

em que  $A$  e  $B$  traduzem a numeração global dos nós, associada à matriz de rigidez global consistente da iteração  $j$ ,  $[K^j]$ . Na ausência de contacto, a resolução deste sistema de equações permite determinar as correcções aos deslocamentos incrementais  $\{u^{j+1}\}$ , de forma a definir a configuração  $C^{[N,j+1]}$ .

## Capítulo 4

# Definição Geométrica das Ferramentas

*Descreve-se o algoritmo de detecção de contacto que tem por base a descrição das ferramentas por superfícies de Bézier. Apresenta-se o algoritmo de detecção de contacto global e local. Para o algoritmo de detecção global de contacto discutem-se duas estratégias: uma baseada na distância do nó do corpo deformável ao ponto médio da superfície e outra que considera também os vértices da superfície. Analisa-se a eficácia das duas estratégias de detecção global de contacto na simulação numérica da conformação de um perfil curvo. Avalia-se a influência do grau das superfícies de Bézier, bem como do erro cometido pelo sistema de CAD na definição das superfícies, na simulação numérica da conformação de uma caixa quadrada.*

---

### 4.1 Enquadramento

A resolução de problemas de contacto com atrito recorrendo ao método dos elementos finitos apresenta diversas dificuldades. Estas resultam do problema ser extremamente não-linear e incluem: (i) mau condicionamento; (ii) susceptibilidade a instabilidades numéricas e (iii) complexidade e custo de resolução do algoritmo de detecção de contacto. Apesar do enorme esforço desenvolvido nesta área, a resolução de problemas de contacto com atrito ainda não atingiu a robustez e a precisão que acontecem na aplicação do método dos elementos finitos a outros problemas não-lineares. Na simulação numérica de processos de conformação plástica a eficiência, a estabilidade e a precisão do cálculo são fortemente influenciadas pelo algoritmo de gestão de contacto adoptado. De facto, o algoritmo de gestão de contacto é um dos principais factores que contribui para a degradação das características de convergência dos algoritmos de resolução [Esche *et al.* 1997]. Relacionados com o algoritmo de gestão de contacto, surgem dois aspectos importantes: (i) a descrição das ferramentas e (ii) o método utilizado para impor as condições de contacto. Neste capítulo discutem-se os factores relativos à descrição da superfície das ferramentas, sendo os aspectos relacionados com a imposição das restrições, associadas ao contacto com atrito, relegados para o capítulo seguinte.

As superfícies das ferramentas podem ser descritas com o auxílio de:

- Funções analíticas (permitem a definição das diferentes zonas através da combinação de geometrias simples);
- Superfícies paramétricas (permitem a definição das diferentes zonas através da junção de superfícies definidas por funções do tipo Bézier, B-Splines ou NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*));
- Nuvem de pontos (as diferentes zonas são definidas por um conjunto de pontos uniformemente distribuídos no plano) e
- Elementos finitos (as diferentes zonas são definidas por uma malha de elementos finitos).

Cada uma destas estratégias apresenta vantagens e inconvenientes e impõe requisitos diferentes ao algoritmo de detecção de contacto. Num estudo comparativo das estratégias referidas, Santos [1993] e Santos e Makinouchi [1995] apontam as seguintes vantagens e inconvenientes:

- A descrição por funções analíticas simplifica o tratamento numérico e conduz a algoritmos de contacto rápidos, mas não permite a modelação de ferramentas de geometria complexa.
- A descrição por superfícies paramétricas possibilita a obtenção da geometria directamente a partir de programas de CAD, evitando a etapa dispendiosa de discretização da geometria das ferramentas. No entanto, são necessários alguns cuidados na avaliação da informação fornecida pelo CAD.
- A descrição por nuvem de pontos, apesar de permitir gerar rapidamente a informação necessária mesmo para geometrias complexas, está à partida limitada pela dificuldade ou impossibilidade de descrever alguns detalhes geométricos, uma vez que o método baseia-se na projecção da geometria num plano, com uma distribuição uniforme dos pontos.
- A discretização por elementos finitos é muito atractiva, principalmente porque garante a representação de qualquer tipo de superfície. No entanto, o algoritmo de detecção de contacto apresenta um custo elevado.

A discretização por elementos finitos é a estratégia mais utilizada pela maioria dos programas comerciais de elementos finitos (por exemplo, PAM-STAMP [Lefebvre *et al.* 1996]). Porém, a representação rigorosa de superfícies curvas depende do número de elementos finitos, sendo apenas exacta para um número infinito. As superfícies apresentam uma rugosidade artificial, que pode resultar num aumento da força de atrito prevista [Hallquist *et al.* 1995].

Um bom algoritmo de detecção de contacto deve ser simultaneamente preciso e eficiente, de modo a identificar rapidamente todas as zonas potenciais de contacto. Qualquer que seja o tipo de descrição das superfícies das ferramentas, o algoritmo de detecção de contacto é dividido em duas fases: a detecção global e a local. O objectivo da detecção global é identificar, para cada ponto do corpo deformável, todos os elementos ou superfícies candidatas a estabelecer contacto. No algoritmo de contacto local identifica-se, de entre os candidatos pré-seleccionados, a posição em que o ponto estabelece contacto com a ferramenta.

O intuito do algoritmo de detecção global é melhorar a eficiência da etapa subsequente de detecção local. Para tal, pré-selecciona os elementos ou superfícies candidatas a estabelecer contacto para cada nó, de modo a reduzir o número de operações do algoritmo de detecção de contacto local. O algoritmo de detecção de contacto global deve ser robusto de modo a garantir que nenhum elemento ou superfície potencial candidata ao contacto é desprezada. De facto, qualquer que seja a estratégia de descrição das ferramentas seleccionada, é necessário definir o número mínimo de elementos ou de superfícies necessário para garantir a precisão da sua representação. A utilização de um número reduzido de elementos ou superfícies pode resultar em imprecisões na geometria final da peça estampada. Entretanto, um número elevado de elementos ou superfícies pode resultar em tempos de computação elevados, que são função da eficiência do algoritmo de detecção global adoptado [Lin *et al.* 2001]. A pré-selecção dos candidatos é particularmente complexa quando se adopta uma discretização da superfície de contacto e é necessário contemplar o fenómeno de



auto-contacto para o corpo deformável. Por esta razão, a maioria dos algoritmos de detecção de contacto global foram desenvolvidos para a análise de problemas de impacto. Estes problemas caracterizam-se, também, pelo reduzido tamanho do incremento. A divisão do domínio espacial numa estrutura de células, inicialmente proposta por Belytschko e Lin [1987], é a base da maioria desses algoritmos de detecção de contacto global. A ideia chave é dividir o domínio numa estrutura de células e distribuir os nós potenciais de contacto nestas células. A pesquisa global para cada nó é depois realizada dentro de cada célula [Wang e Makinouchi 2000]. Neste contexto, surgem diferentes algoritmos em função da forma como é definida a estrutura de células e se procede à pesquisa global em cada célula. O algoritmo *hierarchy-territory*, geralmente designado por HITA [Zhong e Nilsson 1994] e o algoritmo *position code* [Bergman e Oldenburg 2004] são os mais recomendados em termos de eficiência [Xing *et al.* 1998, Wang *et al.* 2001].

O empenho na elaboração de algoritmos de detecção global de contacto eficientes tem sido menor para as formulações que envolvem grandes tamanhos de incremento, pois a sua influência na eficiência do algoritmo de gestão de contacto é menor. Neste tipo de problemas a maior dificuldade é, efectivamente, o algoritmo de detecção de contacto local.

Para a detecção local de contacto, a maioria dos programas de simulação baseia-se numa estratégia do tipo *master/slave*. Nesta estratégia, os nós do corpo deformável (superfície *slave*) são impedidos de penetrar na superfície do corpo rígido (superfície *master*). Inicialmente, os algoritmos relacionados com esta estratégia basearam-se na associação a cada nó da superfície *slave* de um nó da superfície *master*, razão porque são designados por algoritmos do tipo *node-to-node*. Porém, este tipo de solução aplica-se apenas a problemas em pequenas deformações e com discretizações conformes. Assim, foram propostos outros algoritmos de detecção de contacto local em que a cada nó da superfície *slave* é associada uma zona da superfície *master*, designados por algoritmos do tipo *node-to-segment* [Hallquist *et al.* 1985]. Nestes algoritmos, é necessário identificar *a priori* o papel de cada uma das superfícies. Esta escolha depende da geometria das superfícies e das propriedades mecânicas de cada corpo. Se, por exemplo, ambos os sólidos forem deformáveis e discretizados com elementos finitos de dimensões médias diferentes, a superfície *master* deve ser a discretizada com a malha mais grosseira. Isto porque, nas estratégias do tipo *master/slave* não interessa saber se a superfície *master* penetra, ou não, na superfície *slave*. Com efeito, na aplicação desta estratégia a problemas em que ambos os corpos são deformáveis, surgem dificuldades na avaliação das restrições resultantes do contacto com atrito. Existem, por isso, outras estratégias como, por exemplo, o *pinball* [Belytschko e Neal 1991] e o *inside-outside* [Wang e Nakamachi 1997]. O algoritmo de detecção de contacto implementado no programa DD3IMP apoia-se na estratégia *master/slave*.

A estratégia *master/slave* aplicada a corpos deformáveis caracteriza-se por não garantir que uma superfície plana consiga transmitir uma pressão de contacto uniforme a outra superfície plana [El-Abbasi e Bathe 2001]. Tal resulta do facto de cada nó da superfície *slave* estabelecer contacto com uma região da superfície *master*. Como a força de contacto é avaliada apenas para os nós do corpo *slave*, esta aproximação implica a distribuição da força de contacto, determinada para o nó *slave*, pelos nós que definem a região da superfície *master* com a qual o nó *slave* estabelece contacto. A discretização das superfícies introduz erros na avaliação dos integrais associados ao contacto. Estes

erros resultam do facto de a função distância de contacto ser linear por tramos. Deste modo, qualquer esquema de integração envolvendo pontos de contacto ditados por apenas uma das superfícies, não pode avaliar correctamente os termos associados ao contacto unilateral, independentemente do número de pontos de integração. Este facto revela-se particularmente importante quando se consideram elementos finitos não-lineares ou problemas tridimensionais.

O algoritmo *Two pass node-to-segment* procura ultrapassar estas dificuldades e, ao mesmo tempo, aproveitar a simplicidade de avaliação dos termos associados ao contacto com atrito da estratégia *node-to-segment*. O algoritmo de detecção de contacto local é realizado nas duas superfícies no mesmo incremento, em duas passagens, considerando que na segunda passagem a superfície *slave* passa a *master* e *vice-versa* [Zavarise e Wriggers 1999]. A este algoritmo pode ser associado, na sua formulação, um coeficiente de ponderação de forma a poder atribuir uma importância relativa a cada uma das superfícies [Chabrand *et al.* 2001].

Outra forma de ultrapassar as dificuldades tradicionais dos métodos apoiados na estratégia *master/slave* é recorrer a algoritmos de contacto que não integrem as equações associadas às restrições de contacto apenas nos nós. Este tipo de algoritmos é designado de *segment-to-segment*. A eficácia deste tipo de estratégias depende do tipo de integração numérica seleccionada para avaliar as forças associadas ao contacto [El-Abbasi e Bathe 2001]. Um caso particular deste tipo de estratégia consiste na definição de uma superfície intermédia de contacto, sobre a qual as variáveis associadas ao contacto são definidas e discretizadas. Nesta situação, a eficácia do algoritmo depende da forma como é definida a superfície intermédia de contacto [Simo *et al.* 1985]. Mais recentemente, foi proposto um algoritmo, designado *mortar*, que permite detectar o contacto local de modo eficaz, em malhas que não se ajustam nas interfaces. Belgacem *et al.* [1998] e McDevitt e Laursen [2000] aplicaram este método a problemas de contacto com atrito bidimensionais, em pequenas deformações, com resultados bastante promissores. Puso e Laursen [2004] estenderam-no a problemas tridimensionais de contacto unilateral.

Os resultados da simulação de um problema de contacto com atrito são fortemente influenciados pelas descontinuidades associadas à descrição espacial das superfícies de contacto. Esta influência observa-se qualquer que seja o algoritmo utilizado na detecção do contacto, quer se considere o contacto entre dois corpos deformáveis, quer entre um corpo deformável e um corpo rígido. As consequências das descontinuidades podem ser oscilações das forças de contacto, variações bruscas (irrealistas) da pressão de contacto, alterações sucessivas na posição de contacto e perda da velocidade de convergência do algoritmo de resolução. Quando se opta por uma discretização dos corpos por elementos finitos, a superfície é definida pelas funções interpoladoras dos próprios elementos finitos. Deste modo, as superfícies de contacto são, efectivamente, definidas por um conjunto de rectas que definem a conectividade dos elementos finitos e apresentam apenas continuidade  $C^0$ . Surgem, assim, descontinuidades da superfície de contacto, ou seja, da normal à superfície, que não são reais, pois resultam da discretização do problema. Estas descontinuidades correspondem a introduzir um efeito de rugosidade artificial, que conduz a oscilações nas forças de atrito [Puso e Laursen 2002]. Para ultrapassar esta dificuldade pode refinar-se a discretização na zona de contacto, ou recorrer-se a elementos finitos de maior grau. No entanto, para ambas as alternativas, o vector normal à superfície continua a não ser correctamente definido para cada nó, como se ilustra na

Figura 4.1. Este facto origina erros na imposição das restrições cinemáticas ao contacto [Al-Dojayli e Meguid 2002].

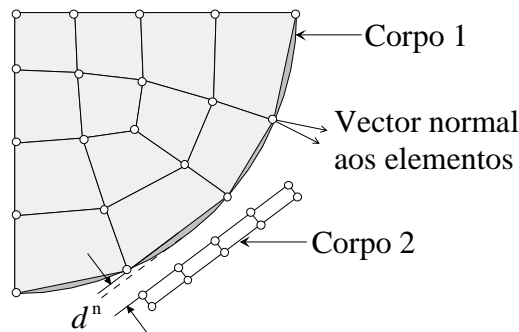


Figura 4.1 – Superfície de contacto baseada na interpolação por elementos finitos da superfície real: influência da discretização nas variáveis distância normal e vector normal à superfície.

No caso em que um dos corpos em contacto é rígido, o recurso a descrições analíticas ou paramétricas das superfícies do corpo rígido permite melhorar consideravelmente a solução obtida [Santos e Makinouchi 1995]. Este facto indicia que este deve ser o caminho a seguir na descrição de superfícies deformáveis. Com efeito, a utilização de superfícies que apresentam continuidade  $C^1$  evita variações bruscas no campo que descreve a normal à superfície, bem como a existência de normais não-únicas ao longo das fronteiras entre superfícies adjacentes. Ou seja, a superfície do corpo deformável deve ser aproximada recorrendo a superfícies interpoladoras [El-Abbasi *et al.* 2001]. Uma estratégia possível é o recurso a um algoritmo do tipo *node-to-segment*, mas em que os segmentos de contacto são aproximados por uma superfície suave, por exemplo de Bézier [Wriggers *et al.* 2001] ou de Gregory [Puso e Laursen 2002]. Outros autores preconizam o recurso a superfícies paramétricas do tipo NURBS, não só por permitirem aproximações com continuidade  $C^2$  mas, também, por possuírem propriedades de suporte local [Stadler *et al.* 2003]. A construção de superfícies paramétricas auxiliares para a descrição da superfície de contacto permite eliminar os problemas de soluções múltiplas [Wang *et al.* 2001]. Outra alternativa, veiculada por Belytschko *et al.* [2002], consiste na definição de uma função polinomial que permita avaliar directamente a distância de contacto normal à superfície. Esta estratégia tem a vantagem de permitir suavizar correctamente superfícies descritas por malhas de elementos finitos irregulares. No programa DD3IMP, as ferramentas são descritas com o auxílio de superfícies de Bézier [Bézier 1977] de geometria livre.

## 4.2 Superfícies de Bézier

A definição de uma superfície de Bézier pressupõe a definição de uma curva de Bézier. Uma curva de Bézier no espaço tridimensional é descrita com base nas coordenadas cartesianas de um conjunto de pontos, denominados vértices do polinómio característico. Estes pontos definem o polinómio característico da curva de Bézier,  $\mathbf{S}(\beta)$ , em função de um parâmetro  $\beta \in [0,1]$ , de tal forma que:

$$\mathbf{S}(\beta) = \sum_{i=0}^m B_{i,m}(\beta) \mathbf{P}_i. \quad (4.1)$$

$\mathbf{P}_i$  são os  $m+1$  vectores posição dos vértices e  $m$  o grau do polinómio (Figura 4.2).  $B_{i,m}(\beta)$  são as funções de Bernstein, que definem a base polinomial de grau  $m$ , e são definidas por

$$B_{i,m}(\beta) = C_m^i \beta^i (1-\beta)^{m-i} \quad (\text{sem soma em } i), \quad \text{com} \quad C_m^i = \frac{m!}{i!(m-i)!}, \quad (4.2)$$

em que  $C_m^i$  é designado por coeficiente de Newton. Para definir uma superfície de Bézier consideram-se duas curvas de Bézier, uma directriz e outra geratriz da superfície. Cada vértice do polinómio característico da curva de Bézier geratriz percorre uma trajectória definida por uma curva de Bézier directriz. O percurso dos vértices da geratriz sobre a curva directriz define uma rede característica, na qual a superfície de Bézier é descrita. A superfície de Bézier pode ser, então, definida como o produto tensorial de duas curvas de Bézier, dado por

$$\mathbf{S}(\beta, \eta) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_{i,m}(\beta) B_{j,n}(\eta) \mathbf{P}_{ij}, \quad \text{com} \quad \beta, \eta \in [0,1]. \quad (4.3)$$

$\mathbf{P}_{ij}$  são os  $(m+1) \times (n+1)$  vectores posição dos vértices da rede característica. Da definição apresentada na equação (4.3) é possível concluir que as curvas  $\mathbf{S}(\beta, 0)$  e  $\mathbf{S}(\beta, 1)$  definem os limites da superfície na direcção  $\eta$ , da mesma forma que  $\mathbf{S}(0, \eta)$  e  $\mathbf{S}(1, \eta)$  definem os limites da superfície na direcção  $\beta$  (ver Figura 4.2). A definição da direcção de  $\beta$  e de  $\eta$  é dada pela ordem dos pontos que definem a rede característica. O vector  $\beta \otimes \eta$  define a normal exterior à superfície. Este vector permite determinar se um ponto do corpo deformável está no interior ou no exterior da superfície.

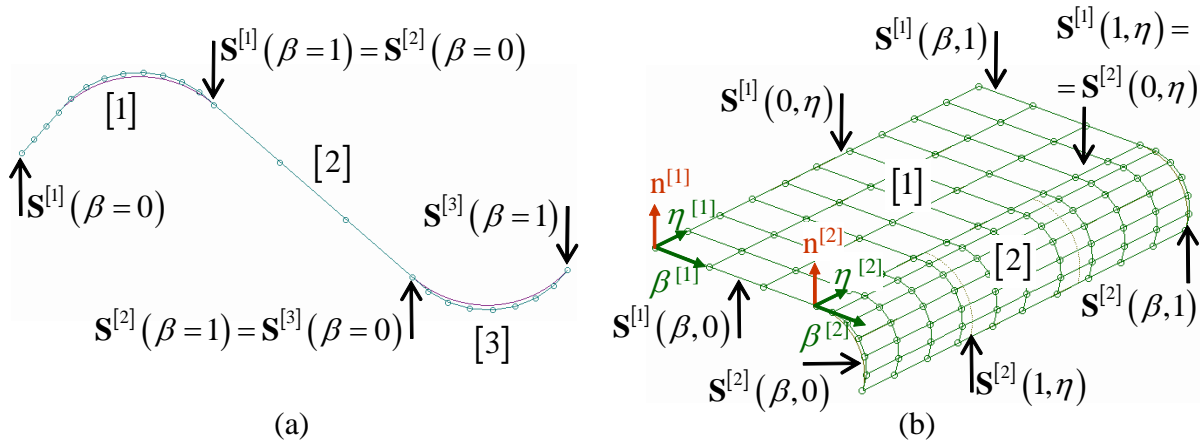


Figura 4.2 – Definição de uma geometria com o auxílio: (a) de curvas de Bézier e (b) de superfícies de Bézier.

Uma característica importante das superfícies de Bézier consiste no facto de a sua geometria não se alterar por operações de translação ou de rotação. A translação/rotação de uma superfície, corresponde a submeter cada um dos seus vértices  $\mathbf{P}_{ij}$  à mesma transformação. Deste modo, a translação  $\Delta$  de uma superfície de Bézier define-se por

$$\mathbf{S}^{\text{Trans}}(\beta, \eta) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_{i,m}(\beta) B_{j,n}(\eta) \mathbf{P}_{ij}^{\text{Trans}}, \quad \text{com} \quad P_k \Big|_{ij}^{\text{Trans}} = P_k \Big|_{ij} + \Delta_k \quad \text{e} \quad k = 1, \dots, 3. \quad (4.4)$$

Por outro lado, a rotação de uma superfície de Bézier, definida pela matriz  $\mathbf{R}$ , é dada pela expressão:

$$\mathbf{S}^{\text{Rot}}(\beta, \eta) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_{i,m}(\beta) B_{j,n}(\eta) \mathbf{P}_{ij}^{\text{Rot}}, \quad \text{com } P_k \Big|_{ij}^{\text{Rot}} = R_{km} P_k \Big|_{ij} \quad \text{e } k = 1, \dots, 3. \quad (4.5)$$

As duas operações anteriores podem combinar-se, obtendo-se:

$$\mathbf{S}^{\text{Trans}}(\beta, \eta) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_{i,m}(\beta) B_{j,n}(\eta) \mathbf{P}_{ij}^{\text{Trans}}, \quad \text{com } P_k \Big|_{ij}^{\text{Trans}} = R_{km} P_k \Big|_{ij} + \Delta_k \quad \text{e } k = 1, \dots, 3. \quad (4.6)$$

As superfícies de Bézier podem ser representadas recorrendo a uma base polinomial de potências sucessivas de  $\beta$  e de  $\eta$  [Heege 1992, Menezes 1995]. Nesse caso são definidas por

$$\mathbf{S}(\beta, \eta) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{ij} \beta^i \eta^j, \quad \text{com } \beta, \eta \in [0, 1], \quad (4.7)$$

com  $\mathbf{b}_{ij} = M_{ip} \mathbf{P}_{pr} M_{rj}^*$ , em que:

$$M_{ip} = (-1)^{i-p} \frac{m!}{p!(i-p)!(m-i)!} \quad \text{para } p \leq i \leq m, \quad (4.8)$$

$$M_{rj}^* = (-1)^{j-r} \frac{n!}{r!(j-r)!(n-j)!} \quad \text{para } j \leq r \leq n, \quad (4.9)$$

$$M_{ip} = 0 \quad \text{para } 0 \leq i \leq p-1, \quad M_{rj}^* = 0 \quad \text{para } 0 \leq r \leq j-1. \quad (4.10)$$

Esta forma polinomial é a utilizada no programa DD3IMP para realizar todas as operações sobre superfícies de Bézier. A sua principal vantagem é garantir tempos de cálculo menores do que a definição clássica para operações tais como, o cálculo de pontos ou de derivadas. No entanto, os cálculos realizados com as superfícies de Bézier definidas na forma polinomial são menos estáveis, sendo por isso necessário garantir graus reduzidos na definição das superfícies [Farin 1993].

### 4.3 Algoritmo de Detecção de Contacto

O algoritmo de detecção de contacto deve identificar, para cada nó  $\mathcal{A}^{\text{def}}$  do corpo deformável, o ponto de referência  $\mathbf{x}^{\text{ref}}$ , na superfície de Bézier em que é estabelecido o contacto. Cada ferramenta de conformação é definida por um conjunto de superfícies de Bézier. A definição das ferramentas associadas a um determinado processo é levada a cabo por um conjunto de superfícies de Bézier,  $S^{\text{total}}$ . Em função da complexidade do processo a simular, o número de superfícies necessárias à definição de cada ferramenta aumenta. A determinação do ponto de referência implica uma avaliação, para cada nó, das hipóteses de estabelecer contacto com cada superfície. No entanto, nem todas as superfícies têm a mesma probabilidade de estabelecer contacto com o ponto genérico  $\mathcal{A}^{\text{def}}$  do corpo deformável. O algoritmo de detecção de contacto é, por isso, dividido em duas fases: (i) um algoritmo de detecção global, que procura reduzir o número de superfícies candidatas ao contacto e (ii) um algoritmo de detecção local, que identifica a superfície efectiva de contacto.

### 4.3.1 Algoritmos de Detecção de Contacto Global

A primeira tarefa do algoritmo de detecção global é baseada em considerações geométricas e consiste em associar a cada ponto  $\mathcal{A}^{\text{def}}$  um conjunto determinado de ferramentas. Estes conjuntos são organizados em função da orientação do vector normal exterior a cada superfície de Bézier. Deste modo, o conjunto de superfícies  $S^{\text{total}}$  é dividido em conjuntos mais reduzidos, todos caracterizados por terem a mesma orientação em relação ao corpo deformável. No final desta operação o ponto,  $\mathcal{A}^{\text{def}}$  fica associado a um conjunto  $S < S^{\text{total}}$  de superfícies de Bézier candidatas ao contacto. No entanto,  $S$  pode ser ainda demasiado elevado, em função da complexidade da geometria das ferramentas, pelo que é desejável reduzi-lo a um conjunto de superfícies candidatas  $\bar{S} < S$ . Esta redução garante que o algoritmo de detecção de contacto local é aplicado apenas ao conjunto  $\bar{S}$  de superfícies, de modo a reduzir o tempo de cálculo. Nos parágrafos seguintes apresentam-se e comparam-se dois algoritmos para a detecção global do contacto.

#### 4.3.1.1 Algoritmo do Ponto Médio

O grupo de superfícies candidatas ao contacto com o ponto  $\mathcal{A}^{\text{def}}$  do corpo deformável é reduzido em função da distância entre as coordenadas cartesianas desse ponto,  $\mathbf{x}^{\text{def}}$ , e o ponto médio de cada superfície. Ou seja, para cada uma das superfícies  $S$  do conjunto pré-definido de candidatas ao contacto, calcula-se as coordenadas do seu ponto médio em função do deslocamento da ferramenta que contém a superfície,  $\mathbf{u}^{\text{ferramenta}[N]}$ , no incremento  $N$ . As coordenadas do ponto médio de cada superfície são definidas por (expressão (4.7)):

$$S_k^{\text{médio}}(\beta, \eta) = S_k^{\text{médio}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{ijk} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^j + u_k^{\text{ferramenta}[N]}, \quad \text{com } k = 1, \dots, 3. \quad (4.11)$$

Em seguida, calcula-se a distância do ponto do corpo deformável,  $\mathcal{A}^{\text{def}}$ , ao ponto médio de cada superfície, definida por

$$\Delta D^{\text{médio}} = \left[ \left( S_k^{\text{médio}} - x_k^{\text{def}} \right) \left( S_k^{\text{médio}} - x_k^{\text{def}} \right) \right]^{1/2}, \quad \text{com } k = 1, \dots, 3. \quad (4.12)$$

O algoritmo de detecção de contacto global armazena apenas um número  $\bar{S}$  de superfícies mais próximas do ponto  $\mathcal{A}^{\text{def}}$ . Estudos anteriores indicam que, para geometrias simples definidas por superfícies de dimensões idênticas, uma dimensão do conjunto  $\bar{S}$  igual a 4 garante que a superfície que corresponde a posição de referência correcta é pré-seleccionada [Heege 1992]. No entanto, para geometrias mais complexas, o ponto  $\mathcal{A}^{\text{def}}$  pode estar próximo de muitas superfícies, mesmo de ferramentas diferentes. Os mesmos estudos indicam que, nessa situação, é preferível aumentar a dimensão do conjunto  $\bar{S}$  para 9. Este valor garante um bom compromisso entre o tempo dispendido no algoritmo de detecção local e a garantia de a superfície correcta ser armazenada [Heege 1992].

#### 4.3.1.2 Algoritmo dos Vértices e Ponto Médio

Neste caso, estabelece-se um algoritmo de pré-selecção das  $\bar{S}$  superfícies com base, não só nas coordenadas do ponto médio, mas também nas coordenadas dos vértices de cada

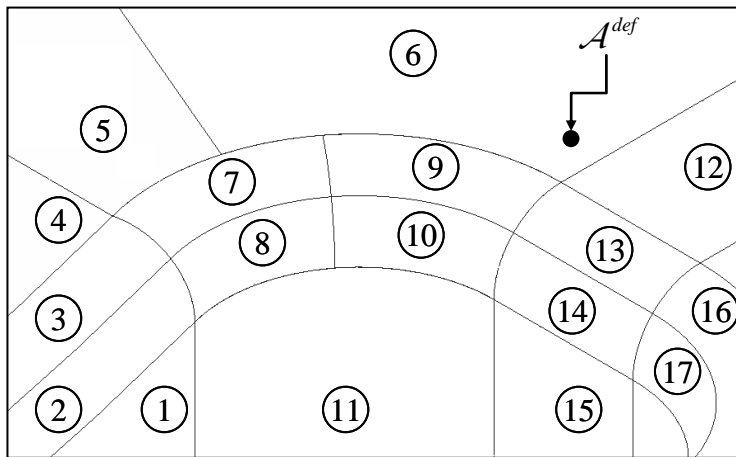
superfície  $S$ . Assim, para além de calcular a coordenada do ponto médio (equação (4.11)), calculam-se também as coordenadas de cada vértice, de acordo com

$$\begin{aligned} S_k^1(\beta, \eta) &= S_k^1(0,0) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{ijk} (0)^i (0)^j + u_k^{\text{ferramenta}[N]}, \\ S_k^2(\beta, \eta) &= S_k^1(0,1) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{ijk} (0)^i (1)^j + u_k^{\text{ferramenta}[N]}, \\ S_k^3(\beta, \eta) &= S_k^3(1,0) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{ijk} (1)^i (0)^j + u_k^{\text{ferramenta}[N]}, \\ S_k^4(\beta, \eta) &= S_k^4(1,1) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{ijk} (1)^i (1)^j + u_k^{\text{ferramenta}[N]}, \quad \text{com } k = 1, \dots, 3. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Deste modo, a distância entre o ponto do corpo deformável  $\mathcal{A}^{\text{def}}$  e o ponto médio de cada superfície é calculada, recorrendo à expressão (4.12). A distância de cada vértice ao ponto  $\mathcal{A}^{\text{def}}$  é dada por:

$$\Delta D^q = \left[ (S_k^q - x_k^{\text{def}})(S_k^q - x_k^{\text{def}}) \right]^{1/2}, \quad \text{com } k = 1, \dots, 3 \quad \text{e} \quad q = 1, \dots, 4. \quad (4.14)$$

A pré-selecção das superfícies candidatas ao contacto é feita com base na distância mínima, calculada entre o ponto deformável  $\mathcal{A}^{\text{def}}$  e cada superfície, ou seja  $\min(\Delta D^q, \Delta D^{\text{médio}})$ . Tal como no algoritmo anterior, uma vez testadas as  $S$  superfícies, são armazenadas as  $\bar{S}$  superfícies mais próximas de  $\mathcal{A}^{\text{def}}$  [Oliveira *et al.* 2003].



$\bar{S}$ Superfícies	
PM	PM&V
9	6
13	9
10	12
14	13
12	10
7	14
16	7
8	8
17	11

Figura 4.3 – Superfícies seleccionadas como candidatas ao contacto com o ponto  $\mathcal{A}^{\text{def}}$ , em função do algoritmo de detecção global de contacto.

Na Figura 4.3 apresenta-se um exemplo de aplicação dos dois algoritmos. Considera-se uma ferramenta com uma geometria complexa, definida por um número elevado de superfícies. Na figura observam-se 17 superfícies, todas de dimensões diferentes. Os dois algoritmos de detecção global de contacto foram aplicados de modo a determinar as superfícies candidatas ao contacto com o ponto  $\mathcal{A}^{\text{def}}$ . A tabela da Figura 4.3 apresenta a sequência das 9 superfícies mais próximas desse ponto, determinadas pelos dois algoritmos. Da análise da tabela observa-se que, apesar da superfície que conduz a uma posição de referência correcta ser a superfície 6, esta nunca pertencerá ao conjunto  $\bar{S}$  obtido com o algoritmo baseado no ponto médio. O erro cometido pelo

algoritmo baseado apenas no ponto médio resulta da diferença de área entre a superfície 6 e as adjacentes. Em contrapartida, o algoritmo que pré-selecciona as superfícies com base também na distância do ponto  $\mathcal{A}^{\text{def}}$  aos vértices, identifica correctamente as superfícies candidatas.

Este algoritmo de detecção global de contacto necessita de mais cálculos. No entanto, a detecção global de contacto só é realizada na fase de actualização da posição das ferramentas, ou seja, no início de cada incremento, pelo que o aumento do tempo de cálculo não é significativo.

### 4.3.2 Algoritmos de detecção de contacto Local

A determinação do ponto de referência  $\mathbf{x}^{\text{ref}}$  é essencial para o cálculo das variáveis cinemáticas, distância normal de contacto  $d^n$  e vector de escorregamento  $\delta^t$ . Se o ponto do corpo deformável  $\mathcal{A}^{\text{def}}$  está em contacto com a superfície, então  $\mathbf{x}^{\text{ref}}$  é determinado com base na actualização da posição do obstáculo. Caso não esteja em contacto, a determinação de  $\mathbf{x}^{\text{ref}}$  pode ser feita recorrendo a uma estratégia de impacto ou de projecção [Menezes 1995]. O algoritmo de impacto baseia-se numa trajectória definida pelo deslocamento relativo entre o ponto da superfície do corpo deformável  $\Gamma^{\text{def}}$  e o obstáculo  $\Gamma^{\text{rig}}$ . O algoritmo de projecção baseia-se na projecção do ponto  $\mathcal{A}^{\text{def}}$  em  $\Gamma^{\text{rig}}$ . Na Figura 4.4 exemplifica-se o uso de ambas as estratégias. Para o ponto  $\mathcal{A}^{\text{def}}$  representado na figura, definido pelo vector posição  $\mathbf{x}^{\text{def}}$ , a solução obtida recorrendo ao algoritmo de impacto é única ( $\mathbf{x}^{\text{ref}}$ ). No entanto, o recurso ao algoritmo de projecção pode resultar em soluções múltiplas, neste caso ( $\mathbf{P}_1^{\text{Proj}}, \mathbf{P}_2^{\text{Proj}}$ ). A estratégia de projecção selecciona a solução com base na distância mínima, o que pode resultar numa solução intuitivamente errada ( $\mathbf{P}_2^{\text{Proj}}$ ), como se evidencia na figura. A solução obtida pelo algoritmo de impacto é única, desde que o deslocamento relativo entre o nó e o obstáculo não seja nulo. No entanto, depende da trajectória de impacto considerada. Em algumas situações particulares a solução de ambos os algoritmos pode ser a mesma.

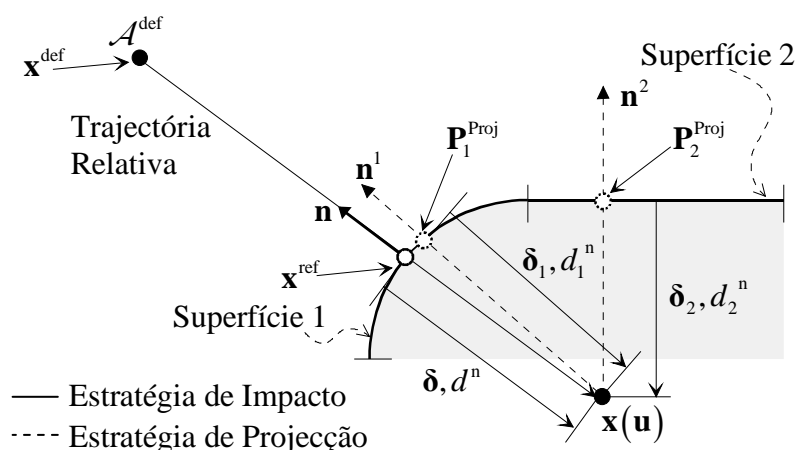


Figura 4.4 – Definição das variáveis cinemáticas com diferentes estratégias de detecção de contacto local. A estratégia de projecção conduz, neste caso, a duas soluções distintas.



### 4.3.2.1 Algoritmo de Impacto

Para cada uma das superfícies pré-seleccionadas  $\bar{S}$  é necessário definir o vector de referência  $\mathbf{x}^{\text{ref}}$ , de modo a seleccionar a superfície de contacto correcta. Esta operação pode ser realizada recorrendo a um algoritmo de impacto, assim designado por se basear na hipótese de o ponto  $\mathcal{A}^{\text{def}}$  seguir uma trajectória de impacto em relação à superfície potencial de contacto. A avaliação da trajectória de impacto  $\Delta\tilde{\mathbf{u}}$  pode recorrer [Alves 2003]:

- ao deslocamento incremental da ferramenta, tal que  $\Delta\tilde{\mathbf{u}} = \Delta\mathbf{u}^{\text{ferramenta}[N]}$ ;
- ao deslocamento incremental do ponto no incremento anterior  $\Delta\mathbf{u}^{[N-1]}$ , admitindo que não ocorrem mudanças bruscas de trajectória, logo  $\Delta\tilde{\mathbf{u}} = \Delta\mathbf{u}^{[N-1]}$  ou
- ao deslocamento relativo, definido como uma combinação linear das duas soluções anteriores, ou seja  $\Delta\tilde{\mathbf{u}} = (1-c)\Delta\mathbf{u}^{[N-1]} + c\Delta\mathbf{u}^{\text{ferramenta}[N]}$ ,  $c \in [0,1]$ .

Definida a trajectória de impacto  $\Delta\tilde{\mathbf{u}}$ , o movimento da ferramenta segundo essa trajectória é definido por [Heege 1992]

$$\mathbf{S}(\beta, \eta) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{ij} \beta^i \eta^j + T \Delta\tilde{\mathbf{u}}, \quad \text{com } \beta, \eta \in [0,1] \quad \text{e} \quad T \in \mathbb{R}, \quad (4.15)$$

sendo  $T$  um parâmetro de ajuste, que garante o impacto entre o ponto  $\mathcal{A}^{\text{def}}$  e a superfície que define o obstáculo. As coordenadas  $(\bar{\beta}, \bar{\eta}, \bar{T})$ , que definem a posição de impacto do ponto  $\mathcal{A}^{\text{def}}$ , são soluções do seguinte sistema de equações:

$$F_k^{\text{Imp}}(\bar{\beta}, \bar{\eta}, \bar{T}) = x_k^{\text{def}} - \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{ijk} \bar{\beta}^i \bar{\eta}^j - \bar{T} \Delta\tilde{u}_k = 0_k, \quad \text{com } \bar{\beta}, \bar{\eta} \in [0,1], \quad \bar{T} \in \mathbb{R} \\ k = 1, \dots, 3. \quad (4.16)$$

Este sistema de equações é não-linear em  $(\bar{\beta}, \bar{\eta})$ , pelo que se recorre ao método iterativo de Newton-Raphson para a sua resolução. Este método obriga ao cálculo prévio da matriz jacobiana de  $F_k^{\text{Imp}}(\beta, \eta, T)$ , que pode ser escrita explicitamente na forma

$$\nabla \mathbf{F}^{\text{Imp}} = \left[ \frac{\partial}{\partial \beta}, \frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial T} \right] \mathbf{F}^{\text{Imp}} = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n b_{ij1} \beta^{i-1} \eta^j & -\sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n b_{ij1} \beta^i \eta^{j-1} & -\Delta\tilde{u}_1 \\ -\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n b_{ij2} \beta^{i-1} \eta^j & -\sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n b_{ij2} \beta^i \eta^{j-1} & -\Delta\tilde{u}_2 \\ -\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n b_{ij3} \beta^{i-1} \eta^j & -\sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n b_{ij3} \beta^i \eta^{j-1} & -\Delta\tilde{u}_3 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

$\nabla \mathbf{F}^{\text{Imp}}$  é facilmente invertível, pelo que a solução do sistema de equações é obtida com o auxílio da equação:

$$\bar{a}_k^{I+1} = \bar{a}_k^I - \left[ \nabla_j F_k^{\text{Imp}} \Big|_I \right]^{-1} F_j^{\text{Imp}} \Big|_I, \quad j, k = 1, \dots, 3. \quad (4.18)$$

Em cada iteração  $I+1$  do método de Newton-Raphson determina-se uma nova solução, definida pelo vector auxiliar  $\bar{a}_k = [\bar{\beta}, \bar{\eta}, \bar{T}]$ . O critério de convergência baseia-se na verificação simultânea das duas condições seguintes:

$$\begin{cases} \|\bar{\mathbf{a}}^{I+1} - \bar{\mathbf{a}}^I\| \leq \varepsilon_a^{\text{Conv}} \\ \|\mathbf{F}^{\text{Imp}}\|^I \leq \varepsilon_F^{\text{Conv}} \end{cases} \Rightarrow \text{Convergência na iteração } I+1. \quad (4.19)$$

$\varepsilon_a^{\text{Conv}}$  e  $\varepsilon_F^{\text{Conv}}$  são tolerâncias pré-definidas.

Se o algoritmo convergir dentro do número máximo de iterações imposto, então o vector de referência para o ponto  $\mathcal{A}^{\text{def}}$ , na superfície em análise, é dado pelo vector  $\bar{\mathbf{a}} = [\bar{\beta}, \bar{\eta}, \bar{T}]$ , igualmente designado por ponto de impacto e definido por:

$$P_k^{\text{Imp}}(\bar{\beta}, \bar{\eta}, \bar{T}) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{ijk} \bar{\beta}^i \bar{\eta}^j + \bar{T} \Delta \tilde{u}_k, \quad \text{com } k = 1, \dots, 3. \quad (4.20)$$

Uma vez que são testadas  $\bar{S}$  superfícies o algoritmo pode fornecer várias soluções, cada uma associada a uma superfície distinta. No caso de soluções múltiplas, a selecção do vector de referência é feita com base no parâmetro  $\bar{T}$ . São excluídas todas as soluções para  $\bar{T} < 0$ , uma vez que não têm sentido físico, pois indicam que no incremento anterior o ponto  $\mathcal{A}^{\text{def}}$  se encontra no interior do obstáculo. A solução correspondente a  $\bar{T} = 0$  é obtida caso o ponto esteja em contacto no incremento precedente. Esta solução corresponde a definir o vector de referência  $\mathbf{x}^{\text{ref}}$  igual ao do incremento anterior, afectado do deslocamento incremental da ferramenta. Assim, de todas as soluções, selecciona-se a que apresenta o menor valor positivo de  $\bar{T}$  [Heege 1992, Menezes 1995]. Se não for obtida nenhuma solução nestas condições, para nenhuma das  $\bar{S}$  superfícies candidatas ao contacto, admite-se que o ponto  $\mathcal{A}^{\text{def}}$  pode não estabelecer contacto neste incremento.

A matriz jacobiana, definida pela equação (4.17), é singular sempre que o vector que define a trajectória de impacto  $\Delta \tilde{\mathbf{u}}$  é nulo. Tal ocorre sempre que a superfície esteja associada a uma ferramenta que não apresente deslocamento no incremento  $N$ , e que o ponto  $\mathcal{A}^{\text{def}}$ , no incremento anterior, não tenha sofrido correcções à sua posição. Nestas circunstâncias, o algoritmo de impacto não tem solução, sendo necessário introduzir uma perturbação à trajectória de impacto, definida por [Heege 1992]

$$\text{Se } \Delta \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \Rightarrow \Delta \tilde{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{Imp}}. \quad (4.21)$$

A magnitude do vector de perturbação escolhido,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{Imp}}$  não influencia o resultado, no entanto, a direcção da perturbação determina a precisão com que o vector de referência é calculado [Heege 1992]. Assim, de modo a melhorar a solução obtida, pode calcular-se o vector de perturbação com base numa “direcção de impacto expectável”,  $\mathbf{d}^{\text{Imp}}$ . Este vector é função da direcção de deslocamento da ferramenta que controla a fase no incremento  $N$ , e da normal exterior à superfície candidata ao contacto,  $\mathbf{n}$ , sendo dado pela expressão seguinte [Oliveira *et al.* 2003]:

$$\mathbf{d}^{\text{Imp}} = \text{sign}(\mathbf{n}) \Delta \mathbf{u}^{\text{ferramenta}}. \quad (4.22)$$

Como o vector que define a normal exterior à superfície pode não ser conhecido, uma vez que o ponto de impacto na superfície é a incógnita do problema, considera-se a normal no ponto utilizado como solução inicial do algoritmo de Newton-Raphson, definido na equação (4.15). Deste modo, o vector perturbação é definido por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{Imp}} = \mathbf{n} + \text{sign}(\mathbf{n}) \Delta \mathbf{u}^{\text{ferramenta}}. \quad (4.23)$$

Na Figura 4.5 ilustra-se a influência do sinal da normal exterior à superfície na “direcção de impacto expectável” e, conseqüentemente, na direcção do vector de perturbação. Como se mostra na figura, um vector de perturbação com uma direcção

incorrecta ( $\mathbf{d}^{\text{imp}'}$  no caso (a)) pode impedir a atribuição da posição de referência ao ponto  $\mathcal{A}^{\text{def}}$ . Nessas circunstâncias, o ponto poderá ser excluído do conjunto de pontos candidatos ao contacto.

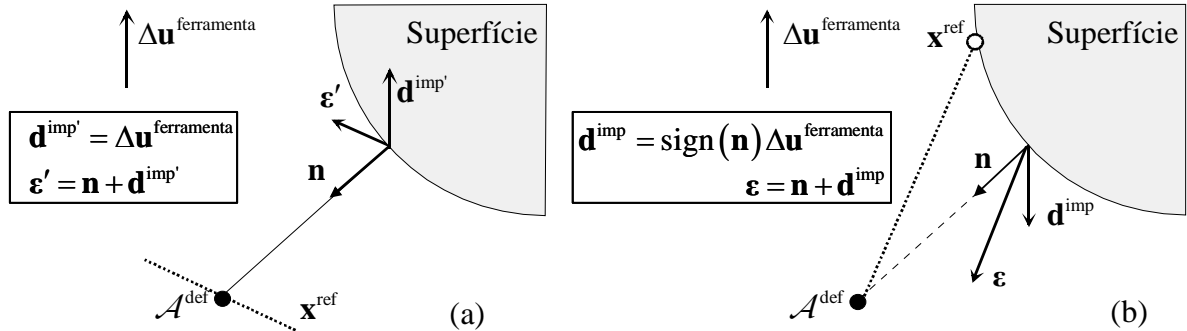


Figura 4.5 – Influência da direcção do vector de perturbação na solução do algoritmo de impacto: (a) impossibilidade de determinação da posição de referência e (b) determinação correcta da posição de referência.

#### 4.3.2.2 Algoritmo de Projectção

O algoritmo de projectção permite definir o sistema de coordenadas locais associado a cada ponto  $\mathcal{A}^{\text{def}}$ , bem como uma actualização implícita do vector de referência  $\mathbf{x}^{\text{ref}}$ . Para cada superfície  $\bar{S}$ , o algoritmo de projectção calcula o vector de projectção  $\mathbf{P}^{\text{Proj}}$  determinando os parâmetros  $(\hat{\beta}, \hat{\eta}, \hat{d}^n)$  que satisfazem a equação:

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{ijk} \hat{\beta}^i \hat{\eta}^j + u_k^{\text{ferramenta}[N,j]} = x_k^{\text{def}} - \hat{d}^n n_k(\hat{\beta}, \hat{\eta}), \text{ com } \hat{\beta}, \hat{\eta} \in [0,1] \text{ e } k = 1, \dots, 3, \quad (4.24)$$

o que conduz ao seguinte sistema de equações não lineares

$$F_k^{\text{Proj}}(\hat{\beta}, \hat{\eta}, \hat{d}^n) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{ijk} \hat{\beta}^i \hat{\eta}^j + u_k^{\text{ferramenta}[N,j]} - x_k^{\text{def}} - \hat{d}^n n_k(\hat{\beta}, \hat{\eta}) = 0_k, \text{ com } k = 1, \dots, 3, \\ \hat{\beta}, \hat{\eta} \in [0;1] \text{ e } \hat{d}^n \in \mathbb{R}. \quad (4.25)$$

O vector de projectção e a normal exterior à superfície são funções não-lineares das coordenadas paramétricas  $(\hat{\beta}, \hat{\eta})$ . À semelhança do algoritmo de impacto, recorre-se ao método iterativo de Newton-Raphson para determinar a solução do sistema. Este método pode ser resumido para a iteração  $I+1$  pela seguinte expressão:

$$\hat{a}_k^{I+1} = \hat{a}_k^I - \left[ \nabla_j F_k^{\text{Proj}} \Big| ^I \right]^{-1} F_j^{\text{Proj}} \Big| ^I, \quad j, k = 1, \dots, 3. \quad (4.26)$$

$\hat{a}_k = [\hat{\beta}, \hat{\eta}, \hat{d}^n]$  é o vector auxiliar e  $\nabla_j F_k^{\text{Proj}}$  a matriz jacobiana do sistema definido na relação (4.25). O critério de convergência baseia-se na verificação simultânea das duas condições seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\hat{\mathbf{a}}^{I+1} - \hat{\mathbf{a}}^I\| \leq \varepsilon_a^{\text{Conv}} \\ \|\mathbf{F}^{\text{Proj}} \Big| ^I\| \leq \varepsilon_F^{\text{Conv}} \end{array} \right. \Rightarrow \text{Convergência na iteração } I+1. \quad (4.27)$$

$\varepsilon_a^{\text{Conv}}$  e  $\varepsilon_F^{\text{Conv}}$  são valores de tolerância pré-definidos. Se o algoritmo convergir dentro do número máximo de iterações, então o vector de referência  $\mathbf{x}^{\text{ref}}$  é dado pelo ponto de projectção  $\mathbf{P}^{\text{Proj}}$ , definido na superfície pelas coordenadas  $(\hat{\beta}, \hat{\eta})$ .

Como são testadas  $\bar{S}$  superfícies, o algoritmo pode fornecer soluções múltiplas. Neste caso, a variável distância normal de contacto  $d^n$  é uma medida geométrica fiável para distinguir as diferentes soluções obtidas. A solução escolhida corresponde à menor distância normal de contacto  $\hat{d}^n$  [Heege 1992, Menezes 1995].

A matriz jacobiana do sistema  $\nabla_j F_k^{\text{Proj}}$  é dada pela seguinte expressão:

$$\nabla \mathbf{F}^{\text{Proj}}(\beta, \eta, d^n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \beta} F_1^{\text{Proj}}(\beta, \eta, d^n) & \frac{\partial}{\partial \eta} F_1^{\text{Proj}}(\beta, \eta, d^n) & \frac{\partial}{\partial d^n} F_1^{\text{Proj}}(\beta, \eta, d^n) \\ \frac{\partial}{\partial \beta} F_2^{\text{Proj}}(\beta, \eta, d^n) & \frac{\partial}{\partial \eta} F_2^{\text{Proj}}(\beta, \eta, d^n) & \frac{\partial}{\partial d^n} F_2^{\text{Proj}}(\beta, \eta, d^n) \\ \frac{\partial}{\partial \beta} F_3^{\text{Proj}}(\beta, \eta, d^n) & \frac{\partial}{\partial \eta} F_3^{\text{Proj}}(\beta, \eta, d^n) & \frac{\partial}{\partial d^n} F_3^{\text{Proj}}(\beta, \eta, d^n) \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Para efectuar este cálculo é necessário definir o gradiente da normal  $\mathbf{n}$ , no sistema de coordenadas curvilíneas  $u^\alpha = [\beta, \eta]$ . Para tal, recorre-se à fórmula de Weingarten [Heege 1992]:

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^\alpha} = -g^{\sigma\gamma}(\beta, \eta) b_{\gamma\alpha}(\beta, \eta) g_\sigma(\beta, \eta), \quad \text{com } \alpha, \sigma, \gamma = 1, 2. \quad (4.29)$$

Na expressão anterior,  $g_\sigma(\beta, \eta)$  designa o vector de base covariante, dado por

$$g_\sigma(\beta, \eta) = \frac{\partial \mathbf{P}^{\text{Proj}}}{\partial u^\sigma}, \quad \text{com } \sigma = 1, 2. \quad (4.30)$$

$g^{\sigma\gamma}(\beta, \eta) = g_\sigma g_\gamma$  é o tensor métrico contravariante. O tensor simétrico  $b_{\gamma\alpha}(\beta, \eta)$  é definido por

$$b_{\gamma\alpha}(\beta, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{\text{Proj}}}{\partial \beta^2} \mathbf{n}(\beta, \eta) & \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{\text{Proj}}}{\partial \beta \partial \eta} \mathbf{n}(\beta, \eta) \\ \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{\text{Proj}}}{\partial \beta \partial \eta} \mathbf{n}(\beta, \eta) & \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{\text{Proj}}}{\partial \eta^2} \mathbf{n}(\beta, \eta) \end{bmatrix}, \quad \text{com } \gamma, \sigma = 1, 2. \quad (4.31)$$

A matriz jacobiana pode, então, ser definida de forma explícita. A primeira coluna escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \mathbf{F}^{\text{Proj}}(\beta, \eta, d^n) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{ij} \beta^{i-1} \eta^j i - d^n g^{\sigma\gamma} b_{\gamma 1} g_\sigma, \quad \text{com } \sigma, \gamma = 1, 2, \quad (4.32)$$

a segunda coluna tem a forma:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \mathbf{F}^{\text{Proj}}(\beta, \eta, d^n) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_{ij} \beta^i \eta^{j-1} j - d^n g^{\sigma\gamma} b_{\gamma 2} g_\sigma, \quad \text{com } \sigma, \gamma = 1, 2, \quad (4.33)$$

e a última coluna é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial d^n} \mathbf{F}^{\text{Proj}}(\beta, \eta, d^n) = \mathbf{n}(\beta, \eta), \quad \text{com } \sigma, \gamma = 1, 2. \quad (4.34)$$

Para o cálculo da matriz de rigidez elementar, corrigida em função do estatuto de contacto (ver secção 5.4.2), é essencial determinar o gradiente do vector normal exterior ao obstáculo,  $\nabla_{u_j} n_k$ , e o gradiente da distância normal,  $\nabla_{u_j} d^n$ . Os gradientes da distância normal e da normal, em relação às coordenadas curvilíneas, podem ser definidos a partir das equações (4.24) e (4.29), respectivamente. Para obter estes gradientes no sistema de

coordenadas cartesiano é apenas necessário definir o tensor de passagem do sistema curvilíneo para o sistema cartesiano, dado por:

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial u_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial u_1} & \frac{\partial u^1}{\partial u_2} & \frac{\partial u^1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial u^2}{\partial u_1} & \frac{\partial u^2}{\partial u_2} & \frac{\partial u^2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial u^3}{\partial u_1} & \frac{\partial u^3}{\partial u_2} & \frac{\partial u^3}{\partial u_3} \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Uma vez que a superfície é paramétrica, esta transformação não pode ser definida para qualquer ponto do espaço cartesiano, pois depende do ponto em que é calculada. No entanto, esta transformação é indispensável, independentemente do ponto se encontrar ou não sobre a superfície, pelo que se adopta a aproximação seguinte [Heege 1992, Menezes 1995]:

$$\frac{\partial u_j}{\partial u^\alpha} \cong \frac{\partial P_j^{\text{Proj}}(\beta, \eta)}{\partial u^\alpha}, \quad \text{com} \quad \alpha = 1, 2 \quad \text{e} \quad j = 1, \dots, 3. \quad (4.36)$$

Tal permite concluir que, após a convergência do método de Newton-Raphson, as primeiras duas linhas da matriz  $\left[ \nabla_j F_k^{\text{Proj}} \Big|_{\text{Conv}} \right]^{-1}$  definem uma matriz de transformação entre o sistema de coordenadas curvilíneas e o sistema cartesiano,  $\partial u^\alpha / \partial u_j$ . Esta matriz é essencial ao cálculo do gradiente do vector normal exterior ao obstáculo,  $\nabla_{u_j} n_k$ , que pode ser definido por:

$$\left( \nabla_{u_j} n_k \right) = \frac{\partial n_k}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial u_j} = -g^{\sigma\gamma} b_{\gamma\alpha} g_{\sigma k} \left[ \nabla_j F_\alpha^{\text{Proj}} \Big|_{\text{Conv}} \right]^{-1}, \quad \text{com} \quad \alpha, \sigma, \gamma = 1, 2 \quad \text{e} \quad j, k = 1, \dots, 3. \quad (4.37)$$

Adicionalmente, a terceira linha de  $\left[ \nabla_j F_k^{\text{Proj}} \Big|_{\text{Conv}} \right]^{-1}$  define o gradiente da distância normal,  $\nabla_{u_j} d^n$ . O recurso ao método de Newton-Raphson no algoritmo de projecção garante que, após convergência do sistema definido pela expressão (4.26), são conhecidos: o ponto de referência, o sistema de coordenadas locais definido pela normal à superfície, a distância normal e os gradientes necessários ao cálculo das matrizes de rigidez elementares corrigidas devido à componente de contacto (ver secção 5.4.2).

### 4.3.3 Interação entre os Algoritmos de Detecção de Contacto Global e Local

O método de Newton-Raphson utilizado nos algoritmos de detecção de contacto local caracteriza-se por, na vizinhança da solução, apresentar velocidade de convergência quadrática. Para tal, é fundamental garantir uma correcta aproximação inicial. Quando se recorre ao algoritmo de detecção de contacto global baseado no ponto médio, a aproximação inicial é o ponto médio da superfície. No caso de se utilizar o algoritmo de detecção de contacto global baseado no ponto médio e nos vértices da superfície, é possível seleccionar a aproximação inicial em função do ponto geométrico mais próximo de  $\mathcal{A}^{\text{def}}$ . Este algoritmo também permite uma melhor definição do vector de perturbação, introduzido no algoritmo de impacto. Nesse caso, a normal exterior, utilizada para definir o vector de direcção de impacto, é avaliada mais próximo de  $\mathcal{A}^{\text{def}}$ , o que se revela importante no caso de superfícies de grande curvatura.

Os estudos efectuados indicam que os algoritmos de impacto e de projecção convergem para a superfície correcta, após um número de iterações que é função da curvatura da superfície. Para superfícies planas, tanto o algoritmo de impacto como o algoritmo de projecção convergem em 2 iterações, enquanto que para superfícies de grande curvatura podem necessitar de 4 a 8 iterações [Heege 1992].

Para comparar a eficiência dos algoritmos de detecção de contacto global e local apresentados, analisa-se a simulação da estampagem do perfil curvo apresentado na Figura 4.6. O material utilizado é um aço macio cujos parâmetros constitutivos são sumariados na Tabela 4.1. A conformação envolve três ferramentas: o punção, o cerra-chapas e a matriz. Considera-se uma força do cerra-chapas constante. Devido às condições de simetria geométrica e material, simula-se apenas metade do problema. A matriz é definida com 12 superfícies de Bézier, o punção com 5 e o cerra-chapas com 2. O grau das superfícies curvas, que descrevem a zona de curvatura do punção e da matriz, é 6 na direcção longitudinal e 5 na direcção radial. Convém realçar que a matriz pode ser descrita por apenas 6 superfícies de Bézier. No entanto, de modo a avaliar a influência da dimensão das superfícies nos algoritmos de impacto e projecção, essas superfícies foram cortadas ao longo do seu plano médio e divididas em duas (ver Figura 4.6).

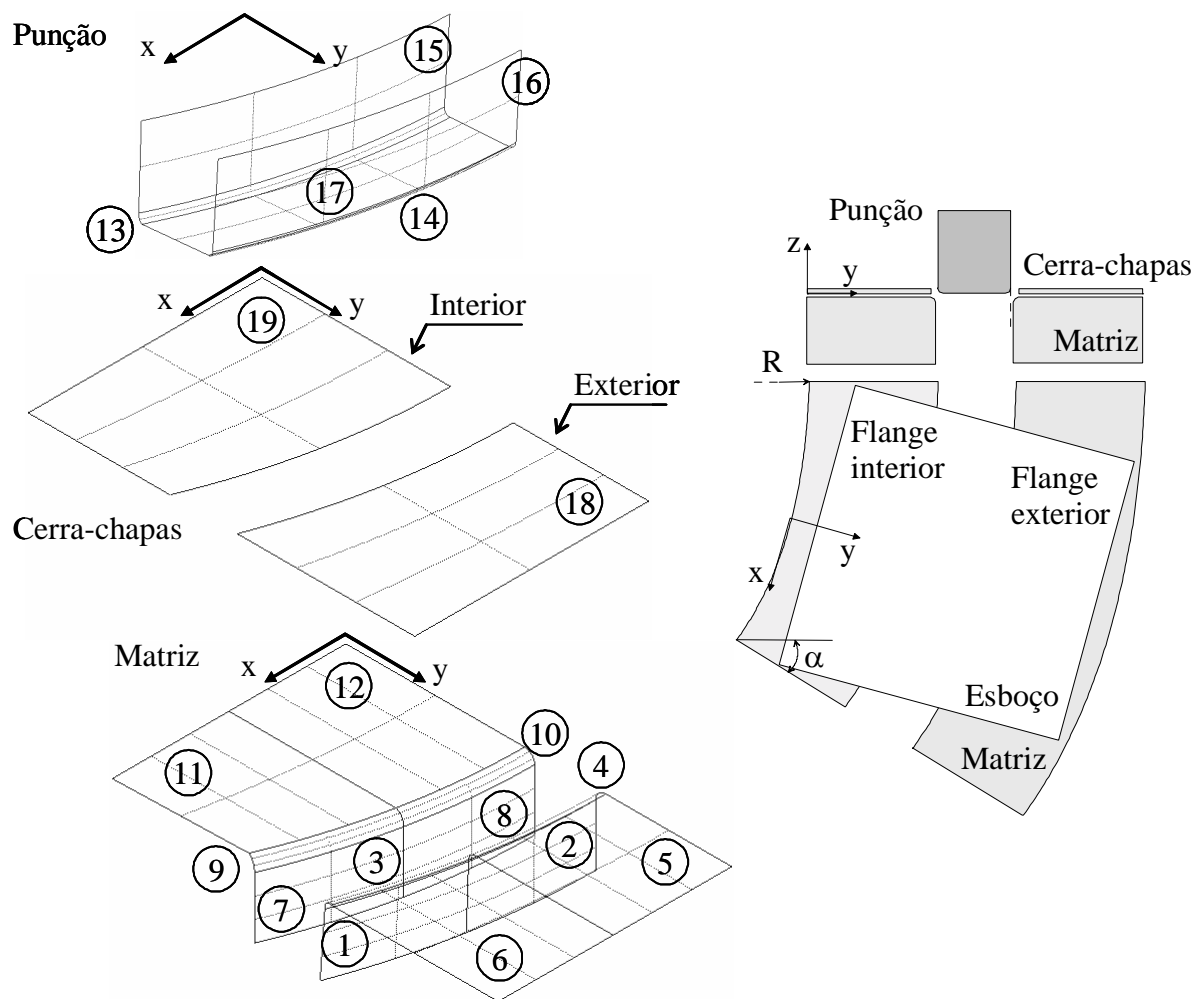


Figura 4.6 – Representação da geometria das ferramentas e do esboço para a conformação do perfil curvo. Definição e numeração das superfícies de Bézier utilizadas na definição de cada ferramenta.

Tabela 4.1 – Variáveis do processo e propriedades mecânicas do material utilizado na simulação da conformação do perfil curvo.

<i>Geometria inicial da chapa</i>		<i>Parâmetros do processo</i>	
Largura/2	150 mm	Coefficiente de atrito	0,1
Comprimento	300 mm	Força constante do cerra-chapas	90000 N
Espessura	1 mm		
<i>Propriedades do Material</i>			
Módulo de Young, coeficiente de Poisson			211000 MPa; 0,3
Encruamento isotrópico		$Y_{\text{Swift}} = 553,5(\bar{\varepsilon}^p + 0,00163)^{0,227}$	[MPa]
Crítério de Hill'48	$F = 0,2298$ ; $G = 0,2967$ ; $H = 0,7033$	e	$L = M = N = 1,3533$

Os parâmetros numéricos necessários para os algoritmos de impacto e projecção são sumariados na Tabela 4.2. A designação PM corresponde ao algoritmo de contacto global baseado no ponto médio e PMV ao algoritmo baseado no ponto médio e nos vértices. A chapa é discretizada com uma malha de  $15 \times 30 \times 2$  elementos, correspondendo a um tamanho médio de elemento de 10 mm no plano, e duas camadas em espessura.

Tabela 4.2 – Parâmetros numéricos utilizados nos testes realizados na análise da interacção entre os algoritmos de detecção de contacto global e local.

	<i>Algoritmo de Impacto</i>		<i>Algoritmo de Projecção</i>	
Número máximo de iterações	20		20	
$\varepsilon_a^{\text{Conv}}$ (equações (4.19) e (4.27))	$1 \times 10^{-10}$		$1 \times 10^{-10}$	
$\varepsilon_F^{\text{Conv}}$ (equações (4.19) e (4.27))	$1 \times 10^{-10}$		$1 \times 10^{-10}$	
Algoritmo de contacto global	PM	PMV	PM	PMV
Aproximações iniciais	$\bar{\beta}^0$	$\beta^{\text{PM/V}}$	$\hat{\beta}^0$	$\beta^{\text{PM/V}}$
	$\bar{\eta}^0$	$\eta^{\text{PM/V}}$	$\hat{\eta}^0$	$\eta^{\text{PM/V}}$
	$T^0$	0,0	$\hat{d}^n$	0,0

Na Figura 4.7 apresenta-se um detalhe das configurações geométricas obtidas com os dois algoritmos de detecção de contacto global, após um deslocamento do punção de 10 mm. As ferramentas representam-se discretizadas com elementos triangulares apenas para permitir a sua visualização. Na figura detalha-se a diferença entre os dois algoritmos para a zona de contacto com o punção. Quando se recorre ao algoritmo de detecção de contacto global baseado no ponto médio, ocorre penetração entre o punção e o corpo deformável, próximo do plano de simetria. Esta situação deve-se ao facto de o algoritmo de detecção de contacto local atribuir a esses nós um estatuto de contacto livre (*gap*). Esta situação não acontece quando se recorre ao algoritmo de detecção de contacto global baseado no ponto médio e nos vértices. A incorrecção na detecção do contacto, quando se utiliza o algoritmo de detecção de contacto global baseado apenas nos pontos médios das superfícies, não ocorre para os nós candidatos ao contacto com a matriz, cujas superfícies foram divididas ao meio.

Para melhor avaliar o comportamento dos algoritmos de detecção de contacto local, analisou-se a convergência do algoritmo de detecção de contacto para os nós A e B apresentados na Figura 4.7, que são candidatos ao contacto com o punção. O nó A tem a particularidade de pertencer ao plano de simetria. Para estes nós, a superfície candidata ao contacto correcta é a 13 (ver Figura 4.6). Na Tabela 4.3 apresenta-se um resumo da sequência de iterações geradas pelos algoritmos de impacto e de projecção, durante a

determinação da posição de referência na superfície 13. A Tabela 4.3 evidencia a influência da solução inicial, dependente do tipo de algoritmo de detecção de contacto global seleccionado, na velocidade de convergência dos algoritmos de impacto e projecção.

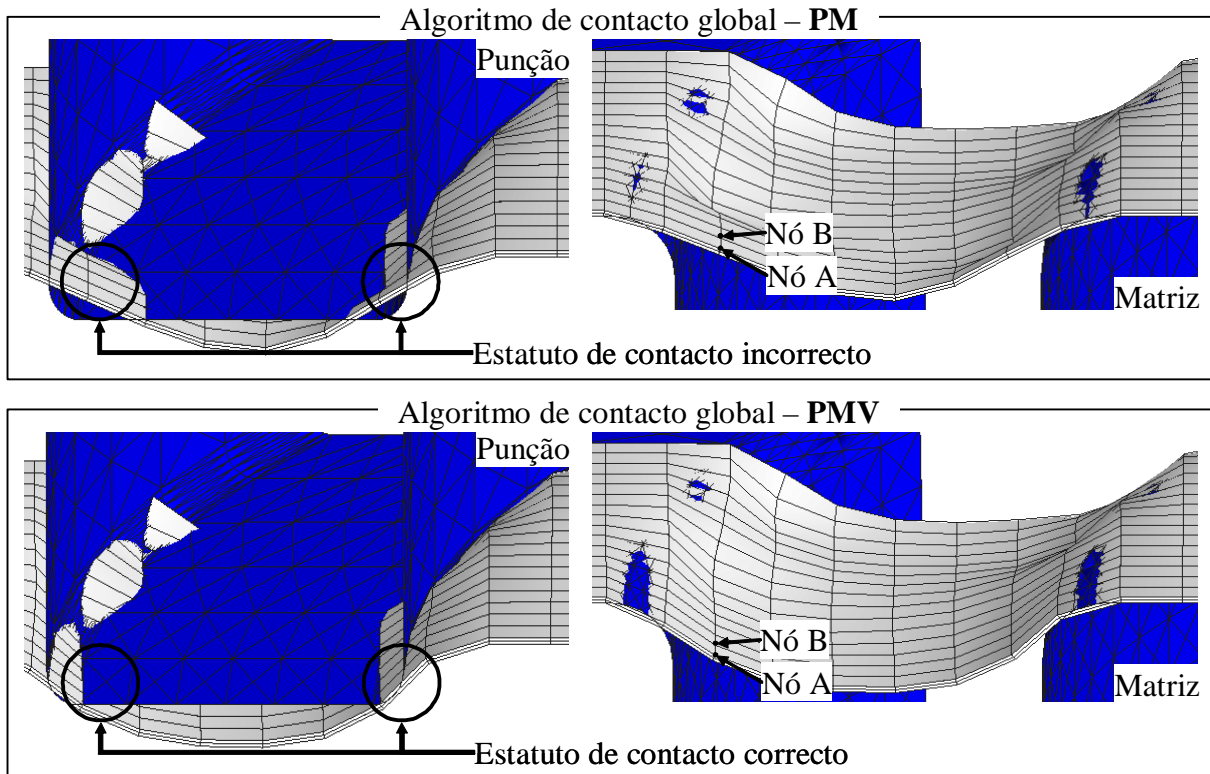


Figura 4.7 –Zonas de contacto com o punção e com a matriz, após um deslocamento do punção de 10 mm. Comparação dos resultados obtidos com os dois algoritmos de detecção de contacto global.

O recurso ao algoritmo de detecção global baseado nos vértices e ponto médio permite reduzir para mais de metade o número de iterações necessárias para a convergência do algoritmo de impacto, em relação aos valores obtidos com o algoritmo de detecção de contacto global baseado apenas no ponto médio. Como seria de prever, o algoritmo de projecção revela-se ainda mais sensível à solução inicial, pois é necessário o cálculo das primeiras e segundas derivadas no ponto de referência, para o cálculo da matriz jacobiana (equações (4.36) e (4.31)). Para uma aproximação inicial demasiado afastada da solução convergente, ditada pelo algoritmo de detecção global baseado no ponto médio, a velocidade de convergência diminui (caso do nó A), ou o algoritmo pode mesmo divergir (caso do nó B).

A análise destes resultados confirma que a configuração prevista com penetração, obtida com o algoritmo de detecção global de contacto baseado no ponto médio, resulta da solução incorrecta do algoritmo de projecção. Apesar de, para o nó A, o algoritmo convergir em 14 iterações, durante o processo de convergência são determinadas soluções que estão fora da superfície 13. Para minimizar o tempo de cálculo dispendido na detecção local do contacto, o algoritmo implementado no programa DD3IMP abandona uma superfície candidata, sempre que obtém uma solução no processo iterativo que esteja claramente fora da superfície. Deste modo, o algoritmo de projecção para o



caso do nó A, abandona a superfície antes de atingir a iteração 14. Como resultado, os nós A e B assumem um estatuto de não contacto (*gap*), penetrando no punção.

Tabela 4.3 – Cálculo do vector de referência na superfície 13. Análise da convergência dos algoritmos de detecção de contacto local em função do algoritmo de detecção de contacto global.

		<i>Algoritmo de Impacto</i>				<i>Algoritmo de Projecção</i>			
		Nó A		Nó B		Nó A		Nó B	
Iteração		PM	PMV	PM	PMV	PM	PMV	PM	PMV
1	$\beta$	-1.982E+00	1.523E-02	-1.663E+00	1.569E-02	-8.728E-01	1.523E-02	-7.131E-01	1.569E-02
	$\eta$	5.234E-03	4.086E-06	4.721E-02	4.289E-02	5.234E-03	4.086E-06	4.721E-02	4.289E-02
	$T/d^n$	-2.020E+01	3.335E-04	-1.729E+01	3.426E-04	-8.711E+00	2.034E-04	-7.457E+00	2.090E-04
2	$\beta$	-1.503E+00	1.524E-02	-6.130E-01	2.498E-02	-3.650E+00	1.524E-02	-3.097E+00	2.497E-02
	$\eta$	6.269E-05	4.256E-06	4.372E-02	4.288E-02	8.833E-05	4.256E-06	4.277E-02	4.288E-02
	$T/d^n$	1.676E+01	2.384E-03	1.338E+01	5.470E-03	-3.734E+00	1.454E-03	-2.836E+00	3.336E-03
3	$\beta$	7.437E-01	1.524E-02	3.142E-01	2.498E-02	-3.039E+00	1.524E-02	-2.588E+00	2.496E-02
	$\eta$	6.504E-06	4.256E-06	4.290E-02	4.288E-02	3.489E-04	4.256E-06	4.152E-02	4.288E-02
	$T/d^n$	3.141E+00	2.384E-03	-6.144E+00	6.344E-03	-2.920E+01	1.454E-03	-3.793E+00	3.867E-03
4	$\beta$	-7.123E-01	<b>1.524E-02</b>	8.274E-05	<b>2.498E-02</b>	-2.528E+00	<b>1.524E-02</b>	-2.169E+00	2.496E-02
	$\eta$	4.272E-06	<b>4.256E-06</b>	4.288E-02	<b>4.288E-02</b>	-3.866E-04	<b>4.256E-06</b>	4.245E-02	4.288E-02
	$T/d^n$	-1.226E+01	<b>2.384E-03</b>	-9.380E-01	<b>6.344E-03</b>	-2.107E+00	<b>1.454E-03</b>	6.521E+00	3.867E-03
5	$\beta$	5.311E-01		2.497E-02		-2.122E+00		-1.833E+00	<b>2.496E-02</b>
	$\eta$	4.262E-06		4.288E-02		2.160E-04		4.263E-02	<b>4.288E-02</b>
	$T/d^n$	-9.455E+00		7.727E-05		7.171E+00		9.431E+00	<b>3.867E-03</b>
6	$\beta$	-1.483E-01		2.498E-02		-1.791E+00		-1.193E+00	
	$\eta$	4.256E-06		4.288E-02		8.913E-05		4.322E-02	
	$T/d^n$	-3.789E+00		6.344E-03		9.532E+00		9.500E+00	
7	$\beta$	1.837E-02		2.498E-02		-4.197E-01		-2.684E-01	
	$\eta$	4.256E-06		4.288E-02		-3.840E-04		4.317E-02	
	$T/d^n$	-2.735E-01		6.344E-03		9.324E+00		-5.112E+00	
8	$\beta$	1.524E-02		<b>2.498E-02</b>		-2.757E-01		-2.858E+01	
	$\eta$	4.256E-06		<b>4.288E-02</b>		9.964E-06		4.279E-02	
	$T/d^n$	2.285E-03		<b>6.344E-03</b>		-1.105E+00		-5.154E-01	
9	$\beta$	1.524E-02				8.361E-02		-2.377E+01	
	$\eta$	4.256E-06				4.220E-06		1.341E-01	
	$T/d^n$	2.384E-03				-5.092E-01		1.209E+06	
10	$\beta$	<b>1.524E-02</b>				7.609E-03		-1.973E+01	
	$\eta$	<b>4.256E-06</b>				4.256E-06		1.400E-01	
	$T/d^n$	<b>2.384E-03</b>				-2.736E-02		5.312E+05	
						(...)			
14	$\beta$					<b>1.524E-02</b>		-9.308E+00	
	$\eta$					<b>4.256E-06</b>		1.624E-01	
	$T/d^n$					<b>1.454E-03</b>		1.337E+04	
						(...)			
20	$\beta$							<b>-3.019E+00</b>	
	$\eta$							<b>-1.774E+00</b>	
	$T/d^n$							<b>-2.513E+01</b>	

Da análise da Tabela 4.3, observa-se que a sucessão de iterações do método de Newton-Raphson pode conduzir a soluções em que os parâmetros  $(\beta, \eta)$  estão fora do seu domínio de validade, ou seja, fora do intervalo  $[0,1]$ . Nessa situação, o algoritmo faz a extrapolação da superfície para fora dos seus domínios de validade. No caso de superfícies de fraca curvatura, esta extrapolação não conduz a dificuldades numéricas. O mesmo não se pode afirmar para superfícies de grande curvatura, pois a sua extrapolação pode resultar em inversões da normal e gradientes muito diferentes, como se mostra na Figura 4.8 (b) e na Figura 4.9 (b). Esta situação é particularmente grave no caso de superfícies triangulares, como a apresentada na Figura 4.9. Para evitar situações conducentes à divergência do método de Newton-Raphson, pode considera-se que a extrapolação da superfície é feita com superfícies “planas”, cuja normal garante a continuidade da superfície inicial (figuras Figura 4.8 (c) e Figura 4.9 (c)) [Alves 2003]. Deste modo, introduz-se mais um factor que contribui para a estabilização do algoritmo de detecção de contacto local.

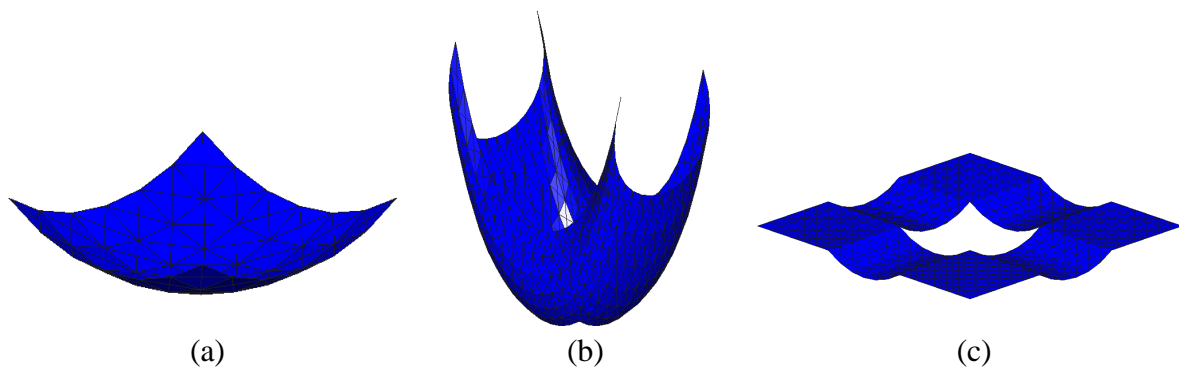


Figura 4.8 – Indefinição associada à superfície de Bézier: (a) representação da superfície no domínio  $\beta, \eta \in [0,1]$ ; (b) extrapolação da superfície para os domínios  $\beta, \eta \in [-1,0]$  e  $\beta, \eta \in [1,2]$  e (c) extrapolação da superfície com base em superfícies planas para os domínios  $\beta, \eta \in [-1,0]$  e  $\beta, \eta \in [1,2]$ .

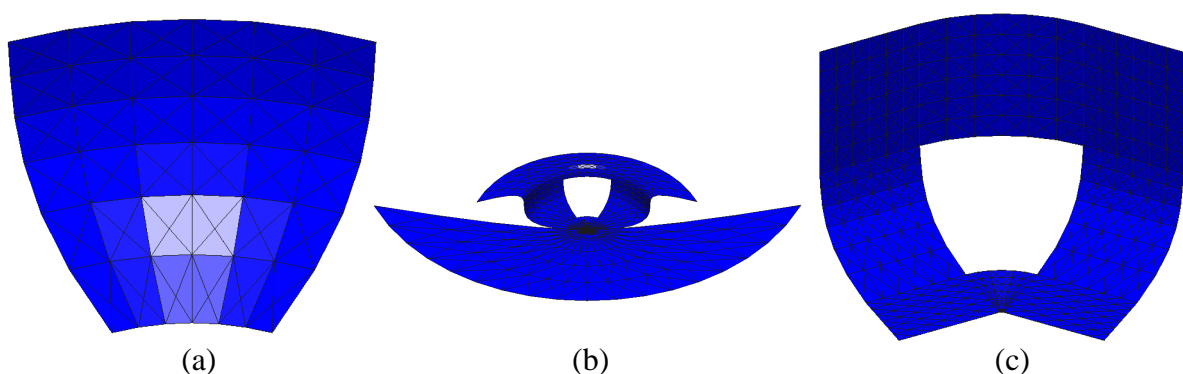


Figura 4.9 – Indefinição associada a uma superfície de Bézier triangular: (a) representação da superfície no domínio  $\beta, \eta \in [0,1]$ ; (b) extrapolação da superfície para os domínios  $\beta, \eta \in [-1,0]$  e  $\beta, \eta \in [1,2]$  e (c) extrapolação da superfície com base em superfícies planas para os domínios  $\beta, \eta \in [-1,0]$  e  $\beta, \eta \in [1,2]$ .

Com base na análise apresentada, pode afirmar-se que no caso de ferramentas de geometria complexa, descritas por um grande número de superfícies de diferentes dimensões, é preferível recorrer a um algoritmo de detecção global de contacto baseado na distância ao ponto médio e aos vértices da superfície. Esta opção permite armazenar a

posição do vértice mais próximo do nó candidato ao contacto, que pode ser utilizada como aproximação inicial para o método de Newton-Raphson, do algoritmo de detecção local de contacto. O recurso a esta aproximação inicial garante que os algoritmos de impacto e projecção convirjam mais rapidamente para uma solução e previne algumas situações de divergência [Oliveira *et al.* 2003].

## 4.4 Algoritmo de Gestão do Contacto

O programa DD3IMP tira partido das vantagens de cada uma das estratégias de detecção de contacto local. Como foi referido, a estratégia de impacto identifica uma posição de referência única para cada ponto  $\mathcal{A}^{\text{def}}$ . Deste modo, esta estratégia é a privilegiada no início da simulação e sempre que ocorrem mudanças de fase. Caso seja negligenciado um ponto potencial de contacto, as consequências podem ser muito graves, quer em termos de solução prevista, quer em termos da convergência (ver Figura 4.7). Para evitar que tal ocorra, caso o algoritmo de impacto não determine uma posição de referência, essa posição é procurada recorrendo ao algoritmo de projecção. O algoritmo de gestão de contacto é apresentado na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Operações principais para a gestão do contacto com atrito (início da simulação e mudança de fase).

<p>REPETIR para todos os pontos susceptíveis de estabelecer contacto.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▫ Identificar as superfícies candidatas ao contacto com o auxílio do algoritmo de detecção de contacto global;</li> <li>▫ Calcular o ponto de referência recorrendo ao algoritmo de Impacto;</li> </ul> <p>SE não for determinado <math>\mathbf{x}^{\text{ref}}</math> ENTÃO</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Calcular o ponto de referência recorrendo ao algoritmo de projecção.</li> </ul> <p>SE for determinado <math>\mathbf{x}^{\text{ref}}</math> ENTÃO</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Calcular o referencial local <math>\mathbf{n}(\mathbf{u})</math>;</li> <li>▪ Calcular <math>d^n(\mathbf{u})</math> e <math>\delta^t(\mathbf{u})</math>.</li> <li>▪ Determinar o estatuto de contacto.</li> </ul> <p>SE não for determinado <math>\mathbf{x}^{\text{ref}}</math> ENTÃO</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Atribuir o estatuto <i>gap</i> ao ponto</li> </ul>
--

Para determinar a solução da *Previsão* é necessário garantir que todos os pontos pertencentes a  $\Gamma^{\text{def}}$ , candidatos ao contacto, têm associada uma posição de referência. O algoritmo de gestão do problema de contacto com atrito necessita desta definição em todos os pontos em contacto ou próximos de estabelecer contacto. Na fase de *Previsão*, para cada incremento  $N$ , procede-se ao cálculo da configuração  $C_{\text{ensaio}}^{[N,0]}$  com todos os nós previamente em contacto, introduzindo o mínimo de alterações aos estatutos de contacto estabelecidos na configuração de equilíbrio conhecida  $C^{[N-1]}$ . Para tal, procede-se à actualização do vector de referência com o auxílio do deslocamento imposto a cada ferramenta, admitindo que não ocorrem alterações à superfície com a qual o impacto é estabelecido. Assim, o tratamento das condições de contacto no passo 2 do algoritmo da fase de *Previsão*, apresentado na secção 3.2.1, desenvolve-se de acordo com o definido na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Operações principais para a gestão do contacto com atrito, na fase de *Previsão*.

REPETIR para todos os pontos previamente em contacto.

- Actualizar o vector de referência de acordo com a actualização da posição das ferramentas  $\mathbf{x}^{\text{ref}[N]} = \mathbf{x}^{\text{ref}[N]} + d\boldsymbol{\omega}_{\text{imp}}$ ;
- Calcular o referencial local  $\mathbf{n}(\mathbf{u})$ ;
- Calcular  $d^n(\mathbf{u})$  e  $\delta^t(\mathbf{u})$ ;
- Determinar o estatuto de contacto.

No final da fase de *Previsão*, uma vez determinada a configuração tangente  $C^{[N,0]}$ , é essencial proceder à actualização do conjunto de pontos susceptíveis de estabelecer contacto, para evitar que algum seja esquecido na fase de *Correcção* seguinte. Uma vez que pode admitir-se que a configuração tangente corresponde a uma solução aproximada da solução final, é preferível optar pelo algoritmo de detecção local de contacto mais robusto, isto é, o de projecção. De facto, é essencial uma definição correcta do vector de referência  $\mathbf{x}^{\text{ref}}$ , pois dele depende a determinação do vector de escorregamento  $\delta^t(\mathbf{u})$ , que define o estatuto de contacto com atrito do ponto. Na etapa correspondente ao ponto 8 do algoritmo da fase de *Previsão*, apresentado na secção 3.2.1, testam-se todos os pontos para os quais não foi detectado contacto na fase inicial de *Previsão*. Para esses pontos aplica-se o algoritmo global de detecção de contacto de modo a actualizar, em função da configuração  $C^{[N,0]}$ , as superfícies candidatas ao contacto com cada ponto. De seguida, identifica-se se o ponto é potencial de contacto recorrendo ao algoritmo de projecção e, caso seja identificada uma posição de referência, actualiza-se o vector  $\mathbf{x}^{\text{ref}}$ .

Na fase de *Correcção* recorre-se ao algoritmo de projecção que permite uma escolha mais fiável em caso de soluções múltiplas. Deste modo, no passo 1 do algoritmo de *Correcção*, apresentado na secção 3.2.2, procede-se da forma indicada na Tabela 4.6.

Tabela 4.6 – Operações principais para a gestão do contacto com atrito, na fase de *Correcção*.

REPETIR para todos os pontos previamente identificados como susceptíveis de estabelecer contacto.

- Calcular o vector de referência, recorrendo ao algoritmo de projecção;
- Calcular o referencial local  $\mathbf{n}(\mathbf{u})$ ;
- Calcular  $d^n(\mathbf{u})$  e  $\delta^t(\mathbf{u})$ ;
- Determinar o estatuto de contacto.

## 4.5 Descrição das Ferramentas

A correcção dos resultados obtidos na simulação numérica do processo de estampagem depende da precisão com que é definida a geometria das ferramentas. Para garantir a convergência do algoritmo de contacto é necessário impor condições de continuidade entre as várias superfícies que definem cada ferramenta. De facto, as discontinuidades entre superfícies dificultam a determinação das variáveis cinemáticas do problema de contacto com atrito, bem como a determinação dos gradientes dessas variáveis [Menezes 1995]. A representação numa base polinomial de potências sucessivas de  $\beta$  e de  $\eta$  (ver expressão (4.7)) obriga a utilizar um grau reduzido para a definição de cada superfície. No programa DD3IMP, opta-se por limitar esse grau a seis, o que pode resultar num

aumento do número total de superfícies para a definição de uma ferramenta. Como exemplo, na Figura 4.10 apresenta-se a definição de uma matriz com um total de 98 superfícies de Bézier.

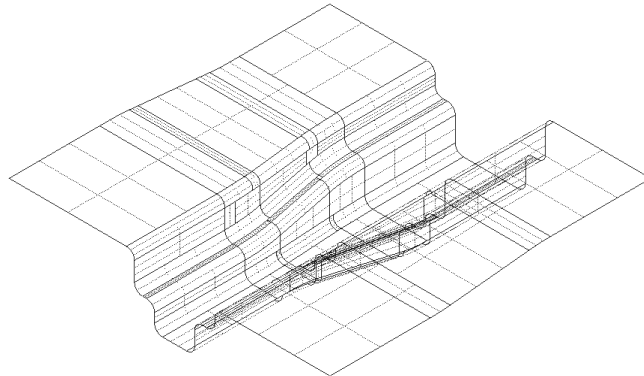


Figura 4.10 – Definição da geometria de uma ferramenta complexa com o auxílio de superfícies de Bézier.

#### 4.5.1 Aproximação de um Arco de Círculo por uma Curva de Bézier

Mesmo numa geometria complexa, como a apresentada na Figura 4.10, é possível constatar que as ferramentas são compostas por um conjunto de superfícies planas, cujas concordâncias entre elas podem ser obtidas com superfícies de raio constante ou de revolução. Uma vez que uma curva de Bézier não consegue representar com exactidão um arco de círculo, interessa minimizar o erro cometido na aproximação, de modo a garantir a precisão dos resultados da simulação [Lin *et al.* 2001, Lee *et al.* 1996, Dokken *et al.* 1990].

Considere-se um arco de círculo que apresenta um ângulo  $\alpha \leq \pi/2$  e raio unitário (Figura 4.11 (a)). No texto que se segue compara-se a representação do arco de círculo obtida por polinómios de Bézier quadráticos e cúbicos. A curva de Bézier de grau 2, que aproxima este arco de círculo, é definida pelos três pontos de controlo  $\mathbf{P}_0$ ,  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$ , tal que:

$$\mathbf{S}(\beta) = \mathbf{S}(x(\beta), y(\beta)) = (1-\beta)^2 \mathbf{P}_0 + 2\beta(1-\beta)\mathbf{P}_1 + \beta^2\mathbf{P}_2, \quad \text{com } \beta \in [0,1] \quad (4.38)$$

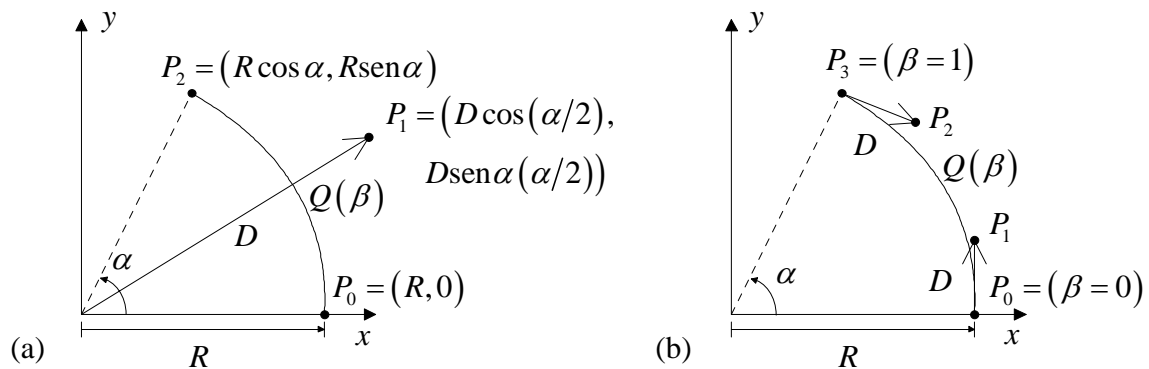


Figura 4.11 – Aproximação de um arco de círculo por uma curva de Bézier: (a) quadrática e (b) cúbica.

Na Figura 4.11 (a) é possível constatar que, em termos das coordenadas cartesianas dos vértices do polinómio característico, a curva de Bézier de grau 2 é definida por:

$$\begin{cases} x(\beta) = (1-\beta)^2 + 2D\beta(1-\beta)\cos\frac{\alpha}{2} + \beta^2 \cos\alpha \\ y(\beta) = 2D\beta(1-\beta)\sin\frac{\alpha}{2} + \beta^2 \cos\alpha \end{cases}, \text{ com } \beta \in [0,1] \text{ e } \alpha \leq \pi/2. \quad (4.39)$$

$D$  é a distância entre a origem do sistema de coordenadas e o ponto  $\mathbf{P}_1$  da rede característica. A curva  $Q(\beta)$  aproxima o círculo unitário com um erro radial definido por

$$\text{erro}(\beta) = \sqrt{x^2(\beta) + y^2(\beta)}, \quad \text{com } \beta \in [0,1]. \quad (4.40)$$

Se à curva  $Q(\beta)$  for imposta a condição de tangência ao círculo nos seus dois pontos extremos, então as coordenadas de  $\mathbf{P}_1$  são, obrigatoriamente,  $(1, \tan(\alpha/2))$  e a distância  $D = 1/\cos(\alpha/2)$ . Esta expressão é fácil de generalizar para um arco de raio  $R$ , onde  $D = R/\cos(\alpha/2)$  (ver Figura 4.11 (a)).

Numa aproximação cúbica, a curva de Bézier é definida por quatro pontos, como se mostra na Figura 4.11 (b), tal que:

$$\mathbf{S}(\beta) = (1-\beta)^3 \mathbf{P}_0 + 3\beta(1-\beta)^2 \mathbf{P}_1 + 3\beta^2(1-\beta) \mathbf{P}_2 + \beta^3 \mathbf{P}_3, \quad \text{com } \beta \in [0,1]. \quad (4.41)$$

Impondo a condição de tangência ao círculo nos dois pontos extremos, as coordenadas cartesianas dos vértices do polinómio característico são dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= [R, 0]; \\ \mathbf{P}_1 &= [R, D]; \\ \mathbf{P}_2 &= [R \cos \alpha + D \sin \alpha, R \sin \alpha - D \cos \alpha]; \\ \mathbf{P}_3 &= [R \cos \alpha, R \sin \alpha]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Para definir  $D$  impõe-se a condição de que o erro cometido em  $\beta = 1/2$  é nulo, ou seja, a curva de Bézier passa pelo ponto correspondente a  $\alpha/2$ . Nestas condições é possível demonstrar que [Lin *et al.* 2001]:

$$D = \frac{4(1 - \cos \alpha/2)}{3 \sin \alpha/2} R. \quad (4.43)$$

Na Figura 4.12 comparam-se as aproximações obtidas com as curvas de Bézier quadrática e cúbica para um arco de círculo unitário com  $\alpha = \pi/2$ , bem como a evolução de erro( $\beta$ ). Para a aproximação quadrática constata-se que o erro máximo ocorre para  $\beta = 1/2$  e a curva resultante é sempre exterior ao círculo. Existem duas alternativas para reduzir o erro desta aproximação: (i) afectar todos os pontos de controlo com um factor de escala ou (ii) eliminar a exigência de continuidade geométrica  $G^1$  [Lee *et al.* 1996]. Nenhuma destas alternativas será aqui discutida uma vez que, a primeira impõe a alteração das curvas adjacentes, de modo a garantir posteriormente a continuidade geométrica  $G^0$ , e a segunda elimina, à partida, a continuidade  $G^1$ . A aproximação quadrática que garante a condição de tangência nos dois pontos extremos é a que conduz a um erro maior. Este erro é função do ângulo  $\alpha$ , aumentando quando este aumenta.

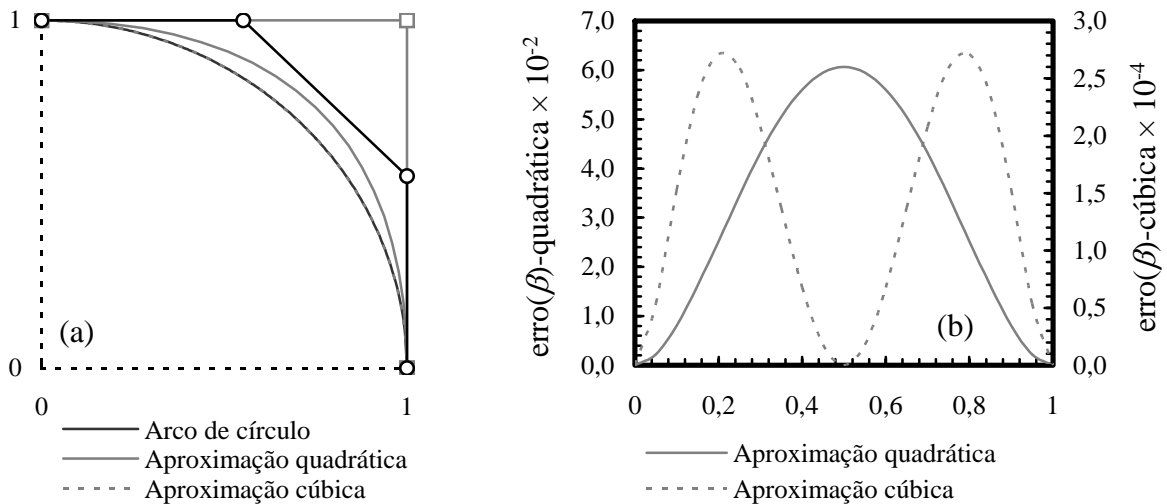


Figura 4.12 – (a) Aproximação quadrática e cúbica de um arco de círculo unitário. (b) Função erro radial para cada uma das aproximações.

A curva definida pela aproximação cúbica é também exterior ao círculo. O erro máximo para um arco de círculo unitário com  $\alpha = \pi/2$  ocorre para  $\beta = (3 \pm \sqrt{3})/6$  (Figura 4.12 (b)) e é duas ordens de grandeza inferior ao erro máximo da aproximação quadrática. O erro radial da aproximação cúbica pode ser reduzido: (i) aumentando o número de curvas cúbicas de Bézier na definição do arco de círculo ou (ii) utilizando uma interpolação de Hermite com erro equi-oscilante [Lin *et al.* 2001, Dokken *et al.* 1990]. A divisão num número maior de curvas conduz a um aumento do número total de superfícies, entre as quais é igualmente necessário garantir a continuidade. A aproximação cúbica descrita é a mais simples e conduz a uma melhoria na precisão da aproximação ao arco de círculo, quando comparado com o polinómio quadrático.

#### 4.5.2 Continuidade de Superfícies Adjacentes

Considerem-se duas curvas de Bézier de grau  $n$ , sendo a primeira descrita pelo polígono  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ , no intervalo  $[\beta_0, \beta_1]$  e a segunda pelo polígono  $\mathbf{P}_n, \dots, \mathbf{P}_{2n}$ , no intervalo  $[\beta_1, \beta_2]$ . No ponto  $\beta_1$  ambas apresentam continuidade  $C^r$  se verificarem a condição [Farin 1993]

$$\left(\frac{1}{\Delta_0}\right)^i \Delta^i \mathbf{P}_{n-1} = \left(\frac{1}{\Delta_1}\right)^i \Delta^i \mathbf{P}_n, \quad \text{com } i = 0, \dots, r, \quad (4.44)$$

em que:

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \beta_{i+1} - \beta_i, \\ \Delta^i \mathbf{P}_n &= \sum_{j=0}^i \frac{i!}{j!(i-j)!} (-1)^{i-j} \mathbf{P}_{n+j}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Tal equivale a dizer que, para as duas curvas terem continuidade  $C^0$  basta serem descritas pelo mesmo vértice característico em  $\beta_1$ . Por outro lado, para garantir a continuidade  $C^1$  é necessário que os vectores definidos por  $(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1})$  e  $(\mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{P}_n)$  sejam colineares na razão  $\Delta_0/\Delta_1$ . Ou seja, a colinearidade dos dois vectores é suficiente para garantir uma variação contínua da tangente, mas não para garantir continuidade  $C^1$ .

Uma curva que é diferenciável em relação ao comprimento de arco, mas não em relação à parametrização corrente, apresenta apenas continuidade geométrica  $G^1$ .

Como uma superfície de Bézier pode ser definida como o produto tensorial de duas curvas de Bézier, é possível definir a condição de continuidade  $C^r$  para as superfícies, por aplicação directa da equação (4.44) válida para curvas. Duas superfícies de Bézier apresentam continuidade  $C^r$  na fronteira comum se e só se, todos os vértices das duas redes características obedecerem à condição de continuidade. Ou seja, para que duas superfícies apresentem continuidade  $C^0$ , a curva adjacente tem de ser definida pelo mesmo polinómio nas duas superfícies. A continuidade  $C^1$  exige que os vértices adjacentes aos que definem a fronteira correspondam a vectores colineares, todos na mesma razão [Farin 1993]. A rigidez da condição de continuidade  $C^1$  pode tornar-se um sério obstáculo à construção de geometrias que consistem num conjunto de superfícies de Bézier. No entanto, pode relaxar-se a condição de continuidade  $C^1$  para continuidade geométrica  $G^1$ , exigindo apenas a variação contínua da tangente ao longo da curva fronteira. Esta é uma condição fundamental, uma vez que a normal à superfície é calculada com base no plano tangente, sendo necessário garantir a continuidade na evolução da normal para evitar a divergência do algoritmo de contacto [Menezes 1995].

### 4.5.3 Exemplo Numérico

Para avaliar a influência da definição das ferramentas nos resultados obtidos na simulação do processo de estampagem, seleccionou-se o problema proposto na conferência [NUMISHEET'93]. A geometria a simular é apresentada na Figura 4.13. Devido à simetria geométrica e material apenas se modela um quarto do problema, o que contribui para a redução do número de superfícies a utilizar na simulação. As condições do processo são sumariadas na Tabela 4.7. As ferramentas foram definidas recorrendo a diferentes aproximações para os polinómios característicos, de modo a avaliar a sua influência no comportamento global do algoritmo de gestão de contacto com atrito, bem como na evolução da força prevista para o punção e na geometria do componente. A chapa é discretizada com elementos finitos hexaédricos isoparamétricos, com uma distribuição correspondente a  $30 \times 30 \times 2$ , associados a um algoritmo de integração reduzida selectiva.

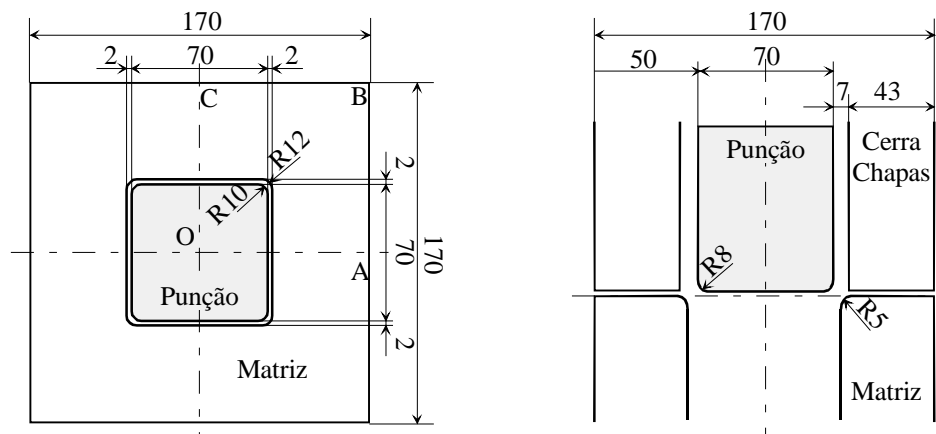


Figura 4.13 – Representação da geometria das ferramentas para a conformação de uma taça quadrada (valores em mm) [NUMISHEET'93].



Tabela 4.7 – Variáveis do processo e propriedades mecânicas do material utilizado na simulação da conformação de uma taça quadrada.

<i>Geometria inicial da chapa</i>		<i>Parâmetros do processo</i>	
Largura/2	75 mm	Coefficiente de atrito	0,144
Comprimento/2	75 mm	Força do cerra-chapas	19600 N
Espessura	0,78 mm		
<i>Propriedades do Material</i>			
Módulo de Young, Coeficiente de Poisson		206000 MPa; 0,3	
Encruamento isotrópico		$Y_{\text{Swift}} = 565,3(\bar{\epsilon}^p + 0,00711)^{0,259}$ [MPa]	
Crítério de Hill'48	$F = 0,283, G = 0,358, H = 0,642$ e $L = M = N = 1,289$		

#### 4.5.3.1 Definição Manual da Geometria

As superfícies são previamente definidas pelo cálculo analítico dos polinômios característicos. Determinam-se duas geometrias distintas que apresentam grau 1 nas zonas de contacto plano, e grau 2 ou 3 nos raios de concordância. Os vértices da rede característica são determinados segundo as definições apresentadas na secção anterior, de modo a garantir continuidade geométrica  $G^1$ . Ambas as geometrias testadas obedecem igualmente à condição de continuidade  $C^1$ . O punção é definido por um total de 8 superfícies de Bézier e a matriz por 9. O cerra-chapas é definido por 3 superfícies de Bézier, idênticas às da matriz na zona da flange. A geometria obtida com grau 2 nas zonas de raio de concordância é designada por  $G2$ , e a de grau 3 por  $G3$ .

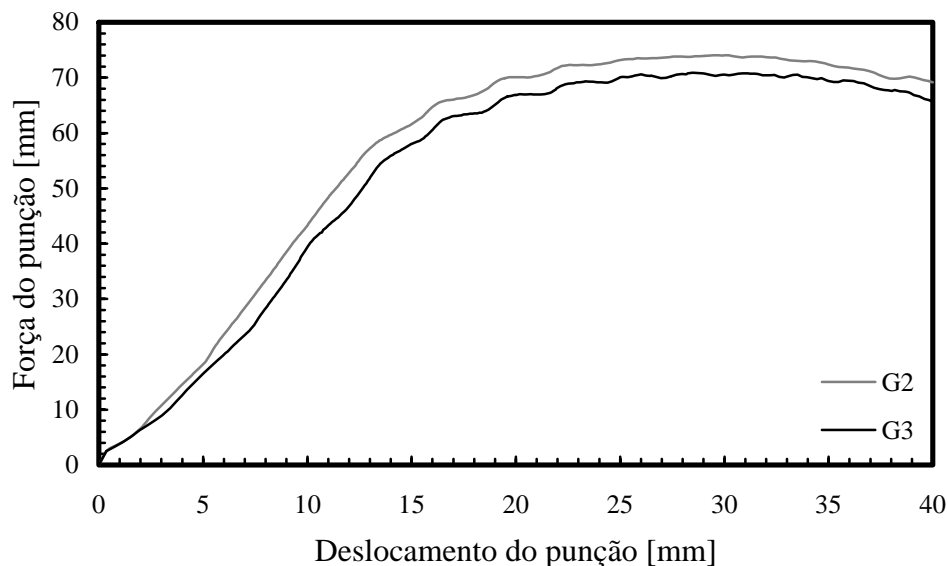


Figura 4.14 – Evolução da força exercida pelo punção, na estampagem de uma chapa quadrada. Influência da definição geométrica  $G2$  e  $G3$  das ferramentas.

Na Figura 4.14 apresenta-se a evolução da força exercida pelo punção com o seu deslocamento. A aproximação quadrática conduz a uma força máxima prevista 5% superior à aproximação cúbica. A geometria final prevista é também influenciada pelo grau das superfícies. As maiores diferenças obtêm-se para a linha OB (ver Figura 4.13). Esta linha abrange a zona em que o punção e a matriz apresentam superfícies com dupla curvatura. Na Figura 4.15 (a) apresenta-se o perfil obtido para a linha OB para as duas

definições geométricas. Da análise dos perfis obtidos, constata-se que as diferenças entre eles são mais acentuadas nas zonas de curvatura das ferramentas. As condições de escoamento do material também são diferentes. De modo a quantificar a diferença entre as duas soluções, admite-se como referência a geometria deformada obtida com as ferramentas  $G3$ . Determina-se então a distância entre cada nó do plano médio das duas geometrias. A evolução obtida é a que se apresenta na Figura 4.15 (b). É clara a influência da definição das ferramentas na zona de curvatura. Assim, apesar da geometria obtida com as zonas de concordância definidas com grau 2 satisfazer a condição de continuidade  $G^1$ , o erro cometido na definição dos arcos de círculo induz alterações significativas na geometria final. Também, devido à maior curvatura, a geometria das ferramentas  $G2$  conduz a um menor escoamento da chapa e, conseqüentemente a um aumento da deformação plástica equivalente, como se pode observar na Figura 4.16, em que se apresenta a distribuição da deformação plástica equivalente obtida com as duas descrições geométricas das ferramentas.

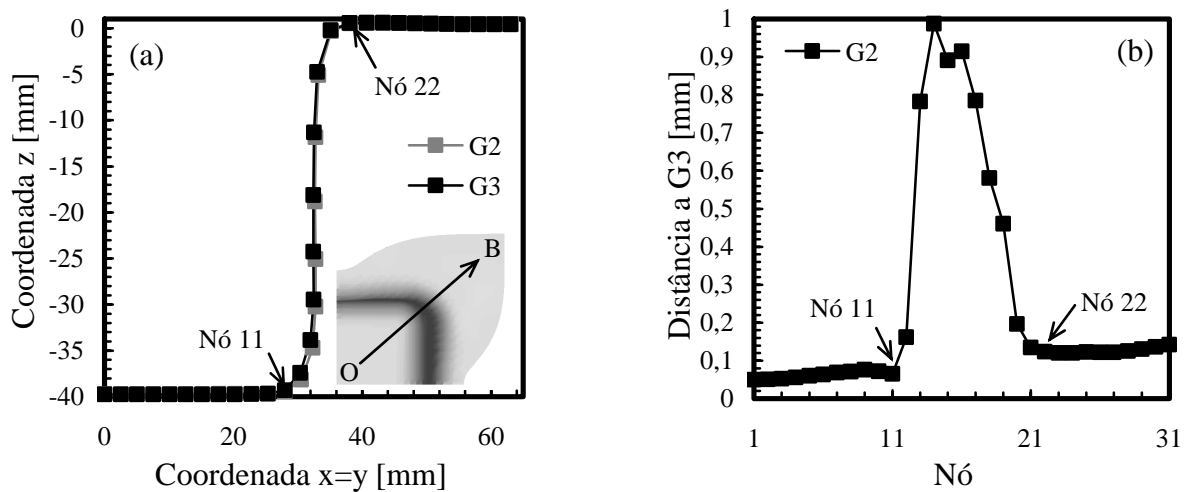


Figura 4.15 – Influência da definição geométrica  $G2$  e  $G3$  das ferramentas na estampagem de uma taça quadrada: (a) Secção OB e (b) Distância entre as secções obtidas com as duas definições,  $G2$  e  $G3$ .

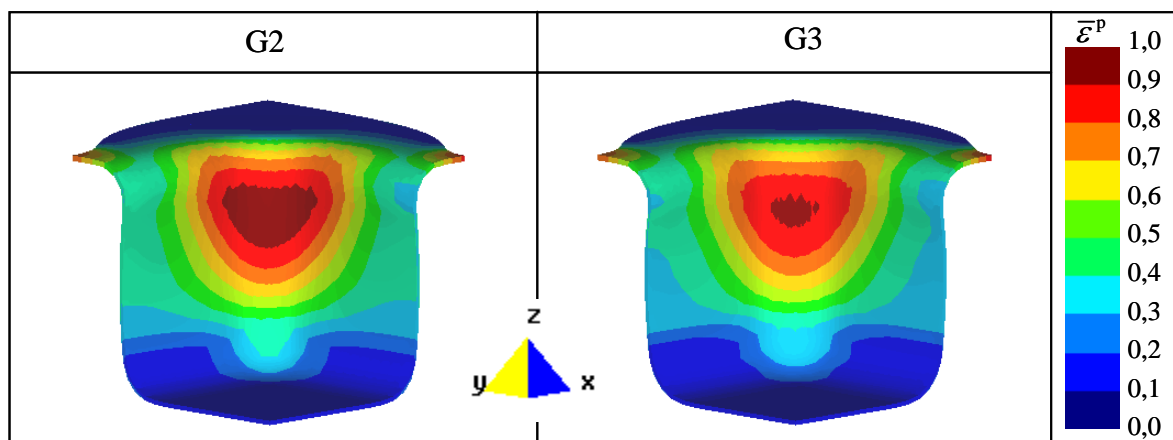


Figura 4.16 – Isovalores de deformação plástica equivalente  $\bar{\epsilon}^p$ . Influência da definição geométrica das ferramentas.

Para evidenciar a influência do grau das superfícies no algoritmo de contacto, recorre-se a um algoritmo de aumento de grau de uma superfície. Para aumentar o grau de uma superfície de  $(m, n)$  para  $(m+1, n)$ , é necessário determinar os novos vértices da rede característica, de tal forma que [Farin 1993]:

$$P_{ij} = \left(1 - \frac{i}{m+1}\right) P_{ij} + \frac{i}{m+1} P_{i-1j}, \quad i = 0, \dots, m+1 \quad \text{e} \quad i = 0, \dots, n. \quad (4.46)$$

Este algoritmo simples permite, a partir da geometria  $G3$ , definir geometrias de grau mais elevado. A geometria definida desta forma apresenta o mesmo erro que a geometria  $G3$ .

O algoritmo de aumento de grau, definido na relação (4.46), é utilizado para aumentar o grau das zonas curvas de grau 3 até 6. A designação adoptada para cada uma das geometrias é função do grau final das zonas curvas (por exemplo, aumento de grau 3 para 4 designa-se  $G4$ ). Foi igualmente construída uma geometria para a qual o grau de todas as superfícies, em ambas as direcções, é 6 (designada  $G6\_G6$ ).

Como a geometria das ferramentas é a mesma, as simulações realizadas com as várias definições conduzem à mesma evolução da força do punção. A forma final da peça estampada não apresenta diferenças significativas. Em termos de distâncias relativas dos nós à geometria prevista com a definição das ferramentas  $G3$ , o erro máximo é inferior a 0,005 mm. No entanto, o tempo de cálculo é afectado pelo aumento de grau das superfícies, como se mostra na Tabela 4.8. Todas estas geometrias apresentam um tempo de cálculo superior ao obtido com  $G3$ . Este aumento está directamente associado ao tempo dispendido no algoritmo de gestão de contacto, no qual o aumento do grau das superfícies se traduz num aumento do número de operações. A aparente contradição que ocorre para a definição  $G5$  está relacionada com outros parâmetros numéricos, que não dependem directamente do grau da superfície que definem as ferramentas.

Tabela 4.8 – Tempo de cálculo obtido para diferentes definições das ferramentas, na simulação do processo de conformação de uma taça quadrada.

	Definição geométrica das ferramentas				
	$G3$	$G4$	$G5$	$G6$	$G6\_G6$
Tempo de CPU [%]	<b>100,0</b>	107,5	105,2	109,0	156,8

#### 4.5.3.2 Definição da Geometria com Recurso ao CAD

A utilização de ferramentas definidas por superfícies de Bézier tem interesse se for possível recorrer directamente à informação proveniente de programas de CAD. Na Figura 4.17 apresentam-se os vértices do polinómio característico, obtido na aproximação de um arco de círculo unitário, para a definição quadrática e cúbica fornecida por um programa de CAD. Neste caso, não é possível gerar o polinómio característico quadrático que garanta continuidade  $G^1$ . A alteração das coordenadas do ponto correspondente a  $\beta = 0,5$  permite reduzir o erro cometido em relação à aproximação analítica anteriormente utilizada, mas impede uma variação contínua da normal à curva [Lee *et al.* 1996]. Na Figura 4.17 apresenta-se, igualmente, o erro radial cometido pelas aproximações geradas do CAD, calculado segundo a expressão (4.40). Esta avaliação do erro permite constatar que, neste caso, ao contrário das soluções analíticas utilizadas anteriormente, a curvatura é sempre inferior ao valor pretendido, ou seja, as curvas

descritas estão sempre no interior do círculo unitário. A aproximação cúbica garante uma melhor aproximação ao círculo nos seus extremos, enquanto que a aproximação quadrática se aproxima melhor do círculo para  $\beta = 0,5$ .

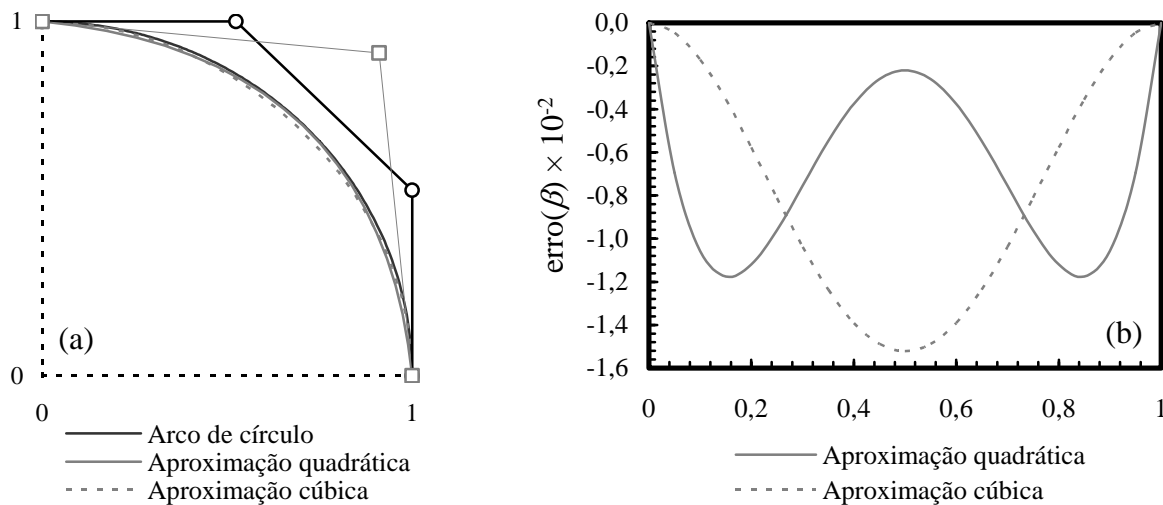


Figura 4.17 – (a) Aproximação quadrática e cúbica de um arco de círculo unitário obtida com recurso a um programa de CAD. (b) Função erro radial para cada uma das aproximações.

Para avaliar a influência da construção automática de superfícies de Bézier com o auxílio de programas de CAD na qualidade dos resultados de simulação do processo de estampagem da taça quadrada, produziram-se ferramentas com superfícies de grau 2 e 3 nas zonas curvas. De modo a distinguir a forma de obtenção destas geometrias, estas são designadas por *CAD2* e *CAD3*, respectivamente. Estas geometrias apresentam o mesmo grau das geometrias *G2* e *G3*, mas não apresentam continuidade geométrica  $G^1$ . Assim, é possível avaliar a importância deste factor no algoritmo de gestão de contacto. Convém realçar que a geometria *CAD2* não obedece à continuidade geométrica pela própria aproximação ao arco de círculo utilizada. A geometria *CAD3* não obedece a essa condição apenas na zona de concordância entre a dupla curvatura da matriz e a zona plana da flange. Para avaliar este parâmetro é necessário verificar, para todas as superfícies adjacentes de cada ferramenta, se os vectores são colineares, e qual o desvio apresentado em relação à colinearidade. Na Tabela 4.9 apresentam-se os valores médios dos desvios da colinearidade obtidos para as definições das ferramentas produzidas por CAD.

Tabela 4.9 – Desvio da continuidade geométrica  $G^1$  obtido para a definição da geometrias das ferramentas para a estampagem de uma taça quadrada, com o recurso a um programa de CAD.

	<i>Definição geométrica das ferramentas</i>	
	<i>CAD2</i>	<i>CAD3</i>
Desvio [°]	4,413	1,169

A Figura 4.18 apresenta a evolução da força de estampagem em função do deslocamento do punção para os conjuntos *G2*, *G3*, *CAD2* e *CAD3*. As ferramentas *CAD2* e *CAD3* conduzem a resultados semelhantes aos obtidos com a ferramenta *G3*. A definição de grau 2, obtida do CAD (*CAD2*), conduz a uma força inferior à obtida com *G2*. Tal justifica-se, porque a definição *G2* resulta numa geometria de maior curvatura

que a definição *CAD2* (ver a Figura 4.12 e a Figura 4.17), que limita o escoamento do material. Na Figura 4.19 compara-se a geometria final obtida para a secção OB. Para quantificar as diferenças entre as várias geometrias admite-se como referência a geometria obtida com as ferramentas definidas com grau 3 (*G3*) e calcula-se a distância relativa. Os resultados apresentados na Figura 4.19 (b) mostram que a definição de ferramentas *G2* conduz a resultados mais afastados dos obtidos com *G3* do que os obtidos com as definições *CAD* (*CAD2* e *CAD3*).

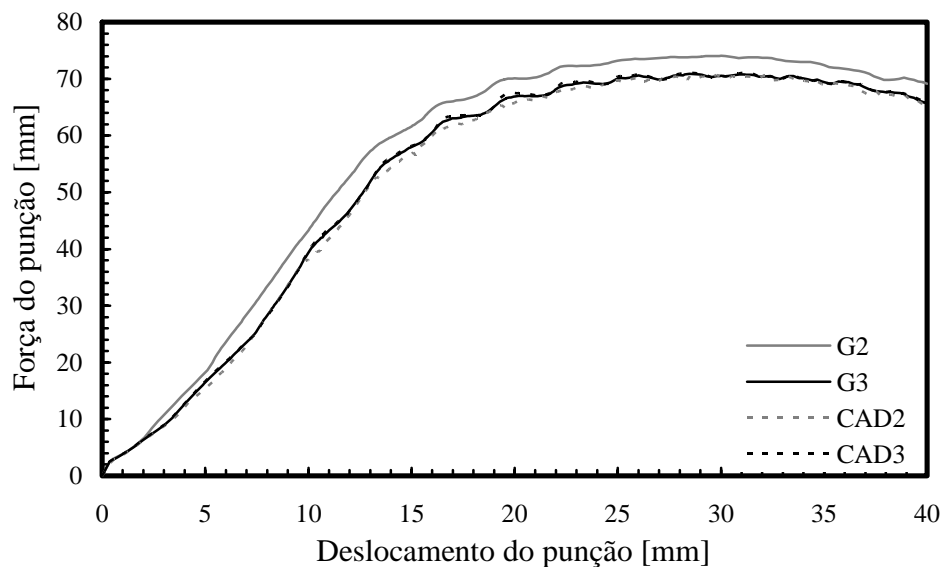


Figura 4.18 – Evolução da força exercida pelo punção, na estampagem de uma chapa quadrada. Influência da definição geométrica *G2*, *G3*, *CAD2* e *CAD3* das ferramentas.

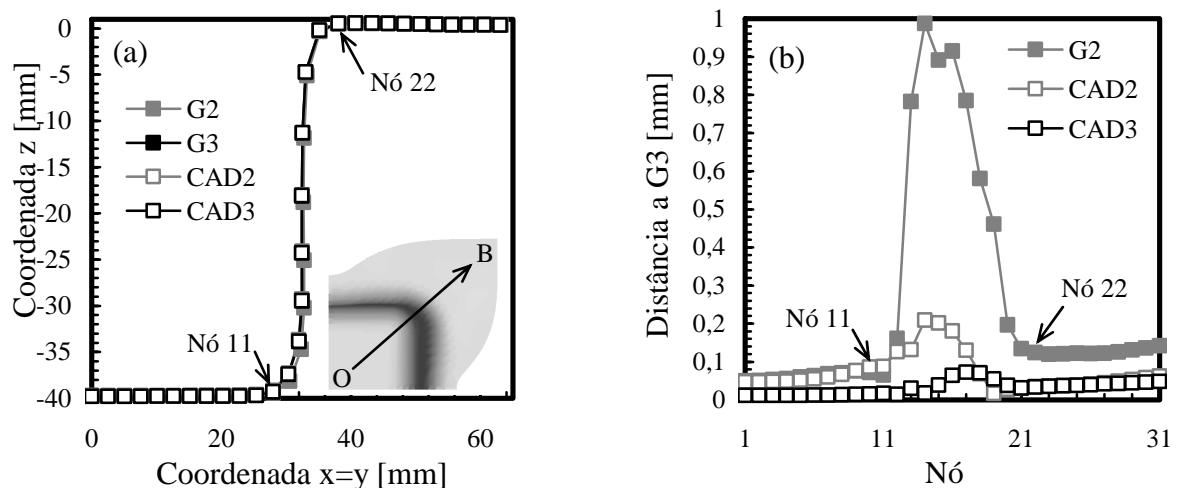


Figura 4.19 – Influência da definição geométrica *G2*, *G3*, *CAD2* e *CAD3* das ferramentas na estampagem de uma taça quadrada: (a) Secção OB e (b) Distância entre as secções obtidas com as definições *G2*, *CAD2*, *CAD3* e *G3*.

Na Tabela 4.10 apresentam-se os tempos de cálculo dispendidos com as simulações para estas quatro definições das ferramentas (*G2*, *G3*, *CAD2* e *CAD3*). A comparação destes tempos de cálculo coloca em evidência a influência da continuidade da normal à superfície na convergência do algoritmo de contacto, que é garantida apenas no caso das

definições  $G2$  e  $G3$ . A definição com grau 2 ( $CAD2$ ), apresenta um aumento do tempo de cálculo de 20% em relação a  $G2$  e com grau 3 ( $CAD3$ ), este aumento em relação a  $G3$  é de aproximadamente 8%. Como o grau das superfícies é o mesmo na definição analítica e no CAD, estas diferenças devem-se ao desvio da continuidade geométrica  $G^1$ .

Tabela 4.10 – Tempo de cálculo obtido para diferentes definições das ferramentas, na simulação do processo de conformação de uma taça quadrada.

	<i>Definição geométrica das ferramentas</i>			
	$G2$	$G3$	$CAD2$	$CAD3$
Tempo de CPU [%]	100,4	<b>100,0</b>	120,4	107,9

O aumento de tempo de cálculo das simulações com as superfícies  $CAD2$  e  $CAD3$ , sugerem que a utilização de programas de CAD para a produção de superfícies de Bézier requer alguns cuidados. De modo a demonstrar que a manipulação correcta das superfícies produzidas num programa de CAD pode ser vantajosa em termos de qualidade dos resultados, produziu-se uma nova ferramenta por simples redução de grau das superfícies, originalmente construídas no programa de CAD sem limitação de grau. A redução é feita garantindo a condição de tangência e limitando a 6 o grau máximo das superfícies. Para além destas restrições é ainda imposta a condição de igual grau para curvas de superfícies adjacentes. Esta definição geométrica procura garantir, não só a continuidade  $G^1$ , mas também  $C^1$ . A geometria obtida designou-se por  $CAD$ , e é constituída por 11 superfícies para o punção, 16 para a matriz e 4 para o cerra-chapas. A zona de dupla curvatura da matriz passa a ser descrita por quatro superfícies de grau  $m = n = 6$ , e a zona do punção com duas superfícies de grau  $m = 5$  e  $n = 6$ .

O grau e os erros cometidos em programas de CAD, na produção das superfícies de Bézier, podem ser igualmente otimizados com o auxílio do ficheiro de controlo da interface (STEP, IGES, etc.). Basicamente, existem dois grupos de variáveis a controlar: (i) as tolerâncias entre as superfícies existentes na geometria e (ii) as tolerâncias a impor caso seja necessário proceder à divisão de uma superfície da geometria inicial em várias. Deste modo, produziu-se uma nova definição das ferramentas a partir da definição da geometria em CAD, designada por  $CAD\_STEP$ , actuando ao nível das tolerâncias impostas no ficheiro de controlo da interface (neste caso de formato STEP) [Oliveira e Menezes 2002]. A geometria  $CAD\_STEP$  é composta por 8 superfícies para o punção, 10 para a matriz e 4 para o cerra-chapas. Neste caso, o grau máximo das superfícies geradas é de  $m = n = 5$ , mas existem também superfícies de grau  $m = 6$  e  $n = 3$ .

Para estas duas novas geometrias provenientes do CAD o desvio da continuidade geométrica  $G^1$  consta da Tabela 4.11, que reproduz também para comparação os dados da Tabela 4.9. Da análise desta tabela resulta que o controlo do grau das ferramentas apenas através do ficheiro de controlo da interface conduz à melhor precisão na definição geométrica. Em ambos os casos ( $CAD$  e  $CAD\_STEP$ ) a qualidade da descrição das ferramentas é melhor do que a obtida com  $CAD2$  e  $CAD3$ . A Tabela 4.12 resume os tempos de cálculo das simulações com as definições das ferramentas  $CAD$  e  $CAD\_STEP$  e reproduz também, para comparação, os dados da Tabela 4.10. Admitindo como referência a geometria  $G3$ , a utilização da geometria  $CAD$  conduz a um aumento de tempo de cálculo de aproximadamente 24%. Para a geometria  $CAD\_STEP$  o aumento é de aproximadamente 7% em relação a  $G3$ . Nestes dois casos, o aumento do

tempo de cálculo em relação à simulação  $G3$  está associado aos graus das superfícies mais elevados nas definições  $CAD$  e  $CAD\_STEP$ .

Tabela 4.11 – Desvio da continuidade geométrica  $G^1$  obtido para a definição da geometrias das ferramentas para a estampagem de uma taça quadrada, com o recurso a um programa de CAD.

	<i>Definição geométrica das ferramentas</i>			
	<i>CAD2</i>	<i>CAD3</i>	<i>CAD</i>	<i>CAD_STEP</i>
Desvio [°]	4,413	1,169	0,305	0,050

Tabela 4.12 – Tempo de cálculo obtido para diferentes definições das ferramentas, na simulação do processo de conformação de uma taça quadrada.

	<i>Definição geométrica das ferramentas</i>					
	<i>G2</i>	<i>G3</i>	<i>CAD2</i>	<i>CAD3</i>	<i>CAD</i>	<i>CAD_STEP</i>
Tempo de CPU [%]	100,4	<b>100,0</b>	120,4	107,9	123,8	106,7

Com este estudo foi possível concluir que, para proceder a uma correcta caracterização da geometria das ferramentas com superfícies paramétricas, sem influenciar o resultado final, é necessário utilizar, no mínimo, polinómios de grau 3. O grau das superfícies influencia o tempo de cálculo, sendo preferível recorrer ao grau mínimo de modo a reduzir este factor. A definição de superfícies adjacentes deve obedecer à continuidade geométrica  $G^1$ , de modo a garantir a convergência do algoritmo de gestão de contacto com atrito e minimizar o tempo de cálculo.

No caso de geometrias simples pode ser preferível proceder à determinação analítica dos vértices dos polinómios característicos das superfícies, uma vez que se garante a continuidade  $G^1$ . No entanto, esta opção é impraticável para geometrias complexas, em que é obrigatório o recurso a programas comerciais de CAD. Nestes casos, é conveniente controlar as tolerâncias a impor à definição das superfícies com o auxílio do ficheiro de interface de saída da informação.





## Capítulo 5

# Regularização do Problema de Contacto com Atrito

*Discutem-se alguns dos métodos mais utilizados para impor a condição de impenetrabilidade e a condição de contacto com atrito no âmbito do método dos elementos finitos, nomeadamente multiplicadores de Lagrange, penalidade, lagrangeano perturbado, barreira e lagrangeano aumentado. Desenvolvem-se as matrizes tangentes necessárias à resolução do problema com o auxílio do método de Newton-Raphson. Apresenta-se o sistema de equações lineares global misto bem como o sistema de equações lineares global reduzido. Tecem-se alguns comentários acerca da convergência do método iterativo utilizado.*

---

### 5.1 Enquadramento

A formulação variacional do problema de contacto com atrito conduz a um problema de optimização sujeito a constrangimentos impostos por desigualdades. Matematicamente, o problema de contacto é interpretado como um sistema físico definido por uma inequação variacional [Duvaut e Lions 1972]. A característica mais relevante desta inequação variacional é o facto da sua solução ser restringida pelos constrangimentos físicos, que dependem directamente da solução. Estes constrangimentos devidos ao contacto impõem restrições ao espaço de soluções. Geralmente, introduzem-se variáveis duais apropriadas de modo a transformar a inequação variacional numa equação variacional. O recurso às variáveis duais conduz a um problema variacional que, para sistemas conservativos, corresponde a um problema de optimização sujeito a restrições. Ou seja, a resolução do problema de contacto com atrito corresponde à minimização da energia total do sistema, admitindo que esta está sujeita a restrições definidas por desigualdades, associadas à função distância normal de contacto e ao vector de escorregamento. Este problema é não-linear e não-diferenciável, o que impede, por exemplo, a aplicação directa de um método do tipo Newton-Raphson para a sua resolução.

Um dos primeiros métodos utilizados na resolução do problema de contacto com atrito foi o método de eliminação directa de variáveis dependentes. Neste método, a solução do problema é aproximada iterativamente através de um algoritmo de tentativa-erro, que termina quando todas as condições de contacto com atrito forem satisfeitas. O método de eliminação directa de variáveis dependentes é de implementação simples. Em contrapartida, exige cuidados adicionais nos algoritmos de detecção de contacto, caso contrário pode conduzir a problemas de convergência [Zhou e Wagoner 1997]. Estes resultam do reposicionamento, fora do procedimento iterativo, dos nós que apresentam penetração com a superfície da ferramenta [Xu *et al.* 2003]. Para situações em que um dos corpos em contacto pode ser considerado como rígido, o problema de

estabilidade pode ser ultrapassado admitindo que não é possível ocorrer penetração. Para tal, é necessário garantir que a velocidade dos pontos do corpo deformável é igual à velocidade do corpo rígido, que é conhecida [Santos e Makinouchi 1995]. O recurso a este método exige que a detecção de contacto seja exacta, para evitar que possíveis penetrações iniciais se mantenham no resultado final [Wang e Makinouchi 2000].

A formulação do problema de contacto com atrito como um problema de optimização não-linear permite recorrer a outros métodos com fundamentação matemática mais sólida. A maioria dos métodos utilizados na resolução de problemas de optimização sujeitos a restrições baseia-se em impor constrangimentos definidos por igualdades. Como as restrições impostas pelo contacto são desigualdades, é necessário recorrer a um método que identifique os constrangimentos activos. Uma vez aplicada a estratégia de selecção dos constrangimentos activos, o problema a resolver está sujeito a restrições impostas por igualdades e pode ser resolvido recorrendo ao método dos multiplicadores de Lagrange ou a um método de eliminação de constrangimentos (*constraint method*).

O método dos multiplicadores de Lagrange baseia-se no teorema da dualidade. Este permite associar a um problema de optimização sujeito a restrições, um problema dual cujas incógnitas são os multiplicadores de Lagrange do problema original. Em vez de resolver o problema de minimização com constrangimentos, opta-se por maximizar o problema dual, uma vez que este não está sujeito a restrições. De facto, na optimização de problemas sujeitos a restrições, os multiplicadores de Lagrange surgem de forma natural, associados à condição de primeira ordem necessária para a determinação de um ponto-sela [Luenberger 1984]. Para lidar com as restrições impostas pelas inequações é necessário identificar quais estão activas na solução. Uma inequação activa é então tratada como uma igualdade, à excepção da condição a impor ao multiplicador de Lagrange. Este método garante que as restrições são exactamente cumpridas. No entanto, a dimensão do problema a resolver aumenta em resultado da adição das variáveis suplementares correspondentes aos multiplicadores de Lagrange. Por outro lado, a matriz do sistema apresenta termos diagonais nulos, exigindo cuidados especiais na resolução do sistema [Laursen e Oancea 1994].

No método dos constrangimentos activos o problema de contacto é resolvido procurando satisfazer as restrições *a priori*, impondo que o campo de deslocamento virtual seja compatível com as restrições impostas pelo obstáculo. As restrições são eliminadas do sistema, forçando a compatibilidade do campo de deslocamentos. A compatibilidade das restrições é garantida recorrendo a um método de programação quadrática [Klarbring 1986]. Refaat e Meguid [1994] preconizam a utilização directa da formulação através das inequações variacionais. O recurso a estas inequações garante que as condições cinemáticas do contacto são impostas explicitamente na solução do problema, não sendo necessário recorrer a elementos de contacto particulares. A aproximação em inequações variacionais resulta numa formulação do princípio dos trabalhos virtuais em inequações. No entanto, não existe um método numérico que permita o tratamento simultâneo do contacto unilateral e do contacto com atrito [Zhang *et al.* 2002]. Efectivamente, para o problema de contacto com atrito não é possível determinar um problema de optimização equivalente sem recorrer a técnicas de regularização. Deste modo, os autores que defendem o recurso ao método dos constrangimentos activos optam por desenvolver algoritmos que se baseiam na resolução iterativa de dois problemas. Primeiro, admite-se como conhecida a tensão de atrito e

determina-se uma aproximação à área e à tensão normal de contacto. Uma vez conhecidas estas variáveis, estima-se novamente a tensão de atrito [Refaat e Meguid 1998, De Saxcé e Feng 1998]. Outros exemplos de aplicação do método dos constrangimentos activos podem ser encontrados para problemas lineares elásticos em Christensen *et al.* [1998] ou elastoplásticos em Chabrand *et al.* [2001].

O recurso a uma estratégia incorrecta para a selecção dos constrangimentos activos pode resultar em tempos de computação muito elevados ou mesmo conduzir a resultados incorrectos. Um procedimento alternativo é evitar a selecção explícita do conjunto de constrangimentos activos, procurando estimar o valor da força de contacto. Nesta aproximação, a força de contacto é considerada função das variáveis cinemáticas duais. Este tipo de aproximação é denominado por regularização, pois permite obter um problema não-linear mas diferenciável. Os métodos de regularização englobam o método da penalidade, o método da barreira e os métodos híbridos: lagrangeano perturbado e lagrangeano aumentado. Estes métodos optam por assumir a força de contacto como uma função da sua variável espacial conjugada de trabalho. O resultado é uma solução para o problema de contacto com atrito que permite pequenas violações dos constrangimentos, de modo a obter uma estimativa para a direcção e magnitude das forças de contacto. A aproximação estabelecida pela regularização consiste em associar a maiores penetrações forças de contacto maiores, para separar os corpos em contacto [Kloosterman 2002]. Do ponto de vista matemático, os métodos de regularização são técnicas de optimização. Admite-se que a resolução do problema sem constrangimentos é possível e converte-se o problema estrangido numa sequência de problemas de optimização sem constrangimentos, cujo limite é a solução do problema original. A forma da sequência de problemas pode ser obtida adicionando à função objectivo uma função que penalize a violação da restrição em cada ponto. Por exemplo, a força normal de contacto passa a ser definida em função da sua variável espacial conjugada do trabalho: a distância normal de contacto.

O método da penalidade, proposto por Courant em 1948, é particularmente atractivo para problemas de optimização em que as restrições são impostas por desigualdades, pois é muito simples e de fácil implementação numérica. Para aproximar o problema de optimização sujeito a restrições por um problema sem constrangimentos, adiciona-se à função objectivo um termo que associa um custo elevado à violação do constrangimento. Esta penalização é introduzida com o auxílio de um parâmetro numérico  $r$ , designado por parâmetro de penalidade. O método da penalidade resulta num sistema de equações cujas incógnitas são apenas os deslocamentos. A força de contacto depende do deslocamento através do parâmetro de penalidade. Quando este método é aplicado ao problema de contacto com atrito, alguns autores preferem designá-lo por método das penalidades, pois admitem que as penalizações introduzidas para cada restrição podem ser distintas [Alart 1993]. O método da penalidade conduz a soluções que só satisfazem as restrições de forma aproximada. De facto, a solução obtida pelo método só é exacta para um valor infinito do parâmetro de penalidade. O método da penalidade é mal condicionado e sensível ao valor escolhido para o parâmetro de penalidade [Nour-Omid e Wriggers 1987].

No método de barreira, o problema sem constrangimentos é obtido por adição à função objectivo de um termo que favorece as soluções situadas na região admissível, em detrimento das que estão próximas da fronteira. Associado a este método surge também um parâmetro numérico  $r$ , que define a severidade da barreira e, conseqüentemente, o

grau com que o problema não-constrangido aproxima o problema original. Tal como para o método da penalidade, à medida que  $r$  tende para infinito a aproximação é mais precisa. Porém, a estrutura do problema não-constrangido torna-se mais desfavorável, diminuindo a velocidade de convergência dos algoritmos que podem ser aplicados para a sua resolução [Luenberger 1984]. O método clássico de barreira não é normalmente utilizado na resolução de problemas não-lineares, devido a problemas de convergência. No entanto, pode ser combinado com o método do lagrangeano aumentado, conduzindo a algoritmos robustos para a resolução de problemas não-lineares [Shanno *et al.* 1995].

Os métodos de regularização evitam a definição dos constrangimentos activos de forma explícita, mas o facto de a solução ser restringida por constrangimentos físicos que dependem directamente da solução, surge como uma dificuldade adicional. Em consequência, soluções clássicas como o método da penalidade não são tão eficientes como de esperar. Os métodos híbridos procuram ultrapassar estas dificuldades combinando as vantagens do método da penalidade e dos multiplicadores de Lagrange. O primeiro método híbrido aplicado à resolução do problema de contacto é o método do lagrangeano perturbado, que resulta da introdução de um termo de regularização no método dos multiplicadores de Lagrange. Este permite uma avaliação mais correcta das forças de contacto. No entanto, continua a apresentar sensibilidade ao parâmetro de penalidade seleccionado [Simo *et al.* 1985, Walter 1999]. Esta sensibilidade foi ultrapassada pelo método do lagrangeano aumentado. Este método pode ser visto como um compromisso entre o método dos multiplicadores de Lagrange e o método da penalidade. Baseia-se na correcção iterativa da solução penalizada, até obter a solução correcta para os multiplicadores de Lagrange. Qualquer que seja o valor do parâmetro de penalidade, quando os multiplicadores de Lagrange e os deslocamentos satisfazem as condições de equilíbrio do problema, cumprem igualmente as restrições ao problema. A principal vantagem do método do lagrangeano aumentado é permitir a obtenção de uma solução que obedece aos constrangimentos, para uma vasta gama de valores dos parâmetros de penalidade [Simo e Laursen 1992]. Também as matrizes tangentes do operador de contacto são melhor condicionadas do que as que resultam de um método de penalidade. A contrapartida reside no facto da dimensão do sistema aumentar pois os deslocamentos e os multiplicadores aumentados são agora incógnitas. O método do lagrangeano aumentado foi originalmente proposto por Hestenes [1969] e Powell [1969] para a resolução de problemas de optimização, sujeitos a constrangimentos impostos por igualdades. A ideia base do método é adicionar ao lagrangeano penalizações apropriadas aos constrangimentos, de modo a tornar a função objectivo convexa na vizinhança da solução. Wriggers *et al.* [1985] apresentam um dos primeiros trabalhos de aplicação deste método a problemas de contacto unilateral. Alart e Curnier [1991] formularam um *quasi*-lagrangeano aumentado para o problema de contacto com atrito, para o qual é possível estabelecer condições de optimização. Simo e Laursen [1992] introduziram uma formulação semelhante, mais intuitiva do ponto de vista matemático. De facto, na formulação introduzida por Simo e Laursen [1992] existe à partida uma interligação entre a formulação do problema e o método de resolução. Esta formulação baseia-se num procedimento iterativo para gerar as actualizações dos multiplicadores de Lagrange. Para tal, recorre a um método de decomposição do tipo Uzawa para a resolução do problema de optimização. A ideia básica do algoritmo de Uzawa é resolver o problema de equilíbrio admitindo um valor fixo para o lagrangeano aumentado. Em seguida, as estimativas para o lagrangeano aumentado são actualizadas e o procedimento é repetido

até obter os seus valores exactos. A sua aplicação ao problema de contacto com atrito implica que, para calcular uma nova aproximação ao campo de deslocamentos e de forças de contacto em cada iteração, seja necessário: (i) determinar a nova aproximação ao campo de deslocamentos admitindo que as forças de contacto são conhecidas e (ii) actualizar os multiplicadores de Lagrange [Laursen e Maker 1995]. Este algoritmo impede a actualização simultânea do campo de deslocamento e dos multiplicadores de Lagrange. Deste modo evita a variação não-contínua do multiplicador de Lagrange, que pode conduzir à divergência do método uma vez que não é possível linearizar esta operação [Simo e Laursen 1992]. Entretanto, a demonstração da convergência do algoritmo de Uzawa baseia-se na resolução exacta do sub-problema de determinação do campo de deslocamentos. Mas, quando este sub-problema é não-linear é necessário proceder de forma iterativa para a sua resolução. Esta pode ser muito dispendiosa e, inclusive, não se justificar, caso a solução aproximada de partida esteja muito distante da solução do problema [He e Zhou 2000, Cheng e Han 2002]. Por esta razão, no método do lagrangeano aumentado implementado no programa DD3IMP, opta-se por proceder à actualização simultânea do multiplicador de Lagrange e do campo de deslocamentos.

## 5.2 Regularização da Condição de Contacto Unilateral

Para explicitar as especificidades do método do lagrangeano aumentado opta-se por apresentar uma descrição dos métodos que constituem a sua base: (i) o método dos multiplicadores de Lagrange e (ii) o método da penalidade. Descrevem-se ainda outros dois métodos para evidenciar as vantagens do método do lagrangeano aumentado: (i) o método do lagrangeano perturbado e (ii) o método de barreira.

O método dos multiplicadores de Lagrange permite transformar o problema de optimização sujeito a restrições associado ao contacto unilateral (definido na equação (2.117)) num problema de optimização sem constrangimentos, cujas incógnitas são os multiplicadores de Lagrange do problema original. O lagrangeano associado ao problema de contacto unilateral  $L(\mathbf{v}, \gamma^n)$  é definido por

$$L(\mathbf{v}, \gamma^n) = \Phi(\mathbf{v}) + (d^n(\mathbf{v}), \gamma^n), \quad (5.1)$$

onde  $(\cdot, \cdot)$  designa o produto escalar em  $\mathbb{R}^+$  e  $\gamma^n$  o multiplicador de Lagrange (variável dual). Admitindo que o conjunto de constrangimentos activos é conhecido, a solução  $(\mathbf{u}, \lambda^n)$  é um ponto-sela do lagrangeano  $L(\mathbf{v}, \gamma^n)$ . Assim, ao aplicar a condição necessária de estacionaridade obtém-se:

$$\nabla_{\mathbf{v}, \gamma^n} L(\mathbf{u}, \lambda^n) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla \Phi(\mathbf{u}) + \lambda^n \mathbf{n} = \mathbf{0} \\ d^n(\mathbf{u}) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

O problema de optimização é equivalente à determinação do ponto-sela de um lagrangeano, ou seja, a solução corresponde a um mínimo (local) para as variações de deslocamento e um máximo (local) para as variações do multiplicador de Lagrange. A primeira equação do sistema (5.2) traduz o equilíbrio do corpo deformável e a segunda a condição de impenetrabilidade.

Este método surge normalmente associado ao método de integração temporal implícito, porque a sua aplicação à integração temporal explícita obriga à resolução de um sistema de equações [Walter 1999]. A determinação do ponto-sela associado a este

tipo de problema é usualmente efectuada com um algoritmo do tipo Uzawa, para o qual é possível demonstrar a convergência. No entanto, a velocidade de convergência é relativamente lenta [Alart 1993]. Quando se aplica um método de Newton-Raphson para a resolução do sistema de equações, a estrutura heterogénea da matriz do sistema de equações lineares resultante pode conduzir a instabilidades. Outro inconveniente do método é o facto de se basear no conhecimento dos constrangimentos activos. A selecção deste conjunto pode ser complexa e dispendiosa em termos de tempo de cálculo. Isto porque no início do incremento não é evidente quais são os constrangimentos activos no final do incremento. Estas desvantagens tornam o método dos multiplicadores de Lagrange uma escolha pouco adequada quando se pretende garantir uma solução eficiente e estável [Kloosterman 2002]. No entanto, continua a ser desenvolvido algum trabalho acerca deste método, que se pode revelar eficaz na resolução de problemas de contacto unilateral entre corpos deformáveis [Jones e Papadopoulos 2001].

Uma variante do método dos multiplicadores de Lagrange é o método da função constrangida (*constraint function*), utilizado na resolução de problemas estáticos e dinâmicos com integração temporal implícita. Para ultrapassar os problemas associados ao método dos multiplicadores de Lagrange, o método da função constrangida recorre a funções de regularização das restrições associadas ao contacto unilateral e ao atrito, contínuas e diferenciáveis. Deste modo, garante-se a definição das derivadas apropriadas à utilização directa no método iterativo de Newton-Raphson. A condição de contacto unilateral é satisfeita para  $w(d^n, \lambda^n) = 0$ . Caso se considere que a força normal de contacto é definida para valores positivos, esta condição é dada por

$$w(d^n, \lambda^n) = \frac{d^n + \lambda^n}{2} - \sqrt{\left(\frac{d^n - \lambda^n}{2}\right)^2 - \epsilon_n}, \quad (5.3)$$

em que as variáveis são utilizadas na forma adimensional. Ou seja, a função  $w$  é construída de forma a ser nula para valores em que  $\lambda^n = \epsilon_n / d^n$ , positiva para valores positivos de distância e força normais de contacto e negativa para as outras combinações de valores destas variáveis. O recurso a esta função permite evitar que o algoritmo de gestão de contacto tenha de distinguir entre os dois estatutos: contacto ou livre. A constante  $\epsilon_n$  é estimada automaticamente pelo algoritmo, de modo que  $\epsilon_n \ll 1$  para que a solução de convergência apresente sempre pequenos valores de folga (da ordem de  $\epsilon_n / \lambda^n$ ) [Zavarise *et al.* 1998]. A mesma estratégia é utilizada para o contacto com atrito, introduzindo uma função  $v(\delta^t, \lambda^t)$ , que se anula quando as restrições são satisfeitas e que é dada por

$$v(\delta^t, \lambda^t) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\delta^t}{\epsilon_t}\right) \quad \text{com} \quad \epsilon_t \ll 1. \quad (5.4)$$

As restrições impostas ao problema de equilíbrio passam a ser definidas pelas duas igualdades  $w(d^n, \lambda^n) = 0$  e  $v(\delta^t, \lambda^t) = 0$ . Na prática, as restrições podem ser impostas recorrendo ao método da penalidade ou ao método dos multiplicadores de Lagrange [Bathe e Bouzinov 1997, Kawka e Bathe 2001].

O método da penalidade é o que mais se generalizou para a resolução de problemas de contacto devido à sua facilidade de implementação num programa de elementos finitos, sendo inclusivamente utilizado na resolução de problemas de contacto que recorrem a métodos sem malha (*meshless methods*) [Belytschko e Fleming 1999, Kim *et al.* 2000]. Originalmente, o método da penalidade surge para resolver problemas de

optimização sujeitos a restrições impostas por igualdades. A sua aplicação ao problema de contacto unilateral obriga a que a restrição  $d^n \geq 0$  tenha de ser convertida numa igualdade. Considere-se novamente o problema de contacto unilateral definido em (2.117). A ideia base do método de penalidade é substituir o problema anterior por um problema não-constrangido na forma

$$\mathbf{u} = \min \{ \Phi(\mathbf{v}) + rP(\mathbf{v}) \}, \quad (5.5)$$

em que  $P(\mathbf{v})$  é uma função que deve traduzir as restrições originais, tipicamente definida por

$$P(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \text{dist}^2 [d^n(\mathbf{v}), \mathbb{R}^+]. \quad (5.6)$$

$P(\mathbf{v})$  anula-se para distâncias normais de contacto positivas. Na expressão (5.5) o parâmetro de penalidade  $r$  deve tomar valores elevados, de modo que para distâncias normais de contacto negativas seja atribuída uma contribuição elevada ao problema não-constrangido. A força normal de contacto é definida por

$$\lambda^n = rd^n(\mathbf{u}), \quad (5.7)$$

sendo nula para distâncias normais positivas e proporcional à violação da restrição nos outros casos, como se mostra na Figura 5.1.

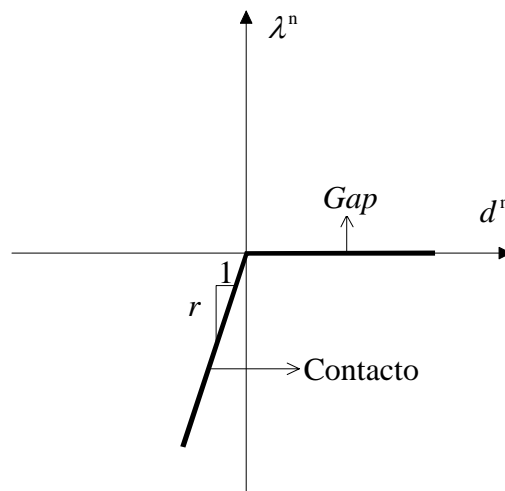


Figura 5.1 – Regularização da condição de impenetrabilidade pelo método da penalidade.

O método da penalidade é utilizado em programas de simulação baseados quer na integração temporal implícita quer na explícita. Uma dificuldade inerente ao método é a pré-selecção do parâmetro de penalidade, que tem uma influência directa nos resultados da simulação. De facto, a penetração final de um corpo noutro depende do valor seleccionado para o parâmetro de penalidade. Para valores pequenos deste parâmetro, obtêm-se soluções com níveis de penetração inaceitáveis do ponto de vista físico. No caso de modelos com algoritmos dinâmicos explícitos, valores muito elevados do parâmetro de penalidade forçam a diminuição do tamanho do incremento, de modo a garantir a condição de estabilidade [Walter 1999]. Uma vez que a precisão da solução obtida depende do parâmetro de penalidade, o utilizador deve estar consciente que o método pode exigir várias tentativas para chegar à solução pretendida [Laursen e Oancea 1994]. Na Figura 5.2 exemplifica-se a influência do parâmetro de penalidade na precisão com que o método da penalidade obedece à condição de impenetrabilidade. A solução

obtida com um parâmetro de penalidade reduzido (Figura 5.2 (a)) conduz à ocorrência de penetração entre o corpo deformável (em laranja) e a ferramenta (em azul), em particular nas zonas de curvatura. A restrição de impenetrabilidade é garantida (Figura 5.2 (b)) com o aumento do parâmetro de penalidade. A pré-selecção de um parâmetro de penalidade “óptimo” é ainda mais complexa quando se considera o contacto entre corpos deformáveis, com propriedades mecânicas diferentes [Zhong e Nilsson 1996].

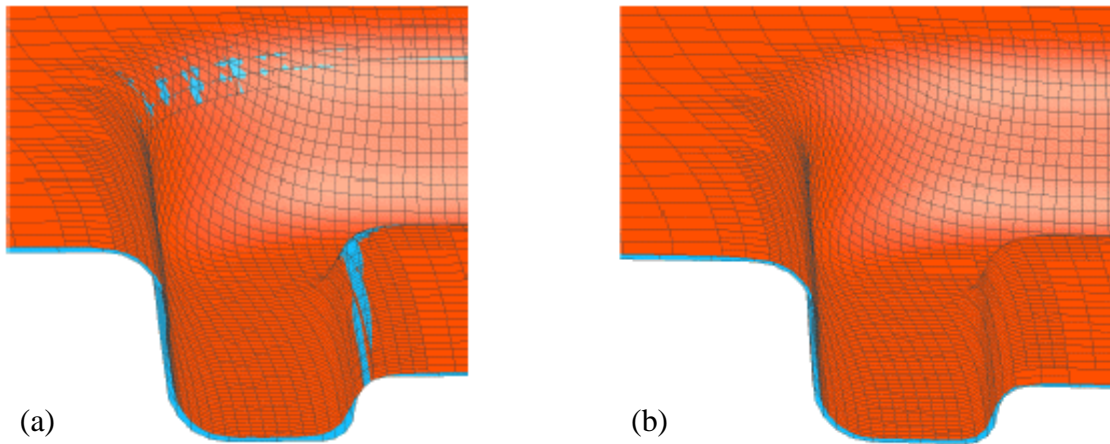


Figura 5.2 – Influência do valor do parâmetro de penalidade na precisão com que a restrição de impenetrabilidade é garantida (resultados obtidos com o programa PAM-STAMP [Mesquita *et al.* 2000]): (a) solução obtida com um parâmetro de penalidade reduzido e (b) solução obtida com um parâmetro de penalidade dez vezes superior.

A regularização da condição de contacto unilateral recorrendo ao método da penalidade introduz um fenómeno suplementar de instabilidade. Um nó que numa determinada iteração não esteja em contacto com a ferramenta apresenta distância normal de contacto nula ou positiva. Por este motivo, não está sujeito a nenhuma restrição. Como resultado, o incremento de deslocamento resultante pode ser sobrestimado, levando a penetração indesejada. Esta pode induzir uma força de contacto elevada na iteração seguinte que coloca novamente o nó em estatuto de contacto livre, dando início a um novo ciclo entre os dois estatutos [Kloosterman *et al.* 2001].

O método do lagrangeano perturbado é obtido a partir do método dos multiplicadores de Lagrange (equação (5.1)) através da introdução de um termo quadrático de regularização do vector dos multiplicadores de Lagrange. O método do lagrangeano perturbado aplicado ao problema de contacto unilateral conduz a um lagrangeano do tipo

$$L(\mathbf{v}, \gamma^n) = \Phi(\mathbf{v}) + (d^n(\mathbf{v}), \gamma^n) - \frac{1}{2r} \|\gamma^n\|^2. \quad (5.8)$$

Isto é, à medida que o parâmetro de penalidade tende para infinito, a solução converge para a solução do método dos multiplicadores de Lagrange. A condição de estacionaridade para a determinação do ponto-sela é dada por

$$\nabla_{\mathbf{v}, \gamma^n} L(\mathbf{u}, \lambda^n) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla \Phi(\mathbf{u}) + \lambda^n \mathbf{n} = \mathbf{0} \\ d^n(\mathbf{u}) - \frac{1}{r} \lambda^n = 0 \end{cases}. \quad (5.9)$$

Assim, a mesma relação de proporcionalidade pode ser estabelecida entre a força e a distância normal de contacto. Entretanto, se a segunda equação do sistema (5.9) for



resolvida em ordem a  $\lambda^n$  e substituída na primeira, obtém-se o método da penalidade [Nour-Omid e Wriggers 1987].

O método de barreira estabelece uma barreira na fronteira da zona admissível, de modo a evitar que o procedimento de busca da solução abandone essa fronteira. Quando aplicado ao problema de contacto unilateral durante o processo de busca, este método não permite soluções com penetração. De um modo geral, a aplicação do método da barreira ao problema de contacto unilateral equivale a resolver o problema seguinte

$$\mathbf{u} = \min \left\{ \Phi(\mathbf{v}) + \frac{1}{r} B(\mathbf{v}) \right\}, \quad (5.10)$$

em que a restrição sobre o conjunto admissível de soluções não é eliminada. Ou seja, a aplicação de um método de barreira conduz a um problema igualmente sujeito a restrições. Em geral, estas são mais complexas do que as do problema original. A vantagem é que este problema pode ser resolvido recorrendo às técnicas utilizadas para problemas não sujeitos a constrangimentos, porque se a barreira for imposta correctamente, não é necessário impor os constrangimentos para garantir que são cumpridos. Uma função típica proposta para o método de barreira é dada por [Luenberger 1984]

$$B(\mathbf{v}) = -\log \left[ d^n(\mathbf{v}) \right]. \quad (5.11)$$

Na resolução de problemas não-lineares, este método deve ser combinado com o método dos multiplicadores de Lagrange, de modo a evitar o mau condicionamento que apresenta quando a função de barreira tende para zero. Este mau condicionamento pode conduzir à divergência, mesmo que o problema de minimização em estudo seja bem condicionado. De facto, esta é uma das razões pelas quais o método clássico de barreira não é geralmente utilizado na resolução de problemas não-lineares [Shanno *et al.* 1995]. Outra razão é o facto de no método clássico de barreira o problema só ser definido para soluções admissíveis. Assim, durante o processo de resolução, nenhum dos constrangimentos pode ser violado. Para garantir que tal acontece é necessário determinar uma solução inicial admissível, o que pode ser tão ou mais difícil do que resolver o problema original.

A combinação do método de barreira com o método dos multiplicadores de Lagrange resulta numa nova definição para a função barreira, dada por

$$B(\mathbf{v}) = \lambda^n \log \left[ 1 + r d^n(\mathbf{v}) \right], \quad (5.12)$$

em que  $\lambda^n$  corresponde a um valor fixo, estimado a partir do multiplicador de Lagrange. A força normal de contacto é dada por

$$\sigma^n = \lambda^n \frac{1}{1 + r d^n(\mathbf{u})}. \quad (5.13)$$

O método de barreira é proposto para problemas de contacto unilateral, numa tentativa de ultrapassar problemas de convergência associados ao facto de a regularização introduzida pelo método da penalidade e do lagrangeano aumentado apresentar uma descontinuidade na derivada para  $d^n = 0$ . Porém, a função barreira apresentada na expressão (5.12) não é, efectivamente, definida para todos os valores de  $d^n$ . Para ultrapassar esta dificuldade Kloosterman [2002] combina a função barreira com uma função quadrática da distância normal de contacto. Esta função quadrática é determinada

de tal modo que garante a continuidade da segunda derivada. Kloosterman [2002] combina esta função barreira com o método do lagrangeano aumentado e recorre à regularização do atrito proposta por Simo e Laursen [1992]. Para garantir a convergência do método é ainda necessário introduzir um algoritmo de actualização para o parâmetro de barreira  $1/r$  [Shanno *et al.* 1995]. O método híbrido de barreira revela-se competitivo com o método do lagrangeano aumentado descrito mais à frente, uma vez que conduz a velocidades de convergência próximas [Kloosterman *et al.* 2001, Kloosterman 2002]. Ambos os métodos implementados neste estudo comparativo recorrem a um algoritmo do tipo Uzawa e conduzem, em termos globais, a convergência linear.

### 5.3 Regularização da Condição de Atrito

A presente secção é dedicada à regularização da condição associado ao contacto com atrito. Nela descreve-se o método da penalidade e do lagrangeano aumentado conforme proposto por Simo e Laursen [1992]. Opta-se por esta organização para evidenciar as diferenças entre esta formulação e a proposta por Alart e Curnier [1991], adoptada no programa DD3IMP e que será descrita em pormenor na secção seguinte.

A regularização da componente tangencial da força de contacto é realizada sem adicionar directamente o funcional ao problema de optimização. A razão para esta opção é o carácter não-associado da lei de atrito de Coulomb. Entretanto, a regularização da condição de atrito é acompanhada por uma complexidade adicional que é a alteração dos estatutos de contacto *slip* e *stick*. Para o estatuto de contacto *stick* as forças de atrito comportam-se de forma associada, uma vez que não existe uma dependência directa da força normal de contacto. Nessa situação, todos os métodos descritos para a regularização da força normal de contacto podem ser aplicados directamente na determinação da força de contacto tangencial. No entanto, para o estatuto de contacto *slip*, a força de atrito depende directamente do valor da força normal de contacto, perdendo-se a associatividade. Por esta razão, o método mais utilizado para proceder à regularização do atrito é um método baseado num algoritmo de previsão-correcção atribuído a Giannakopoulos [1989], que se pode associar ao método da penalidade.

A regularização da força de atrito pelo método da penalidade funciona de modo ligeiramente diferente da regularização do contacto unilateral, uma vez que os constrangimentos são também diferentes. No caso do estatuto de contacto *stick*, a condição imposta pela lei de atrito  $\|\lambda^t\| \leq -\mu\lambda^n$  é satisfeita à partida. Nestas circunstâncias, para obedecer à condição de complementaridade,  $\delta^t$  deve ser nulo. Em analogia com a regularização realizada para a condição de contacto unilateral, pode-se aplicar directamente o método da penalidade e definir

$$\lambda^t = r\delta^t. \quad (5.14)$$

Esta regularização é apresentada de forma esquemática na Figura 5.3. Admite-se que, para o estatuto de contacto aderente, a força de contacto tangencial depende linearmente de um escorregamento muito pequeno, função do parâmetro de penalidade. Esta aproximação é muitas vezes justificada fisicamente invocando o facto de as superfícies em contacto não serem idealmente lisas, mas constituídas por asperidades que se deformam plasticamente [Kikuchi e Oden 1988]. Com base nesta interpretação física, são propostas outras leis não-lineares de regularização. Estas procuram introduzir parâmetros numéricos de ajuste ao comportamento do material (por exemplo, [Ling e Stolarski 1997],

[Kikichi e Oden 1988]). No entanto, esta interpretação física da regularização da condição de atrito é discutível, uma vez que passa a ser a regularização imposta a ditar uma solução particular do problema de contacto com atrito, e não o método que efectivamente selecciona a solução óptima. Na realidade, o carácter do parâmetro de penalidade deve ser entendido como exclusivamente numérico.

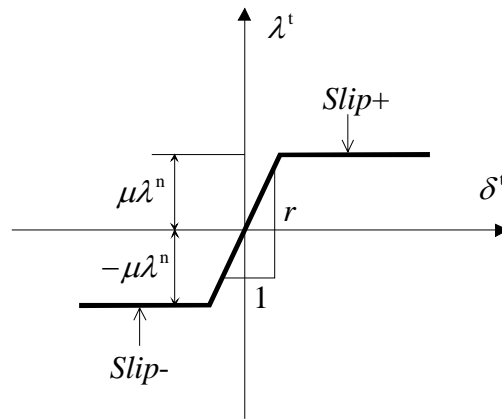


Figura 5.3 – Regularização da condição de atrito pelo método da penalidade.

O valor do parâmetro de penalidade  $r$ , definido pela equação (5.14), é genérico, pelo que pode tomar um valor diferente do utilizado para regularizar a condição de contacto unilateral. Em geral, relacionam-se os dois valores, uma vez que é mais complexo definir dois parâmetros de penalidade. Uma forma de estimar o valor “ótimo” é testar a convergência desprezando o atrito, recorrendo depois ao valor mínimo estimado para resolver o mesmo problema com atrito [Ju *et al.* 1995].

A expressão (5.14) pode ser igualmente utilizada para decidir qual o estatuto de um nó em contacto, ou seja: se  $\|r\delta^t\| \leq -\mu\lambda^n$  o nó está *stick*, caso contrário está *slip*. Neste último caso, para que a condição de complementaridade seja cumprida é necessário determinar uma correcção à força de atrito que obedeça igualmente à condição  $\|r\delta^t\| \leq -\mu\lambda^n$ . A expressão (5.14) define pois uma previsão para a força de atrito  $\lambda_{\text{ensaio}}^t = r\delta^t$ , de modo que esta força corrigida é calculada por:

$$\lambda_{\text{corrigida}}^t = \begin{cases} \lambda_{\text{ensaio}}^t, & \text{se } \|\lambda_{\text{ensaio}}^t\| \leq -\mu\lambda^n \\ \mu\lambda^n \frac{\lambda_{\text{ensaio}}^t}{\|\lambda_{\text{ensaio}}^t\|}, & \text{se } \|\lambda_{\text{ensaio}}^t\| > -\mu\lambda^n \end{cases} \quad (5.15)$$

A aplicação deste método ao lagrangeano aumentado é idêntica, mudando apenas a previsão utilizada para a força de atrito, que deve ser actualizada em função do multiplicador de Lagrange,

$$\lambda_{\text{ensaio}}^t = \lambda^t + r\delta^t. \quad (5.16)$$

Quando se associa o problema de atrito ao contacto unilateral ocorrem dificuldades numéricas na fase *stick* devido à elevada penalização associada a este estatuto. Isto porque, mesmo na lei de atrito de Coulomb, o deslocamento é nulo para o caso *stick*, ou seja a rigidez é infinita. Adicionalmente, quando se utiliza a lei de atrito de Coulomb, durante a fase *slip* não existe dependência das forças tangenciais em relação aos deslocamentos tangenciais. De facto, esta dependência provém da força normal de contacto e conduz a uma matriz de rigidez não-simétrica. Ora, o problema de contacto

com atrito é associado se a força de contacto tangencial for independente da força normal de contacto. Para tal, no método do lagrangeano aumentado proposto por Simo e Laursen [1992] e Laursen [1992] o valor de ensaio da força de atrito é calculado com o valor do multiplicador de Lagrange antes da sua actualização. Ou seja, a força de atrito é calculada sempre com o valor do multiplicador de Lagrange da iteração anterior [Simo e Laursen 1992, Laursen 1992]. A vantagem deste método é o facto de tornar o problema de contacto com atrito num problema associado, o que permite a construção de matrizes simétricas. Esta estratégia é combinada com o algoritmo de Uzawa, num algoritmo designado por *nested* [Simo e Laursen 1992, Laursen 1992]. Na opinião dos autores que recorrem a este tipo de algoritmo, proceder na mesma iteração à verificação do equilíbrio e à actualização dos multiplicadores de Lagrange pode ser prejudicial uma vez que a convergência destes é linear. Além disso, nas primeiras fases existem muitas alterações à área de contacto que podem ser mais fáceis de estabilizar recorrendo a este tipo de algoritmo [Laursen e Maker 1995, Zavarise *et al.* 1995].

## 5.4 Método do Lagrangeano Aumentado

O método do lagrangeano aumentado aplicado ao problema de contacto unilateral pode ser entendido como um método de penalidade em que o multiplicador de Lagrange é actualizado em função do seu valor estimado na aproximação anterior [Simo e Laursen 1992]. Geralmente, o método do lagrangeano aumentado é associado a um algoritmo do tipo Uzawa, aplicado à determinação de um ponto-sela. No entanto, pode igualmente distinguir-se a formulação do problema do método de resolução escolhido [Alart 1993]. Na apresentação que se segue do método do lagrangeano aumentado opta-se pela formulação proposta por Alart e Curnier [1991] devido ao seu maior rigor matemático.

Considere-se novamente o problema do contacto unilateral, definido na equação (2.116). Este pode ser formulado como um problema clássico de optimização sujeito às restrições: minimizar  $\Phi(\mathbf{v})$  tal que  $d^n(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^+$  ou, mais sinteticamente,

$$\min_{d^n \in \mathbb{R}^+} \Phi(\mathbf{v}). \quad (5.17)$$

O lagrangeano associado a este problema é

$$L(\mathbf{v}, \gamma^n) = \Phi(\mathbf{v}) + (d^n(\mathbf{v}), \gamma^n), \quad (5.18)$$

pelo que o problema de optimização correspondente pode ser escrito com a seguinte formulação:

$$\min_{\mathbf{v}} \max_{\gamma^n \in \mathbb{R}^-} L(\mathbf{v}, \gamma^n). \quad (5.19)$$

Nesta formulação os constrangimentos são transferidos para a variável dual  $\gamma^n$ . O lagrangeano aumentado é definido por

$$L_r(\mathbf{v}, \gamma^n) = \Phi(\mathbf{v}) - \frac{1}{2r} \|\gamma^n\|^2 + \frac{1}{2r} \text{dist}^2[\gamma^n + rd^n(\mathbf{v}), \mathbb{R}^+]. \quad (5.20)$$

$r$  é um parâmetro de penalidade positivo e  $\text{dist}(x, C)$  designa a distância entre  $x$  e  $C$ . Este lagrangeano aumentado inclui um termo associado ao multiplicador de Lagrange e um termo de penalização. Por este motivo, pode ser designado por método misto ou de penalidade-dualidade. Para  $\gamma^n = 0$  a expressão anterior resume-se ao método da penalidade

$$L_r(\mathbf{v}, 0) = \Phi(\mathbf{v}) + \frac{1}{2} r \text{dist}^2 \left[ d^n(\mathbf{v}), \mathbb{R}^+ \right]. \quad (5.21)$$

Uma outra expressão para o lagrangeano aumentado recorre a  $\mathbb{R}^-$ , em vez de  $\mathbb{R}^+$ , e é dada por

$$L_r(\mathbf{v}, \gamma^n) = \Phi(\mathbf{v}) + (d^n(\mathbf{v}), \gamma^n) + \frac{r}{2} \|d^n(\mathbf{v})\|^2 - \frac{1}{2r} \text{dist}^2 \left[ \gamma^n + rd^n(\mathbf{v}), \mathbb{R}^- \right], \quad (5.22)$$

sendo esta a forma normalmente utilizada. Ambas correspondem ao problema de optimização sem constrangimentos, dado por

$$\min_{\mathbf{v}} \max_{\gamma^n} L_r(\mathbf{v}, \gamma^n). \quad (5.23)$$

$L_r$  é diferenciável em relação a  $\mathbf{v}$  e a  $\gamma^n$  desde que  $\Phi$  seja diferenciável em relação a  $\mathbf{v}$ . Deste modo, o ponto-sela  $(\mathbf{u}, \lambda^n)$  obedece à condição de estacionaridade seguinte:

$$\nabla_{\mathbf{v}, \gamma^n} L_r(\mathbf{u}, \lambda^n) = 0. \quad (5.24)$$

Esta condição pode ser escrita na forma (ver Anexo B)

$$\left[ \nabla_{\mathbf{v}}, \nabla_{\gamma^n} \right] L_r(\mathbf{u}, \lambda^n) = \begin{cases} \nabla_{\mathbf{u}} \Phi(\mathbf{u}) + \text{proj}_{\mathbb{R}^-} \left[ \lambda^n + rd^n(\mathbf{u}) \right] \mathbf{n} = \mathbf{0} \\ -\frac{1}{r} \left\{ \lambda^n - \text{proj}_{\mathbb{R}^-} \left[ \lambda^n + rd^n(\mathbf{u}) \right] \right\} = 0 \end{cases}, \quad (5.25)$$

em que  $\text{proj}_{\mathbb{R}^-}(x)$  designa a projecção de  $x$  em  $\mathbb{R}^-$ . A primeira linha do sistema (5.25) corresponde às equações de equilíbrio. A segunda corresponde às equações de contacto. O operador  $\nabla \Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}^{\text{ext}}$  foi estudado em detalhe no Capítulo 3 pelo que, para maior clareza, separa-se aqui o operador de contacto que neste caso pode ser definido por

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \lambda^n) = \begin{bmatrix} \text{proj}_{\mathbb{R}^-} \left[ \lambda^n + rd^n(\mathbf{u}) \right] \mathbf{n} \\ -\frac{1}{r} \left\{ \lambda^n - \text{proj}_{\mathbb{R}^-} \left[ \lambda^n + rd^n(\mathbf{u}) \right] \right\} \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

O desenvolvimento da equação (5.25) conduz a:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \lambda^n) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\frac{1}{r} \lambda^n \end{bmatrix} & \text{se } \lambda^n + rd^n(\mathbf{u}) > 0 \\ \begin{bmatrix} (\lambda^n + rd^n(\mathbf{u})) \mathbf{n} \\ d^n(\mathbf{u}) \end{bmatrix} & \text{se } \lambda^n + rd^n(\mathbf{u}) \leq 0 \end{cases}. \quad (5.27)$$

Ou seja, o contacto passa a ser definido pela combinação linear da variável primal  $d^n$  e da variável dual  $\lambda^n$ :  $\lambda^n + rd^n$ . As regiões de linearidade são delimitadas por uma linha (ver Figura 5.4) em que cada região corresponde a um estatuto de contacto específico.

O tratamento do problema de contacto com atrito, sendo a força de contacto constante, é idêntico e implica apenas a substituição de  $d^n$  por  $\delta^t$ ,  $\lambda^n$  por  $\lambda^t$  e  $\mathbb{R}^-$  pelo convexo  $C$ . A expressão válida para a definição do lagrangeano aumentado é agora:

$$L_r(\mathbf{v}, \gamma^t) = \Phi(\mathbf{v}) + (\delta^t(\mathbf{v}), \gamma^t) + \frac{r}{2} \|\delta^t(\mathbf{v})\|^2 - \frac{1}{2r} \text{dist}^2 \left[ \gamma^t + r\delta^t(\mathbf{v}), C \right]. \quad (5.28)$$

Deste modo, o operador de contacto que resulta deste lagrangeano aumentado é análogo ao anterior (ver Anexo B)

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \lambda^n) = \begin{bmatrix} \text{proj}_C [\lambda^t + r\delta^t(\mathbf{u})] \\ -\frac{1}{r} \{ \lambda^t - \text{proj}_C [\lambda^t + r\delta^t(\mathbf{u})] \} \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

As expressões analíticas para a projecção em  $C$  dependem da forma deste convexo e só estão definidas para alguns casos específicos. Caso se opte pela lei de atrito de Coulomb, para o caso bidimensional, obtêm-se as regiões de linearidade representadas na Figura 5.5.

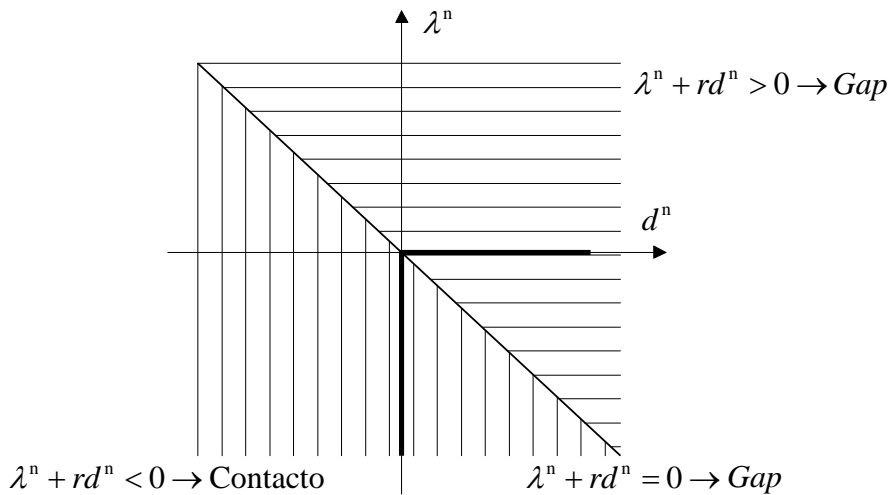


Figura 5.4 – Regularização da condição de impenetrabilidade pelo método do lagrangeano aumentado. Zonas de linearidade e estatuto do operador de contacto unilateral.

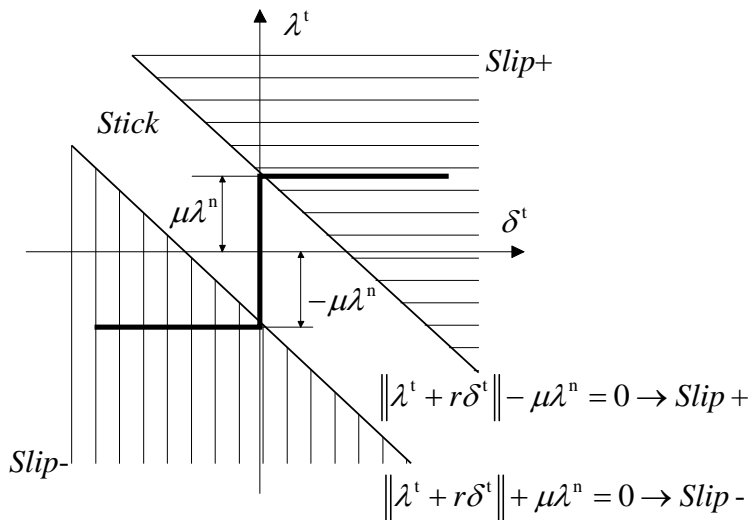


Figura 5.5 – Regularização da condição de atrito pelo método do lagrangeano aumentado. Zonas de linearidade e estatuto do operador de atrito.

Para o caso de atrito isotrópico em problemas tridimensionais, uma vez que o convexo  $C$  é um disco de raio  $k$ , a projecção pode ser escrita da seguinte forma:

$$\text{proj}_C(x) = \begin{cases} x, & \text{se } \|x\| \leq k \\ kx/\|x\|, & \text{se } \|x\| > k \end{cases}. \quad (5.30)$$

O problema de *quasi*-otimização associado ao problema de contacto com atrito (equação (2.122)) pode ser escrito na forma

$$\min_{\mathbf{v}} \left\{ \Phi(\mathbf{v}) + \psi_{\mathbb{R}^+}(d^n(\mathbf{v})) + \psi_{C(\mathbf{u})}^*(\boldsymbol{\delta}^t(\mathbf{v})) \right\}, \quad (5.31)$$

ao qual está associado o lagrangeano:

$$L(\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}) = \Phi(\mathbf{v}) + (d^n(\mathbf{v}), \gamma^n) + (\boldsymbol{\delta}^t(\mathbf{v}), \boldsymbol{\gamma}^t). \quad (5.32)$$

O convexo de atrito depende da solução do problema através da força normal de contacto  $\lambda^n$ , o que permite obter um problema em que os constrangimentos são definidos para as variáveis duais

$$\min_{\mathbf{v}} \max_{\gamma^n \in \mathbb{R}^-} \max_{\boldsymbol{\gamma}^t \in C(\lambda^n)} L(\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}). \quad (5.33)$$

Para a definição do *quasi*-lagrangeano aumentado, substitui-se o convexo  $C(\lambda^n)$  por um convexo aumentado  $C^{\text{aum}}(\lambda^n + rd^n(\mathbf{u}))$ . Isto é, substitui-se o multiplicador de Lagrange  $\lambda^n$  pelo multiplicador aumentado, projectado sobre  $\mathbb{R}^-$ ,

$$C^{\text{aum}}(\lambda^n + rd^n(\mathbf{u})) = \left\{ \text{proj}_{\mathbb{R}^-} [\lambda^n + rd^n(\mathbf{u})] \right\}. \quad (5.34)$$

A operação anterior corresponde ao prolongamento do cone de atrito definido pelo convexo  $C(\lambda^n)$ , por uma semi-recta sobre o eixo positivo (ver Figura 5.6). Tal permite definir o argumento do convexo  $C$  para valores positivos e obter um problema sem constrangimentos. Consequentemente, o *quasi*-lagrangeano aumentado para o problema de contacto com atrito é definido por

$$\begin{aligned} L_r(\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}) = & \Phi(\mathbf{v}) + (d^n(\mathbf{v}), \gamma^n) + (\boldsymbol{\delta}^t(\mathbf{v}), \boldsymbol{\gamma}^t) \\ & + \frac{r}{2} \|d^n(\mathbf{v})\|^2 - \frac{1}{2r} \text{dist}^2[\gamma^n + rd^n(\mathbf{v}), \mathbb{R}^-] \\ & + \frac{r}{2} \|\boldsymbol{\delta}^t(\mathbf{v})\|^2 - \frac{1}{2r} \text{dist}^2[\boldsymbol{\gamma}^t + r\boldsymbol{\delta}^t(\mathbf{v}), C^{\text{aum}}]. \end{aligned} \quad (5.35)$$

O lagrangeano aumentado pode ser encarado como uma função de penalidade exacta uma vez que, qualquer que seja o valor do parâmetro de penalidade, quando o valor do multiplicador de Lagrange corresponder à solução nenhum dos constrangimentos é violado. Na formulação apresentada por Simo e Laursen [1992], o funcional é aumentado apenas com os termos provenientes directamente da penalidade. Os dois lagrangeanos aumentados provenientes destas duas formulações são equivalentes, pois admitem a mesma solução. No entanto, devido ao termo suplementar associado à formulação de Alart e Curnier [1991], as duas formulações apresentam comportamentos distintos, mesmo quando aplicadas num algoritmo do tipo Uzawa. Auricchio e Sacco [1996] procederam a essa comparação para problemas de placas em contacto, verificando que a formulação proposta por Simo e Laursen [1992] pode não conduzir à solução exacta. Com efeito, ao recorrer a um algoritmo do tipo Uzawa, os multiplicadores de Lagrange resultam constantes. Se a sua estimativa for o valor correcto do multiplicador de Lagrange, então o resultado do problema de minimização é a solução do problema de contacto com atrito. Caso contrário, a estimativa pode influenciar a solução.

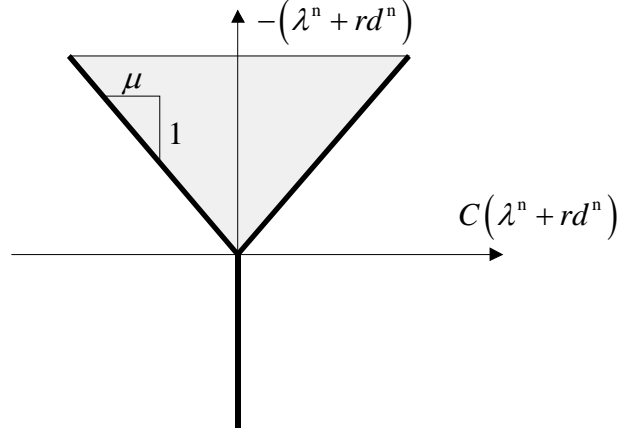


Figura 5.6 – Prolongamento do cone de atrito de Coulomb.

Retomando a formulação proposta por Alart e Curnier [1991], a solução do problema de contacto com atrito  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  é caracterizada pelo sistema de condições de estacionaridade

$$\left[ \nabla_{\mathbf{v}}, \nabla_{\boldsymbol{\gamma}} \right] L_r(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right] L_r(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}, \quad (5.36)$$

ou seja (ver Anexo B)

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{u}} \Phi(\mathbf{u}) + \text{proj}_{\mathbb{R}^-} [\lambda^n + rd^n(\mathbf{u})] \mathbf{n} + \text{proj}_{C^{\text{aum}}} [\boldsymbol{\lambda}^t + r\boldsymbol{\delta}^t(\mathbf{u})] = \mathbf{0} \\ -\frac{1}{r} \left\{ \lambda^n - \text{proj}_{\mathbb{R}^-} [\lambda^n + rd^n(\mathbf{u})] \right\} \mathbf{n} - \frac{1}{r} \left\{ \boldsymbol{\lambda}^t - \text{proj}_{C^{\text{aum}}} [\boldsymbol{\lambda}^t + r\boldsymbol{\delta}^t(\mathbf{u})] \right\} = \mathbf{0} \end{cases}. \quad (5.37)$$

O problema que se obtém é equivalente ao inicial, para todos os valores estritamente positivos de  $r$ . Para determinar a solução é necessário resolver o sistema de equações definido em (5.37), equivalente a

$$\begin{cases} \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}^{\text{ext}} + \mathbf{F}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0} \\ -\frac{1}{r} [\lambda^n - \mathbf{F}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})] = \mathbf{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{u}) + \mathbf{F}^{\text{equi}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{F}^{\text{ext}} \\ \mathbf{F}^{\text{sup}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0} \end{cases}. \quad (5.38)$$

$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  designa o operador de contacto com atrito. A cada ponto potencial de contacto  $\mathcal{A}^{\text{def}}$  é associado o sistema de seis equações a seis incógnitas, apresentado na expressão (5.38). A designação de formulação mista resulta do facto de as incógnitas serem de dois tipos distintos: deslocamento  $(\mathbf{u})$  e força de contacto  $(\boldsymbol{\lambda})$ . As equações surgem agrupadas em dois conjuntos correspondendo a interpretações físicas distintas. A primeira linha representa a equação de equilíbrio para o ponto potencial de contacto  $\mathcal{A}^{\text{def}}$ , na presença de forças de contacto com atrito  $(\boldsymbol{\lambda})$ . O vector  $\mathbf{F}^{\text{equi}}$  é interpretado como operador de equilíbrio uma vez que impõe as condições de fronteira resultantes da interacção com o obstáculo. A segunda linha compreende as equações suplementares, necessárias à gestão das condições de fronteira devidas ao contacto com atrito. O vector  $\mathbf{F}^{\text{sup}}$  é interpretado como operador suplementar uma vez que estabelece as equações suplementares que permitem avaliar as forças de contacto.

Para permitir uma escrita mais condensada do operador de contacto com atrito  $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  e dos sub-operadores  $\mathbf{F}^{\text{equi}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  e  $\mathbf{F}^{\text{sup}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ , bem como uma interpretação mais fácil dos estatutos de contacto, define-se o multiplicador aumentado como:



$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \sigma^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})\mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}), \quad (5.39)$$

em que

$$\sigma^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \lambda^n + r d^n(\mathbf{u}) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^t + r \boldsymbol{\delta}^t(\mathbf{u}). \quad (5.40)$$

A definição do convexo de atrito como função de  $\sigma^n$ , e não apenas de  $\lambda^n$ , assegura a continuidade do operador de contacto com atrito  $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ . Tal permite um cálculo correcto das matrizes jacobianas na perspectiva da utilização de um método de tipo Newton-Raphson. A formulação apresentada pode ser estendida à análise do contacto entre dois corpos deformáveis. No entanto, é necessário reformular a definição do operador de contacto com atrito, de modo a contemplar a alteração simultânea da posição espacial dos dois corpos [Pietrzak e Curnier 1999].

### 5.4.1 Operador de Contacto com Atrito

A descrição efectuada até aqui pressupõe que, em cada incremento, o referencial local é constante. Tal leva a uma definição directa do vector de escorregamento  $\boldsymbol{\delta}^t$ , a partir do vector velocidade de escorregamento  $\dot{\boldsymbol{\delta}}^t$  [Alart e Curnier 1991]. No entanto, na presença de obstáculos com grandes curvaturas, o referencial local pode ser muito diferente entre o início e o final do incremento. Ou seja, também o referencial local depende directamente do deslocamento do ponto potencial de contacto  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{u})$ . Esta variação permite também prever, a partir das definições (equações ((2.94)) e ((2.96))), que a distância normal e a penetração normal não são idênticas ( $d^n \neq \boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{n}$ ). Além disso, a decomposição da força de contacto  $\boldsymbol{\lambda}$ , apresentada na equação (2.97), conduz a que as suas componentes dependam indirectamente da solução  $\mathbf{u}$ , por intermédio da dependência do referencial local. Isto é,

$$\lambda^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u}) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\lambda}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda} - \lambda^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})\mathbf{n}(\mathbf{u}). \quad (5.41)$$

Os sub-operadores de contacto com atrito generalizados aos obstáculos de fortes curvaturas obtêm-se das equações (5.37) e (5.38), considerando a variação do referencial local em cada incremento, isto é

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} \mathbf{F}^{\text{equi}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \text{proj}_{\mathbb{R}^-} [\sigma^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})]\mathbf{n}(\mathbf{u}) + \text{proj}_{C_{\text{aum}}} [\boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})] \\ \mathbf{F}^{\text{sup}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = -\frac{1}{r} \left\{ \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) - \text{proj}_{\mathbb{R}^-} [\sigma^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})]\mathbf{n}(\mathbf{u}) - \text{proj}_{C_{\text{aum}}} [\boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})] \right\} \end{cases} \quad (5.42)$$

Recorrendo a estes sub-operadores é possível deduzir as expressões do operador de contacto em função do estatuto de contacto de cada nó. Os estatutos de contacto são definidos pela combinação linear de uma variável cinemática e de uma variável estática (variáveis primal e dual, respectivamente).

A condição  $\sigma^n \geq 0$  está associada à ausência de contacto (estatuto *gap*). Nesta situação, o operador do estatuto de contacto *gap* é definido por (Anexo B)

$$\mathbf{F}_{\text{gap}}^{\parallel}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\frac{1}{r}\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

Ou seja, os dois sub-operadores garantem que as forças de contacto sejam nulas.

A condição  $\sigma^n < 0$  está associada à existência de contacto e, nessa situação, a projecção de  $\sigma^n$  em  $\mathbb{R}^-$  conduz a

$$\text{proj}_{\mathbb{R}^-} \{ \lambda^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) + rd^n(\mathbf{u}) \} = \lambda^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) + rd^n(\mathbf{u}). \quad (5.44)$$

Associados à ocorrência de contacto podem ser atribuídos dois estatutos distintos. O contacto aderente (estatuto *stick*) é definido pela condição  $\|\boldsymbol{\sigma}^t\| < -\mu\sigma^n$ . Com base na equação (5.30), o operador associado ao estatuto *stick* é definido por (Anexo B)

$$\mathbf{F}_{\text{stick}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \sigma^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})\mathbf{n}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \\ d^n(\mathbf{u})\mathbf{n}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\delta}^t(\mathbf{u}) \end{bmatrix}. \quad (5.45)$$

Neste caso, o sub-operador suplementar impõe um deslocamento relativo nulo, ou seja, o nó em contacto é obrigado a permanecer na última posição de referência determinada. O sub-operador  $\mathbf{F}^{\text{equi}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  avalia a força de contacto associada a esse deslocamento.

Finalmente, o contacto com escorregamento (estatuto *slip*) surge associado à condição  $\|\boldsymbol{\sigma}^t\| \geq -\mu\sigma^n$ . Para definir o operador associado ao estatuto de contacto *slip*, e de modo a simplificar a notação, introduz-se o vector unitário de escorregamento tangencial,

$$\mathbf{t}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})}{\|\boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})\|}. \quad (5.46)$$

O operador associado ao estatuto de contacto *slip* pode ser então definido por (Anexo B)

$$\mathbf{F}_{\text{slip}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \sigma^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})[\mathbf{n}(\mathbf{u}) - \mu\mathbf{t}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})] \\ d^n\mathbf{n}(\mathbf{u}) - \frac{1}{r}[\lambda^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) + \mu\sigma^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})\mathbf{t}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})] \end{bmatrix}. \quad (5.47)$$

## 5.4.2 Gestão Implícita das Condições de Fronteira

Para poder recorrer a um algoritmo implícito e garantir a convergência quadrática do método de Newton-Raphson, a matriz tangente tem que ser calculada de forma rigorosa. Nos casos em que se lida com não-linearidades associadas a mudanças drásticas nas curvaturas dos corpos em contacto, tal implica ter em conta a contribuição dos termos geométricos que surgem devido à variação da normal de contacto [Alart 1992]. O sistema de equações não-lineares definido em (5.38) corresponde, em cada ponto potencial de contacto  $\mathcal{A}^{\text{def}}$ , a um sistema de seis equações a seis incógnitas, correspondentes ao campo de deslocamento ( $\mathbf{u}$ ) e à força de contacto ( $\boldsymbol{\lambda}$ ). Como o corpo deformável é discretizado por elementos finitos, o contacto é estabelecido entre o nó  $A$ , candidato ao contacto, e as superfícies das ferramentas. Deste modo, o vector força de contacto  $\boldsymbol{\lambda}$  é substituído pelo vector força de contacto no nó  $A$ , designado por  $\boldsymbol{\lambda}_A$ .

A aplicação de um algoritmo do tipo Newton-Raphson conduz à resolução, em cada iteração, de um sistema de equações lineares que pode ser escrito na forma seguinte [Menezes 1995]

$$\begin{cases} [K_{AB}]_{ij} \{du_B\}_j + [\nabla_{\mathbf{u}} F_A^{\text{equi}}]_{ij} \{du_A\}_j + [\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} F_A^{\text{equi}}]_{ij} \{d\lambda_A\}_j = \{df_A\}_i - \{F_A^{\text{equi}}\} \\ [\nabla_{\mathbf{u}} F_A^{\text{sup}}]_{ij} \{du_A\}_j + [\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} F_A^{\text{sup}}]_{ij} \{d\lambda_A\}_j = -\{F_A^{\text{sup}}\} \end{cases}. \quad (5.48)$$

sem soma em  $A$  e com  $A, B = 1, \dots, n_n$ . Na fase de *Previsão*, a matriz  $[K_{AB}]$  é a matriz de rigidez global tangente e os vectores  $\{df_A\}$ ,  $\{du\}$  e  $\{d\lambda\}$  correspondem aos vectores de

forças externas, deslocamentos incrementais e incrementos de força de contacto, respectivamente. Durante a fase de *Correcção*, a matriz  $[K_{AB}]$  é a matriz de rigidez global consistente, o vector  $\{df_A\}$  é o vector de forças não-equilibradas,  $\{du\}$  corresponde ao vector das correcções aos deslocamentos incrementais e  $\{d\lambda\}$  corresponde às forças de contacto incrementais.

As matrizes tangentes associadas ao operador contacto com atrito, obtêm-se da seguinte expressão:

$$\mathcal{J} = [\nabla_{\mathbf{u}}, \nabla_{\lambda}] \mathbf{F}_A(\mathbf{u}, \lambda) = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{F}_A^{\text{equi}} & \nabla_{\lambda} \mathbf{F}_A^{\text{equi}} \\ \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{F}_A^{\text{sup}} & \nabla_{\lambda} \mathbf{F}_A^{\text{sup}} \end{bmatrix}. \quad (5.49)$$

e são função do estatuto de contacto do nó  $A$ .

#### 5.4.2.1 Matrizes Tangentes Associadas ao Estatuto *Gap*

Na ausência de contacto, ou seja para o estatuto *gap*, o operador de contacto com atrito é definido pela equação (5.43). O seu gradiente é dado por [Heege 1992]:

$$\mathcal{J}^{\text{gap}} = [\nabla_{u_j}, \nabla_{\lambda_j}] \begin{bmatrix} 0_i \\ -\frac{1}{r} \lambda_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{ij} & 0_{ij} \\ 0_{ij} & -\frac{1}{r} I_{ij} \end{bmatrix}. \quad (5.50)$$

#### 5.4.2.2 Matrizes Tangentes Associadas ao Estatuto *Stick*

O operador de contacto associado ao estatuto de contacto aderente, ou seja *stick*, é definido pela equação (5.45), pelo que a matriz jacobiana é, neste caso,

$$\mathcal{J}^{\text{stick}} = [\nabla_{u_j}, \nabla_{\lambda_j}] \begin{bmatrix} \sigma^n n_i + \sigma_i^t \\ d^n n_i + \delta_i^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (P_{ij} + C_{ik} \nabla_{u_j} n_k) & I_{ij} \\ \frac{1}{r} (P_{ij} + C_{ik} \nabla_{u_j} n_k) & 0_{ij} \end{bmatrix}. \quad (5.51)$$

O tensor  $\mathbf{P}$  define o gradiente do operador de contacto com atrito em relação a  $\mathbf{u}$ , na ausência de curvatura do obstáculo, e é dado por

$$P_{ij} = r (I_{ij} - n_i n_j + n_i \nabla_{u_j} d^n). \quad (5.52)$$

Os termos resultantes da curvatura do obstáculo estão associados ao gradiente da normal, e são agrupados no tensor  $\mathbf{C}$ , dado por

$$C_{ik} = r [(d^n - \delta_p n_p) I_{ik} - \delta_k n_i]. \quad (5.53)$$

O sub-operador suplementar  $\mathbf{F}^{\text{sup}}$  impõe, neste caso, um deslocamento relativo nulo. Assim, uma vez que as variáveis cinemáticas  $d^n$  e  $\delta$  convergem para zero, se a curvatura do obstáculo for moderada é admissível considerar que a componente normal do vector deslocamento relativo e a distância normal são coincidentes, isto é [Heege 1992, Menezes 1995]

$$d^n \approx \delta_i n_i. \quad (5.54)$$

Visto que para o estatuto *stick*, o deslocamento  $\mathbf{u}$  é conhecido *a priori* pode admitir-se que a solução em cada incremento é independente do trajeto percorrido até à posição de

referência. Atendendo a esta simplificação o operador de contacto com atrito toma a forma [Heege 1992]

$$\mathbf{F}_{\parallel stick}(\mathbf{u}, \lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + r\delta(\mathbf{u}) \\ \delta(\mathbf{u}) \end{bmatrix}, \quad (5.55)$$

e a matriz tangente torna-se independente da curvatura do obstáculo (Anexo B)

$$\mathcal{J}^{stick} = \begin{bmatrix} \nabla_{u_j}, \nabla_{\lambda_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_i + r\delta_i \\ \delta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rI_{ij} & I_{ij} \\ I_{ij} & 0_{ij} \end{bmatrix}. \quad (5.56)$$

Na presença de obstáculos de grande curvatura Menezes [1995] admite que esta simplificação pode resultar em perda de velocidade de convergência do método de Newton-Raphson. Porém, é compensada pela simplicidade do cálculo das matrizes, dadas pela equação (5.56). Testes realizados para a simulação numérica da conformação de uma taça quadrada indicam que, de facto, o recurso à expressão (5.51) não conduz a melhorias na precisão dos resultados que compensem o aumento de tempo de cálculo associado à sua avaliação.

### 5.4.2.3 Matrizes Tangentes Associadas ao Estatuto *Slip*

As matrizes tangentes associadas ao estatuto de contacto com escorregamento, ou seja *slip*, derivam da definição do operador de contacto apresentado na equação (5.47). Tem-se então que [Heege 1992]:

$$\mathcal{J}^{slip} = \begin{bmatrix} \nabla_{u_j}, \nabla_{\lambda_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^n(n_i - \mu t_i) \\ d^n n_i - \frac{1}{r}(\lambda_i^t + \mu \sigma^n t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (rM_{ij} + N_{ik} \nabla_{u_j} n_k) & E_{ij} \\ \left(M_{ij} + \frac{1}{r} N_{ik} \nabla_{u_j} n_k\right) & \frac{1}{r}(E_{ij} - I_{ij}) \end{bmatrix}. \quad (5.57)$$

Na expressão anterior recorre-se ao tensor  $\mathbf{M}$  que agrupa os termos associados ao gradiente do operador em relação a  $\mathbf{u}$ , na ausência de curvatura do obstáculo.  $\mathbf{M}$  é dado por

$$M_{ij} = (n_i - \mu t_i) \nabla_{u_j} d^n - \mu \frac{\sigma^n}{\|\sigma_i^t\|} (I_{ij} - n_i n_j - t_i t_j). \quad (5.58)$$

Os termos associados ao gradiente da normal estão associados no tensor  $\mathbf{N}$ , definido por

$$N_{ik} = \sigma^n I_{ik} + \lambda_k (n_i - \mu t_i) + \mu \frac{\sigma^n}{\|\sigma_i^t\|} \left[ (\lambda_k + r\delta_k) n_i - (\lambda_p + r\delta_p) n_p (t_i t_k - I_{ik}) \right]. \quad (5.59)$$

O tensor  $\mathbf{E}$  agrupa os termos associados ao gradiente do operador de contacto em relação a  $\lambda$ , que são independentes da curvatura do obstáculo:

$$E_{ij} = (n_i - \mu t_i) n_j - \mu \frac{\sigma^n}{\|\sigma_i^t\|} (I_{ij} - n_i n_j - t_i t_j). \quad (5.60)$$

### 5.4.3 O Sistema de Equações Lineares Global Misto

No sistema de equações lineares definido em (5.48), a matriz  $[K_{AB}]$  é independente do estatuto de contacto do nó  $A$ . Porém, os termos associados ao operador de contacto com atrito  $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ , dependem directamente da condição de contacto do nó  $A$ . O sistema de equações lineares pode ser escrito na forma geral seguinte, válida para todos os estatutos de contacto [Menezes 1995],

$$\begin{cases} [K_{AB}]_{ij} \{du_B\}_j + [A_A]_{ij} \{du_A\}_j + [C_A]_{ij} \{d\lambda_A\}_j = \{\mathcal{F}_A^1\}_i \\ [A_A]_{ij} \{du_A\}_j + [B_A]_{ij} \{d\lambda_A\}_j = \{\mathcal{F}_A^2\}_i \end{cases}, \quad (5.61)$$

sem soma em  $A$  e com  $A, B = 1, \dots, n_n$ . Se o nó  $A$  apresentar estatuto de contacto *gap*, da definição da matriz jacobiana dada em (5.50) deduz-se que o sistema de equações lineares global misto é definido por

$$[A_A]_{ij} = 0_{ij}, \quad [B_A]_{ij} = -I_{ij} \quad \text{e} \quad [C_A]_{ij} = 0_{ij}. \quad (5.62)$$

A partir da definição do operador de contacto para o estatuto *gap*, dada em (5.43), verifica-se que

$$\{\mathcal{F}_A^1\}_i = \{df_A\}_i \quad \text{e} \quad \{\mathcal{F}_A^2\}_i = \{\lambda_A\}_i. \quad (5.63)$$

Para o estatuto de contacto *stick*, caso se considere o operador de contacto definido em (5.45) e a matriz jacobiana da expressão (5.51), o sistema de equações lineares é dado por (Anexo B)

$$[A_A]_{ij} = (P_{ij} + C_{ik} \nabla_{u_j} n_k)_A, \quad [B_A]_{ij} = 0_{ij} \quad \text{e} \quad [C_A]_{ij} = I_{ij}, \quad (5.64)$$

$$\{\mathcal{F}_A^1\}_i = \{df_A\}_i - \left\{ \lambda_A + r(d^n n + \delta^t)_A \right\}_i \quad \text{e} \quad \{\mathcal{F}_A^2\}_i = \left\{ -r(d^n n + \delta^t)_A \right\}_i. \quad (5.65)$$

Caso se admita a simplificação introduzida para o estatuto *stick*, o operador de contacto é definido pela relação (5.55) e a matriz jacobiana por (5.56), o que conduz a um sistema de equações lineares mais simples, em que

$$[A_A]_{ij} = rI_{ij}, \quad [B_A]_{ij} = 0_{ij} \quad \text{e} \quad [C_A]_{ij} = I_{ij}, \quad (5.66)$$

$$\{\mathcal{F}_A^1\}_i = \{df_A\}_i - \{\lambda_A + r\delta_A\}_i \quad \text{e} \quad \{\mathcal{F}_A^2\}_i = \{-r\delta_A\}_i. \quad (5.67)$$

Finalmente, para o estatuto de contacto *slip*, recorre-se às definições (5.47) e (5.57), e obtém-se:

$$[A_A]_{ij} = (rM_{ij} + N_{ik} \nabla_{u_j} n_k)_A, \quad [B_A]_{ij} = (E_{ij} - I_{ij})_A \quad \text{e} \quad [C_A]_{ij} = (E_{ij})_A, \quad (5.68)$$

$$\{\mathcal{F}_A^1\}_i = \{df_A\}_i - \left\{ (\sigma^n)_A (n - \mu t)_A \right\}_i \quad \text{e} \quad \{\mathcal{F}_A^2\}_i = \{\lambda_A\}_i - \left\{ (\sigma^n)_A (n - \mu t)_A \right\}_i. \quad (5.69)$$

em que os tensores  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{E}$  são dados pelas equações (5.58), (5.59) e (5.60), respectivamente.

### 5.4.4 O Sistema de Equações Lineares Global Reduzido

O sistema de equações lineares global, apresentado de forma genérica em (5.61), é um sistema misto com seis equações por nó. No entanto, os nós não-susceptíveis de entrar em contacto como, por exemplo, os do interior do corpo deformável, apresentam apenas três graus de liberdade em deslocamento. O mesmo acontece para os nós susceptíveis de entrar em contacto, para os quais é atribuído o estatuto de contacto *gap*, uma vez que a força de contacto é nula (equações (5.62) e (5.63)). Assim, o sistema é misto apenas em nós para os quais é previsto contacto com atrito.

Na prática, o tratamento simultâneo de nós com três e seis graus de liberdade é complexo e dispendioso. Por um lado, com seis graus de liberdade por nó, o sistema global de equações lineares apresenta um número de incógnitas muito superior ao necessário. Por outro lado, a coexistência de incógnitas do tipo deslocamento e força, às quais podem estar associadas ordens de grandeza muito distintas, traduz-se no mau condicionamento da matriz do sistema.

Da análise do sistema (5.61) constata-se que as incógnitas suplementares, isto é, as forças de contacto, são apenas função dos graus de liberdade do nó (deslocamentos) a que estão associadas. Ou seja, a segunda equação do sistema pode ser reescrita:

$$\{d\lambda_A\}_j = [B_A]_{ij}^{-1} \left[ \{\mathcal{F}_A^2\}_i - [A_A]_{ij} \{du_A\}_j \right]. \quad (5.70)$$

Substituindo  $\{d\lambda_A\}_j$  na primeira equação do sistema (5.61), é possível construir um sistema onde as incógnitas são apenas os deslocamentos na forma

$$\left[ K_{AB}^{\text{red}} \right]_{ij} \{du_B\}_j = \{\mathcal{F}_A^{\text{red}}\}_i. \quad (5.71)$$

Com o auxílio da expressão (5.70) constrói-se um outro sistema de equações lineares em que as incógnitas são as forças de contacto. No entanto, esta solução, aparentemente simples, revela-se impraticável uma vez que a matriz  $[B_A]_{ij}$  nem sempre é invertível. Para o estatuto de contacto *stick* ela é nula (equações (5.64) e (5.66)). Para o estatuto de contacto *slip* a matriz é singular (equação (5.68)).

A análise das definições para cada estatuto de contacto das matrizes  $[B_A]_{ij}$  e  $[C_A]_{ij}$  permite escrever  $[B_A]_{ij} = [C_A]_{ij} - I_{ij}$ . Com base nesta decomposição é possível obter um sistema de equações lineares cujas incógnitas são apenas os deslocamentos [Menezes 1995]

$$-[B_A]_{ik} [K_{AB}]_{kj} \{du_B\}_j + [A_A]_{ij} \{du_A\}_j = \{\mathcal{F}_A^*\}_i, \quad (5.72)$$

sem soma em  $A$  e com  $A, B = 1, \dots, n_n$ , sendo

$$\{\mathcal{F}_A^*\}_i = \{\mathcal{F}_A^2\}_i - [B_A]_{ij} \left[ \{\mathcal{F}_A^1\}_j - \{\mathcal{F}_A^2\}_j \right]. \quad (5.73)$$

Do mesmo modo, deduz-se um sistema de equações lineares cujas incógnitas são apenas as forças de contacto:

$$\{d\lambda_A\}_i = \{\mathcal{F}_A^{**}\}_i - [K_{AB}]_{ij} \{du_B\}_j, \quad (5.74)$$

sem soma em  $A$  e com  $A, B = 1, \dots, n_n$ . Neste caso, deduz-se que

$$\{\mathcal{F}_A^{**}\}_i = \{\mathcal{F}_A^1\}_i - \{\mathcal{F}_A^2\}_i. \quad (5.75)$$

No Anexo B apresentam-se as expressões do sistema (5.72) associado a cada estatuto de contacto. O sistema de equações lineares reduzido (5.72) é constituído por  $3 \times n_n$

equações, sendo  $n_n$  o número de nós. Definindo por  $n_{ct}$  o número de nós susceptíveis de estabelecer contacto, o sistema de equações (5.74) é constituído à partida por  $3 \times n_{ct}$  equações. No entanto, as dimensões destes sistemas podem ainda ser reduzidas eliminando as equações correspondentes aos graus de liberdade prescritos. Estes podem estar associados a condições de fronteira clássicas, de deslocamento prescrito. Este é o caso de um nó pertencente a um eixo de simetria, por exemplo. O deslocamento numa determinada direcção é nulo, pelo que as equações associadas a esse grau de liberdade podem ser eliminadas do sistema de equações lineares reduzido. Por outro lado, se esse nó for susceptível de estabelecer contacto, a força de contacto é nula na direcção da restrição ao movimento, de modo a cumprir as condições de simetria. Assim, também este grau de liberdade pode ser eliminado.

O estatuto de contacto de um nó explicita também o valor de algumas incógnitas. Para o estatuto de contacto *gap* as forças de contacto são nulas, não sendo necessário considerar as equações correspondentes em (5.74). Para o estatuto de contacto *stick* o deslocamento do nó é conhecido à partida, quer se adopte ou não a simplificação referida, pelo que podem eliminar-se as equações correspondentes em (5.72). Deste modo, em função das condições de fronteira clássicas e do estatuto de contacto do nó, o número de graus de liberdade efectivos pode ser resumido de acordo com a Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Graus de liberdade associados a cada nó  $A$ .

Número de deslocamentos prescritos no nó $A$	Graus de liberdade do nó $A$					
	Gap		Slip		stick	
0	$3\mathbf{u}$	$0\lambda$	$3\mathbf{u}$	$3\lambda$	$0\mathbf{u}$	$3\lambda$
1	$2\mathbf{u}$	$0\lambda$	$2\mathbf{u}$	$2\lambda$	$0\mathbf{u}$	$2\lambda$
2	$1\mathbf{u}$	$0\lambda$	$1\mathbf{u}$	$1\lambda$	$0\mathbf{u}$	$1\lambda$
3	$0\mathbf{u}$	$0\lambda$	$0\mathbf{u}$	$0\lambda$	$0\mathbf{u}$	$0\lambda$

A eliminação de graus de liberdade prescritos é vantajosa em termos da capacidade de memória necessária para o armazenamento das matrizes  $[K_{AB}^{\text{red}}]_{ij}$  e  $[K_{AB}]_{ij}$ , necessárias à resolução dos sistemas de equações (5.72) e (5.74), respectivamente. No entanto, ao optar-se por um único ciclo iterativo para a resolução simultânea das não-linearidades associadas às grandes deformações e ao contacto com atrito, as condições de contacto dos nós alteram-se. Em consequência, também se altera o número total de equações destes dois sistemas. Tal obriga a que, em cada iteração, se proceda à determinação dos apontadores necessários ao armazenamento das matrizes de rigidez, o que é uma operação computacionalmente cara. Uma possível relação de compromisso elimina, do sistema de equações, apenas os graus de liberdade associados às condições de fronteira clássicas. Ao recorrer a esse sistema de equações parcialmente reduzido elimina-se praticamente o custo associado ao cálculo dos apontadores das matrizes de rigidez, embora com algum prejuízo em termos da capacidade de memória necessária ao armazenamento das matrizes [Alves 2003].

#### 5.4.4.1 Ferramentas a Força Imposta

No caso concreto do processo de estampagem recorre-se, geralmente, a ferramentas que actuam a força constante como, por exemplo, o cerra-chapas. Para que no decurso da simulação do processo de estampagem o valor de força imposta seja cumprido, é

necessário que a posição espacial dessa ferramenta evolua de acordo com o processo de controlo de força. Torna-se por isso necessário introduzir no modelo uma equação suplementar para cada ferramenta controlada por força, de modo a poder prever o deslocamento destas ferramentas. Supondo que a ferramenta, a actuar a força imposta na direcção  $i$ , está em contacto com um número de nós  $n_{fer}$ , a equação suplementar a ser adicionada tem a forma [Menezes 1995, Menezes e Teodosiu 2000]

$$\sum_{A=1}^{n_{fer}} \{d\lambda_A^{j+1}\}_i = \sum_{A=1}^{n_{fer}} \{\lambda_A^j\}_i - \bar{F}_i, \quad (5.76)$$

sendo  $\bar{F}_i$  o valor da força imposta,  $\{\lambda_A^j\}_i$  o valor da força de contacto do nó  $A$  na direcção  $i$  na iteração de equilíbrio  $j$  e  $\{d\lambda_A^{j+1}\}_i$  o incremento da força de contacto do nó  $A$  na direcção  $i$ , na iteração corrente. Como o incremento de força de contacto do nó  $A$  na direcção  $i$  na iteração corrente é função do incremento de deslocamento previsto, deve ser substituído pela equação (5.74).

Convém salientar que o valor da força imposta  $\bar{F}_i$  pode não ser constante ao longo do processo de conformação, mas sim determinado por uma mola de rigidez  $k^m$  e pelo deslocamento de uma outra ferramenta  $U^m$ . Deste modo, em cada incremento  $N$ , o valor da força imposta é actualizado segundo a expressão

$$\bar{F}_i^{[N]} = \bar{F}_i^{[0]} + k^m U_i^{m[N]}, \quad (5.77)$$

em que  $\bar{F}_i^{[0]}$  corresponde a um valor limite inicial ou ao valor da força imposta na fase anterior.

A relação entre os deslocamentos dos nós em contacto com a ferramenta, a força imposta e o deslocamento da ferramenta permite eliminar algumas das equações associadas aos graus de liberdade desses nós. Se o estatuto de contacto de um nó for *stick*, o seu deslocamento terá de ser idêntico ao da ferramenta. Para o estatuto *slip*, a equação associada ao deslocamento do nó na direcção normal à ferramenta ( $\mathbf{n}$ ) pode ser igualmente eliminada, uma vez que este deslocamento tem de ser idêntico ao da ferramenta. Para isso, o sistema de equações lineares reduzido tem de ser definido no referencial local de cada nó. A forma mais simples de proceder é introduzir uma matriz de rotação  $[T_A]_{ij}$  que efectua a passagem do referencial global para o referencial local. Uma vez obtida a solução procede-se à sua rotação para o referencial global.

A matriz  $[T_A]_{ij}$  depende do estatuto de contacto do nó  $A$ . Para um nó não-susceptível de estabelecer contacto, ou para um nó cujo estatuto de contacto seja *gap*, tem-se  $[T_A]_{ij} = I_{ij}$ . Se o estatuto de contacto do nó  $A$  for *stick*, o vector normal à ferramenta  $\mathbf{n}_A$  define uma das direcções. As restantes duas direcções podem ser quaisquer. Para o estatuto de contacto *slip*, a matriz  $[T_A]_{ij}$  é definida pelo vector normal  $\mathbf{n}_A$  e pelo vector unitário de escorregamento  $\mathbf{t}_A$ , sendo a terceira direcção definida pelo produto vectorial  $\mathbf{n}_A \otimes \mathbf{t}_A$ .

Uma vez definida a matriz de rotação  $[T_A]_{ij}$ , o sistema reduzido (5.71) pode ser reescrito no referencial local como [Menezes 1995]

$$[K_{AB}^{\text{red}}]_{ij}^1 \{du_B\}_j^1 = \{\mathcal{F}_A^{\text{red}}\}_i^1, \quad (5.78)$$

sendo que  $[K_{AB}^{\text{red}}]_{ij}^1$  e  $\{\mathcal{F}_A^{\text{red}}\}_i^1$  são obtidos por assemblagem dos termos elementares  $[K_{ab}^e]_{ij}^1$  e  $\{\mathcal{F}_a^e\}_{ij}^1$ , resultantes da rotação dos termos elementares



$$\left[ K_{ab}^e \right]_{ij}^1 = [T_a]_{ki} \left[ K_{ab}^e \right]_{kq} [T_b]_{qj} \quad \text{sem soma sobre } a \text{ e } b, \quad (5.79)$$

$$\left\{ \mathcal{F}_a^e \right\}_i^1 = [T_a]_{ki} \left\{ \mathcal{F}_a^e \right\}_k \quad \text{sem soma sobre } a. \quad (5.80)$$

em que os termos elementares  $\left[ K_{ab}^e \right]_{kq}$  e  $\left\{ \mathcal{F}_a^e \right\}_k$  contêm as correcções devidas ao contacto com atrito.

Supondo que a força que controla a ferramenta é imposta na direcção global  $Oz$ , a incógnita da equação suplementar que garante o valor de força imposta  $\bar{F}_z$  é o deslocamento da ferramenta nessa direcção global,  $dU_z^{\text{fer}}$ . Nas outras direcções globais  $dU_x^{\text{fer}} = dU_y^{\text{fer}} = 0$ . Em função do estatuto de contacto do nó, procede-se do modo a seguir descrito.

Nó com estatuto de contacto *stick*:

1. Neste caso é conhecido *a priori* o incremento de deslocamento que coloca esse nó sobre a superfície da ferramenta. No início de cada iteração de equilíbrio, o estatuto do nó é determinado em função das variáveis estáticas e cinemáticas. Ao ser atribuído o estatuto *stick*, a posição do nó passa a ser conhecida. Esta é dada por um incremento de deslocamento  $\delta_A$ , que pode ou não ser nulo. A correcção à posição da ferramenta deve considerar esta correcção ao deslocamento, uma vez que a correcção ao deslocamento conduz a correcções à força de contacto. O vector incremento de deslocamento no referencial local é dado por

$$\left\{ du_A \right\}_i^1 = [T_A]_{ki} \left\{ dU^{\text{fer}} - \delta_A \right\}_k = \left\{ dU^{\text{fer}} \right\}_i^1 - [T_A]_{ki} \left\{ \delta_A \right\}_k, \quad (5.81)$$

em que  $\delta_A$  é a correcção ao incremento de deslocamento dada pela equação (5.72).

2. Eliminam-se as três equações associadas ao deslocamento do nó  $A$  do sistema reduzido.
3. A contribuição do nó  $A$  para a equação suplementar (5.76) pode ser obtida da primeira equação do sistema de equações lineares global definido em (5.61), tendo em conta as rotações necessárias e a equação (5.81), isto é,

$$\left\{ d\lambda_A^{j+1} \right\}_i^1 = - \left[ K_{AB}^j \right]_{ij}^1 \left\{ du_B^{j+1} \right\}_j^1 + \left\{ \mathcal{F}_A^1 \right\}_i^1 - rI_{ij} \left\{ \left\{ dU^{\text{fer}} \right\}_j^1 - [T_A^j]_{kj} \left\{ \delta_A^{j+1} \right\}_k \right\}, \quad (5.82)$$

sem soma em  $A$ .

4. Após a resolução do sistema, calculam-se os incrementos de deslocamento do nó com o auxílio da equação (5.81) e procede-se à sua rotação para o sistema de coordenadas global.

Nó com estatuto de contacto *slip*:

1. Neste caso é conhecida a componente normal do vector deslocamento que coloca o nó sobre a superfície da ferramenta. No sistema de coordenadas local, esta correcção ao deslocamento é dada pela variável distância normal de contacto  $d_A^n$ . A correcção à posição da ferramenta deve considerar esta correcção ao deslocamento, uma vez que impõe correcções à força de contacto. Designando pelo índice 1 a direcção normal do referencial local, a componente normal do incremento de deslocamento é dada por

$$\left\{ du_A \right\}_1^1 = \left\{ dU^{\text{fer}} \right\}_1^1 - d_A^n. \quad (5.83)$$

2. Elimina-se do sistema reduzido a equação associada ao deslocamento do nó  $A$ , na direcção normal  $\mathbf{n}_A$ .
3. A contribuição do nó  $A$  para a equação suplementar (5.76) pode ser obtida directamente da segunda equação do sistema reduzido definida por (5.74), tendo em conta as rotações necessárias, e da equação (5.83). Assim, obtém-se

$$\begin{aligned} \{d\lambda_A^{j+1}\}_1^1 &= -[K_{AB}^j]_{1k}^1 \{du_B^{j+1}\}_k^1 + \{\mathcal{F}_A^{**}\}_1 \\ &= -[K_{AB(A \neq B)}^j]_{1k}^1 \{du_B^{j+1}\}_k^1 - [K_{AA}^j]_{1k}^1 \left\{ \{dU^{\text{fer}}\}_k^1 - d_A^n \right\} + \{\mathcal{F}_A^{**}\}_1, \end{aligned} \quad (5.84)$$

sem soma em  $A$ .

4. Após a resolução do sistema, calculam-se os incrementos de deslocamento do nó com o auxílio da equação (5.83) e procede-se à sua rotação para o sistema de coordenadas global.

Em cada iteração, uma vez determinada a correcção à posição da ferramenta  $dU^{\text{fer}}$  é imprescindível proceder à actualização do vector de referência  $\mathbf{x}^{\text{ref}}$ . A actualização do vector  $\mathbf{x}^{\text{ref}}$  deve realizar-se para todos os nós susceptíveis de estabelecer contacto com a ferramenta, independentemente de, na iteração corrente, estarem ou não em contacto com a ferramenta. No entanto, após a actualização do vector de referência  $\mathbf{x}^{\text{ref}}$  nem todos os nós em contacto com a ferramenta apresentam distâncias normais de contacto nulas. Isto porque, a correcção da posição da ferramenta realiza-se com base nos valores das forças de contacto previstas na iteração anterior. Estas forças de contacto são determinadas com base num conjunto de nós em contacto que é actualizado para a nova iteração. Em termos de convergência do algoritmo revela-se essencial considerar os valores de correcção ao deslocamento (equações (5.81) e (5.83)) na equação suplementar da ferramenta a força imposta. Estes colocam, efectivamente, os nós em contacto sobre a ferramenta.

Para avaliar a importância desta correcção, considerou-se o exemplo de conformação do perfil curvo cuja geometria foi definida na secção 4.3.3. Neste caso particular, o cerra-chapas é controlado por uma força imposta, que aumenta com deslocamento do punção em função de uma constante  $k^m$ . A constante de rigidez  $k^m$  toma valores distintos para os dois materiais estudados. Em relação ao cerra-chapas, devido à geometria curva da ferramenta, impõe-se que as forças realizadas na flange interior e exterior sejam idênticas (ver Figura 4.13). Tal obriga a controlar o deslocamento das duas zonas. Ou seja, este exemplo é caracterizado pelo controle de duas ferramentas a força imposta, sendo que o valor das duas tem que ser igual em cada instante. Realizaram-se simulações para dois materiais: aço macio (DC06) e aço de alta resistência (HSLA340). O comportamento mecânico do aço macio é descrito com o auxílio da lei de Swift e o do aço de alta resistência com o modelo microestrutural completo de Teodosiu. O critério de plasticidade utilizado é o critério de Hill'48. Os parâmetros constitutivos são apresentados no Anexo E (Tabela E.3 e Tabela E.4) [LPMTM 2001]. Foram realizados dois grupos de simulações. No primeiro grupo, designado por Teste A, recorre-se à estratégia para o controle da ferramenta a força imposta que despreza as correcções. Ou seja, as equações (5.81) e (5.83) são substituídas por [Menezes 1995]

$$\{du_A\}_i^1 = \{dU^{\text{fer}}\}_i^1 \quad \text{e} \quad \{du_A\}_1^1 = \{dU^{\text{fer}}\}_1^1, \quad (5.85)$$

respectivamente. Isto implica admitir-se que  $\delta_A = \mathbf{0}$  e  $d_A^n = 0$ , no que respeita à contribuição dos nós *stick* e *slip* em contacto com a ferramenta a força imposta,

respectivamente. No segundo grupo, designado por Teste B, recorre-se à estratégia em que se consideram as correcções ((5.81) e (5.83)).

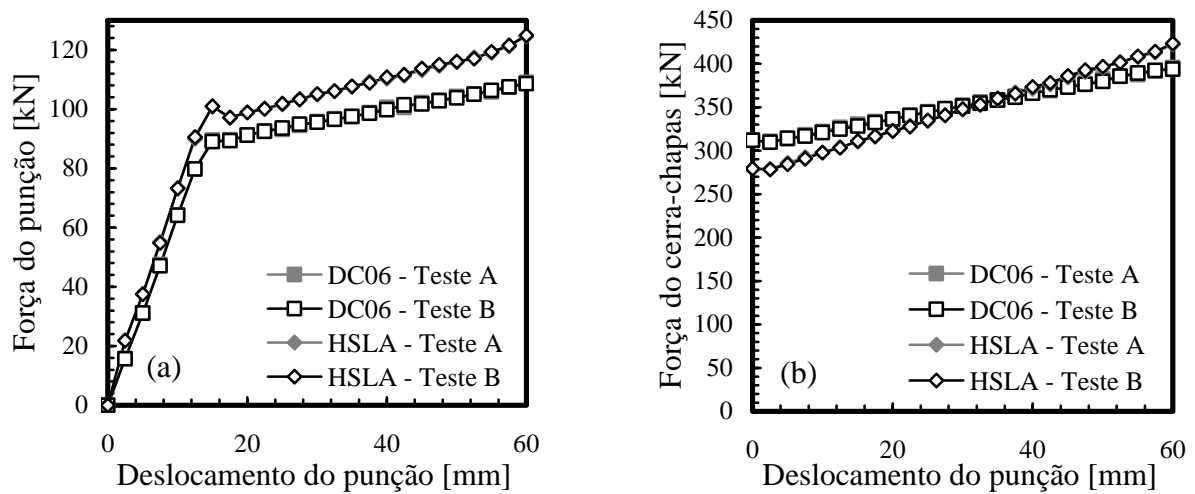


Figura 5.7 – Influência da estratégia numérica de controlo da ferramenta a força imposta na simulação da conformação de um perfil curvo: (a) evolução da força exercida pelo punção e (b) evolução da força de aperto do cerra-chapas.

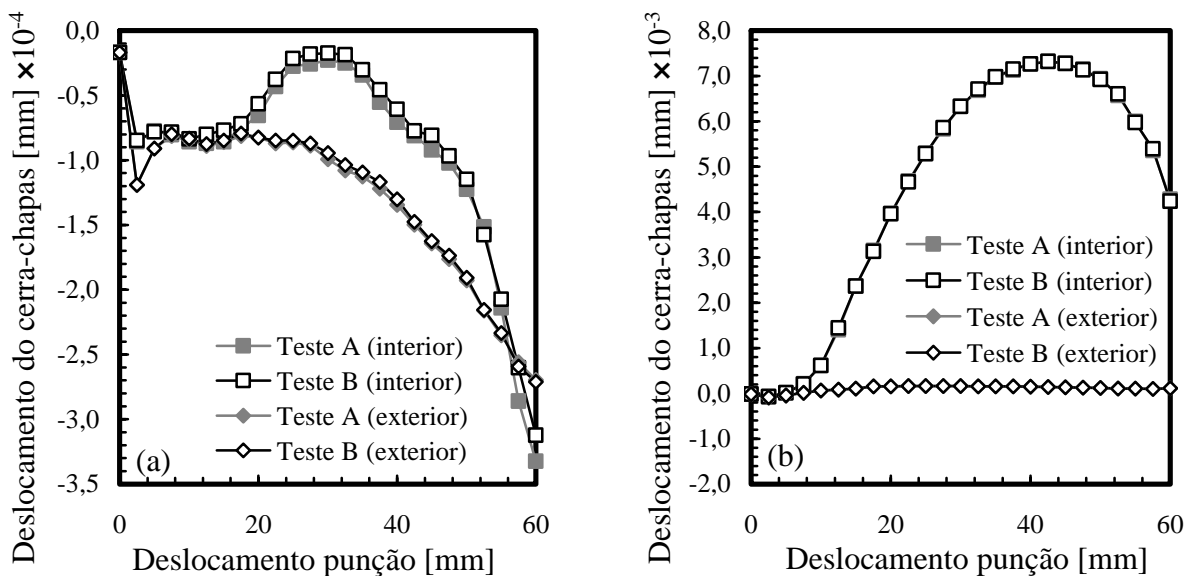


Figura 5.8 – Influência da estratégia numérica de controlo da ferramenta a força imposta na simulação da conformação de um perfil curvo. Evolução do deslocamento do cerra-chapas: (a) aço DC06 e (b) aço HSLA.

As duas estratégias conduziram a resultados idênticos para a evolução de força do punção (Figura 5.7 (a)) e para a evolução da força global do cerra-chapas (Figura 5.7 (b)). A evolução dos deslocamentos dos cerra-chapas interior e exterior também não apresentam diferenças significativas (Figura 5.8). A principal diferença surge ao nível dos tempos de computação, como se mostra na Tabela 5.2. A redução do tempo de cálculo com a introdução das correcções propostas é da ordem de 20% para o aço de alta resistência e de 30% para o aço macio. Esta redução do tempo de cálculo está associada a uma redução do número de iterações para a convergência em cada incremento.

Tabela 5.2 – Influência da estratégia numérica de controlo da ferramenta a força imposta: tempos de cálculo obtidos na simulação da conformação de um perfil curvo (normalizados para cada material em relação à simulação Teste A).

	<i>DC06</i>		<i>HSLA</i>	
	Teste A	Teste B	Teste A	Teste B
Tempo de CPU [%]	<b>100,0</b>	70,8	<b>100,0</b>	79,7

Convém sublinhar que o procedimento proposto para controlar as ferramentas a força imposta não conduz a um aumento da dimensão do sistema de equações lineares global reduzido, uma vez que possibilita, inclusivamente, eliminar alguns graus de liberdade de nós em contacto com a ferramenta controlada por força imposta. No entanto, a existência deste tipo de ferramentas conduz a um aumento da largura da banda de não-zeros da matriz.

#### 5.4.4.2 Resolução do Sistema de Equações Lineares

Ao recorrer ao sistema de equações lineares reduzido é necessário resolver, em cada iteração do método de Newton-Raphson, o sistema de equações (5.72) para determinar as correcções aos deslocamentos incrementais. Em cada iteração, uma vez conhecidas as correcções ao campo de deslocamentos, as correcções às forças de contacto são obtidas directamente da relação (5.74). O padrão da matriz do sistema de equações lineares depende da numeração da malha de elementos finitos do corpo deformável, pelo que é conveniente que esta numeração esteja optimizada [Alves e Menezes 2002].

Apesar da robustez garantida pelos métodos directos na resolução de sistemas de equações lineares, estes são fortemente penalizadores em termos de memória necessária. Tal facto elimina estes métodos da lista de opções, nomeadamente em problemas de grandes dimensões. Neste caso, é preferível recorrer a métodos iterativos. A velocidade de convergência destes métodos depende do condicionamento da matriz do sistema, pelo que é frequente recorrer ao seu preconditionamento. A fase de preconditionamento da matriz tem custos computacionais. No entanto, os métodos iterativos raramente convergem sem preconditionamento.

Num estudo comparativo de vários métodos directos e iterativos combinados com diferentes tipos de preconditionamento, Alves e Menezes [2002] concluem que o método mais eficiente é o método iterativo do duplo gradiente conjugado (*conjugate gradient squared*), associado a um preconditionador de nível  $k$  (*level-k ILU*). Neste estudo, Alves e Menezes [2002] alertam também para o facto de, maiores níveis  $k$  de preconditionamento implicarem um aumento do custo computacional desta fase. Em contrapartida, para maiores níveis  $k$  de preconditionamento, a matriz é melhor condicionada, diminuindo o custo computacional de resolução do sistema. O nível de preconditionamento seleccionado deve ser o mais baixo possível, sem pôr em causa a velocidade de convergência ou a própria convergência do método iterativo. Uma característica do método do duplo gradiente conjugado é a flutuação do resíduo ao longo do processo iterativo, resultante do mau condicionamento das matrizes [Alart e Lebon 1995]. Por este facto, não é fácil conhecer *a priori* o nível ideal de preconditionamento. Para tentar ultrapassar este problema, o programa DD3IMP recorre a uma estratégia denominada "*UPllevel*" [Alves 2003]. Nesta estratégia o utilizador pré-selecciona um determinado nível de preconditionamento inicial. Caso se verifique dificuldade na

resolução do sistema de equações, a estratégia "*UPlevel*" aumenta automaticamente o nível de condicionamento. Este aumento pode ser sucessivo, até atingir o nível de condicionamento que conduz à resolução do sistema.

### 5.4.5 Convergência Global do Algoritmo de Newton-Raphson

Para o método de Newton-Raphson convergir é necessário garantir uma boa aproximação inicial, bem como a diferenciabilidade do operador de contacto. Uma vez que existem três estatutos de contacto possíveis, o operador de contacto com atrito isotrópico  $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \lambda)$  introduzido é apenas localmente diferenciável. No caso de mudança de estatuto de contacto ele é não-diferenciável. Daí a sua frequente associação a algoritmos do tipo Uzawa. A região de convergência quadrática do método de Newton-Raphson está associada a uma região de diferenciabilidade do operador de contacto, ou seja, à estabilização de um estatuto de contacto para cada ponto do corpo deformável. Nas primeiras iterações da fase de *Correcção*, o algoritmo deve determinar os estatutos de contacto correctos para cada ponto, de modo a permitir uma estabilização da solução. A convergência quadrática só ocorre após a estabilização dos estatutos de contacto. Também, e ao contrário dos algoritmos do tipo Uzawa, o algoritmo descrito ao longo das secções anteriores trata em cada iteração o problema de contacto com atrito e o problema de equilíbrio simultaneamente.

O método iterativo de Newton-Raphson garante convergência quadrática, na condição de que o módulo elastoplástico seja consistente. O recurso a outros módulos mais simples não altera a precisão dos resultados obtidos, mas torna a convergência mais lenta. O programa DD3IMP prevê a possibilidade de proceder à fase de *Correcção* utilizando três módulos: (i) o módulo elástico (equação (2.28)); (ii) o módulo tangente (equação (2.47)) e (iii) o módulo elastoplástico consistente (equação (3.76)) [Menezes 1995]. Uma das condições para garantir a convergência do método de Newton-Raphson é estar na vizinhança da solução. Apesar do recurso à estratégia  $r_{\min}$ , a experiência mostra que o método falha frequentemente, devido à imposição de condições de equilíbrio e/ou de contacto incorrectas. Em regime elastoplástico, estas condições podem originar deformações plásticas irreais ou soluções instáveis, que resultam numa redução da velocidade de convergência ou mesmo na divergência do processo. Uma forma de minimizar este problema é recorrer ao módulo elástico em substituição do módulo elastoplástico consistente, até que se esteja na vizinhança da solução. Esta estratégia designada de "*EPmod*", baseia-se no acompanhamento da história de evolução de um conjunto de parâmetros, a partir dos quais se avalia a conveniência de introduzir, ou não, o módulo elastoplástico consistente [Alves 2003]. Os parâmetros envolvidos nesta análise são (i) a norma do vector das correcções dos deslocamentos e das forças de contacto incrementais,  $\|\mathbf{d}\mathbf{u}, \mathbf{d}\lambda\|$ ; (ii) o valor do critério de convergência,  $C^{\text{crit}}$ ; (iii) a norma da razão entre a força efectiva e a força prescrita associada à ferramenta que actua a força imposta e (iv) a razão entre os valores máximos de deformação plástica equivalente da configuração corrente e da fase de *Previsão*.

A monitorização contínua dos parâmetros referidos anteriormente, permite introduzir o módulo elastoplástico consistente ou o módulo elástico, em função da estabilização das condições de equilíbrio e/ou de contacto. Apesar desta estratégia poder ser penalizadora da velocidade de convergência em alguns incrementos, permite garantir uma maior estabilidade do método de Newton-Raphson.

O acompanhamento da história de evolução do incremento de deformação plástica equivalente permite ainda avaliar se uma sucessão de iterações pode ou não convergir. Assim, caso numa determinada iteração de equilíbrio  $j$ , o incremento de deformação plástica equivalente, normalizado com o incremento previsto na *Previsão*, ultrapasse um determinado valor, torna-se preferível determinar uma nova solução aproximada. No programa DD3IMP esta estratégia numérica é denominada "*NTrialNST*". Uma vez decidida a sua introdução, são calculadas sucessões iterativas diferentes, de modo a evitar a paragem do programa devido a soluções não-convergentes [Alves 2003]. Estas sucessões iterativas diferentes podem ser obtidas alterando: (i) a estratégia "*EPmod*" de modo a atrasar ou antecipar a introdução do módulo elastoplástico consistente; (ii) o tratamento do contacto na fase de *Previsão* ou (iii) o tamanho do incremento. Neste último caso, pode recorrer-se a valores de tamanho de incremento de ensaio fixos ou a percentagens do coeficiente de redução  $r_{\min}$  calculado. A estratégia "*NTrialNST*", inicialmente proposta por Alves [2003], avaliava igualmente o valor da força efectiva na iteração de equilíbrio  $j$ . Assim, se numa determinada iteração, o valor máximo da razão entre a força efectiva  $F^{\text{fer}}$  e a força imposta à ferramenta  $\bar{F}_i$ , fosse superior a um valor prescrito, optava-se por procurar uma nova aproximação inicial. A introdução da nova estratégia para o controlo das ferramentas a força imposta, apresentada na secção 5.4.4.1, elimina a necessidade de avaliar a evolução da força efectiva ao longo da sucessão de iterações. Deste modo, o recurso à estratégia "*NTrialNST*" é actualmente ditado apenas pelo controlo do incremento de deformação plástica equivalente.

O processo iterativo de Newton-Raphson termina, tal como se indica na Tabela 3.3, quando a norma das forças não-equilibradas for inferior a um limite prescrito, ou seja, desde que o valor do critério de convergência na iteração  $j$  seja inferior ao valor da precisão definida pelo utilizador. Para que o algoritmo de resolução seja eficiente é fundamental um critério de paragem apropriado. Nos problemas de contacto com atrito, as restrições impostas são avaliadas pelo multiplicador aumentado pelo que, a forma mais expedita de definir um critério de convergência é baseá-lo nesse parâmetro [Laursen e Oancea 1994, Esche *et al.* 1997]. O critério de convergência adoptado no programa DD3IMP é definido por

$$C^{\text{crit}}|_j = \frac{\|\mathbf{du}, d\lambda\|^{j-1} + \|\mathcal{R}(\Delta\mathbf{u}, \Delta\lambda)\|^j}{\|\lambda\|^{j-1}}, \quad (5.86)$$

em que  $\|\mathbf{du}, d\lambda\|$  é a norma do vector das correcções às incógnitas do sistema linearizado e  $\|\lambda\|$  é a norma das forças de contacto envolvidas no processo. Estas duas normas são calculadas na iteração de equilíbrio  $j-1$ .  $\|\mathcal{R}(\Delta\mathbf{u}, \Delta\lambda)\|$  corresponde à norma das forças não-equilibradas, na iteração de equilíbrio  $j$ . A norma  $\|\lambda\|^{j-1}$  é utilizada para normalizar o erro cometido relativamente às solicitações envolvidas no processo em causa. À partida a equação (5.86) não se apresenta como dimensionalmente correcta. No entanto, quando o método converge a norma  $\|\mathbf{du}, d\lambda\|^{j-1}$  é muito próxima da norma  $\|d\lambda\|^{j-1}$  e o resíduo  $\|\mathcal{R}(\Delta\mathbf{u}, \Delta\lambda)\|^j$  é essencialmente controlado pela norma das forças. Deste modo o critério de convergência proposto é, efectivamente, controlado pela norma das forças não-equilibradas. A configuração do sistema é avaliada globalmente uma vez que o critério de convergência é baseado nas normas. Ao optar-se por um critério global podem validar-se soluções em que as forças não-equilibradas estejam todas concentradas numa zona localizada do corpo deformável. O critério de convergência adoptado não garante também a estabilização dos estatutos de contacto de todos os nós susceptíveis de

estabelecer contacto. Ou seja, este critério de convergência permite validar soluções que violem as condições de contacto com atrito. Porém, os incrementos subsequentes corrigem estas situações.

O parâmetro de precisão definido pelo utilizador (*TOLEQ*) influencia a velocidade e a precisão da simulação. Para valores elevados deste parâmetro, podem validar-se soluções não-equilibradas que no final do processo incremental pode corresponder a soluções incorrectas. Por outro lado, valores muito pequenos podem conduzir a um número elevado de iterações de convergência e, conseqüentemente, a um aumento do tempo de computação. O valor de *TOLEQ* deve ter em conta quer as características do processo a simular quer a precisão exigida.

Em termos globais, a convergência do método de Newton-Raphson depende de inúmeros parâmetros tais como:

- A geometria dos obstáculos, em particular a curvatura;
- As condições do processo, em particular o coeficiente de atrito;
- A lei de comportamento do corpo deformável;
- A discretização do corpo deformável;
- A solução de inicialização do processo iterativo e
- O parâmetro de penalidade.

Os três primeiros parâmetros são incontornáveis, uma vez que definem o processo a simular. A discretização do problema está fortemente relacionada com a geometria das ferramentas, nomeadamente o seu raio de curvatura [Heege 1992, Menezes 1995]. As estratégias numéricas  $r_{\min}$  e "*NTrialNST*", descritas anteriormente, procuram actuar ao nível da solução de inicialização e a estratégia "*EPmod*" procura controlar a sucessão de iterações. O recurso a estas estratégias minimiza a importância do parâmetro de penalidade como factor de controlo de divergência do método de Newton-Raphson. No entanto, quando as outras estratégias falham, a alteração deste parâmetro pode ser uma alternativa para garantir a convergência no incremento. O intervalo de valores admissíveis para o parâmetro de penalidade é muito amplo [Heege 1992]. Uma escolha simples deste parâmetro pode forçar a convergência mas também pode condicionar fortemente a velocidade de convergência.





## Capítulo 6

# Parâmetro de Penalidade

*Expõem-se duas estratégias distintas para a optimização da penalidade. A primeira admite um único parâmetro de penalidade para controlar as condições de contacto unilateral e de atrito. Para esta estratégia descrevem-se dois algoritmos para a selecção automática do parâmetro de penalidade. Um baseado na força normal de contacto e outro baseado na força e distância normais de contacto. A segunda estratégia admite dois parâmetros de penalidade para controlar as restrições associadas ao contacto unilateral e ao atrito. Testa-se a eficiência dos algoritmos propostos, no programa DD3IMP, na simulação numérica de um ensaio de compressão e na conformação de uma taça quadrada.*

### 6.1 Enquadramento

Na enformação por deformação plástica de chapas metálicas as condições de fronteira evoluem durante as diferentes fases do processo. Este facto obriga a uma correcta avaliação da evolução das condições de contacto entre o corpo deformável e as ferramentas. Também, em cada instante, diferentes regiões do corpo deformável estão sujeitas a diferentes estados de tensão. Parâmetros do processo como o coeficiente de atrito e a curvatura das superfícies das ferramentas contribuem para a alteração das condições de contacto. A interacção de todos estes factores conduz a fortes variações das condições de contacto ao longo da superfície da chapa, em cada instante. O algoritmo de gestão do problema de contacto com atrito deve ter em consideração todos estes factores, o que torna a selecção do parâmetro de penalidade uma tarefa complexa.

O método do lagrangeano aumentado garante que a precisão da solução obtida não é sensível ao parâmetro de penalidade escolhido. No entanto, a correcta escolha do parâmetro de penalidade pode ditar o sucesso da simulação, uma vez que influencia a convergência do método de Newton-Raphson. Por outro lado, mesmo que não ocorra divergência, o valor do parâmetro de penalidade afecta a velocidade de convergência e, consequentemente, o tempo de cálculo.

O método do lagrangeano aumentado pode ser interpretado como a combinação do método dos multiplicadores de Lagrange e do método da penalidade. Neste contexto, muito do esforço desenvolvido para avaliar o parâmetro de penalidade “ótimo” teve por base o trabalho anteriormente desenvolvido para o método da penalidade. No caso de algoritmos dinâmicos explícitos é possível estimar o valor do parâmetro de penalidade em função da condição de estabilidade de Courant [Kulak 1989]. Goudreau e Hallquist [1982] defendem que a força de contacto em cada superfície seja calculada, de preferência, em função da penetração e de um parâmetro de penalidade que depende das propriedades mecânicas e geométricas do elemento finito em análise. A função mais utilizada para calcular uma estimativa para o parâmetro de penalidade é a inicialmente proposta por Hallquist *et al.* [1985] em que o parâmetro de penalidade é dado por

$$r = \alpha \frac{A^2 K}{V}. \quad (6.1)$$

Nesta expressão,  $K$  é o módulo de elasticidade volumétrico associado à superfície *master*,  $A$  é a área da superfície do elemento em contacto,  $V$  é o volume desse elemento, e  $\alpha$  é um factor de escala definido pelo utilizador (usualmente  $\alpha = 0,10$  [Schweizerof e Hallquist 1991]). Deste modo o valor do parâmetro de penalidade é fixo em função da rigidez do elemento finito utilizado, multiplicada por um factor de escala. Esta estimativa do parâmetro de penalidade pode ser estendida ao método do lagrangeano aumentado. No entanto, tal pré-selecção não garante a convergência [Maker e Laursen 1994, Laursen e Maker 1995]. No método da penalidade constata-se que o parâmetro de penalidade, para além de determinar a precisão da solução, afecta também o número total de iterações do método de resolução [Nour-Omid e Wriggers 1987]. Com base nas fontes de erro para a aproximação obtida pelo método da penalidade, é possível estabelecer uma aproximação para o valor “ótimo” do parâmetro de penalidade. Para tal, consideram-se duas fontes de erro: (i) uma associada à perturbação induzida por pequenos valores do parâmetro de penalidade e (ii) outra associada à perda de informação, quando um valor muito grande é adicionado a um termo muito pequeno. A segunda fonte de erro depende da precisão da máquina utilizada e, nesse caso, o parâmetro de penalidade é definido por

$$r \leq r_{\max} = \frac{K_{\text{rig}}}{\sqrt{N_{\text{total}} t_{\text{pre}}}}, \quad (6.2)$$

em que  $K_{\text{rig}}$  é um parâmetro de rigidez característico dos elementos,  $N_{\text{total}}$  o número total de incógnitas e  $t_{\text{pre}}$  um parâmetro que define a precisão da máquina utilizada [Nour-Omid e Wriggers 1987]. Este valor funciona, efectivamente, como um limite superior, uma vez que valores menores podem conduzir a aproximações admissíveis, num número de iterações inferior. Foi igualmente proposto a utilização de um parâmetro de penalidade variável em cada nó, para a resolução do problema de contacto unilateral com o método da penalidade [Volpert *et al.* 1997]. Neste caso, o parâmetro de penalidade variável é utilizado para criar uma sobre-espessura de tolerância, para a qual se admite uma força de contacto de compressão para distâncias normais de contacto positivas. No entanto, o método não apresenta vantagens claras em relação ao método de penalidade com parâmetro constante. Foram, também, testadas estratégias com parâmetro de penalidade variável, em que a estimativa do parâmetro de penalidade é realizada em função das propriedades geométricas e materiais dos elementos finitos da superfície de contacto. Por exemplo, para a formulação baseada no método do lagrangeano aumentado, propõe-se a avaliação de um parâmetro de penalidade distinto para cada nó em função do factor de peso utilizado na função de forma do elemento finito. Esta estimativa deve ser considerada apenas como um valor por defeito pois requer um factor de escala introduzido pelo utilizador, de modo a garantir a convergência [Christensen *et al.* 1998].

Para avaliar a eficiência do algoritmo de resolução do problema de contacto com atrito é importante demonstrar a sua precisão e a insensibilidade ao valor seleccionado para o parâmetro de penalidade e às tolerâncias numéricas de controlo do critério de convergência. A resolução do problema formulado com o método do lagrangeano aumentado é mais ou menos sensível ao parâmetro de penalidade consoante o algoritmo utilizado [Haslinger *et al.* 2004]. O método do lagrangeano aumentado conduz à resolução de um sistema de equações que não são diferenciáveis para as mudanças de

estatuto de contacto. Por esta razão, geralmente, recorre-se ao algoritmo de Uzawa para a sua resolução. Apesar deste tipo de algoritmos ser estável, apresentam convergência lenta uma vez que são baseados num tratamento diferenciado das variáveis. Testes realizados para o método do lagrangeano aumentado, combinado com um algoritmo de Uzawa, revelam que as restrições são cumpridas de modo rigoroso para uma vasta gama de valores do parâmetro de penalidade. O tempo de cálculo depende do valor seleccionado. A insensibilidade da solução ao parâmetro de penalidade seleccionado confirma que a influencia no tempo de cálculo não é consequência de pequenas diferenças numéricas nas configurações intermédias. Estas diferenças resultam de dificuldades adicionais na resolução do sistema de equações devido à selecção menos afortunada do parâmetro de penalidade. Consta-se que o número de iterações aumenta com o aumento do valor do parâmetro de penalidade, enquanto que o número de correcções aos multiplicadores de Lagrange diminui [Laursen e Oancea 1994]. Esta sensibilidade do método do lagrangeano aumentado ao valor do parâmetro de penalidade é igualmente constatada num trabalho de Stromberg [1999] em que este método é utilizado para resolver o problema tridimensional de contacto com desgaste. Neste trabalho, o lagrangeano aumentado é formulado admitindo valores distintos para o parâmetro de penalidade de cada nó de contacto. Esses testes permitem verificar que existe um intervalo de valores de parâmetro de penalidade constante, para o qual a convergência e a velocidade de convergência do algoritmo são pouco influenciadas. Fora desse intervalo ocorrem problemas de divergência e instabilidades [Stromberg 1999].

Nos algoritmos do tipo Uzawa, valores baixos do parâmetro de penalidade conduzem a uma actualização lenta dos multiplicadores de Lagrange. Para valores muito elevados surgem problemas de convergência. Neste contexto, têm sido propostas estratégias para acelerar a convergência dos multiplicadores de Lagrange, como o recurso a um parâmetro de aceleração para o cálculo das actualizações aos multiplicadores de Lagrange [Zavarise e Wriggers 1999]. Outra estratégia possível, inicialmente proposta para a resolução de problemas de optimização sujeitos a constrangimentos impostos por igualdades, consiste no aumento do parâmetro de penalidade entre as actualizações [Hestenes 1969, Powell 1969]. De facto, à medida que o algoritmo se aproxima da solução exacta reduz-se o mau condicionamento do problema para parâmetros de penalidade elevados. Tal como no método da penalidade, também no método do lagrangeano aumentado pode ser seleccionada uma sequência de actualização do parâmetro de penalidade que pode ser: (i) constante; (ii) crescente até um valor finito ou (iii) tender suavemente para um valor infinito. Mais uma vez se ressalta que uma vantagem do método do lagrangeano aumentado é não necessitar que o parâmetro de penalidade tenda para infinito para garantir a solução precisa. Aliás, é conveniente que ele tome valores moderados, de modo a minimizar problemas de mau condicionamento [Luenberger 1984].

Não é fácil estabelecer uma estratégia para o aumento do parâmetro de penalidade, nem determinar quando deve parar o processo de actualização. Zavarise *et al.* [1995] implementaram uma estratégia baseada no trabalho preliminar realizado para o método da penalidade por Nour-Omid e Wriggers [1987]. Nesta estratégia, considera-se inicialmente um valor pequeno para o parâmetro de penalidade. Este valor é aumentado até que se atinja o limite definido na expressão (6.2) ou até que a razão da violação do constrangimento entre duas soluções consecutivas seja superior a 0,25. Esta expressão de actualização do parâmetro de penalidade foi inicialmente proposta sem o controlo da função restrição entre duas iterações sucessivas [Wriggers e Zavarise 1993]. No entanto,

este controlo é fundamental uma vez que aumentar o parâmetro de penalidade corresponde a perturbar a solução. Assim, esta operação só deve ser realizada nas primeiras actualizações dos multiplicadores de Lagrange [Zavarise *et al.* 1995].

A maioria dos trabalhos baseados na formulação do lagrangeano aumentado proposta por Simo e Laursen [1992] e Laursen [1992] definem valores de parâmetro de penalidade distintos, para a regularização da condição de contacto unilateral e de contacto com atrito. No entanto, nos exemplos numéricos optam por utilizar valores idênticos para ambos. Simo e Laursen [1992] aconselham a utilização de um valor tão elevado quanto possível do parâmetro de penalidade que controla a condição de impenetrabilidade, desde que não resulte em instabilidades, embora não indiquem como o seleccionar. Na aplicação do método do lagrangeano aumentado para a resolução de problemas de optimização não-lineares, que envolvem restrições impostas por igualdades e desigualdades, pode ser apropriado recorrer a parâmetros de penalidade diferentes para as várias restrições, de modo a reflectir de forma diferente o seu grau de não-linearidade [Conn *et al.* 1996]. Ao combinar-se este método com o algoritmo de Uzawa pode proceder-se igualmente à actualização do valor de cada parâmetro de penalidade. A actualização deste parâmetro deve ser tal que introduza mais ênfase nas restrições cuja violação é maior, de modo a estabelecer-se o equilíbrio entre todas as restrições que são violadas. Para evitar o mau condicionamento da matriz do sistema, quando se utilizam parâmetros de penalidade diferentes, é necessário garantir que todos os valores permanecem suficientemente distantes de zero [Conn *et al.* 1996]. Para este tipo de algoritmo, o parâmetro de penalidade que controla a condição de atrito é o que apresenta maior influência no tempo de cálculo, uma vez que dita o número de actualizações dos multiplicadores de Lagrange [Chabrand *et al.* 1998]. A estratégia de actualização proposta por Zavarise *et al.* [1995] revela-se mais vantajosa quando é actualizado o parâmetro de penalidade que controla a condição de atrito. Esta estratégia impõe um limite superior para ambos os parâmetros de penalidade. A expressão de actualização pode ser ditada unicamente pela evolução da violação aos constrangimentos. Por exemplo, para o contacto unilateral a restrição a impor é  $d^n \geq 0$  e o parâmetro de penalidade é alterado entre duas actualizações sucessivas ( $a$  e  $a+1$ ) de acordo com a expressão [Cuomo e Ventura 2000]

$$\begin{cases} r_{a+1} = \beta r_a & \text{se } \|d_{a+1}^n\| < \|d_a^n\| \text{ e } \|d_{a+1}^n\| > 0.25 \|d_a^n\|, \\ r_{a+1} = r_a & \text{senão} \end{cases}, \quad (6.3)$$

ou seja, aumenta-se o parâmetro de penalidade uma ordem de grandeza ( $\beta = 10$ ), se a norma da função restrição diminuir entre duas actualizações sucessivas, mas não diminuir o suficiente. Este controlo da evolução da função restrição é muito importante uma vez que, se surgir alguma instabilidade numérica, o aumento do parâmetro de penalidade pode conduzir a divergência [Cuomo e Ventura 2000]. Um outro algoritmo de actualização dos multiplicadores de Lagrange, baseado na evolução dos constrangimentos ao longo do processo iterativo, permite acelerar a convergência e garantir alguma insensibilidade ao valor do parâmetro de penalidade. Este algoritmo foi testado apenas para problemas de contacto unilateral, para controlar a instabilidade gerada pelos nós que oscilam entre ausência de contacto e contacto [Zavarise e Wriggers 1999].

Em oposição à formulação do método do lagrangeano aumentado proposta por Simo e Laursen [1992] e Laursen [1992], a formulação proposta por Alart e Curnier [1991] procede ao tratamento simultâneo de ambas as variáveis. Na resolução do problema de

contacto unilateral, o método de Newton converge mais rapidamente para a formulação proposta por Alart e Curnier [1991]. No entanto, o método pode ser instável na resolução de problemas de contacto com atrito. Por exemplo, em nós cuja solução é o contacto aderente podem ocorrer ciclos de inversão do escorregamento. Estas instabilidades numéricas são esperadas devido à não-diferenciabilidade do sistema a resolver, mas não são passíveis de serem eliminadas com a regularização das equações. No entanto, este tipo de dificuldade pode ser ultrapassada com uma estimativa correcta do parâmetro de penalidade. Ou seja, a convergência depende de uma correcta selecção do parâmetro de penalidade. Apesar de não ser possível demonstrar a convergência do método de Newton, testes para problemas bidimensionais envolvendo grandes escorregamentos mostram que este apresenta convergência local tipicamente quadrática. A convergência global depende das alterações ocorridas nos estatutos de contacto dos nós, que dependem do parâmetro de penalidade escolhido [Heegaard e Curnier 1993]. Neste algoritmo de tratamento simultâneo das variáveis, o parâmetro de penalidade é definido constante para um determinado problema. Testes elementares realizados por Heege [1992] indicam que o método converge para valores do parâmetro de penalidade constante, num intervalo que varia entre a tensão limite de elasticidade e o módulo de Young do material. Este amplo intervalo de valores é de facto uma desvantagem para o utilizador, uma vez que dificulta a pré-selecção de um valor adequado. Se o problema não for fortemente não-linear os valores mais baixos do parâmetro de penalidade conduzem a uma convergência mais rápida do algoritmo de Newton-Raphson [Menezes 1995].

Em resumo, foram estudadas diferentes estratégias para a avaliação do parâmetro de penalidade ideal, sobretudo aplicadas ao lagrangeano aumentado combinado com o algoritmo de Uzawa. Cada estratégia tem as suas vantagens e inconvenientes. No entanto, nenhuma permite estabelecer regras eficazes para a generalidade dos problemas.

## 6.2 Parâmetro de Penalidade Variável para cada Nó de Contacto

Com base na formulação dos multiplicadores de Lagrange é possível associar um significado físico ao coeficiente de penalidade. O operador de contacto unilateral impõe um deslocamento que assegura uma distância normal de contacto nula e, simultaneamente, avalia a força normal de contacto correspondente. No caso de contacto aderente, o operador de contacto impõe um deslocamento que assegura um deslocamento tangencial nulo e avalia a força de contacto tangencial correspondente. Para o contacto com escorregamento, o operador impõe o valor da força de contacto tangencial de modo a avaliar o deslocamento correspondente. Assim, o parâmetro de penalidade pode ser interpretado como uma rigidez local. Esta interpretação do parâmetro de penalidade permite, em alguns casos particulares (regime elástico) estimar o valor “ótimo”, em função dos termos diagonais da matriz de rigidez do problema, dado por Alart [1993] como

$$r < \frac{2}{\lambda_{\max} \left( [K^{\text{rig}}]^{-1} \right)}, \quad (6.4)$$

em que  $\lambda_{\max}$  representa o maior valor próprio da matriz e  $[K^{\text{rig}}]$  representa a matriz de rigidez do problema. A imposição da condição definida na equação (6.4) para o

parâmetro de penalidade permite forçar a convergência. Adicionalmente, a velocidade de convergência irá depender apenas moderadamente do valor de  $r$  [Alart 1993].

Com base na análise do comportamento do operador de contacto com atrito é possível desenvolver uma expressão que permite estabelecer uma estimativa para o parâmetro de penalidade ideal, para um nó potencial de contacto. Nas duas secções seguintes apresentam-se e discutem-se dois algoritmos distintos de pré-selecção automática do parâmetro de penalidade. O primeiro é baseado na força normal de contacto seguindo a aproximação de Alart [1997]. O segundo baseia-se na força e distância normais de contacto.

### 6.2.1 Algoritmo Baseado na Força Normal de Contacto

Considere-se um único nó susceptível de estabelecer contacto e admita-se que o nó representa um sólido que apresenta um comportamento material elastoplástico linear. Para descrever o seu comportamento pode utilizar-se o modelo do oscilador apresentado na Figura 6.1 (a). A lei de comportamento do material  $S(u)$  é considerada simétrica em relação à origem e negligencia qualquer efeito do tipo Bauschinger. A região elástica é caracterizada por um declive dado por  $K + k$  e a região plástica por um declive  $k$ .  $S_0$  corresponde ao limite da zona de comportamento elástico. Na Figura 6.1 (b) é possível identificar três regiões lineares para a função  $S(u)$ : (i) uma região elástica designada por  $E$ ; (ii) uma região plástica em tracção, designada por  $P+$  e (iii) uma região plástica em compressão, designada por  $P-$ .

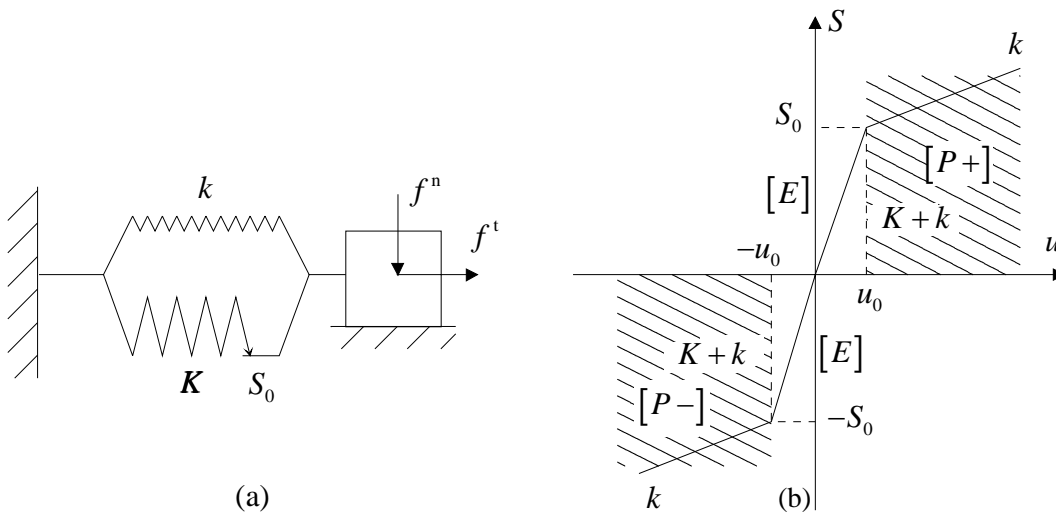


Figura 6.1 – (a) Modelo considerado para o oscilador e (b) lei de comportamento.

A solução do problema associado a este modelo pode ser determinada a partir do seguinte sistema de equações:

$$F(u, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S(u) + \lambda - f^t = 0 \\ \lambda - \text{proj}(\lambda + ru, C) = 0 \end{cases} \quad \text{com } C = f^n [-\mu, \mu]. \quad (6.5)$$

$\mu$  é o coeficiente de atrito e  $f^n$  a força normal de contacto. Uma vez que a função  $S(u)$  é apenas linear por tramos, a análise do processo de convergência não é trivial, mesmo para este modelo simples. No entanto, é possível identificar nove zonas de linearidade do funcional  $F(u, \lambda)$  no plano  $(u, f^t)$  (ver Figura 6.2). Estas nove regiões correspondem a

uma combinação entre as regiões de linearidade da lei de comportamento do material e os possíveis estatutos de contacto do nó. Na Figura 6.2, as regiões associadas ao estatuto de contacto de escorregamento são representadas por  $S$ . As regiões de estatuto de contacto aderente são representadas por  $A$ . O valor óptimo para o parâmetro de penalidade é determinado impondo que, durante o processo iterativo, o nó em contacto não altere o estatuto de contacto de escorregamento entre sucessivas direcções de escorregamento opostas (por exemplo, de  $S+$  para  $S-$  e de novo para  $S+$ ). Deve assim evitar-se a instabilidade fundamental entre as regiões  $(P+, S+)$  e  $(P-, S-)$ .

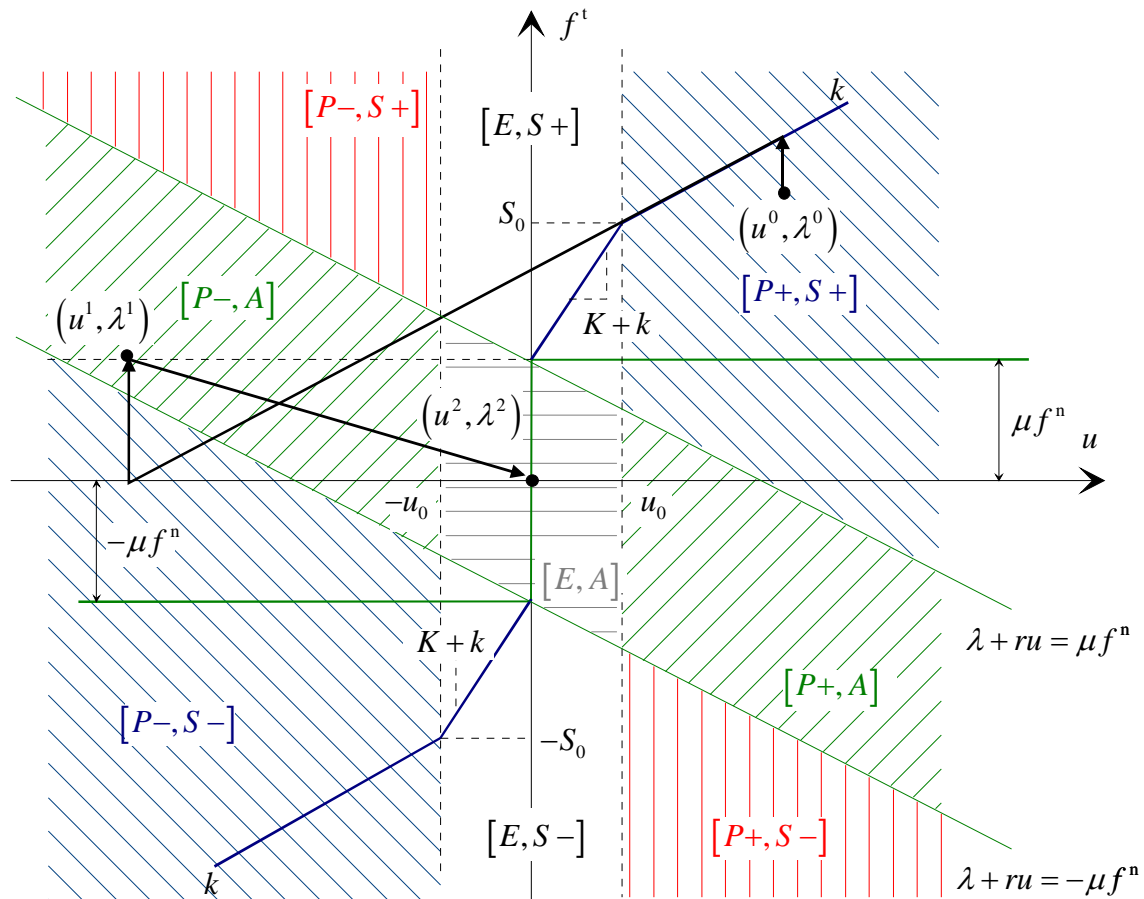


Figura 6.2 – Regiões de linearidade do funcional  $F(u, \lambda)$  e possíveis iterações de convergência.

Considere-se que a solução inicial para o processo iterativo corresponde ao ponto  $(u^0, \lambda^0)$  da Figura 6.2, localizado na região  $(P+, S+)$ . Admita-se que a solução da primeira iteração, correspondente ao ponto  $(u^1, \lambda^1)$ , se situa na região  $(P-, S-)$ . Para evitar esta solução é necessário reduzir o parâmetro de penalidade de modo a diminuir o declive da recta que define a fronteira da região correspondente ao estatuto de contacto aderente  $A$ . Para garantir que o ponto  $(u^1, \lambda^1)$  pertence à região  $(P-, A)$ , ou seja que  $\lambda^1 + ru^1 > -\mu f^n$ , é necessário que o parâmetro de penalidade obedeça à seguinte condição (Anexo C):

$$r < \frac{2k}{1 + \frac{S_0 K}{\mu f^n (K+k)}} = r_{\max} \quad (6.6)$$

O valor máximo admissível para o parâmetro de penalidade é função da força normal de contacto  $f^n$ . Para forças de contacto mais elevadas a função penaliza mais o nó.  $r_{\max}$  tende para zero quando a força normal de contacto tende também para zero. A equação (6.6) permite avaliar o parâmetro de penalidade se o nó estiver em contacto, ou seja, se apresentar força normal de contacto inferior a zero. Se o nó não está em contacto, o parâmetro de penalidade tem de tomar um valor pré-definido pelo utilizador. Este valor pode ser igual ao limite da equação (6.6) quando  $f^n$  tende para  $-\infty$ . Deste modo garante-se a penalização máxima quando o nó passa por um estatuto de contacto livre, isto é,

$$\lim_{f^n \rightarrow -\infty} \frac{2k}{1 + \frac{S_0 K}{\mu f^n (K+k)}} = 2k. \quad (6.7)$$

Na Figura 6.3 apresenta-se a evolução do valor máximo do parâmetro de penalidade  $r_{\max}$  em função da força normal de contacto, para dois valores de coeficiente de atrito distintos. A evolução do valor máximo do parâmetro de penalidade depende fortemente do coeficiente de atrito associado ao nó, sendo a estagnação da função mais lenta para menores coeficientes de atrito. A função não está definida para valores de coeficiente de atrito nulos, uma vez que, nessas circunstâncias, não faz sentido o estatuto de contacto aderente. Por isso, não é possível evitar a instabilidade fundamental através do procedimento descrito.

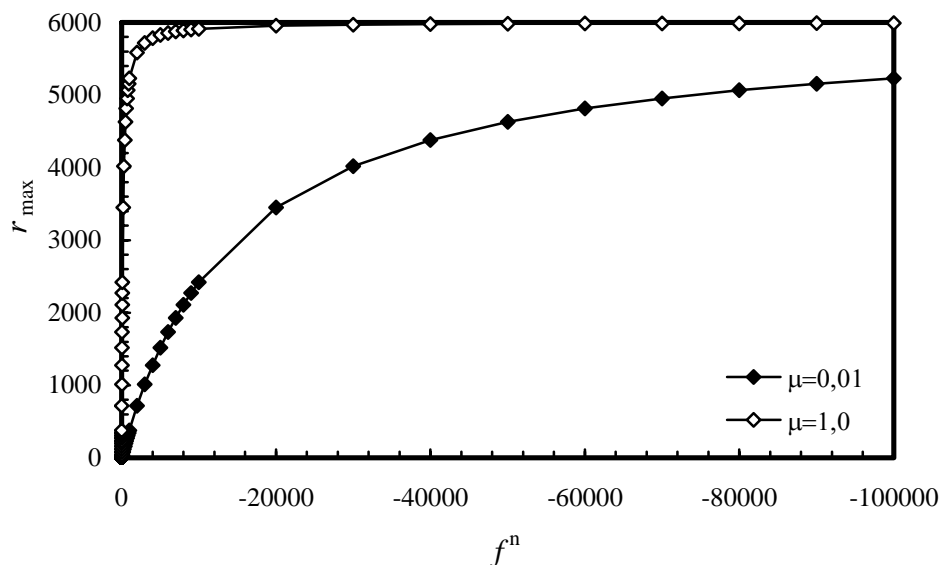


Figura 6.3 – Função de avaliação do parâmetro de penalidade máximo em função da força de contacto normal  $f^n$ , para os coeficientes de atrito  $\mu = 0,01$  e  $\mu = 1,0$ .

## 6.2.2 Algoritmo Baseado na Força e Distância Normais de Contacto

No problema de contacto com atrito,  $f^n$  e  $f^t$  correspondem às forças de contacto locais. Estas incógnitas do problema são determinadas iterativamente. Após a introdução do multiplicador aumentado, o contacto passa a ser controlado pela combinação linear da força e da distância normal de contacto. A estimativa apresentada anteriormente para o parâmetro de penalidade controla apenas a força normal de contacto. Para controlar o multiplicador aumentado, as forças  $f^n$  e  $f^t$  devem ser substituídas pelas suas



componentes  $\sigma^n$  e  $\sigma^t$ . Esta operação corresponde a modificar a equação (6.6) para (Anexo C):

$$r < \frac{2k}{1 + \frac{S_0 K}{\mu \sigma^n (K+k)}} = r_{\max}. \quad (6.8)$$

Uma vez que  $\sigma^n = \lambda^n + rd^n$ , a expressão (6.8) é uma função quadrática para a definição dos valores admissíveis do parâmetro de penalidade,

$$r^2 \left[ \frac{\mu d^n}{k} \right] + r \left[ \frac{S_0 K}{(K+k)k} + \frac{\mu \lambda^n}{k} - 2\mu d^n \right] - 2\mu \lambda^n < 0. \quad (6.9)$$

Esta função corresponde a uma parábola cuja concavidade é determinada pelo sinal da distância normal de contacto. Convém salientar dois casos particulares da função. O primeiro ocorre para distâncias normais de contacto  $d^n = 0$ . Neste caso, a equação (6.9) reduz-se a uma recta que corresponde à condição imposta para o parâmetro de penalidade da equação (6.6). Este facto parece confirmar que essa expressão é válida apenas quando o nó obedece a condição de contacto unilateral. O outro caso particular ocorre quando o nó apresenta força normal de contacto  $\lambda^n = 0$ . Neste caso, a equação (6.9) reduz-se a

$$r < \frac{-S_0 K}{\mu d^n (K+k)} + 2k. \quad (6.10)$$

Esta expressão permite avaliar o parâmetro de penalidade quando, numa iteração do processo de resolução, o nó apresenta força normal de contacto nula e penetração. Nessas circunstâncias, o algoritmo apresentado na secção anterior assume o valor pré-definido pelo utilizador. O valor previsto pela equação (6.10) para o parâmetro de penalidade aumenta drasticamente para valores de distância normal de contacto próximos de zero. Quando  $d^n$  tende para  $-\infty$ , recupera-se o valor por defeito para o parâmetro de penalidade, isto é,

$$\lim_{d^n \rightarrow -\infty} \frac{-S_0 K}{\mu d^n (K+k)} + 2k = 2k. \quad (6.11)$$

A função (6.10) perde o significado, caso o nó apresente um valor de distância normal de contacto maior que zero. Isto porque, sendo obtida admitindo que a força normal de contacto é nula, o multiplicador aumentado  $\sigma^n = \lambda^n + rd^n$  é maior que zero e o nó apresenta estatuto de contacto livre.

A equação geral definida na expressão (6.9), para a condição a impor ao parâmetro de penalidade, pode ser reescrita como

$$f(r) = ar^2 + br - c < 0. \quad (6.12)$$

com

$$a = \frac{\mu d^n}{k}, \quad b = \frac{S_0 K}{(K+k)k} + \frac{\mu \lambda^n}{k} - 2\mu d^n \quad \text{e} \quad c = -2\mu \lambda^n. \quad (6.13)$$

A equação quadrática  $f(r) = 0$  tem sempre duas soluções, definidas por

$$r^+ = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad r^- = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (6.14)$$

Na Figura 6.4 exemplifica-se a função quadrática obtida com a equação (6.9), admitindo que a distância normal de contacto é negativa. Nestas circunstâncias, a função quadrática do parâmetro de penalidade apresenta concavidade para baixo. É necessário avaliar a função para valores positivos e negativos de força normal de contacto, uma vez que em função do parâmetro de penalidade o nó estará ou não em contacto. Ao impor a condição (6.9), isto é,  $f(r) < 0$ , é possível obter dois valores para o parâmetro de penalidade ( $r^+, r^-$ ) ambos positivos, como é exemplificado na Figura 6.4 para  $f^n = -1000$  e  $\mu = 1,0$ . Considere-se o menor dos valores obtidos para o parâmetro de penalidade por  $r_<$  e o maior por  $r_>$ . O intervalo  $[r_<, r_>]$  corresponde aos valores que não devem ser atribuídos ao parâmetro de penalidade, uma vez que resultam em valores positivos da função  $f(r)$ . Neste caso os valores admissíveis para o parâmetro de penalidade pertencem ao intervalo  $]0, r_<[ \cup [r_>, +\infty[$ . Nos restantes casos, como apenas o maior dos valores obtidos para o parâmetro de penalidade é positivo, os valores admissíveis para o parâmetro de penalidade pertencem ao intervalo  $[r_>, +\infty[$ . Na Figura 6.4 evidencia-se novamente a forte influência do coeficiente de atrito na definição do parâmetro de penalidade admissível.

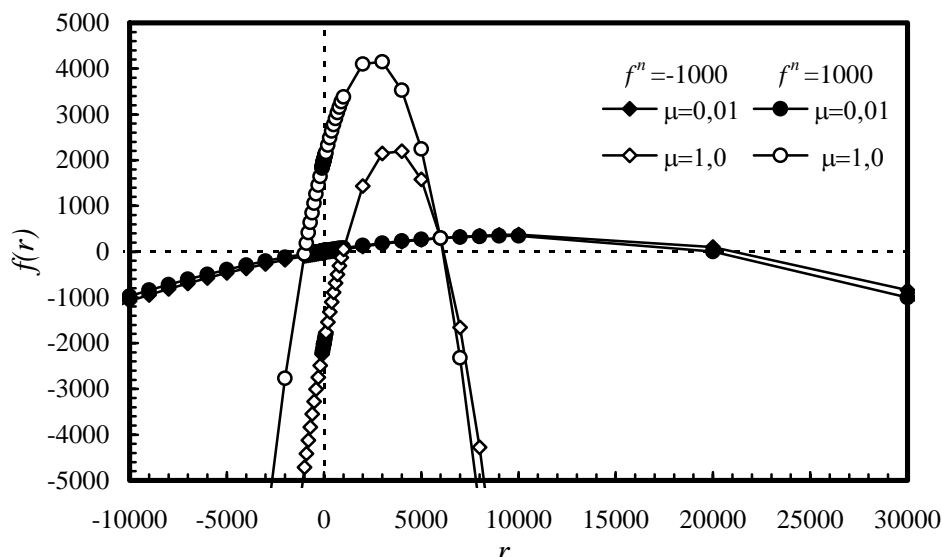


Figura 6.4 – Função quadrática obtida para o parâmetro de penalidade, admitindo uma distância normal de contacto  $d^n = -1$ .

Para valores de distância e força normais de contacto positivas, o estatuto de contacto do nó é livre, independentemente do valor do parâmetro de penalidade. Se a distância normal de contacto for positiva, a função quadrática do parâmetro de penalidade apresenta concavidade para cima (ver Figura 6.5). Mais uma vez é possível constatar a forte influência do coeficiente de atrito na avaliação do parâmetro de penalidade admissível. Para os exemplos apresentados na Figura 6.5, obtém-se apenas uma solução para o parâmetro de penalidade positivo que obedece à condição  $f(r) < 0$ . Nestas circunstâncias, esta solução corresponde ao valor máximo a atribuir ao parâmetro de penalidade de modo a garantir a condição imposta. Para outras combinações de distância e força normais de contacto é possível obter dois valores para o parâmetro de penalidade ( $r^+, r^-$ ) ambos positivos, impondo a condição  $f(r) < 0$ . Nestas circunstâncias, adoptando a designação de  $r_<$  para o menor dos valores obtidos para o parâmetro de

penalidade e de  $r_>$  para o maior, o intervalo de valores admissíveis para o parâmetro de penalidade é  $[r_<, r_>]$ .

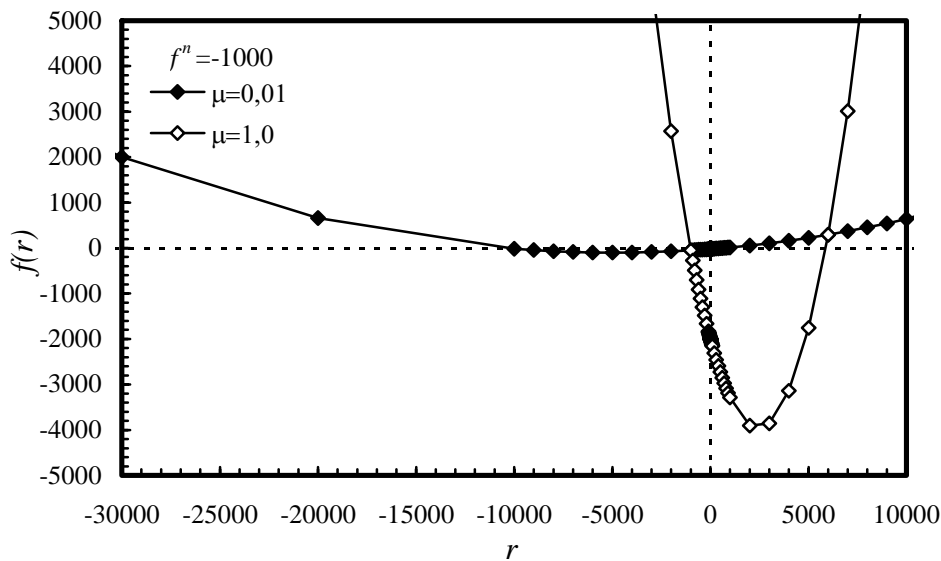


Figura 6.5 – Função quadrática obtida para o parâmetro de penalidade, admitindo uma distância normal de contacto  $d^n = 1$ .

O coeficiente de penalidade a atribuir ao nó em contacto deve ser sempre o valor mínimo admissível. No algoritmo implementado limita-se o valor do parâmetro de penalidade máximo ao módulo de elasticidade do corpo deformável.

### 6.3 Parâmetro de Penalidade Distinto para as Condições de Contacto Unilateral de Contacto e com Atrito

A formulação proposta por Alart e Curnier [1991] para o método do lagrangeano aumentado contempla a hipótese de utilizar parâmetros de penalidade distintos [Talon e Curnier 2003, Feng *et al.* 2003]. Tal pode prevenir alguns problemas de instabilidade como os que surgem, por exemplo, na modelação numérica de rótulas. Neste caso, é possível forçar a convergência actuando separadamente sobre dois parâmetros de penalidade. No caso específico da lei de contacto e atrito utilizada na modelação de rótulas, esse controlo pode ser conseguido diminuindo o parâmetro que actua na condição de impenetrabilidade e aumentando o que controla o contacto com atrito [Ach *et al.* 1999]. O recurso a parâmetros de penalidade distintos para o controlo do contacto unilateral e para o contacto com atrito envolve a redefinição do *quasi-lagrangeano* aumentado, apresentado na equação (5.35), de tal forma que

$$\begin{aligned}
 L_r(\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}) = & \Phi(\mathbf{v}) + (d^n(\mathbf{v}), \gamma^n) + (\boldsymbol{\delta}^t(\mathbf{v}), \boldsymbol{\gamma}^t) \\
 & + \frac{r^n}{2} \|d^n(\mathbf{v})\|^2 - \frac{1}{2r^n} \text{dist}^2[\gamma^n + r^n d^n(\mathbf{v}), \mathbb{R}^-] \\
 & + \frac{r^t}{2} \|\boldsymbol{\delta}^t(\mathbf{v})\|^2 - \frac{1}{2r^t} \text{dist}^2[\boldsymbol{\gamma}^t + r^t \boldsymbol{\delta}^t(\mathbf{v}), C^{\text{aum}}],
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

em que  $r^n$  e  $r^t$  designam o parâmetro de penalidade para o contacto unilateral e para o contacto com atrito, respectivamente. Esta alteração não afecta directamente a definição dos sub-operadores de contacto com atrito que podem escrever-se como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} \mathbf{F}^{\text{equi}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \text{proj}_{\mathbb{R}^-} [\boldsymbol{\sigma}^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})] \mathbf{n}(\mathbf{u}) + \text{proj}_{C^{\text{aum}}} [\boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})] \\ \mathbf{F}^{\text{sup}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = -\frac{1}{r} \left\{ \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) - \text{proj}_{\mathbb{R}^-} [\boldsymbol{\sigma}^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})] \mathbf{n}(\mathbf{u}) - \text{proj}_{C^{\text{aum}}} [\boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})] \right\} \end{cases}, \quad (6.16)$$

com

$$\boldsymbol{\sigma}^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^n + r^n d^n, \quad \boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^t + r^t \boldsymbol{\delta}^t \quad (6.17)$$

e

$$C^{\text{aum}}(\boldsymbol{\lambda}^n + r^n d^n) = \text{proj}_{\mathbb{R}^-}(\boldsymbol{\lambda}^n + r^n d^n). \quad (6.18)$$

No entanto, a introdução de parâmetros de penalidade distintos obriga a alguns cuidados na definição dos operadores de contacto para cada estatuto, uma vez que algumas das simplificações utilizadas anteriormente deixam de ser possíveis (Anexo D). Assim, para o estatuto de contacto *gap*

$$\mathbf{F}^{\parallel}_{\text{gap}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\frac{1}{r^n} \boldsymbol{\lambda}^n \mathbf{n} - \frac{1}{r^t} \boldsymbol{\lambda}^t \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

Para o estatuto de contacto *stick* a definição é a mesma da equação (5.45). No entanto, caso se opte por recorrer à simplificação ( $d^n = \boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{n}$ ) o operador é definido por

$$\mathbf{F}^{\parallel}_{\text{stick}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) + r^n (\boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u})) \mathbf{n}(\mathbf{u}) + r^t \boldsymbol{\delta}^t(\mathbf{u}) \\ \boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}) \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

O operador associado ao estatuto de contacto *slip* define-se como

$$\mathbf{F}^{\parallel}_{\text{slip}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) [\mathbf{n}(\mathbf{u}) - \mu \mathbf{t}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})] \\ d^n \mathbf{n}(\mathbf{u}) - \frac{1}{r^t} [\boldsymbol{\lambda}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) + \mu \boldsymbol{\sigma}^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \mathbf{t}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})] \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

Estas alterações no operador de contacto com atrito conduzem a modificações nas matrizes tangentes associadas a cada estatuto de contacto. Para o estatuto de contacto *gap* a matriz jacobiana passa a ser definida por

$$\mathcal{J}^{\text{gap}} = \begin{bmatrix} 0_{ij} & 0_{ij} \\ D_{ik} \nabla_{u_j} n_k & F_{ij} \end{bmatrix}, \quad (6.22)$$

com

$$D_{ik} = \left( \frac{r^n - r^t}{r^n r^t} \right) (\lambda_p n_p I_{ik} + \lambda_k n_i) \quad \text{e} \quad F_{ij} = \left( \frac{r^n - r^t}{r^n r^t} \right) n_i n_j - \frac{1}{r^t} I_{ij}. \quad (6.23)$$

Para o estatuto de contacto *stick* a matriz jacobiana é definida por

$$\mathcal{J}^{\text{stick}} = \begin{bmatrix} \left( P_{ij} + C_{ik} \nabla_{u_j} n_k \right) & I_{ij} \\ \left( P_{ij}^* + C_{ik}^* \nabla_{u_j} n_k \right) & 0_{ij} \end{bmatrix}, \quad (6.24)$$

com

$$P_{ij} = \left[ r^t (I_{ij} - n_i n_j) + r^n n_i \nabla_{u_j} d^n \right], \quad C_{ik} = \left[ (r^n d^n - r^t \delta_p n_p) I_{ik} - r^t \delta_k n_i \right], \quad (6.25)$$

$$P_{ij}^* = \left( I_{ij} - n_i n_j + n_i \nabla_{u_j} d^n \right) \quad \text{e} \quad C_{ik}^* = \left[ (d^n - \delta_p n_p) I_{ik} - \delta_k n_i \right]. \quad (6.26)$$

Ou, recorrendo à simplificação ( $d^n = \delta \cdot \mathbf{n}$ ) obtém-se

$$\mathcal{J}^{stick} = \begin{bmatrix} (P_{ij} + C_{ik} \nabla_{u_j} n_k) & I_{ij} \\ I_{ij} & 0_{ij} \end{bmatrix}, \quad (6.27)$$

com

$$P_{ij} = \left[ r^t I_{ij} + (r^n - r^t) n_i n_j \right] \quad \text{e} \quad C_{ik} = \left[ (r^n - r^t) (\delta_p n_p I_{ik} + \delta_k n_i) \right]. \quad (6.28)$$

Finalmente, para o estatuto de contacto *slip* tem-se que:

$$\mathcal{J}^{slip} = \begin{bmatrix} (M_{ij} + N_{ik} \nabla_{u_j} n_k) & E_{ij} \\ (M_{ij}^* + N_{ik}^* \nabla_{u_j} n_k) & \frac{1}{r^t} (E_{ij} - I_{ij}) \end{bmatrix}, \quad (6.29)$$

em que

$$M_{ij} = r^n (n_i - \mu t_i) \nabla_{u_j} d^n - \frac{\mu \sigma^n r^t}{\|\sigma_j^t\|} (I_{ij} - n_i n_j - t_i t_j), \quad (6.30)$$

$$N_{ik} = \sigma^n I_{ik} + \lambda_k (n_i - \mu t_i) + \frac{\mu \sigma^n r^t}{\|\sigma_j^t\|} \left[ (\lambda_k + r^t \delta_k) n_i - (\lambda_p + r^t \delta_p) n_p (t_i t_k - I_{ik}) \right], \quad (6.31)$$

$$M_{ij}^* = \left( n_i - \mu \frac{r^n}{r^t} t_i \right) \nabla_{u_j} d^n - \frac{\mu \sigma^n}{\|\sigma_j^t\|} (I_{ij} - n_i n_j - t_i t_j), \quad (6.32)$$

$$N_{ik}^* = \left( \frac{\lambda_p n_p}{r^t} + d^n \right) I_{ik} + \frac{1}{r^t} \left[ \lambda_k [n_i - \mu t_i] + \frac{\mu \sigma^n}{\|\sigma_j^t\|} \left[ (\lambda_k + r^t \delta_k) n_i - (\lambda_p + r^t \delta_p) n_p (t_i t_k - I_{ik}) \right] \right]. \quad (6.33)$$

A matriz  $\mathbf{E}$ , que agrupa os termos associados ao gradiente do operador de contacto em relação a  $\lambda$ , é igual à obtida para parâmetros de penalidade idênticos, definido na equação (5.60). No Anexo D apresentam-se as expressões para o sistema de equações lineares global e reduzido, para coeficientes de penalidade distintos. Note-se que, quando  $r^n = r^t$  todas as expressões deduzidas nesta secção se simplificam para as apresentadas no Capítulo 5.

## 6.4 Testes Elementares: Ensaio de Compressão

Os algoritmos de avaliação do parâmetro de penalidade para cada nó de contacto e o algoritmo de parâmetros de penalidade distintos foram implementados no programa DD3IMP. Para avaliar os respectivos comportamentos estudou-se a compressão de um

cubo de 0,5 mm de aresta, em que todos os deslocamentos no plano  $z = 0$  são bloqueados. A ferramenta rígida impõe um deslocamento de 0,15 mm na direcção  $Oz$ , num único incremento. Para introduzir a influência da curvatura da ferramenta no algoritmo de contacto testam-se três ferramentas distintas: (i) plana; (ii) esférica com um raio de 5,0 mm e (iii) esférica com um raio de 1,0 mm. O coeficiente de atrito considerado é  $\mu = 0,15$ . Na Figura 6.6 apresenta-se a geometria do problema.

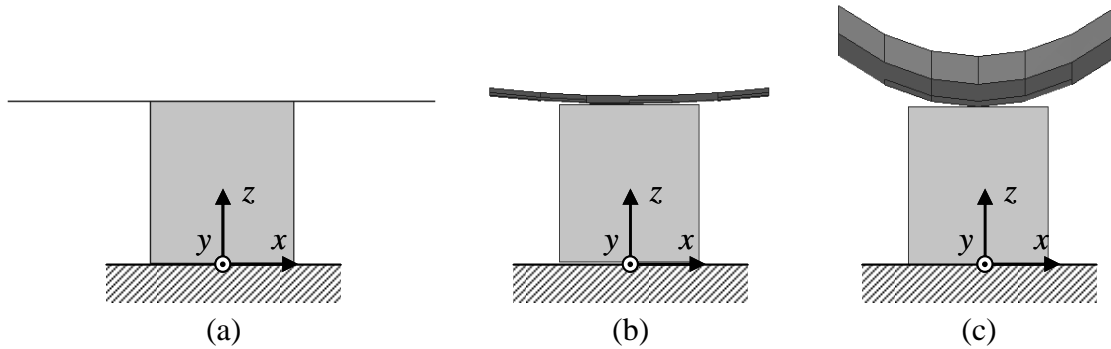


Figura 6.6 – Geometria das ferramentas utilizadas na compressão de um cubo: (a) ferramenta plana; (b) ferramenta esférica de raio 5,0 mm e (c) ferramenta esférica de raio 1,0 mm.

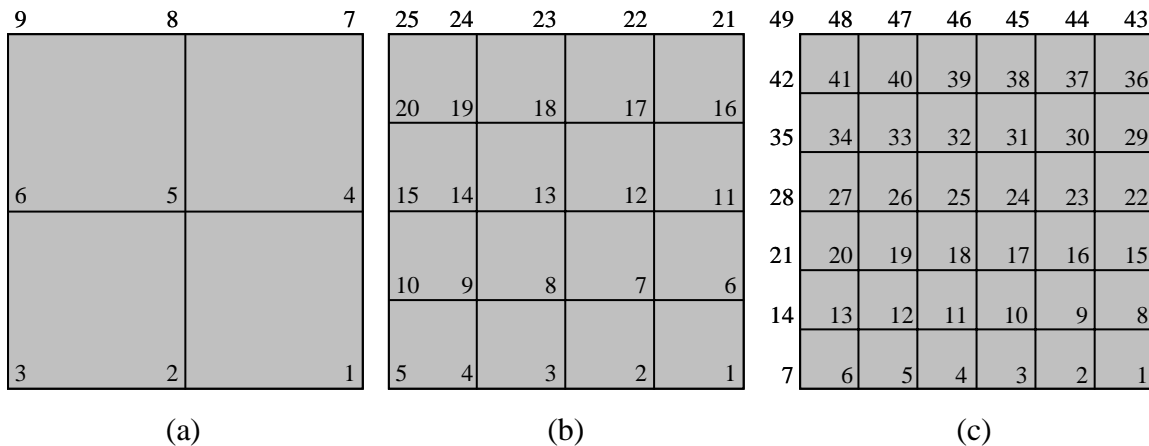


Figura 6.7 – Malhas de elementos finitos utilizadas na compressão de um cubo. Representação no plano  $z = 0,5$  mm: (a)  $2 \times 2 \times 2$  elementos; (b)  $4 \times 4 \times 4$  elementos e (c)  $6 \times 6 \times 6$  elementos.

O cubo é discretizado com elementos finitos sólidos hexaédricos com integração reduzida selectiva. Cada uma das ferramentas é testada para três malhas de elementos finitos distintas: (i) com  $2 \times 2 \times 2$  elementos; (ii) com  $4 \times 4 \times 4$  elementos e (iii) com  $6 \times 6 \times 6$  elementos. Na Figura 6.7 apresentam-se as três malhas de elementos finitos. A numeração apresentada na figura identifica os nós potenciais de contacto com a ferramenta.

Considera-se que o material do corpo deformável é isotrópico e admite-se uma lei de encruamento isotrópico linear do tipo Swift definida por  $Y_{\text{swift}} = 3000,0(\bar{\epsilon}^p + 0,05)^{1,0}$ . O módulo de Young é  $E = 200,0$  GPa e o coeficiente de Poisson 0,3. De acordo com o modelo considerado,  $k = 3000,0$  MPa e  $K + k = 200,0$  GPa (ver Figura 6.1). De acordo com as equações (6.7) e (6.11), o valor por defeito do parâmetro de penalidade é  $2k = 6000,0$ .

Realizaram-se simulações para todas as combinações possíveis entre as geometrias da ferramenta descritas na Figura 6.6 e as discretizações apresentadas na Figura 6.7,

recorrendo aos diferentes algoritmos de cálculo do parâmetro de penalidade. O conjunto de valores de teste para o parâmetro de penalidade compreende os seguintes: 6,0; 60,0; 600,0; 6000,0; 60000,0 e 200000,0. Estes valores são designados por  $r^{\text{defeito}}$ , uma vez que para os algoritmos de parâmetro de penalidade variável correspondem ao valor a atribuir por defeito aos nós livres. Para cada um dos valores  $r^{\text{defeito}}$  foram realizadas simulações considerando o parâmetro de penalidade constante, designadas por  $r$  constante. Para parâmetros de penalidade distintos realizaram-se simulações com  $r^n$  constante igual a 6000,0 e  $r^t$  a tomar os vários valores de  $r^{\text{defeito}}$  e *vice-versa*. Estas simulações são designadas por *Distintos:  $r^n = 6000,0$*  e *Distintos:  $r^t = 6000,0$* , respectivamente. Para as simulações com o parâmetro de penalidade variável, consideram-se as expressões (6.6) e (6.9) e o valor pré-definido para o coeficiente de penalidade dos nós livres é  $r^{\text{defeito}}$ . As simulações realizadas com base na expressão (6.6) são designadas por  $r$  Força normal de contacto. As que recorrem à expressão (6.9) designam-se por  $r$  Força e distância normais de contacto. Todas as simulações foram realizadas admitindo que a solução de equilíbrio do algoritmo de Newton-Raphson é atingida para um critério de convergência  $C^{\text{Crit}} = 1 \times 10^{-9}$  (equação (5.86)).

Os resultados obtidos nas simulações realizadas com a ferramenta plana são apresentados na Figura 6.8. Mostra-se a evolução do critério de convergência com o número de iterações, em função da discretização seleccionada e do valor pré-definido do parâmetro de penalidade. Constata-se que, para parâmetros de penalidade iguais nas componentes do multiplicador aumentado, qualquer que seja o valor e a evolução do parâmetro de penalidade, a solução é obtida num número idêntico de iterações (Figura 6.8 (a), (b) e (c)). De facto, após a primeira iteração de equilíbrio, todos os nós susceptíveis de estabelecer contacto com a ferramenta apresentam o estatuto de contacto correcto e a distância normal de contacto é nula. As iterações subsequentes são dispendidas na correcção da força normal de contacto e na correcção da direcção de deslizamento para os nós *slip*. Uma vez que a distância normal de contacto é zero, o algoritmo de actualização do parâmetro de penalidade baseado na componente normal do multiplicador aumentado reduz-se ao baseado na força normal de contacto. A semelhança nos resultados é, conforme discutido, esperada, uma vez que o parâmetro de penalidade automático evolui do mesmo modo para os dois algoritmos.

As simulações realizadas com parâmetros de penalidade distintos para as componentes do multiplicador aumentado apresentam claros problemas de convergência (Figura 6.8 (d) e (e)). Também nestas simulações, após a primeira iteração, os estatutos de contacto são os correctos. No entanto, nas iterações subsequentes as correcções à força de contacto e ao vector de deslizamento conduzem a instabilidades nos estatutos de contacto. Em particular, o nó central apresenta estatuto de contacto *slip* em algumas iterações. Este estatuto incorrecto tem implicações no comportamento dos nós adjacentes.

As instabilidades associadas ao recurso a parâmetros de penalidade diferentes surgem dos termos suplementares da matriz de rigidez elementar. Estes termos surgem associados ao valor de  $(r^n - r^t)$  e contribuem para atribuir uma penalização maior à estimativa incorrecta do vector de deslizamento e à força de contacto. Mesmo para este caso simples de contacto plano, caracterizado por uma correcta avaliação do sistema local de contacto logo na primeira iteração, o sucesso da simulação depende fortemente da combinação de valores escolhidos para o parâmetro de penalidade. Como seria de prever, para valores iguais de  $r^n$  e  $r^t$  a velocidade de convergência é idêntica à obtida nas simulações realizadas com  $r$  constante.

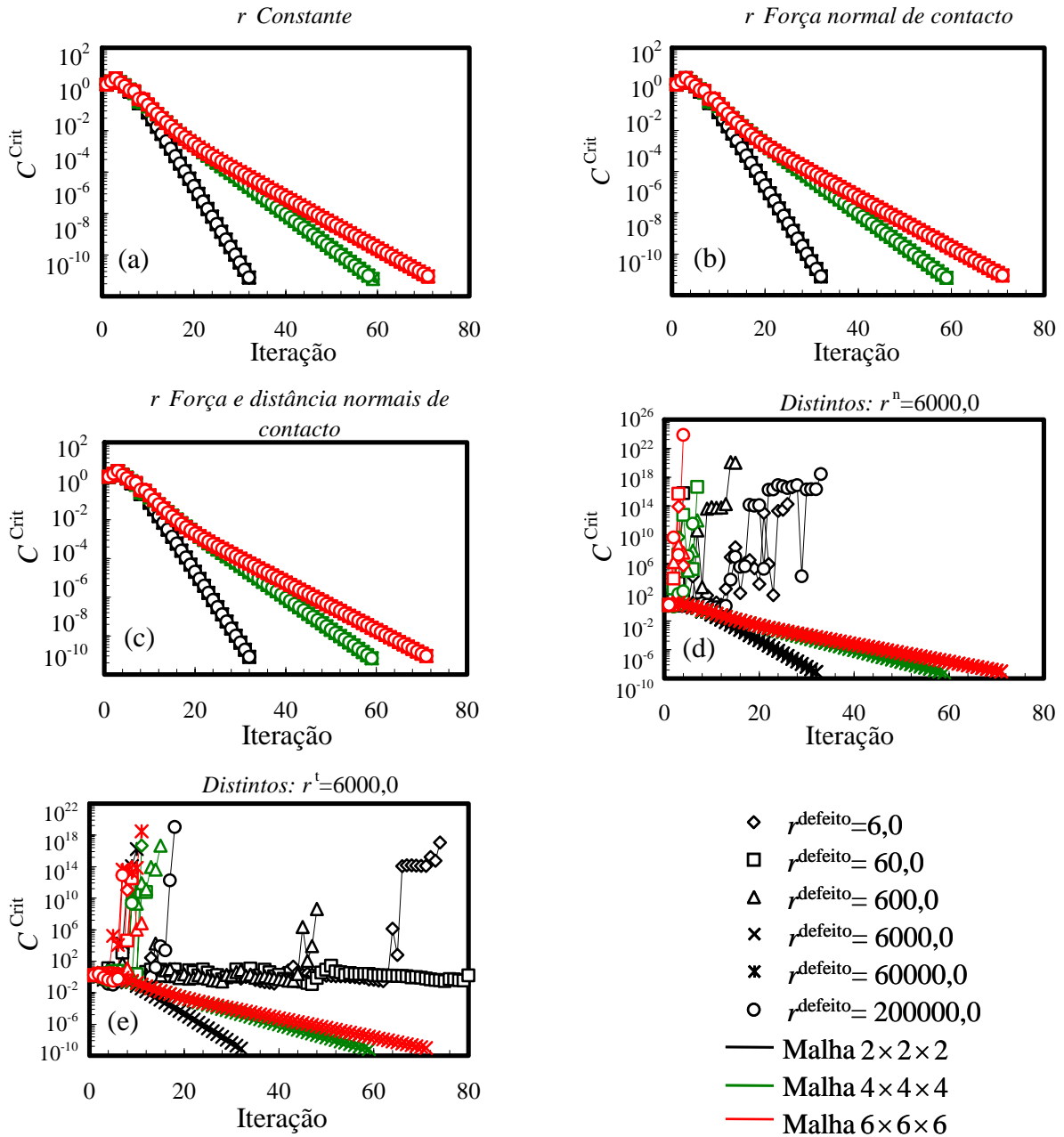


Figura 6.8 – Velocidade de convergência dos algoritmos de cálculo do parâmetro de penalidade (simulação numérica do ensaio de compressão de um cubo com a ferramenta plana). (a) *r Constante*; (b) *r Força normal de contacto*; (c) *r Força e distância normais de contacto*; (d) Parâmetros de penalidade distintos,  $r^n = 6000,0$  e (e) Parâmetros de penalidade distintos,  $r^t = 6000,0$ .

A alteração de um dos parâmetros de penalidade aumenta fortemente as hipóteses de divergência e altera a velocidade de convergência. Para outras combinações entre os dois parâmetros de penalidade tanto ocorrem fortes reduções como ligeiros aumentos da velocidade de convergência. No entanto, o aumento da probabilidade de divergência contribui para a eliminação desta solução. O único ciclo iterativo para a resolução das não-linearidades associadas ao problema de contacto com atrito, característico do algoritmo de Newton-Raphson utilizado, parece reduzir a hipótese de controlar eficazmente a relação entre os dois valores do parâmetro de penalidade, ao contrário do



que se passa com o algoritmo de Uzawa. Consequentemente, este algoritmo é abandonado nos estudos subsequentes.

A Figura 6.8 permite constatar que a velocidade de convergência não é quadrática. Este facto resulta da dimensão do deslocamento imposto num único incremento. Efectivamente, a convergência quadrática do método de Newton-Raphson é recuperada para incrementos mais reduzidos.

A Figura 6.9 sumaria os resultados obtidos nas simulações realizadas com a ferramenta de raio 5,0 mm. Para o algoritmo que considera o parâmetro de penalidade constante ocorrem problemas de convergência associados a alguns dos valores pré-definidos, qualquer que seja a discretização seleccionada. Em contrapartida, as simulações realizadas com o parâmetro de penalidade variável convergem todas no mesmo número de iterações.

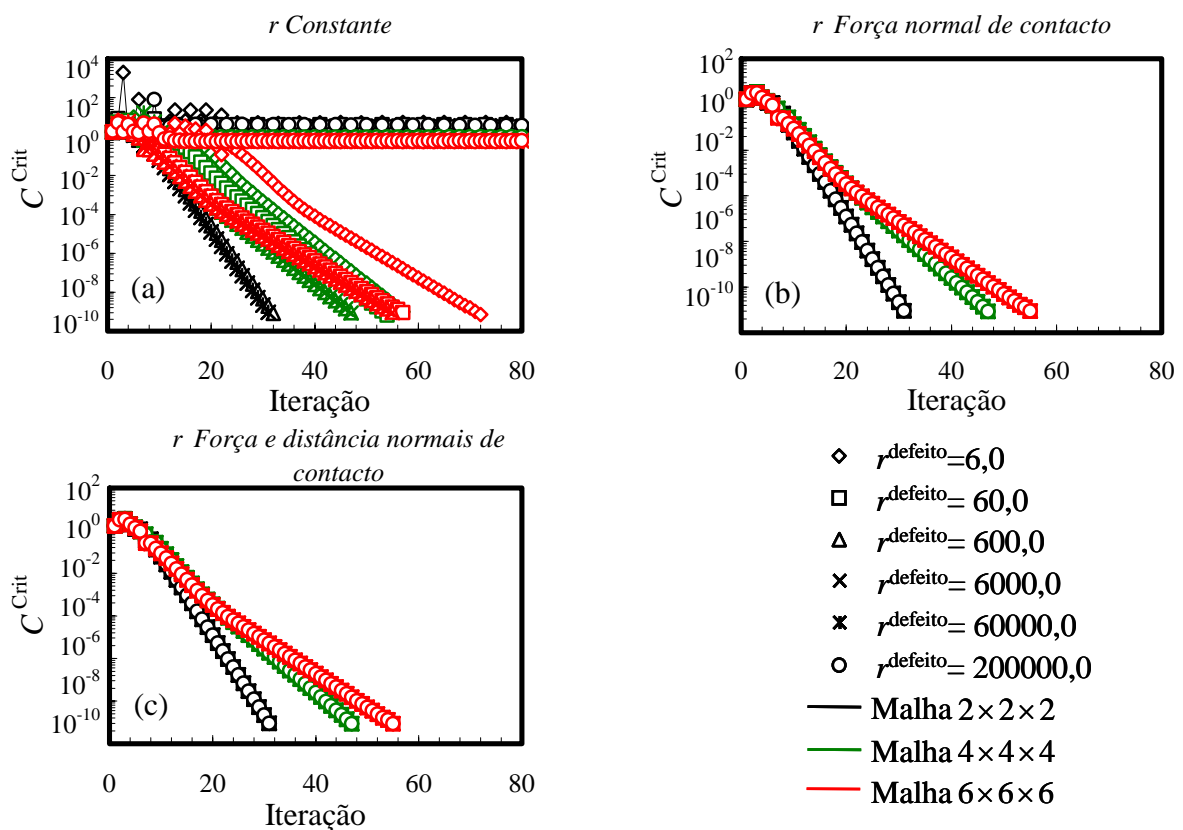


Figura 6.9 – Velocidade de convergência dos algoritmos de cálculo do parâmetro de penalidade (simulação numérica do ensaio de compressão de um cubo com a ferramenta de raio 5,0 mm). (a)  $r$  Constante; (b)  $r$  Força normal de contacto e (c)  $r$  Força e distância normais de contacto.

Para comparar as diferenças de convergência, analisa-se a evolução de algumas variáveis de contacto para todos os nós susceptíveis de estabelecer contacto. Para a discretização  $2 \times 2 \times 2$  existem três valores de parâmetro de penalidade constante para o qual ocorrem problemas de convergência. Ao longo do processo iterativo para  $r^{defeito} = 6,0$  o estatuto de contacto do nó central e dos nós dos planos médios oscila (nós 5, 2, 4, 6 e 8 na Figura 6.7 (a)). Devido à simetria geométrica e material do problema, é razoável afirmar que o nó central (nó 5) deve apresentar sempre um estatuto de contacto *stick*, e nunca deve escorregar (estatuto de contacto *slip*). No entanto, nesta simulação o nó central oscila entre o estatuto de contacto *stick* e *slip*. Este movimento surge associado

à oscilação dos nós dos planos médios entre os estatutos de contacto *gap*, *stick* e *slip* e impede a estabilização dos estatutos de contacto. Para a simulação com  $r^{\text{defeito}} = 60,0$ , as oscilações nos estatutos de contacto ocorrem para o nó central e para os nós dos cantos (nós 5, 1, 3, 7 e 9 na Figura 6.7 (a)). Porém, o tipo de alteração é idêntico. A sucessiva alteração do estatuto de contacto conduz à vibração do nó em torno da sua posição correcta. Finalmente, para  $r^{\text{defeito}} = 200000,0$ , apenas o nó central oscila entre os estatutos de contacto *gap* e *stick*. No entanto, esta oscilação é suficiente para impedir a estabilização da força de contacto e da direcção de deslizamento dos nós adjacentes. O mesmo problema ocorre nas outras simulações (com diferentes discretizações), que apresentam problemas de convergência para valores constantes do parâmetro de penalidade. A oscilação do nó central entre o estatuto *gap* e *stick* induz uma vibração do nó de tal modo que, sempre que este perde contacto, apresenta penetração ( $d^n < 0$ ). Tal permite-lhe estabelecer novamente contacto na iteração seguinte. No entanto, quando o nó está em contacto, apresenta sempre um valor de distância normal ligeiramente positivo o que, combinado com um valor de parâmetro de penalidade muito elevado resulta neste tipo de oscilações.

As simulações realizadas com parâmetro de penalidade constante e que convergem apresentam também sensibilidade da velocidade de convergência ao parâmetro de penalidade. Tal ocorre para a malha  $4 \times 4 \times 4$ , nas simulações realizadas com os dois parâmetros de penalidade mais baixos, e para a malha  $6 \times 6 \times 6$ , na simulação com  $r^{\text{defeito}} = 6,0$ . Esta alteração à velocidade de convergência está associada também aos estatutos de contacto. De facto, nestas simulações constata-se que as iterações iniciais atribuem aos nós dos planos médios um estatuto de contacto *stick*, que conduz a uma maior correcção nas iterações subsequentes dos vectores de incremento de deslocamento e de força de contacto, atrasando a convergência do ciclo iterativo.

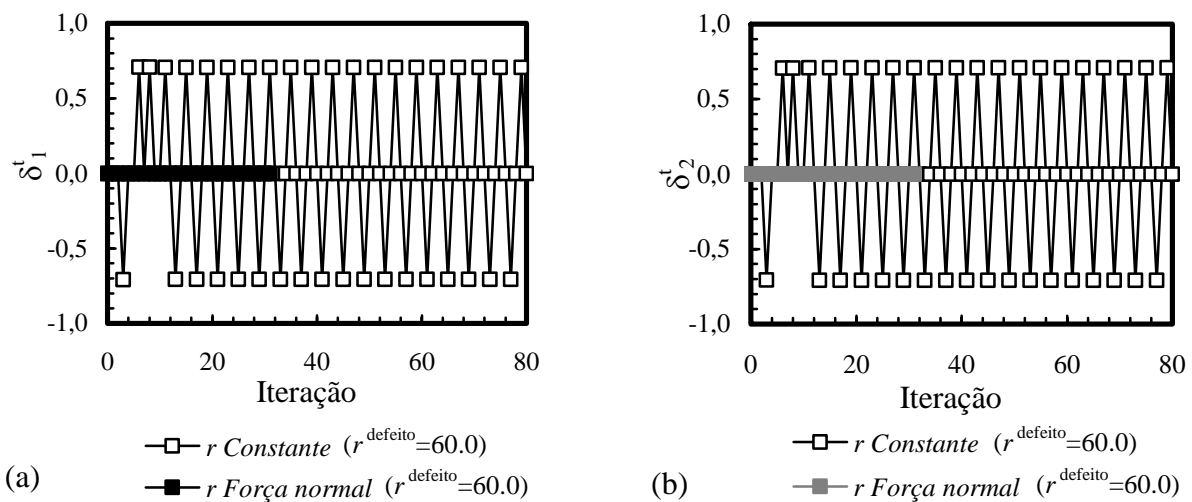


Figura 6.10 – Direcção do vector de escorregamento para o nó central em função do algoritmo utilizado no cálculo do parâmetro de penalidade (malha  $2 \times 2 \times 2$ ): (a) componente na direcção horizontal e (b) componente na direcção vertical.

A utilização do parâmetro de penalidade variável permite evitar estas oscilações e previne eficazmente os problemas de convergência observados. Na Figura 6.10 apresenta-se, a título de exemplo, a evolução da direcção de escorregamento para o nó central (nó 5) da malha  $2 \times 2 \times 2$ . Na simulação realizada com  $r^{\text{defeito}} = 60,0$  constante o

nó central oscila numa direcção a  $45^\circ$  com  $Ox$ . As mesmas simulações, quando realizadas com o parâmetro de penalidade variável não apresentam qualquer oscilação. Na Figura 6.11 apresenta-se a evolução da força normal de contacto para os nós 5 e 2 da malha  $2 \times 2 \times 2$ . É possível confirmar a oscilação da força normal de contacto para o nó 5, bem como as oscilações induzidas no nó 2. O pico correspondente à iteração 9 corresponde a uma iteração em que os nós 4 e 6 são libertados o que resulta no aumento de força de contacto para os nós efectivamente em contacto.

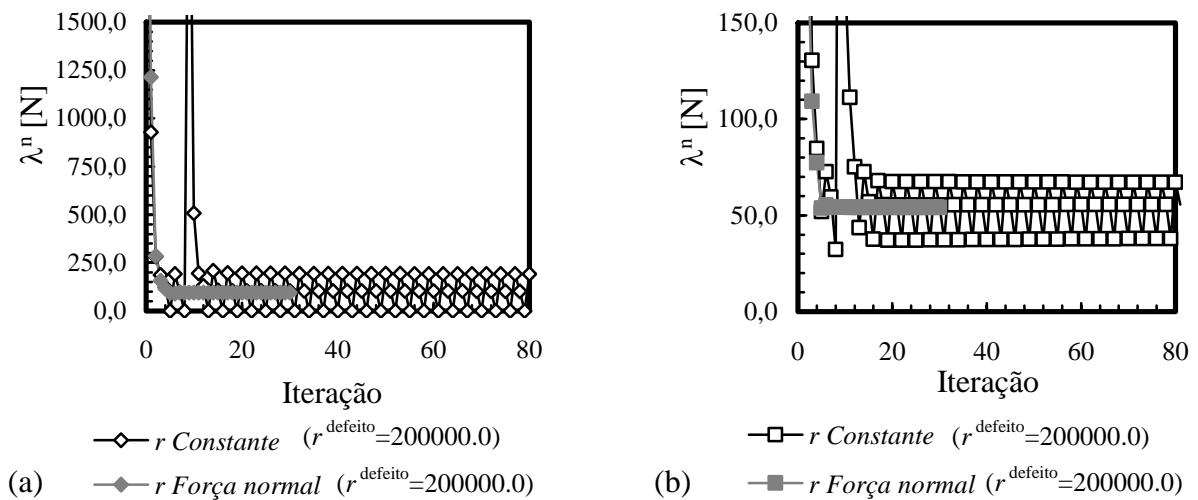


Figura 6.11 – Força normal de contacto em função do algoritmo utilizado no cálculo do parâmetro de penalidade (malha  $2 \times 2 \times 2$ ): (a) nó central e (b) nó 2.

Na Figura 6.12 resumem-se os resultados obtidos para as simulações realizadas com a ferramenta de raio 1,0 mm. Para esta ferramenta de forte curvatura existem problemas de convergência para todos os algoritmos testados. No entanto, no caso dos algoritmos com parâmetro de penalidade variável, os problemas de divergência não estão associados a oscilações em torno da posição de equilíbrio, mas com configurações completamente erradas. Estas são consequência de estatutos de contacto *gap* atribuídos a um ou mais nós potenciais de contacto. Se o nó apresenta estatuto de contacto *gap*, a força normal de contacto é nula, pelo que o algoritmo de actualização do parâmetro de penalidade, baseado apenas nesta variável, não prevê nenhum novo valor e atribui o valor pré-definido. No entanto, se um nó apresenta uma distância normal de contacto não-nula, o algoritmo baseado na força e distância normais de contacto procura forçar o nó a estabelecer contacto, conduzindo, por isso a um melhor comportamento.

Na Figura 6.13 apresenta-se a evolução do estatuto de contacto dos nós susceptíveis de estabelecer contacto, para a simulação realizada com a malha  $4 \times 4 \times 4$  e com os dois algoritmos de actualização do parâmetro de penalidade ( $r^{\text{defeito}} = 60000.0$ ). A primeira configuração obtida é idêntica, uma vez que é obtida para o mesmo parâmetro de penalidade por defeito. No entanto, é possível confirmar que, desde o início do processo iterativo, a distribuição do parâmetro de penalidade é diferente, induzindo diferentes configurações. Na iteração 15 o algoritmo baseado apenas na força normal de contacto atinge uma configuração com um nó livre num dos cantos. Em iterações subsequentes este nó nunca mais entra em contacto, o que conduz à divergência. Na mesma iteração 15 o algoritmo baseado na força e distância normais de contacto apresenta estatutos de

contacto correctos em todos os nós, o que conduz à convergência do método iterativo de Newton-Raphson.

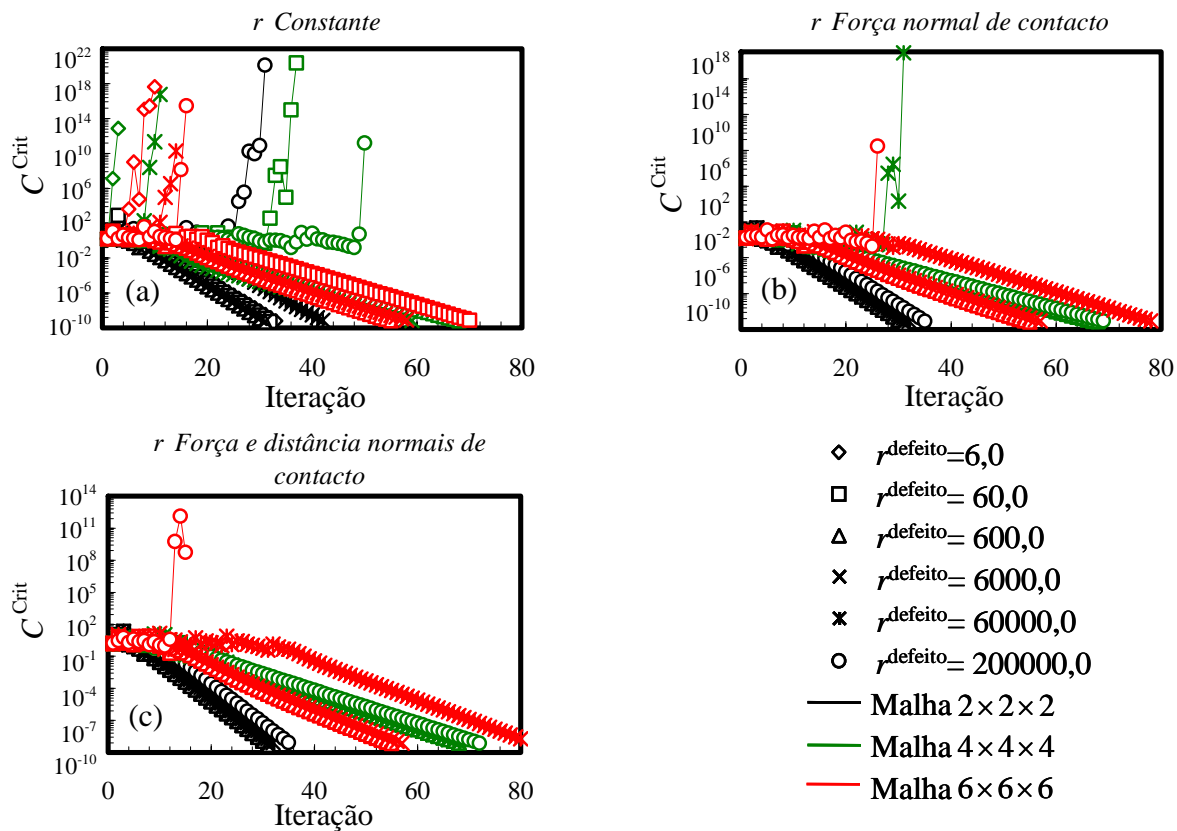


Figura 6.12 – Velocidade de convergência dos algoritmos de cálculo do parâmetro de penalidade (simulação numérica do ensaio de compressão de um cubo com a ferramenta de raio 1,0 mm). (a)  $r$  Constante; (b)  $r$  Força normal de contacto e (c)  $r$  Força e distância normais de contacto.

Da análise das simulações realizadas neste teste elementar é possível concluir que, com o algoritmo baseado no parâmetro de penalidade constante, apenas dois dos valores do intervalo seleccionado garantem sempre uma solução de equilíbrio:  $r = 600,0$  e o valor por defeito estimado de  $r = 6000,0$ . O número mínimo de iterações é garantido para o valor por defeito estimado. Os testes realizados com os algoritmos automáticos de actualização do parâmetro de penalidade permitem concluir que é possível estabilizar os nós que ao longo do processo iterativo oscilam entre direcções de escorregamento opostas, apesar de estes algoritmos serem baseados numa análise bidimensional dos problemas de instabilidade. O algoritmo baseado na força e distância normais de contacto permite, igualmente, estabilizar as alterações ao estatuto de contacto associadas à condição de contacto unilateral. Deste modo, garante a convergência para situações em que o outro algoritmo falha. Em resumo, o recurso ao parâmetro de penalidade automático permite reduzir a influência da selecção do parâmetro de penalidade pelo utilizador, na velocidade de convergência e consequentemente no tempo de cálculo.

Geralmente, a curvatura da ferramenta aumenta a sensibilidade do algoritmo de contacto com atrito ao parâmetro de penalidade. No entanto, com base nos resultados apresentados é possível concluir que a correcta selecção do parâmetro de penalidade permite garantir que o número de iterações até ao equilíbrio não é influenciado pela geometria da ferramenta.

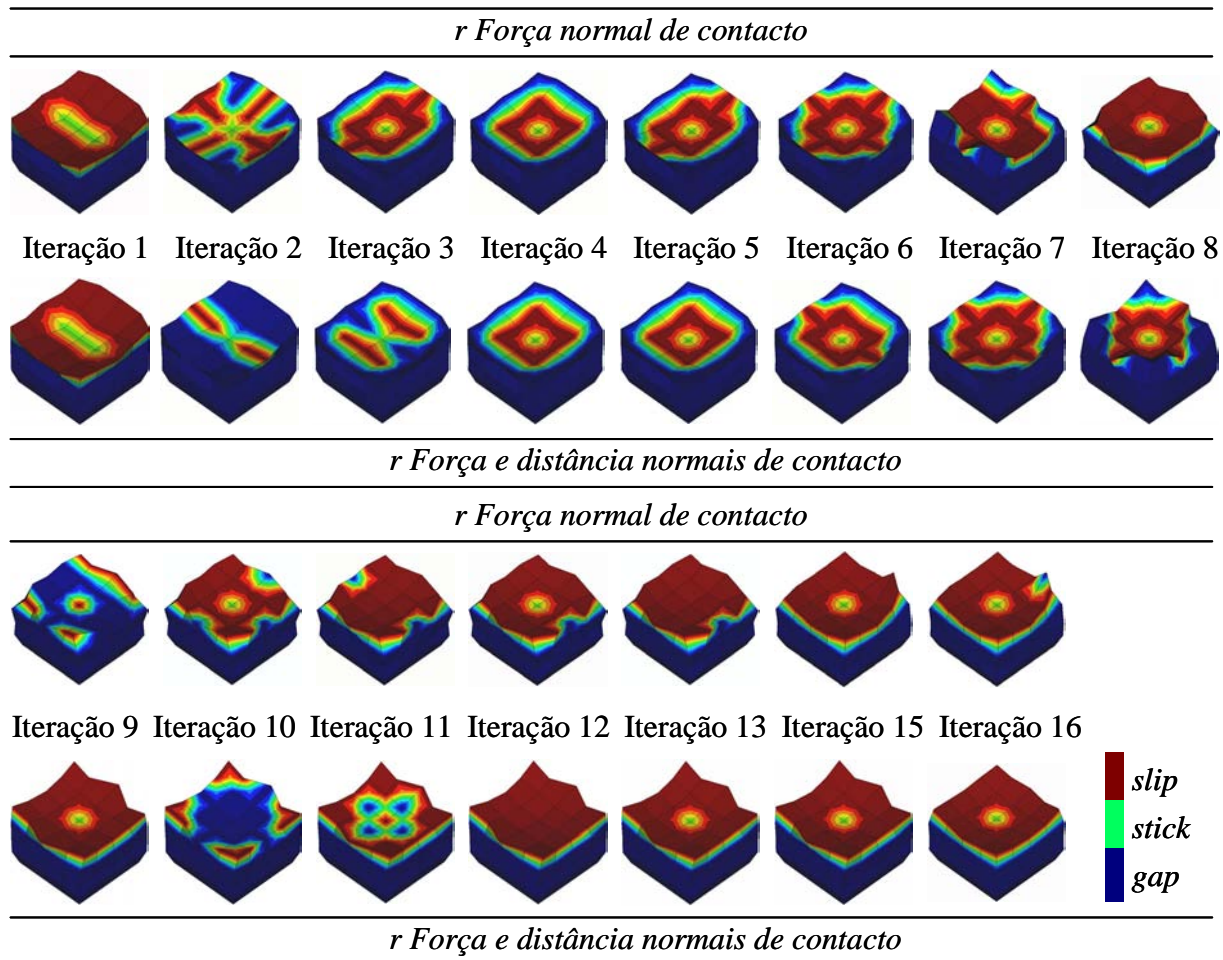


Figura 6.13 – Evolução do estatuto de contacto (simulação do ensaio de compressão de um cubo, com a ferramenta de raio 1,0 mm, malha  $4 \times 4 \times 4$ ).

## 6.5 Conformação de uma Taça Quadrada

Na simulação numérica de um problema real surgem diferentes tipos de solicitações nas diferentes zonas de contacto do corpo deformável. Pretende-se, com este exemplo, avaliar a aplicabilidade das estratégias desenvolvidas para a actualização do parâmetro de penalidade nestas circunstâncias. Efectivamente, as diferentes zonas surgem associadas a diferentes ordens de grandeza das forças de contacto, conduzindo a diferentes distribuições do parâmetro de penalidade. Por outro lado, a discretização seleccionada determina a ordem de grandeza das forças de contacto em cada zona, o que influencia igualmente a distribuição do parâmetro de penalidade.

O exemplo seleccionado para proceder a este estudo é a conformação de uma taça quadrada com a geometria definida na secção 4.5.3 [NUMISHEET'93]. A chapa é discretizada com elementos finitos hexaédricos com integração reduzida selectiva. Testam-se duas discretizações distintas para a distribuição no plano:  $30 \times 30$  elementos finitos com duas camadas em espessura e  $50 \times 50$  elementos finitos com uma camada em espessura. A malha de  $30 \times 30$  corresponde a um tamanho médio do elemento no plano de 2,5 mm e a de  $50 \times 50$  a 1,5 mm. Deste modo, as duas malhas regulares apresentam um número distinto de nós candidatos ao contacto. Tal altera a estimativa para o

parâmetro de penalidade em cada instante, uma vez que a força normal de contacto é diferente para cada discretização.

Ao contrário das simulações realizadas na secção anterior, com um único incremento, neste caso o tamanho do incremento é controlado pela estratégia  $r_{\min}$ . Os parâmetros limites para controlo do tamanho do incremento utilizados são:  $\Delta\varepsilon_{\max} = 0,050$ ;  $\Delta\omega_{\max} = 2,500$ ;  $a = 10,000$ ;  $b = 3,000$ ;  $r_{\inf} = 0,001$  e  $r_{\sup} = 1,000$ . Uma vez que o objectivo destes testes é determinar a relevância da actualização do parâmetro de penalidade, estão igualmente activas todas as estratégias numéricas de controlo de convergência descritas na secção 5.4.5 [Alves 2003]. Todas as simulações foram realizadas admitindo que a solução de equilíbrio do algoritmo de Newton-Raphson é atingida para um critério de convergência  $C^{\text{Crit}} = 1 \times 10^{-2}$ .

Nas primeiras simulações realizadas considera-se que o comportamento do material é elastoplástico linear, idêntico ao utilizado nos testes elementares. De acordo com o modelo considerado para o comportamento do material,  $k = 3000,0$  MPa. O valor considerado por defeito para o parâmetro de penalidade é novamente de  $2k = 6000,0$ , pelo que se define a mesma gama de variação para o parâmetro de penalidade utilizada nos testes elementares.

Na Figura 6.14 resumem-se os tempos de cálculo obtidos para as diferentes simulações com a malha  $30 \times 30 \times 2$ , no final da fase de conformação. Na Figura 6.15 apresenta-se o resumo do número médio de iterações e do tamanho médio do incremento. Em ambas as figuras os valores foram normalizados em relação à simulação realizada com o parâmetro de penalidade constante igual a  $2k = 6000,0$ .

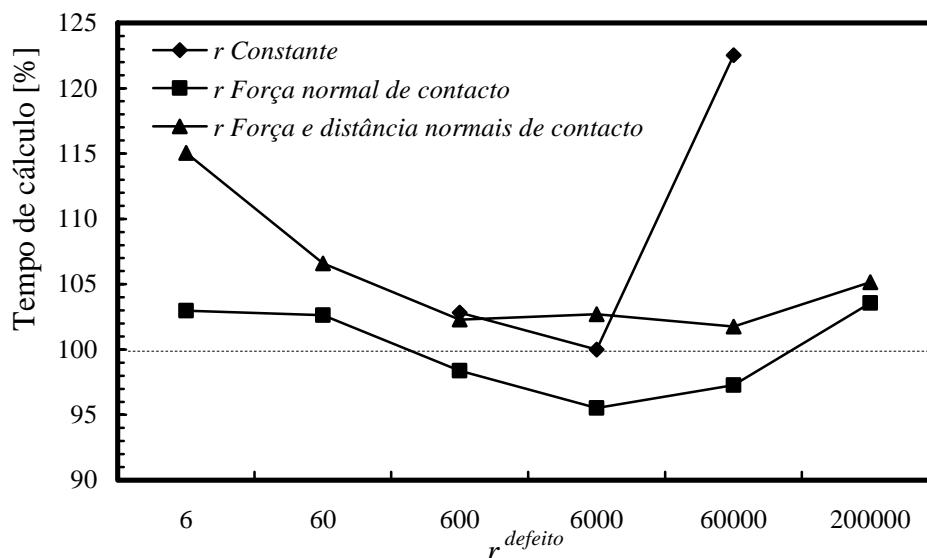


Figura 6.14 – Tempo de cálculo (normalizado em relação à simulação realizada com o algoritmo de parâmetro de penalidade constante  $r^{\text{defeito}} = 6000,0$ ). Simulação da conformação de uma taça quadrada com a malha  $30 \times 30 \times 2$  (material elastoplástico linear).

Nas figuras observa-se que só é possível obter a configuração final e ultrapassar problemas de convergência para três valores do parâmetro de penalidade constante. Estes valores são os seleccionados na gama mais próxima do parâmetro de penalidade pré-definido. Para o parâmetro de penalidade constante e igual a  $600,0$  o tempo de cálculo da simulação é semelhante ao obtido para a simulação de referência. Porém, para

$r = 60000,0$  o tempo de cálculo aumenta 25% em consequência de um aumento do número médio de iterações em cada incremento (ver Figura 6.15). A vantagem do recurso aos algoritmos de actualização do parâmetro de penalidade é evidente neste caso, uma vez que ambos garantem a obtenção da configuração final sem que surjam problemas de convergência. Por outro lado, a configuração final é obtida qualquer que seja o parâmetro de penalidade pré-definido para tempos de cálculo idênticos (variações inferiores a 5%). Só para o algoritmo de actualização do parâmetro de penalidade baseado na força e distância normais de contacto é possível constatar um aumento mais acentuado do tempo de cálculo para os dois valores por defeito mais baixos da gama estudada. O recurso à actualização do coeficiente de penalidade conduz a um aumento do tamanho de incremento médio, em particular para as simulações realizadas com o algoritmo baseado na força normal de contacto, como se pode observar na Figura 6.15. O aumento do tamanho médio do incremento é acompanhado por um aumento do número médio de iterações, em cada incremento.

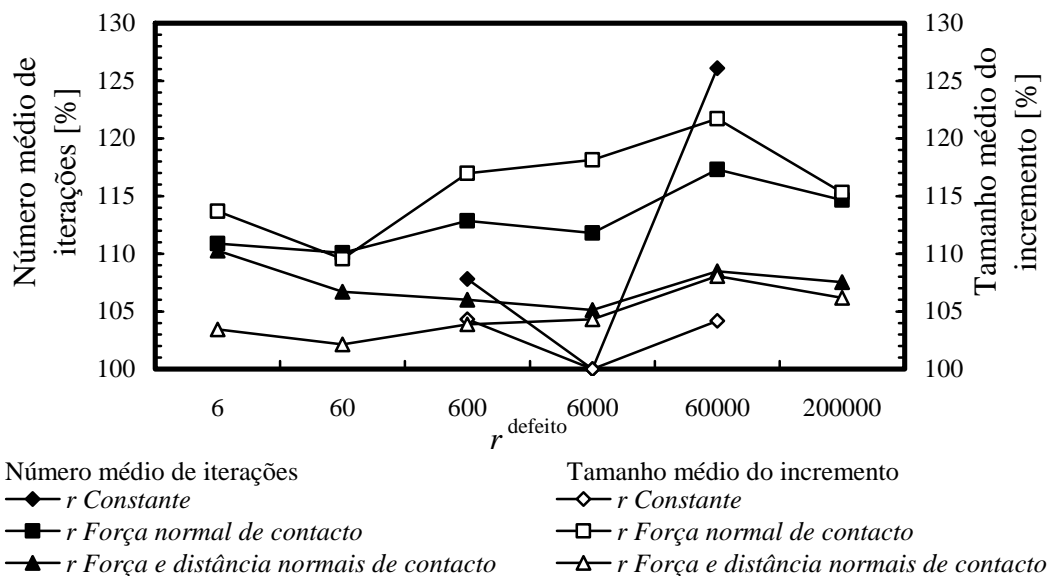


Figura 6.15 – Número médio de iterações e tamanho médio do incremento (normalizado em relação à simulação realizada com o algoritmo de parâmetro de penalidade constante  $r_{\text{defeito}} = 6000,0$ ). Simulação da conformação de uma taça quadrada com a malha  $30 \times 30 \times 2$  (material elastoplástico linear).

Na Figura 6.16 apresenta-se o tempo de cálculo normalizado em relação à simulação realizada com o parâmetro de penalidade constante  $r = 6000,0$ , para a malha  $50 \times 50 \times 1$ . Na Figura 6.17 resumem-se o número médio de iterações e o tamanho médio do incremento, normalizados em relação à mesma simulação.

Também neste caso, para o algoritmo que recorre ao parâmetro de penalidade constante só é possível ultrapassar problemas de convergência e obter a configuração final para valores de parâmetro de penalidade pré-definido próximos do valor por defeito. Tal como para a malha  $30 \times 30 \times 2$  constata-se um enorme aumento do tempo de cálculo para o parâmetro de penalidade igual a  $60000,0$ . Neste caso, o aumento de tempo de cálculo é cerca de 55% superior ao da simulação de referência e surge associado a uma forte redução do tamanho médio do incremento (ver Figura 6.17).

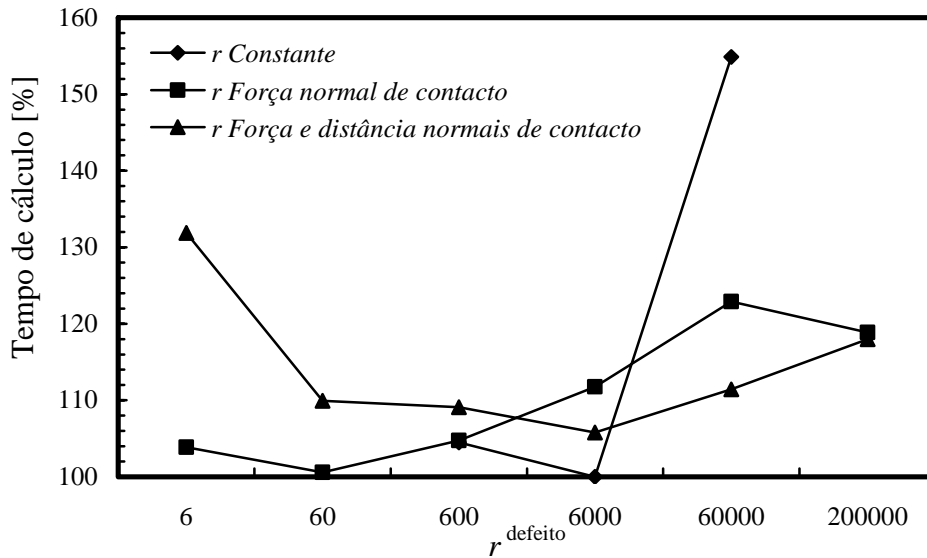


Figura 6.16 – Tempo de cálculo (normalizado em relação à simulação realizada com o algoritmo de parâmetro de penalidade constante  $r^{\text{defeito}} = 6000,0$ ). Simulação da conformação de uma taça quadrada com a malha  $50 \times 50 \times 1$  (material elastoplástico linear).

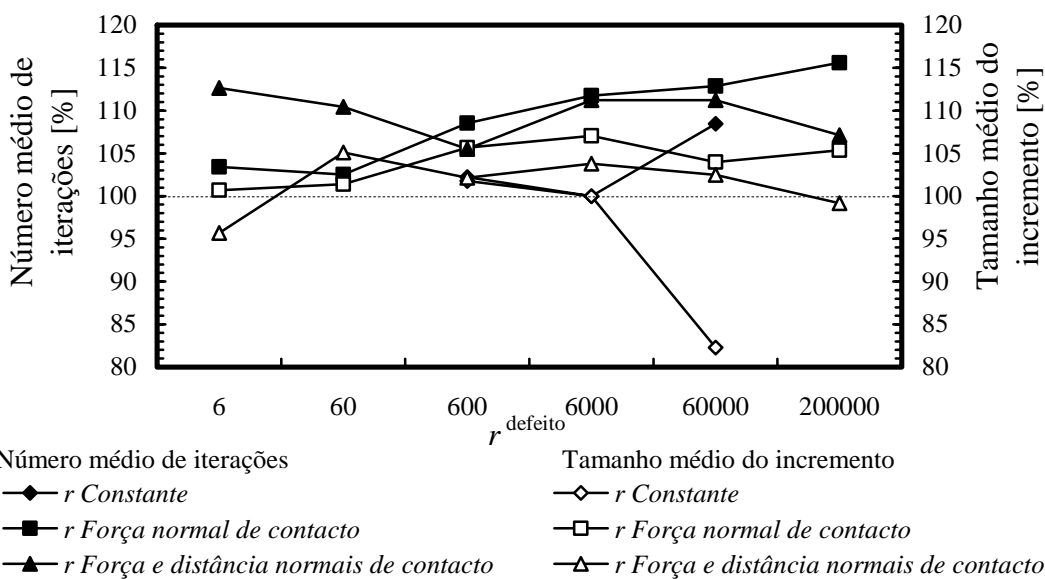


Figura 6.17 – Número médio de iterações e tamanho médio do incremento (normalizado em relação à simulação realizada com o algoritmo de parâmetro de penalidade constante  $r^{\text{defeito}} = 6000,0$ ). Simulação da conformação de uma taça quadrada com a malha  $50 \times 50 \times 1$  (material elastoplástico linear).

Em relação às simulações realizadas com os algoritmos de actualização do parâmetro de penalidade, mais uma vez se confirma a vantagem destes permitirem ultrapassar eventuais problemas de convergência. No entanto, neste exemplo, ocorre uma maior variação no tempo de cálculo obtido para os vários valores de parâmetro de penalidade. O algoritmo baseado na força normal de contacto apresenta variações desprezáveis para valores do parâmetro de penalidade inferiores a  $6000,0$ . Para  $r^{\text{defeito}} > 6000,0$  as variações são superiores a 10%. Da análise da Figura 6.17 pode concluir-se que, para estes valores, o aumento do tamanho médio do incremento não compensa o aumento no



número médio de iterações, o que resulta no aumento do tempo de cálculo. Para o algoritmo baseado na força e distância normais de contacto, a evolução da variação do tempo de cálculo é semelhante à observada para a malha  $30 \times 30 \times 2$ .

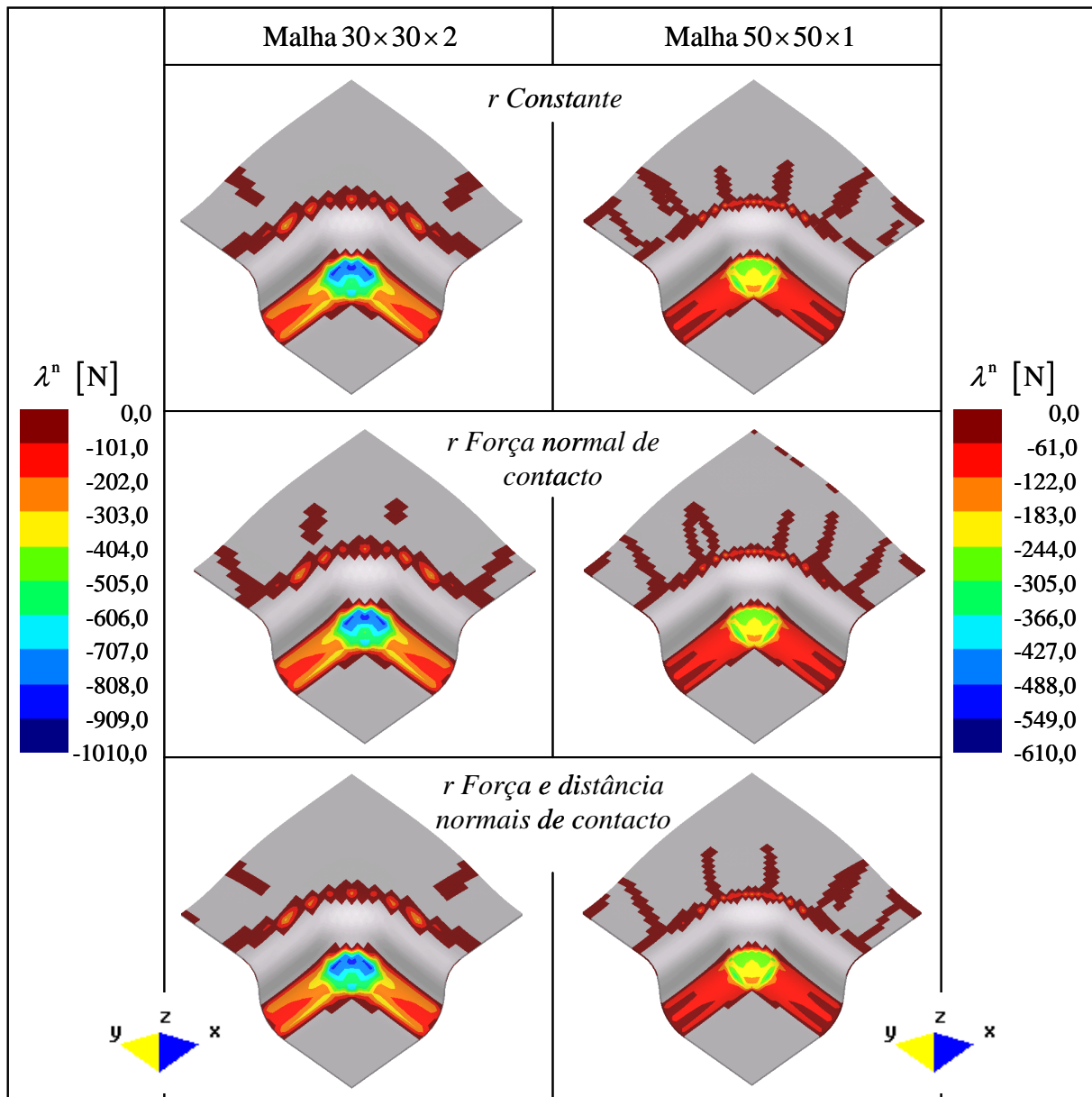


Figura 6.18 – Isovalores da força normal de contacto para um deslocamento do punção de 20 mm do punção (conformação de uma taça quadrada e material elastoplástico linear).

A alteração da discretização do corpo deformável resulta em diferentes comportamentos globais dos algoritmos. Ao alterar a discretização do corpo deformável, a solução obtida não é idêntica, como se mostra na Figura 6.18. Nesta figura apresenta-se a distribuição da força normal de contacto após um deslocamento do punção de 20 mm. Globalmente, as zonas de contacto estabelecidas são idênticas. No entanto, a discretização mais grosseira da superfície de contacto apresenta uma área de contacto com o cerra-chapas mais reduzida. Observa-se, também, uma diferente gama de valores para a força normal de contacto, função da discretização do corpo deformável. Esta diferença conduz ao cálculo de valores distintos para o valor estimado do parâmetro de penalidade (ver Figura 6.19). A deterioração do comportamento dos algoritmos com

parâmetro de penalidade variável com o refinamento de malha pode ser justificada por dois factores: (i) o aumento do número de nós potenciais de contacto e (ii) a redução do valor do parâmetro de penalidade estimado pelo algoritmo. O aumento do número de nós potenciais de contacto leva, entre outros factores, ao aumento do número médio de iterações necessárias para a convergência e a uma redução do tamanho médio do incremento. A redução do valor do parâmetro de penalidade piora o condicionamento do sistema de equações lineares.

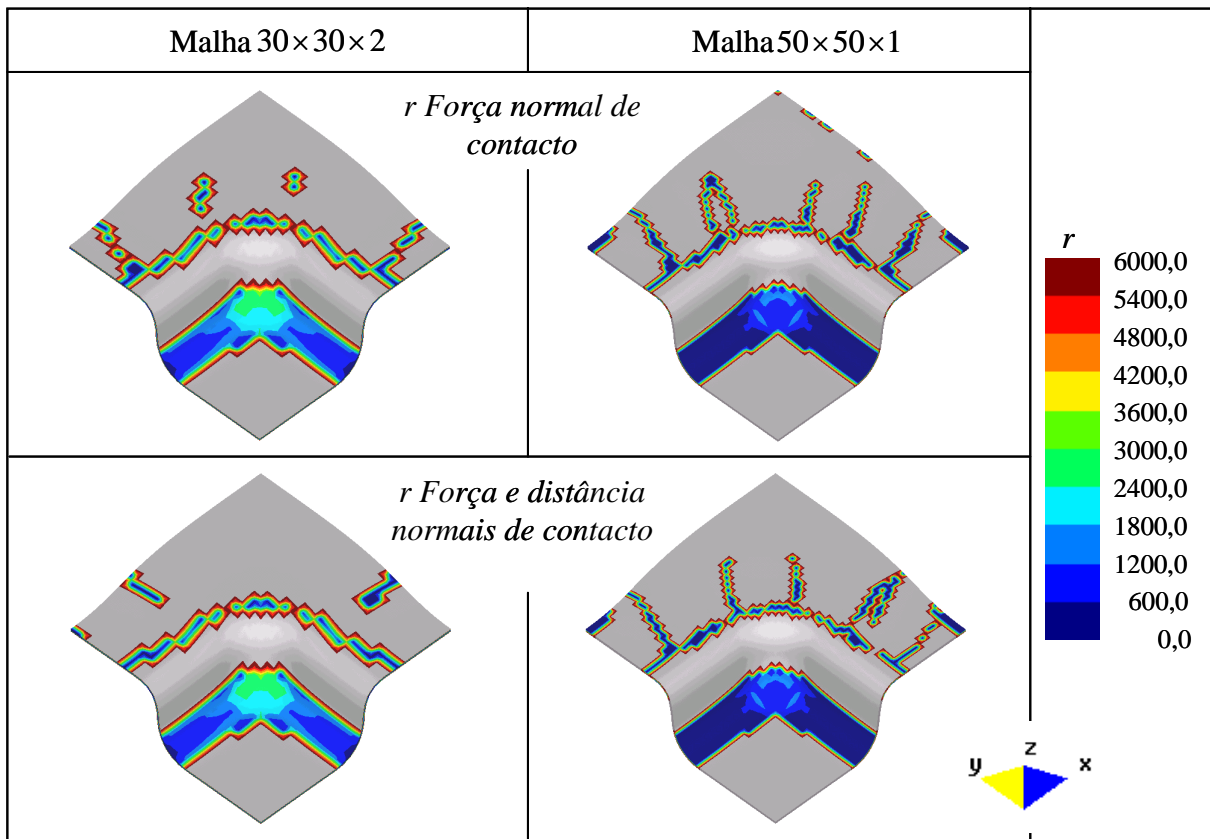


Figura 6.19 – Isovalores de parâmetro de penalidade para um deslocamento do punção de 20 mm do punção (conformação de uma taça quadrada e material elastoplástico linear).

Realizou-se um segundo conjunto de simulações em que se substituiu o material teórico do caso anterior por um aço cujo encruamento isotrópico é descrito pela lei de Swift (ver Tabela 4.7). Para avaliar o parâmetro de penalidade automático numa simulação com um material elastoplástico não-linear é necessário determinar o parâmetro  $k$ , definido pelas equações (6.6) e (6.9), em função do valor da deformação de cada ponto (ver Figura 6.20). Para simplificar os algoritmos e minimizar o tempo de cálculo associado à determinação do parâmetro de penalidade associado a cada nó, opta-se por considerar o valor de  $k$  constante ao longo da simulação. Como estimativa para o valor de  $k$  constante considera-se o declive no ponto de carga máxima caracterizado por  $dY/d\varepsilon = Y$ . Esta opção procura estimar um valor mínimo para  $k$ , uma vez que quanto menor for  $k$  maior deve ser o parâmetro de penalidade (ver Figura 6.2). No caso de um material com encruamento isotrópico descrito pela lei de Swift, a estimativa para o valor de  $k$  é dada por:

$$k = Cn^n. \quad (6.34)$$

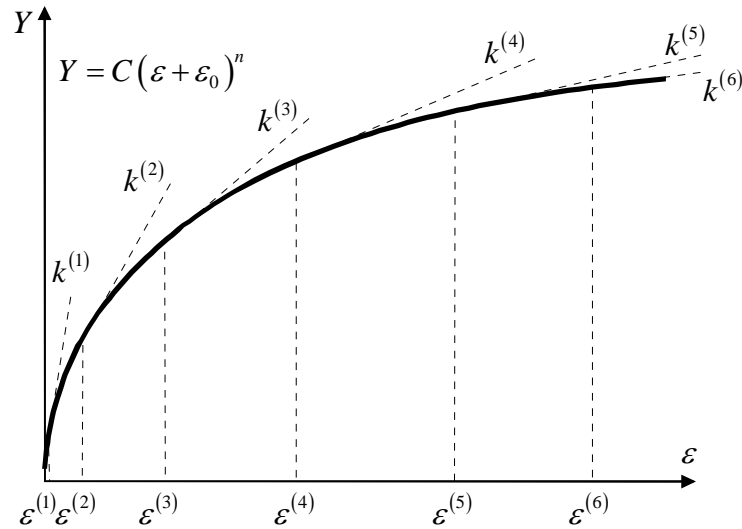


Figura 6.20 – Exemplo da avaliação do parâmetro  $k$  em função da lei de comportamento do material e da evolução da deformação.

O valor indicado para o parâmetro de penalidade é  $r = 2Cn^n$ . Para avaliar o recurso a esta estimativa do parâmetro de penalidade, bem como a influência da estimativa do parâmetro  $k$  constante no comportamento dos algoritmos de cálculo do parâmetro de penalidade, realizou-se o conjunto de simulações numéricas com as discretizações  $30 \times 30 \times 2$  e  $50 \times 50 \times 1$ . Consideraram-se os três algoritmos: (i)  $r$  constante; (ii)  $r$  evolutivo determinado pela equação (6.6) e (iii)  $r$  evolutivo determinado pela equação (6.9). Os valores para  $r$  constante e  $r^{\text{defeito}}$  para os algoritmos com  $r$  evolutivo considerados são: 7,97; 79,69;  $2Cn^n = 796,86$ ; 7968,64; 79686,40 e 206000,0.

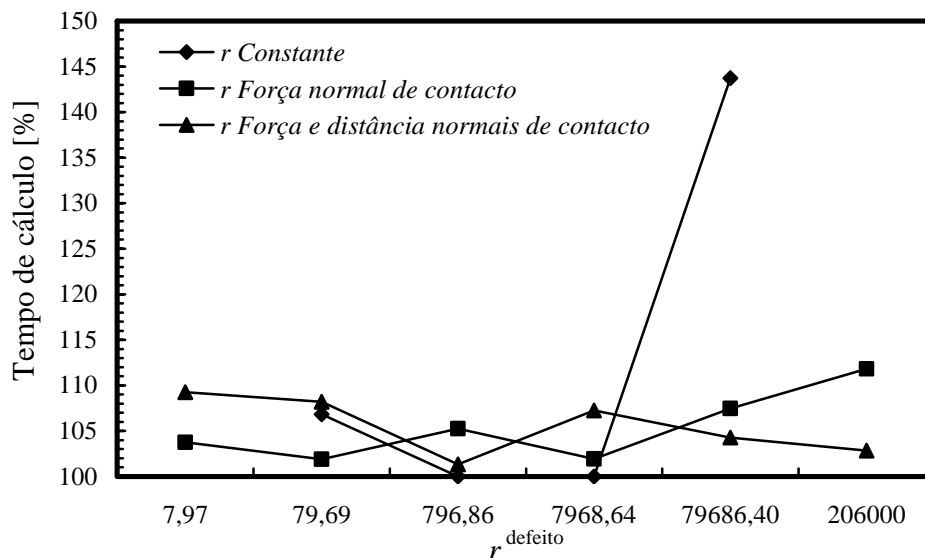


Figura 6.21 – Tempo de cálculo (normalizado em relação à simulação realizada com o algoritmo de parâmetro de penalidade constante  $r^{\text{defeito}} = 796,86$ ). Simulação da conformação de uma taça quadrada com a malha  $30 \times 30 \times 2$  (material elastoplástico não-linear).

Na Figura 6.21 apresenta-se a variação do tempo de cálculo, normalizado em relação à simulação realizada com o parâmetro de penalidade constante  $r = 796,86$ , para a malha  $30 \times 30 \times 2$ . Nas simulações realizadas com o parâmetro de penalidade constante é

possível obter a configuração final sem intervenção do utilizador. Isto acontece para quatro valores distintos do parâmetro de penalidade, próximos do parâmetro de penalidade de referência, que é neste caso  $2Cn^n = 796,86$ . A solução para o parâmetro de penalidade constante igual a 79686,40 é obtida num tempo de cálculo 44% superior ao da solução de referência. Associado a este valor do parâmetro de penalidade ocorre uma forte redução do tamanho médio do incremento, bem como um aumento do número médio de iterações, como se pode confirmar analisando a Figura 6.22. Nesta figura resumem-se o número médio de iterações e o tamanho médio do incremento, normalizados em relação à mesma simulação realizada com o parâmetro de penalidade constante  $r = 796,86$ .

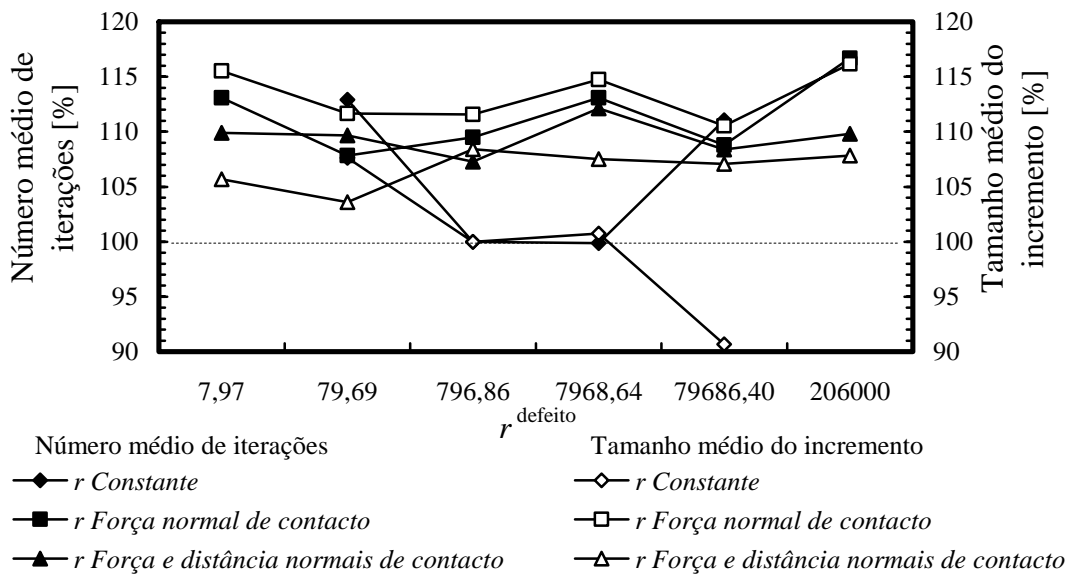


Figura 6.22 – Número médio de iterações e tamanho médio do incremento (normalizado em relação à simulação realizada com o algoritmo de parâmetro de penalidade constante  $r^{\text{defeito}} = 796,86$ ). Simulação da conformação de uma taça quadrada com a malha  $30 \times 30 \times 2$  (material elastoplástico não-linear).

As simulações realizadas com o parâmetro de penalidade variável permitem obter a configuração final sem intervenção do utilizador, qualquer que seja o algoritmo seleccionado. O algoritmo baseado na força normal de contacto apresenta variações de tempo de cálculo pouco significativas (inferiores a 5%) em relação à simulação de referência, à excepção das realizadas com os dois valores máximos por defeito. A Figura 6.22 mostra que as simulações realizadas com este algoritmo apresentam, em relação à simulação de referência, um aumento do tamanho médio do incremento, que é no entanto acompanhada de um aumento do número médio de iterações. Também no caso do algoritmo baseado na força e distância normais de contacto, as variações de tempo de cálculo são pouco importantes para a maioria das simulações realizadas. A evolução do tempo de cálculo com o parâmetro de penalidade é idêntica à observada para as simulações realizadas com o material elastoplástico linear. Estes resultados indicam que o facto do parâmetro  $k$  ser considerado constante não parece ser prejudicial para a avaliação do parâmetro de penalidade variável. No entanto, para este exemplo, os tempos de cálculo obtidos com os algoritmos de parâmetro de penalidade variável são sempre

superiores aos obtidos para a simulação de referência com o parâmetro de penalidade constante.

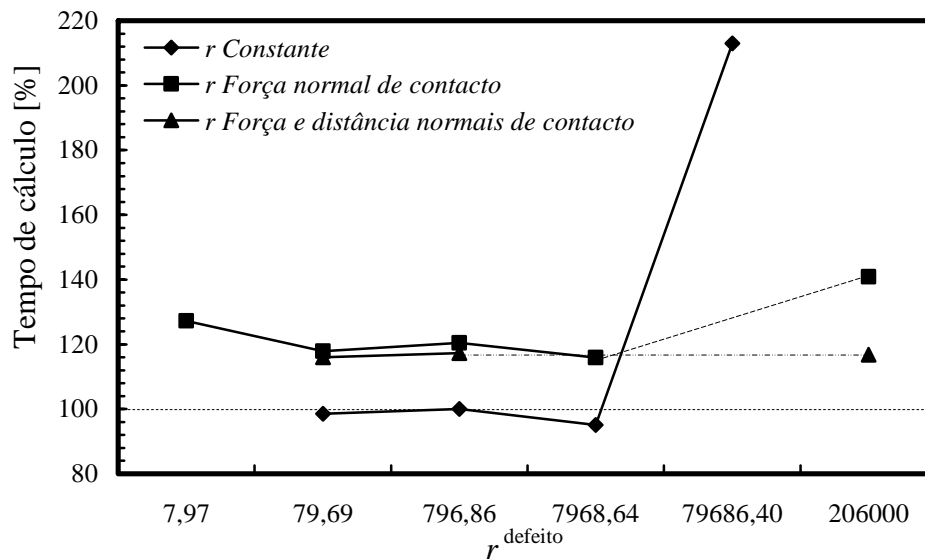


Figura 6.23 – Tempo de cálculo (normalizado em relação à simulação realizada com o algoritmo de parâmetro de penalidade constante  $r^{\text{defeito}} = 796,86$ ). Simulação da conformação de uma taça quadrada com a malha  $50 \times 50 \times 1$  (material elastoplástico não-linear).

Na Figura 6.23 apresenta-se a variação do tempo de cálculo obtido para a malha  $50 \times 50 \times 1$ , normalizado em relação à configuração de referência. Também com esta discretização se obtém a configuração final sem intervenção do utilizador para quatro valores do parâmetro de penalidade constante. Para os dois valores mais próximos do de referência, as variações do tempo de cálculo são desprezáveis. Em contrapartida, para  $r = 79686,40$  o aumento no tempo de cálculo é de 115%. Este aumento do tempo de cálculo é mais uma vez consequência da redução do tamanho médio do incremento e do aumento do número médio de iterações, como se mostra na Figura 6.24. No entanto, uma análise cuidada desta simulação revela que a variação de 25% no número médio de iterações, em cada incremento, oculta o facto de para muitos incrementos ser atingido o número máximo de iterações (50) sem que seja atingido o valor do critério de convergência exigido  $C^{\text{crit}} = 1 \times 10^{-2}$ . Nestas circunstâncias, a estratégia "N*TrialNST*" previne a paragem da simulação por falta de convergência [Alves 2003]. A subida do tempo de cálculo corresponde à necessidade de recorrer à estratégia "N*TrialNST*" para ultrapassar problemas de convergência. Em relação às simulações realizadas recorrendo aos algoritmos com parâmetro de penalidade variável, nem todas as simulações conseguem atingir a configuração final. Para o algoritmo baseado na força normal de contacto apenas para o valor de  $r = 79686,40$  não é possível atingir a configuração final. O tempo de cálculo obtido é, mais uma vez, estável na gama próxima do valor de parâmetro de penalidade de referência. No entanto, apresenta sempre valores no mínimo 15% superiores ao obtido na simulação de referência. O aumento do número médio de iterações não é compensado pelo aumento do tamanho médio do incremento, como se mostra na Figura 6.24. Para o algoritmo baseado na força e distância normais de contacto, o número de simulações a atingirem a configuração final, sem intervenção do utilizador, é ainda mais reduzido. Todas as simulações apresentam um aumento de tempo de cálculo

da ordem dos 18%, o que parece indicar que este algoritmo é menos interessante que o algoritmo baseado apenas na força de contacto normal.

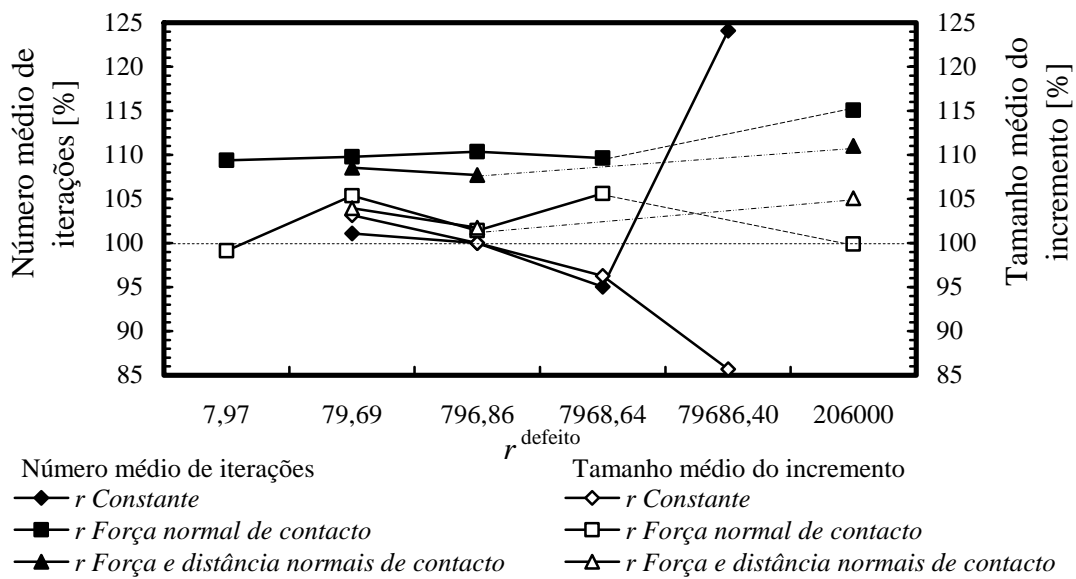


Figura 6.24 – Número médio de iterações e tamanho médio do incremento (normalizado em relação à simulação realizada com o algoritmo de parâmetro de penalidade constante  $r^{\text{defeito}} = 796,86$ ). Simulação da conformação de uma taça quadrada com a malha  $50 \times 50 \times 1$  (material elastoplástico não-linear).

Esta diferença de comportamento entre as duas discretizações nas simulações realizadas com o material elastoplástico não-linear pode ser associada à redução da força normal de contacto e, conseqüentemente, do parâmetro de penalidade estimado. Para um deslocamento do punção de 20 mm a redução da força máxima de contacto com o aumento de nós potenciais de contacto é da ordem de 50% (ver Figura 6.25). O valor da força normal de contacto influencia fortemente o valor estimado para o parâmetro de penalidade, em função da discretização seleccionada (Figura 6.26). O facto de o material elastoplástico não-linear ser ainda mais sensível a esta diferença pode estar relacionado com a aproximação considerada para o parâmetro  $k$ .

Em consequência das diferentes propriedades mecânicas dos materiais, o material elastoplástico linear apresenta um deslizamento da aba maior, assim como uma maior folga entre a matriz e o cerra-chapas, que o material elastoplástico não-linear. Isto implica que existe sempre um número maior de nós em contacto na zona de contacto plano da matriz e do cerra-chapas, no caso do material elastoplástico não-linear. Tal pode ser confirmado comparando a Figura 6.18 com a Figura 6.25. A análise das mesmas figuras permite ainda constatar que esta zona apresenta nós em contacto com valores muito reduzidos de forças de contacto ( $\approx 0$ ). O parâmetro de penalidade estimado para esses nós assume valores próximos de zero. O número de nós nestas circunstâncias tem tendência a aumentar com o aumento do número total de nós candidatos ao contacto. Este facto pode assim justificar as maiores dificuldades dos algoritmos de controlo automático do parâmetro de penalidade para discretizações mais refinadas e em particular para o material elastoplástico não-linear.

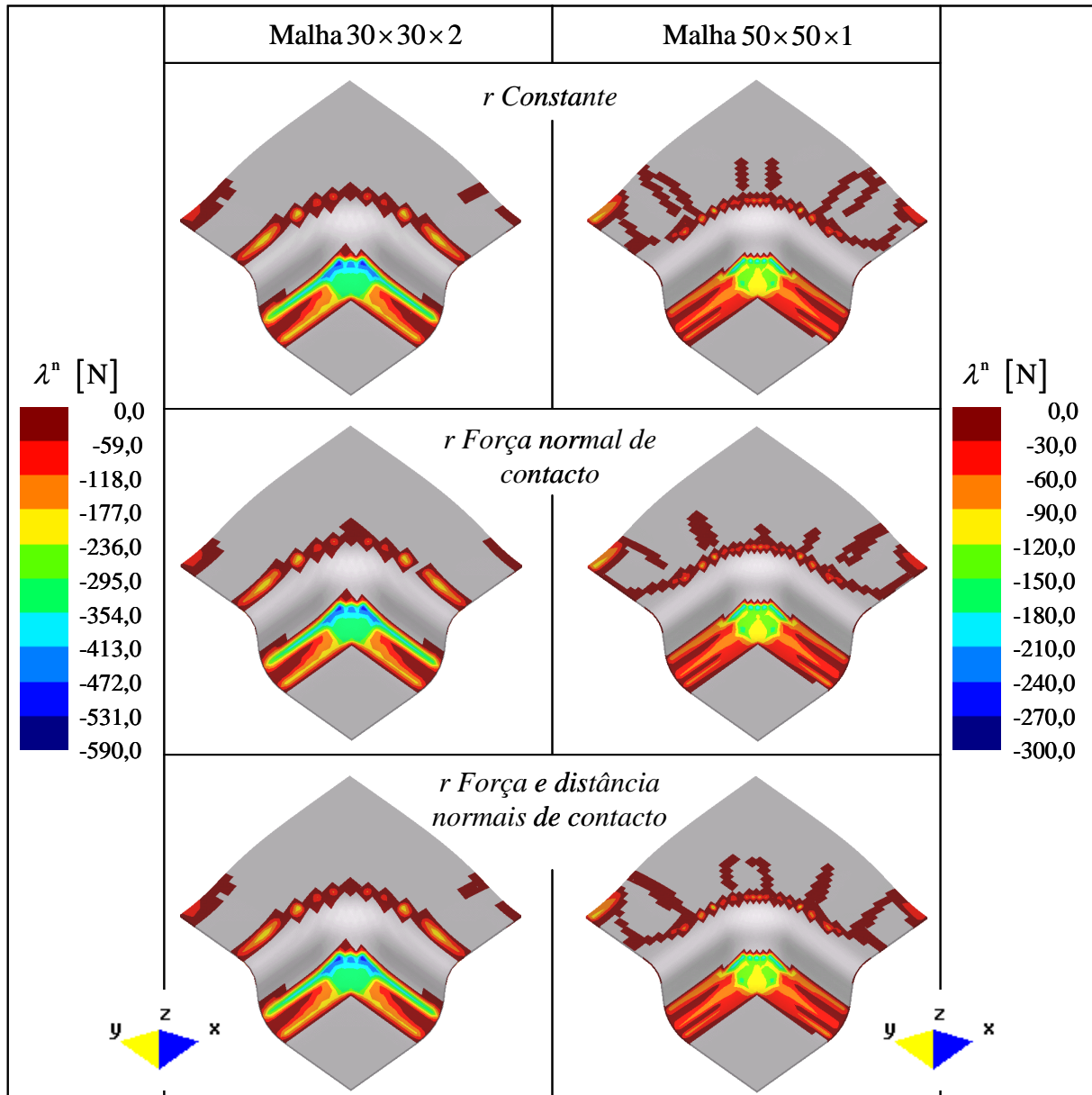


Figura 6.25 – Isovalores da força normal de contacto para um deslocamento do punção de 20 mm (conformação de uma taça quadrada e material elastoplástico não-linear).

Em resumo, ambos os algoritmos de cálculo automático do parâmetro de penalidade apresentam sensibilidade ao refinamento de malha bem como aos parâmetros relacionados com as propriedades mecânicas do material. Em relação à sensibilidade ao refinamento de malha, o factor que parece mais contribuir para este comportamento é o maior número de nós com valores de força de contacto muito reduzidos. Estas forças de contacto reduzidas conduzem a valores para o parâmetro de penalidade próximos de zero, que deterioram o condicionamento do sistema. Uma forma de evitar este tipo de situações é estimar o parâmetro de penalidade admitindo uma zona de influência do nó de contacto. Deste modo, suavizam-se as variações do coeficiente de penalidade. A sensibilidade dos algoritmos às propriedades mecânicas do material pode estar associada ao facto de, ao longo do processo de conformação, não se considerar a evolução das propriedades mecânicas em cada ponto. Por simplicidade, optou-se por testar o comportamento do algoritmo assumindo para o cálculo do parâmetro de penalidade um valor constante para caracterizar as propriedades mecânicas do corpo em todos os pontos e ao longo de todo o

processo de conformação. Porém estas evoluem de modo distinto. Uma alternativa para melhorar o comportamento dos algoritmos de cálculo automático do parâmetro de penalidade é proceder à avaliação do incremento de tensão equivalente para cada nó em contacto, em cada iteração. Isto implica proceder a um cálculo aproximado, em função dos valores determinados para os pontos de Gauss adjacentes. Nestas circunstâncias, é necessário avaliar a função custo/benefício deste tipo de estratégia, pois os algoritmos de parâmetro de penalidade variável terão de compensar o tempo de cálculo perdido na avaliação da tensão equivalente nos nós.

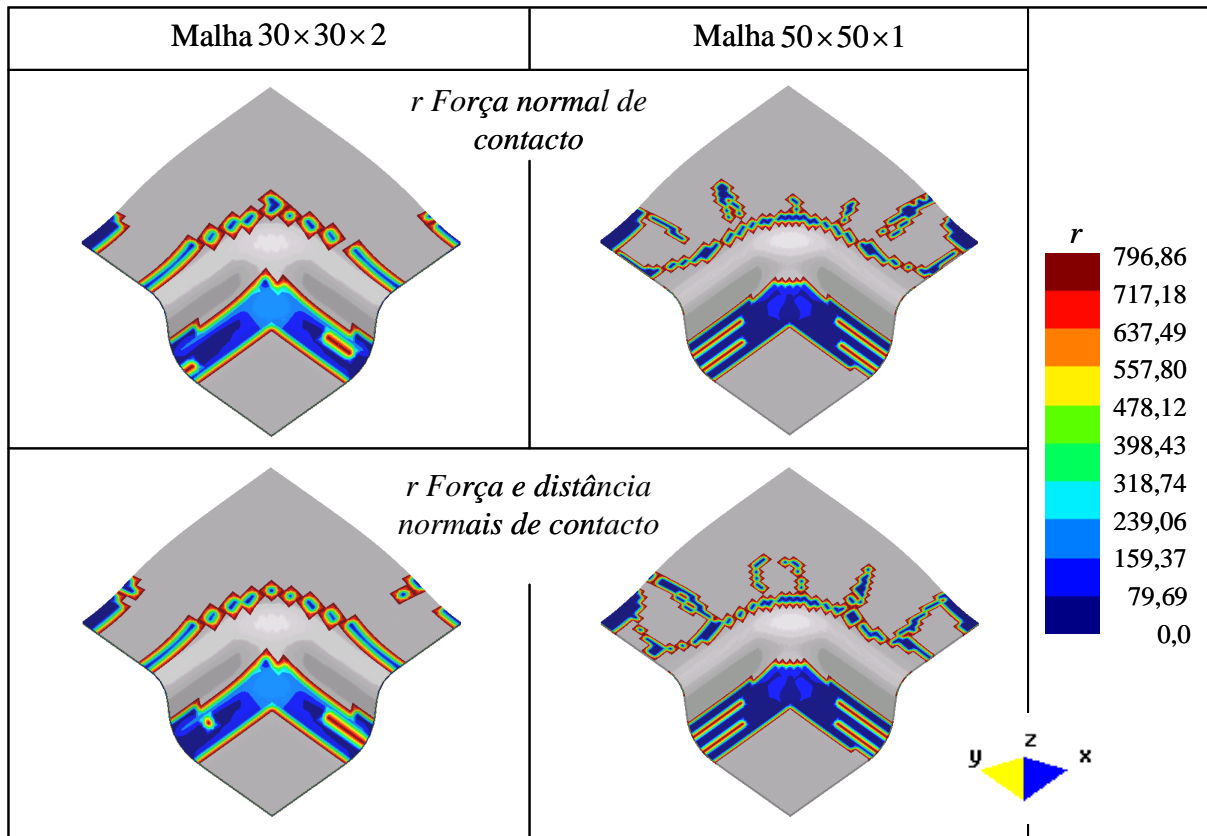


Figura 6.26 – Isovalores de parâmetro de penalidade para um deslocamento do punção de 20 mm (conformação de uma taça quadrada e material elastoplástico não-linear).

Os ensaios realizados permitem concluir que, para o algoritmo com parâmetro de penalidade constante, uma selecção incorrecta deste parâmetro pode conduzir a fortes aumentos do tempo de cálculo. O estudo realizado permite estabelecer um valor para o parâmetro de penalidade que garante que a simulação decorre sem problemas de convergência. De facto, todas as simulações realizadas com o parâmetro de penalidade constante igual a  $2k$  obtiveram a configuração final com tempos de cálculo mínimos. O recurso aos algoritmos de parâmetro de penalidade variável é vantajoso pois permite minimizar as fortes oscilações de tempo de cálculo associadas ao algoritmo com parâmetro de penalidade constante. Ou seja, o algoritmo de gestão do problema de contacto com atrito revela-se menos sensível ao parâmetro de penalidade. Os algoritmos de parâmetro de penalidade automático permitem ainda controlar algumas instabilidades fundamentais como, por exemplo, as oscilações sucessivas entre estatutos de contacto distintos.



## Capítulo 7

# Atrito

*Descreve-se uma lei empírica de evolução do coeficiente de atrito bem como a sua implementação no programa DD3IMP. Propõem-se duas aproximações geométricas ao cálculo da área de contacto. Avalia-se a influência da lei de atrito nos resultados numéricos da conformação de um perfil U. Analisa-se a influência do modelo de atrito em parâmetros relacionados com as solicitações mecânicas na fase de conformação, a geometria após retorno elástico e a sensibilidade ao refinamento de malha e tempo de cálculo.*

---

### 7.1 Enquadramento

Nos processos de conformação, a deformação plástica é induzida pela aplicação de esforços externos, resultantes da interacção entre o corpo deformável e as ferramentas. Para prever esses esforços é essencial modelar correctamente o fenómeno de contacto com atrito. Nesta modelação distinguem-se duas áreas de investigação: (i) o desenvolvimento de modelos de descrição do atrito e (ii) o desenvolvimento de métodos numéricos para a resolução do problema. Estas áreas têm sido abordadas separadamente. A consequência é o desenvolvimento de modelos de atrito sofisticados, sem aprofundar a sua implementação na resolução de problemas ou, em oposição, o desenvolvimento de formulações robustas para a implementação de modelos constitutivos de atrito simples. A formulação dos problemas de atrito com base no método dos elementos finitos tem focado, essencialmente, os problemas numéricos associados a aspectos geométricos, discutidos no Capítulo 4. Em contraponto, os modelos de atrito não se têm debruçado o suficiente sobre os aspectos numéricos associados às leis propostas. Tal resulta em algoritmos, de descrição do problema, pobres do ponto de vista físico ou, em relações que garantem óptima descrição física só para problemas simples.

O problema de contacto com atrito é objecto de formulação matemática há mais de 200 anos, desde os trabalhos percursoros de Coulomb em 1779 e de Hertz em 1881. Apesar do enorme esforço desenvolvido não foi ainda estabelecida uma resposta suficientemente abrangente acerca da natureza física do contacto com atrito, nem uma teoria universalmente aceite do ponto de vista físico e matemático. O facto de o atrito ser influenciado pela interacção de diferentes propriedades dos materiais contribui para dificultar a sua modelação. A título de exemplo refira-se que existe uma forte correlação entre as propriedades reológicas e tribológicas do material. Esta correlação foi evidenciada, por exemplo, por Knibloe e Wagoner [1989] na simulação do processo de estampagem com um punção hemisférico. Os autores demonstraram que a mesma distribuição de deformações é obtida combinando o critério quadrático de anisotropia de Hill'48 com um coeficiente de atrito de 0,268 ou com o critério de Hill não-quadrático, com um coeficiente de atrito de 0,639. O critério não-quadrático de Hill subestima a tensão limite de elasticidade em tracção biaxial para o material considerado, conduzindo

a que o aumento do valor do coeficiente de atrito ajuste os resultados da simulação [Fromentina *et al.* 2001].

O comportamento tribológico caracteriza-se por ser função da interacção de um enorme conjunto de parâmetros, que se alteram no decurso do processo de conformação. Para estudar este comportamento é essencial recorrer a ensaios cujas condições sejam próximas das do processo de conformação. Estas condições abrangem: (i) as pressões de contacto; (ii) os níveis de deformação plástica; (iii) a geometria das ferramentas; (iii) a velocidade de escorregamento; (iv) a rugosidade das superfícies e (v) as condições de lubrificação. Os ensaios experimentais permitem conhecer valores globais de coeficiente de atrito, que correspondem à soma de todas as variáveis que o influenciam em cada instante. Por esta razão, não é consensual o tipo de ensaios experimentais a realizar para a avaliação do coeficiente de atrito. Também, devido à quantidade de informação experimental necessária e a questões relacionadas com a sua correlação com os processos reais, questiona-se se este trabalho experimental justifica, efectivamente, os ganhos em termos dos resultados finais da simulação numérica.

Em relação ao modelo de descrição do atrito existem dois aspectos importantes a ter em conta na modelação: (i) a lei de atrito a considerar e (ii) a lei de evolução do coeficiente de atrito. De seguida apresentam-se alguns exemplos de leis de atrito e de leis de evolução para o coeficiente de atrito, implementados em programas de simulação numérica de conformação plástica.

Para além da lei de atrito de Coulomb (ver secção 2.3.4) a lei de Tresca é também frequentemente implementada em programas de simulação numérica. Esta considera que a tensão de corte de atrito, aqui designada por  $\tau$ , é proporcional à tensão limite de elasticidade do material em contacto que apresenta a menor resistência mecânica, ou seja,

$$\|\tau\| \leq mk_Y \quad \text{com} \quad k_Y = \frac{Y_0}{\sqrt{3}}, \quad (7.1)$$

em que  $m$  é o coeficiente de atrito do tipo Tresca. É frequente combinar a lei de atrito de Tresca com a lei de Coulomb. Isto porque, para forças de contacto elevadas, a lei de Coulomb conduz a forças de atrito muito elevadas [Wang e Nakamachi 1997, Xing *et al.* 1998]. Esta limitação da aplicabilidade da lei de Coulomb é essencial em processos de conformação que envolvem pressões de contacto elevadas, como é o caso dos processos de forjagem. A lei resultante é por vezes designada de lei de Coulomb-Orowan, e pode ser formulada da seguinte forma:

$$\|\tau\| \leq \min \left\{ -\mu P, m \frac{Y_0}{\sqrt{3}} \right\}, \quad (7.2)$$

em que  $P$  corresponde à pressão de contacto. Na prática, esta lei define um limite para a tensão de atrito, o que corresponde a considerar que existe uma relação não-linear entre a tensão de atrito e a pressão normal de contacto.

Esta relação linear por tramos entre a tensão de atrito e a pressão de contacto é adoptada em outras leis de atrito propostas na literatura, nomeadamente em algumas baseadas em modelos micro-mecânicos. Um exemplo consiste em considerar que

$$\|\tau\| - t_T \leq 0, \quad \text{com} \quad t_T = mk_Y \tanh \left( \frac{-\mu P}{mk_Y} \right). \quad (7.3)$$

$k_Y$  é definido do mesmo modo que na expressão (7.1).  $\mu$  define o coeficiente de atrito para pressões de contacto baixas e  $m$  estipula o valor de saturação para a tensão de atrito admissível [Stupkiewicz 2001]. Este tipo de formulação é muito interessante do ponto de vista numérico uma vez que dispensa a regularização. Existem outras formulações que contemplam mais variáveis de estado, como por exemplo,

$$\|\boldsymbol{\tau}\| - t_T \leq 0, \quad \text{com} \quad t_T = m \tanh\left(\frac{\|\boldsymbol{\delta}^t\|}{\zeta}\right) P. \quad (7.4)$$

Nesta equação,  $\boldsymbol{\delta}^t$  é a distância de escorregamento e  $\zeta$  é um parâmetro numérico de ajuste aos resultados experimentais [Ling e Stolarski 1997]. A dificuldade associada a este tipo de leis de atrito é a determinação dos parâmetros numéricos de ajuste.

A aplicação da lei de atrito de Coulomb na simulação de problemas de contacto com atrito é contestada quer por motivos físicos quer por motivos matemáticos. Do ponto de vista físico, esta lei descreve apenas o comportamento de corpos rígidos caracterizados por um forte deslizamento. Do ponto de vista matemático, a aplicação pontual da lei de atrito de Coulomb resulta em distribuições descontínuas da força normal de contacto [Rothert *et al.* 1985]. A descontinuidade desta força leva a dificuldades em estabelecer condições de existência e unicidade da solução para o problema de contacto com atrito de Coulomb. A alternativa é recorrer a leis de atrito não-locais que, por definição, admitem o deslizamento de um ponto para uma tensão de corte proporcional à média ponderada das tensões normais na vizinhança desse ponto. Como exemplo de uma lei de atrito não-local pode considerar-se [Kikuchi e Oden 1988]

$$\|\boldsymbol{\lambda}^t\| \leq -\mu S_{\rho_0} [\boldsymbol{\lambda}^n(\mathbf{u})], \quad (7.5)$$

em que  $\mu$  é o coeficiente de atrito e  $S_{\rho_0}$  é um operador que modifica a distribuição da força normal de contacto, de tal forma que, para o ponto de contacto  $\mathbf{x}$ , este operador é dado por

$$S_{\rho_0} [\boldsymbol{\lambda}^n(\mathbf{u})](\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_c} \omega_{\rho_0}(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) [\boldsymbol{\lambda}^n(\mathbf{u}(\mathbf{y}))] d\mathbf{y}. \quad (7.6)$$

$\mathbf{y}$  representa o conjunto de pontos adjacentes em contacto. O parâmetro  $\rho_0$  quantifica o carácter não-local da lei de atrito e procura quantificar a distribuição das asperidades da superfície de contacto. A função  $\omega_{\rho_0}$  pode ser definida por

$$\omega_{\rho_0}(x) = \begin{cases} c \exp\left[\frac{\rho_0}{(x^2 - \rho_0^2)}\right], & \text{se } |x| < \rho_0 \\ 0, & \text{se } |x| \geq \rho_0 \end{cases}. \quad (7.7)$$

$\omega_{\rho_0}(x) = 0$  quando  $\rho_0$  tende para zero. Esta lei de atrito não-local pode ainda ser combinada com uma lei não-linear, permitindo contemplar a observação experimental de que ocorre sempre algum deslizamento das superfícies. Caso se opte por um comportamento elástico-perfeitamente plástico para descrever os materiais em contacto, considera-se uma função  $\phi_e$  dada por

$$\phi_e(\mathbf{u}^t) = \begin{cases} 1, & \text{se } \|\mathbf{u}^t\| > \varepsilon \\ \|\mathbf{u}^t\| / \varepsilon, & \text{se } \|\mathbf{u}^t\| \leq \varepsilon \end{cases}, \quad (7.8)$$

em que o parâmetro  $\varepsilon$  traduz a rigidez das asperidades em contacto. Assim, a lei de atrito não-local e não-linear é dada na forma

$$\|\boldsymbol{\lambda}^t\| \leq -\mu S_{\rho_0} (\lambda^n(\mathbf{u})) \phi_e(\|\mathbf{u}^t\|) \frac{\mathbf{u}^t}{\|\mathbf{u}^t\|}. \quad (7.9)$$

Neste tipo de leis, a avaliação do coeficiente de atrito  $\mu$  e dos parâmetros  $\varepsilon$  e  $\rho_0$  exige uma correcta avaliação da área efectiva de contacto, o que corresponde a uma dificuldade suplementar em termos experimentais e numéricos.

Desenvolveram-se outras leis de atrito, também baseadas no formalismo da plasticidade, que recorrem à definição de uma superfície de deslizamento. Como exemplo refere-se a lei proposta por Hughes *et al.* [1995]

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\lambda}^t, s) = \|\boldsymbol{\lambda}^t\| - s, \quad (7.10)$$

em que  $s$  traduz a resistência ao deslizamento da superfície em contacto. Neste modelo,  $s$  é definido pela expressão

$$s = s^* \left[ \tanh\left(\frac{\mu P}{s^*}\right) \right] \quad \text{com} \quad s^* = s_0^* + (s_s^* + s_0^*) \left[ 1 - \exp\left(\frac{-u_s}{u_2}\right) \right]. \quad (7.11)$$

O modelo admite que o coeficiente de atrito  $\mu$ , que define a resistência ao deslizamento da superfície em contacto, é variável. A sua variação é dada pela expressão

$$\mu = \mu_0 + (u_s - u_0) \left[ 1 - \exp\left(\frac{-u_s}{u_1}\right) \right] \left[ 1 + a_1 \operatorname{sech}\left(\frac{-u_s}{u_2}\right) \right], \quad (7.12)$$

A utilização deste lei implica a avaliação experimental dos coeficientes numéricos de ajuste  $s_0^*$ ,  $s_s^*$ ,  $u_s$ ,  $u_2$ ,  $\mu_0$ ,  $u_1$  e  $a_1$ . A principal limitação deste modelo é o enorme conjunto de ensaios experimentais necessários para determinar os 7 parâmetros numéricos de ajuste. A sua validade está sempre limitada ao intervalo de pressões de contacto e de velocidades de escorregamento utilizadas na identificação dos parâmetros.

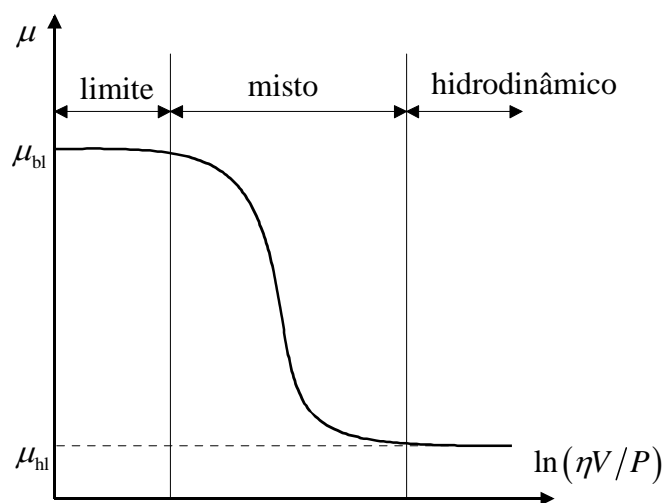


Figura 7.1 – Curva de Stribeck.

O comportamento tribológico de duas superfícies em contacto depende fortemente de propriedades mecânicas e topográficas como, por exemplo, a dureza, a geometria das asperidades e o tipo de revestimento. Um dos factores essenciais na descrição do

comportamento tribológico é o tipo de lubrificação da superfície de contacto. Um dos modelos mais utilizados para descrever o coeficiente de atrito em função do regime de lubrificação é o proposto por Stribeck em 1902 [Haar 1996]. Este modelo considera a evolução do coeficiente de atrito em função do número de Sommerfeld,  $S = \eta V/P$ , em que  $V$  é a velocidade relativa entre os dois corpos em contacto e  $\eta$  é a viscosidade do lubrificante utilizado. O número de Sommerfeld permite distinguir três regimes de lubrificação: (i) limite; (ii) misto e (iii) hidrodinâmico (ver Figura 7.1).

O modelo de Stribeck deve ser normalizado com a rugosidade da superfície de contacto, de modo a obter uma curva única que traduza a evolução do coeficiente de atrito. Nesse caso obtém-se [Emmens 1998]

$$\mu = \mu_{hl} + (\mu_{bl} - \mu_{hl}) \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh \left[ c \log \left( \frac{L}{L_0} \right) \right] \right\}, \quad (7.13)$$

em que os parâmetros  $c$  e  $L_0$  são calculados como

$$c = -\frac{2}{\log(L_{bl}/L_{hl})} \quad \text{e} \quad L_0 = \sqrt{L_{bl}L_{hl}}. \quad (7.14)$$

$L$  corresponde ao número de Sommerfeld corrigido com a rugosidade da superfície  $R_a$ , e é definido por

$$L = \frac{\eta V}{PR_a}. \quad (7.15)$$

Os parâmetros  $\mu_{bl}$  e  $\mu_{hl}$  designam o coeficiente de atrito para o regime limite e hidrodinâmico, respectivamente (ver Figura 7.1). Os parâmetros  $L_{bl}$  e  $L_{hl}$  correspondem ao valor de  $L$  na transição entre os diferentes regimes.

Os regimes de lubrificação identificados na curva de Stribeck dependem da quantidade de lubrificante presente entre as duas superfícies. Uma forma de estimar o regime de lubrificação é comparar a espessura do filme de lubrificante ( $h$ ) com a rugosidade média da superfície ( $R_a$ ). Para  $h \leq R_a$  ocorre o contacto físico entre as superfícies e a carga é suportada pelas asperidades. Este regime, designado por limite, caracteriza-se por exibir um coeficiente de atrito elevado e envolve fenómenos complexos como a rotura das asperidades e interações físico-químicas. Para  $h \geq 3R_a$  o regime é hidrodinâmico e caracteriza-se por exibir valores muito baixos do coeficiente de atrito, uma vez que as superfícies estão completamente separadas pelo lubrificante. Este regime pode ser dividido em: (i) um regime completamente hidrodinâmico, para  $h \geq 10R_a$  e (ii) um regime elasto-hidrodinâmico, para os valores intermédios. O último apresenta ainda alguma influência da rugosidade da superfície no escoamento do lubrificante. O regime misto, definido para  $R_a < h < 3R_a$ , caracteriza-se por exibir uma forte variação do coeficiente de atrito. Esta variação deve-se ao regime do tipo limite entre as asperidades e ao regime do tipo hidrodinâmico nas zonas correspondentes aos vales das superfícies em contacto. Por essa razão, este regime é fortemente influenciado pelas características microscópicas da superfície.

O regime completamente hidrodinâmico pode ser estudado recorrendo à equação de Reynolds para prever a evolução da espessura do filme de lubrificante, em função da pressão de contacto, da velocidade de escorregamento e da viscosidade do lubrificante. Adicionalmente, a equação de Reynolds pode ser corrigida de modo a contemplar a influência da rugosidade da superfície e descrever o regime elasto-hidrodinâmico. Esta

estratégia pode ser utilizada para considerar a variação e evolução do coeficiente de atrito em processos bidimensionais de conformação plástica [Martinet e Chabrand 2000].

Devido às dificuldades enunciadas para a descrição do regime misto, este é, geralmente, descrito por um coeficiente de atrito constante. Tal formulação, aplicada à simulação numérica de uma conformação com um punção hemisférico, revela que o contacto com atrito é essencialmente caracterizado por condições correspondentes ao regime misto e limite [Martinet e Chabrand 2000], o que está de acordo com observações experimentais do processo de estampagem [Magny 2002].

O modelo corrigido de Stribeck, apresentado na equação (7.13), pode ser combinado com a lei de atrito de Coulomb para a descrição do regime limite. Esta estratégia foi implementada no programa de simulação numérica DIEKA [Huétink 1986] e permitiu confirmar a influência da distribuição do coeficiente de atrito em parâmetros relacionados com as solicitações mecânicas na fase de conformação. No entanto, a análise de resultados alerta para a necessidade de dispor de um bom algoritmo de gestão do contacto. Ou seja, em termos de simulação numérica, o investimento na modelação do atrito deve ser precedido de uma correcta descrição do contacto [Haar 1996].

Durante o processo de conformação, as propriedades mecânicas e topográficas das superfícies em contacto alteram-se constantemente em consequência dos fenómenos associados ao deslizamento das duas superfícies, como sejam o desgaste, a deformação das asperidades, a rotura do revestimento, etc. No caso das ligas de alumínio, por exemplo, a evolução do coeficiente de atrito é influenciada pela pré-deformação a que o material foi sujeito anteriormente [Haar 1996, Westeneng 2001]. Do mesmo modo, um coeficiente de atrito constante dificilmente traduz o comportamento de chapas de aço com revestimento de zinco, tipicamente utilizadas na indústria automóvel. Neste caso, constata-se que, para revestimentos mais duros, o coeficiente de atrito se reduz ao longo do processo de deslizamento, enquanto que para revestimentos mais macios, o coeficiente de atrito aumenta. Para contemplar este tipo de fenómenos é necessário associar uma lei de evolução ao coeficiente de atrito, em função de uma variável interna como, por exemplo, o deslizamento total das superfícies. Esta aproximação permite, inclusive, avaliar o fenómeno de desgaste associando uma lei de desgaste como, por exemplo, a lei de Archard, ao modelo de contacto com atrito [Saracibar e Chiumenti 1999]. Ao utilizar como variável interna a resistência ao deslizamento, contempla-se a influência da pressão de contacto e do escorregamento relativo acumulado entre as duas superfícies sobre o coeficiente de atrito [Gearing *et al.* 2001]. Esta abordagem permite descrever comportamentos distintos como, por exemplo, o amaciamento ou encruamento da resistência ao deslizamento. Para descrever correctamente estes efeitos é necessário realizar um grande número de ensaios experimentais com diferentes pressões de contacto, distâncias e velocidades de deslizamento. A validade dos resultados obtidos está sempre limitada ao intervalo de parâmetros estudados. No caso particular de superfícies revestidas, a deformação plástica do corpo deformável pode conduzir a alterações drásticas das condições tribológicas. Estas alterações podem ser contempladas considerando como variável interna a alteração da superfície. Ou seja, admite-se que  $\mu = \mu(j)$  sendo  $j$  um factor de transformação de superfície, de tal forma que [Stupkiewicz 2001]

$$\mu(j) = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{2} \tanh\left(\frac{j - j_{cr}}{\Delta j}\right). \quad (7.16)$$

$j_{cr}$  é um valor crítico de expansão da superfície, para o qual o coeficiente de atrito aumenta bruscamente de  $\mu_1$  para  $\mu_2$ .  $\Delta j$  define a largura da zona de transição entre os dois valores do coeficiente de atrito.

A lei de atrito de Coulomb pode ser generalizada de modo a considerar a evolução do cone de atrito em função de uma ou mais variáveis internas. Para tal, caso se despreze a componente anisotrópica do coeficiente de atrito, é apenas necessário alterar a lei de atrito e a condição de complementaridade [Heege *et al.* 1995]

$$\|\lambda^t\| \leq -\mu(\theta)\lambda^n \quad \text{e} \quad \|\dot{\delta}^t\| \left[ \|\lambda^t\| + \mu(\theta)\lambda^n \right] = 0, \quad (7.17)$$

em que  $\mu(\theta)$  representa um coeficiente de atrito generalizado. O parâmetro  $\theta$  pode ser função de diferentes variáveis de estado como, por exemplo, a velocidade de escorregamento e a temperatura. Pode também ser função de variáveis internas, como o escorregamento acumulado ou o trabalho resultante da componente de atrito. Caso se considere que  $\theta$  é função do trabalho associado à componente de atrito ( $\Psi$ ) é possível introduzir no coeficiente de atrito efeitos de amaciamento ou encruamento. Para tal considera-se que o parâmetro que controla a evolução do coeficiente de atrito é definido como  $\theta[\Psi(\mathbf{u}, \lambda)]$ . Contabilizam-se assim os efeitos associados ao contacto sucessivo entre as duas superfícies. Para que a lei de evolução do coeficiente de atrito  $\mu(\theta)$  possa ser suficientemente genérica, adopta-se uma curva paramétrica para a sua descrição. Para tal, recorre-se à função de Bernstein de grau  $m$ , que permite descrever curvas de evolução complexas, e define-se o coeficiente de atrito evolutivo por

$$\mu\{\theta[\Psi(\mathbf{u}, \lambda)]\} = \sum_{i=0}^m B_{i,m}(\theta)P_i, \quad \text{com} \quad \theta \in [0,1]. \quad (7.18)$$

O coeficiente polinomial  $P_0$  corresponde ao coeficiente de atrito associado a um nó que não acumulou trabalho,  $\mu_{ini}$ . Por outro lado, assumindo que existe um valor limite para a variação do coeficiente de atrito com a variação da variável interna  $\mu_{est}$ , o coeficiente polinomial  $P_m$  corresponde a esse valor de estagnação. Na Figura 7.2 apresenta-se um exemplo de uma lei de evolução deste tipo. Esta lei foi implementada num programa de simulação numérica por elementos finitos, baseado numa formulação mista do problema de contacto com atrito. Uma vez que a lei de atrito de Coulomb é aplicada em cada nó de contacto, a cada nó passa a estar associado um cone de atrito evolutivo diferente. Nesta implementação opta-se por actualizar o valor do coeficiente de atrito de forma explícita, pois a sua variação em cada incremento é relativamente pequena. Ou seja, no final de cada incremento, uma vez atingida a convergência, o coeficiente de atrito de cada nó é actualizado em função da evolução da variável interna considerada. Os resultados obtidos revelam a versatilidade da formulação mista em lidar com evoluções gerais do coeficiente de atrito. No entanto, devido à dificuldade em medir as variações locais do coeficiente de atrito, não é possível correlacionar efectivamente a lei descrita com resultados experimentais [Heege *et al.* 1995].

A formulação mista do problema de contacto com atrito revela-se igualmente capaz de lidar com a descrição anisotrópica do atrito descrito pela lei de Coulomb. A descrição anisotrópica considera um disco elíptico em vez do disco circular apresentado na Figura 2.7. O disco elíptico é descrito, com o auxílio de uma função  $h$ , por [Alart 1992]

$$C(\lambda^n) = \left\{ \frac{\lambda^t}{h(\lambda^t/\lambda^n)} \leq 0 \right\}. \quad (7.19)$$

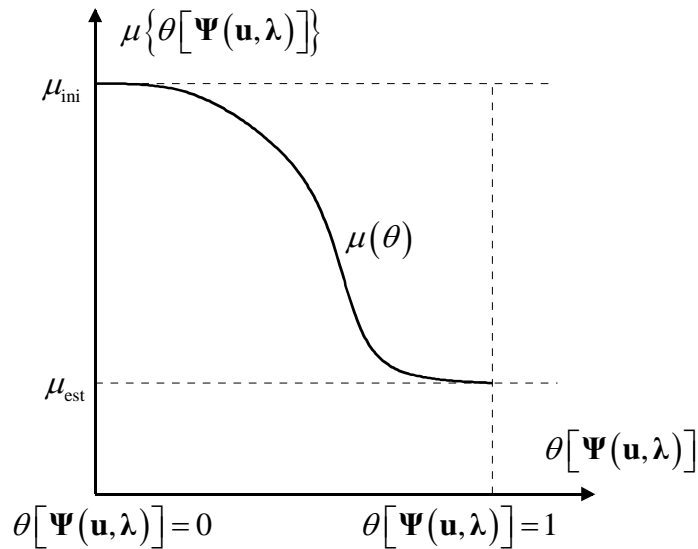


Figura 7.2 – Modelo para o contacto com atrito que contempla efeitos de amaciamento e encruamento.

Actualmente, a maioria dos programas de simulação numérica recorre à lei de atrito de Coulomb para descrever o contacto com atrito e considera que o coeficiente de atrito, para além de isotrópico, é constante em todas as zonas de contacto [Magny 2002]. A lei de atrito de Coulomb visa caracterizar o comportamento tribológico de dois corpos em contacto do tipo seco. A sua aplicação ao processo de estampagem é contestada por não considerar, à partida, a influência do lubrificante. Porém, admitindo como válida a aplicação da lei de atrito de Coulomb, é consensual que o coeficiente de atrito é influenciado por um amplo conjunto de factores. De entre estes realçam-se: (i) a micro e macro geometria da superfície de contacto; (ii) a velocidade de escorregamento  $V$ ; (iii) a pressão de contacto  $P$  e (v) a temperatura  $T$ . Esta sensibilidade do coeficiente de atrito dificulta o desenvolvimento de leis fenomenológicas suficientemente abrangentes para a descrição da sua evolução [Laursen e Oancea 1997]. Devido à dificuldade de um só modelo fenomenológico descrever o comportamento de vários materiais, opta-se por recorrer a leis empíricas de atrito do tipo  $\mu = f(P, V, T, \dots)$  para aproximar os resultados experimentais. A título de exemplo, Magny [2002] propõe a seguinte expressão:

$$\mu(P, V) = \alpha_1 + \alpha_2 V + \alpha_3 P + \alpha_4 (V + \alpha_5)^{\alpha_6} + \alpha_7 (P + \alpha_8)^{\alpha_9} + \frac{\alpha_{10} V}{P + \alpha_8} + \alpha_{11} \left( \frac{V + \alpha_5}{P + \alpha_8} \right)^{\alpha_{12}}, \quad (7.20)$$

em que  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, 12$  são parâmetros numéricos de ajuste aos resultados experimentais, sem qualquer significado físico. Este tipo de leis são válidas apenas para o intervalo de valores estudados experimentalmente e a sua extrapolação pode conduzir a pontos singulares.

A implementação deste tipo de leis de evolução do coeficiente de atrito num programa de elementos finitos pode ser associada à lei de Coulomb. No entanto, é necessário garantir *a priori* que a lei de evolução é suficientemente robusta para evitar resultados erróneos, associados a valores do coeficiente de atrito fora do domínio de validação da lei. A lei de evolução do coeficiente de atrito, apresentada na equação (7.20), é obtida para um material que não apresenta sensibilidade à distância de escorregamento  $l$ . Para um material que apresente sensibilidade a esta variável, a descrição da lei de atrito evolutiva  $\mu(P, V, l)$  envolve um total de 37 parâmetros numéricos de ajuste, cuja



determinação pode exigir mais de 200 ensaios experimentais, em função da gama de valores estudados [Magny 2002].

Uma forma de evitar a realização de ensaios experimentais que cubram toda a gama possível de valores dos diferentes parâmetros consiste em recorrer a redes neuronais para determinar uma função de aproximação. No entanto, esta estratégia conduz a um forte aumento do tempo de cálculo [Behrens e Schafstall 1998]. Outra estratégia consiste em descrever de forma exacta a microestrutura da interface. Porém, esta estratégia levanta algumas questões como, por exemplo, a avaliação da dimensão real da interface e a determinação das suas propriedades mecânicas. A sua implementação em programas de elementos finitos resulta em relações custo/precisão do cálculo baixas, em consequência da dimensão da interface ser muito inferior à dimensão do problema em análise [Lebon 2003, Bandeira *et al.* 2004]. A dificuldade associada às diferentes escalas do problema pode ser ultrapassada recorrendo a técnicas de homogeneização. Este tipo de análise envolve um estudo estatístico das superfícies em contacto e um modelo preciso para a descrição do comportamento das asperidades em contacto [Bandeira *et al.* 2004].

O carácter pouco abrangente das leis de atrito evolutivas propostas tem ditado a sua fraca utilização em programas de simulação numérica de processos de conformação por deformação plástica. Também, a sua implementação em programas de elementos finitos requer a avaliação da variável pressão de contacto  $P$ . Em geral, o cálculo da pressão de contacto implica avaliar a área de contacto, que é uma variável sensível ao refinamento de malha adoptado. Em consequência, é questionável a relação custo/benefício da sua implementação nos programas de simulação numérica. Entretanto, o coeficiente de atrito constante tem sido muitas vezes entendido como um parâmetro de ajuste, puramente numérico, entre os resultados de simulação e os resultados experimentais (força de estampagem, deslizamento da chapa, etc.). No entanto, alguns autores têm alertado para a necessidade de descrever correctamente as condições tribológicas, de modo a melhorar a capacidade dos programas de simulação numérica na previsão de defeitos de estampagem [Levaillant e Chenot 1992].

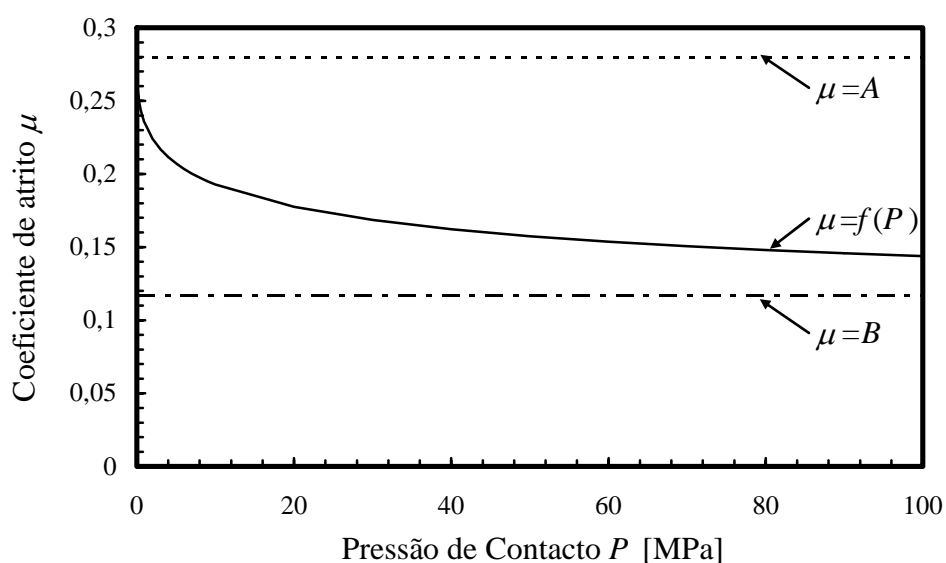


Figura 7.3 – Lei evolutiva para o coeficiente de atrito.

Pelas razões descritas, implementou-se no programa DD3IMP uma lei evolutiva para o coeficiente de atrito, associada à formulação mista do problema de contacto com atrito de Coulomb. A lei de atrito evolutiva considerada admite que o coeficiente de atrito  $\mu$  seja função apenas da variável interna pressão de contacto  $P$ . A evolução  $\mu(P)$  é obtida com uma lei do tipo Voce [Wouters *et al.* 2002]

$$\mu = B - (B - A) \exp(-mP^n). \quad (7.21)$$

$B$ ,  $A$ ,  $m$  e  $n$  são parâmetros numéricos de ajuste. Estes quatro parâmetros não têm qualquer significado físico. Porém, permitem obter ajustes aos resultados experimentais com grande precisão. Uma lei empírica deste tipo é interessante uma vez que apresenta valores finitos tanto para pressões de contacto nulas como infinitas, o que garante a sua estabilidade numérica (Figura 7.3).

## 7.2 Implementação no Programa DD3IMP

A implementação da lei de atrito evolutiva no programa DD3IMP envolve, essencialmente, a actualização do coeficiente de atrito em cada nó em contacto, em função da pressão de contacto. Surgem assim duas questões distintas a considerar: (i) quando proceder à actualização do coeficiente de atrito e (ii) como determinar a pressão de contacto.

O programa DD3IMP recorre a um único ciclo iterativo para a resolução das não-linearidades associadas ao comportamento elastoplástico do material e ao contacto com atrito. A actualização do coeficiente de atrito dentro do ciclo iterativo da fase de *Correcção* pode introduzir instabilidades numéricas adicionais. Assim, opta-se por proceder à actualização do coeficiente de atrito no final de cada incremento. No início de cada simulação atribui-se a todos os nós susceptíveis de estabelecer contacto com as ferramentas o valor de coeficiente de atrito constante  $\mu = A$ , correspondente à pressão de contacto nula (ver Figura 7.3). Uma vez obtida a configuração de equilíbrio de cada incremento  $N$  actualiza-se o valor do coeficiente de atrito em cada nó em contacto, antes de avançar para o incremento seguinte.

O algoritmo de contacto com atrito implementado permite conhecer a força de contacto em cada nó. Esta é avaliada num referencial local associado ao nó em contacto, definido a partir da normal à superfície da ferramenta com a qual o nó estabelece contacto. Deste modo, em cada incremento  $N$  é conhecida a força normal de contacto definida nesse referencial local ( $\lambda^n$ ). A determinação da pressão de contacto implica o cálculo da área de influência do nó  $A_{\text{final}}^{[\text{nó}]}$ . O cálculo da área aparente de contacto, associada a cada nó, pode ser determinada recorrendo ao princípio da acção-reacção como

$$\mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} A_{\text{final}}^{[\text{nó}]} = \lambda^n, \quad (7.22)$$

em que  $\mathbf{n}$  é o vector normal à superfície de contacto e  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor das tensões [Areias *et al.* 2004]. No entanto, o tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  é conhecido em cada ponto de integração do elemento, pelo que o recurso à expressão (7.22) obriga à extrapolação de  $\boldsymbol{\sigma}$  para os nós. Os algoritmos de extrapolação, além de caros, podem introduzir imprecisões no cálculo da pressão de contacto. O cálculo da área aparente de contacto pode ser realizado com base numa avaliação geométrica. Apresentam-se, de seguida, duas formas alternativas de proceder à estimativa geométrica da área de contacto. A primeira baseia-se no estatuto de

contacto dos nós adjacentes [Tanner 1996] e a segunda tem em conta, além do estatuto de contacto, a distância normal de contacto dos nós adjacentes. Ambas envolvem o cálculo da área da faceta em contacto de cada elemento finito adjacente ao nó e procedem apenas de modo distinto no cálculo da percentagem desta área a atribuir ao nó. O primeiro método foi designado por algoritmo do estatuto de contacto, e o segundo por algoritmo da distância normal e estatuto de contacto.

### 7.2.1 Algoritmo do Estatuto de Contacto

Neste caso, o cálculo da área de contacto de um nó é feito com base na área das facetas em contacto dos elementos finitos a que esse nó pertence. Assim, o primeiro passo é identificar os elementos finitos a que o nó pertence e todos os nós desses elementos susceptíveis de estabelecer contacto. Na Figura 7.4 (a) representam-se, num esquema bidimensional, os nós susceptíveis de estabelecer contacto de quatro elementos finitos. Estes quatro elementos são os necessários para avaliar a área de contacto associada ao nó 4, representado na mesma figura. É possível determinar a área da faceta de cada elemento,  $A^{(e)}$ , com base nas coordenadas de cada um dos quatro nós dos vértices da faceta. Atribui-se a cada nó uma área correspondente a um quarto da área da faceta do elemento ( $A^{[nó]} = 0,25A^{(e)}$ ). Considerando, por exemplo, que  $A^{(1)}$  é a área da faceta do elemento 1,  $0,25A^{(1)}$  corresponde à área aparente de contacto do nó 4 se todos os nós do elemento 1 estiverem também em contacto com a ferramenta (zona a cinzento da Figura 7.4 (b)). No entanto, se nem todos os nós do elemento 1 susceptíveis de estabelecer contacto estiverem efectivamente em contacto, é necessário introduzir um factor de correcção para esta área, como se representa a tracejado na Figura 7.4 (b).

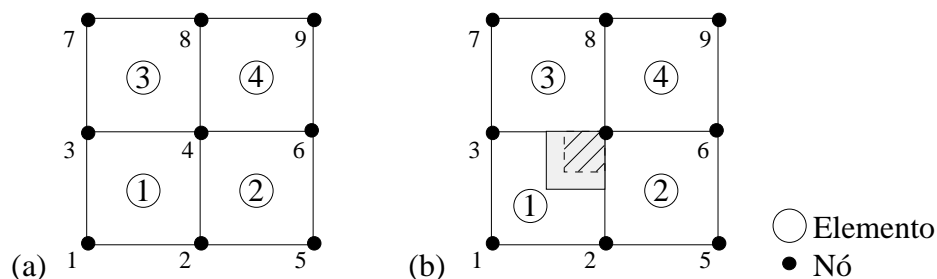


Figura 7.4 – Representação esquemática da avaliação da área de contacto do nó 4: (a) elementos finitos adjacentes e (b) avaliação da área associada ao elemento finito 1.

A função de correcção adoptada é dada pela expressão seguinte:

$$A_{\text{corr}}^{[nó]} = 0,5 \left( 1,0 + \frac{\sum_{k=1}^{n_{ct}} c_t}{n_{ct}} \right) A^{[nó]}, \quad \text{com} \quad c_t = \begin{cases} 1, & \text{se nó } k \text{ em contacto} \\ 0, & \text{se nó } k \text{ livre} \end{cases}. \quad (7.23)$$

$n_{ct}$  corresponde ao número total de nós do elemento adjacentes ao nó, para o qual a função de correcção é calculada. Para elementos finitos hexaédricos  $n_{ct}$  é igual a 3. Se os três nós adjacentes estão em contacto, a área corrigida corresponde a um quarto da área da faceta do elemento. A função de correcção varia de forma linear e no caso limite de nenhum dos nós adjacentes estar em contacto, impõe um factor de correcção de 0,5. Nessas circunstâncias atribui-se ao nó uma área correspondente a um oitavo da área da faceta do elemento.

Este procedimento é repetido para cada elemento finito a que o nó pertence. No final calcula-se a área de contacto do nó, através de

$$A_{\text{final}}^{[\text{nó}]} = \sum_{i=1}^{el} A_{\text{corr}}^{[\text{nó}]}, \quad (7.24)$$

sendo  $el$  o número total de elementos finitos a que o nó pertence. A pressão de contacto de cada nó é determinada pelo quociente entre a força normal de contacto e a área de contacto estimada.

## 7.2.2 Algoritmo da Distância Normal e do Estatuto de Contacto

A função de correcção da área de contacto, proposta na secção anterior, pode ser contestada por conduzir ao mesmo valor de área de contacto independentemente da distância normal de contacto dos nós adjacentes. Na Figura 7.5 exemplifica-se essa situação. Assumindo que em ambas as situações ilustradas (figuras (a) e (b)), os nós 3 e 6 estão livres, pelo método anterior, a área corrigida atribuída ao nó 4 é idêntica em (a) e (b). No entanto, na situação (a) pode admitir-se que, apesar dos nós 3 e 6 estarem livres, como a distância normal de contacto à superfície candidata é nula, não deve ser feita correcção à área de contacto. A correcção deve efectuar-se apenas se os nós adjacentes livres apresentarem distâncias normais positivas (ver nó 3 na Figura 7.5 (b)). Neste caso, a área de contacto deve diminuir com o aumento da distância normal de contacto dos nós adjacentes.

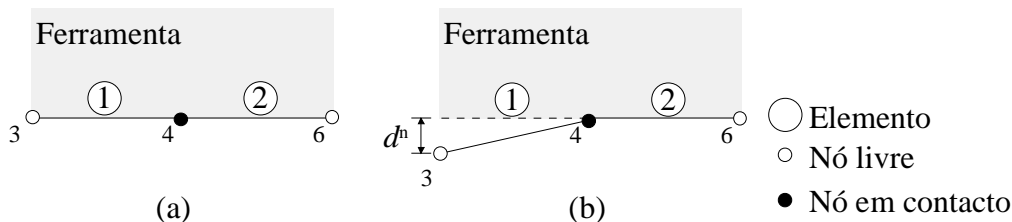


Figura 7.5 – Representação esquemática da influência da distância normal de contacto na avaliação da área de contacto de um nó: com o algoritmo baseado no estatuto de contacto dos nós adjacentes, as situações (a) e (b) conduzem a áreas de contacto iguais para o nó 4.

No cálculo da área de contacto aparente pode considerar-se a distância normal de contacto, adoptando a função de correcção da área dada pela seguinte expressão:

$$A_{\text{corr}}^{[\text{nó}]} = 0.5 \left( 1.0 + \frac{\sum_{k=1}^{nct} c_t}{n_{ct}} \right) A^{[\text{nó}]}, \text{ com } c_t = \begin{cases} 1 & , \text{ se nó } k \text{ em contacto ou } d^n = 0 \\ \frac{1}{d^n + 1.0} & , \text{ se nó } k \text{ livre} \end{cases}. \quad (7.25)$$

À semelhança da solução anterior, após a determinação da área de contacto corrigida para cada elemento, é necessário calcular a área de contacto final do nó com o auxílio da expressão (7.24). A pressão de contacto de cada nó resulta do quociente entre a força normal de contacto e a área de contacto estimada.

A Tabela 7.1 resume os procedimentos para a actualização do coeficiente de atrito, que são introduzidos no algoritmo de *Correcção* (ver Tabela 3.3), na fase correspondente ao item 6 (reactualização das variáveis de estado).

Tabela 7.1 – Algoritmo de actualização do coeficiente de atrito.

<p>REPETIR para todos os nós susceptíveis de estabelecer contacto</p> <p><b>1.</b> Verificar se o nó tem estatuto de contacto associado.</p> <p>SE o nó tem estatuto de contacto associada ENTÃO:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▫ Identificar nós adjacentes susceptíveis de estabelecer contacto.</li> <li>▫ Calcular área de cada elemento finito ao qual o nó pertence <math>A^{(e)}</math>.</li> <li>▫ Calcular área de contacto corrigida de cada elemento finito <math>A_{\text{corr}}^{[\text{nó}]}</math>;</li> <li>▫ Calcular área de contacto total <math>A_{\text{final}}^{[\text{nó}]} = \sum^{el} A_{\text{corr}}^{[\text{nó}]}</math>.</li> <li>▫ Calcular pressão de contacto do nó <math>P^{[\text{nó}]} = \lambda^n / A_{\text{final}}^{[\text{nó}]}</math>.</li> <li>▫ Calcular coeficiente de atrito <math>\mu^{[\text{nó}]} = \mu(P^{[\text{nó}]})</math>.</li> </ul> <p>SENÃO</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▫ Atribuir ao nó o coeficiente de atrito por defeito <math>\mu^{[\text{nó}]} = A</math>.</li> </ul>
--

### 7.3 Exemplo Numérico

O exemplo numérico seleccionado para avaliar a influência da distribuição do coeficiente de atrito é a conformação de um perfil U, cuja geometria é a definida na Figura 7.6. O esboço inicial é uma chapa de  $300 \times 300$  [mm<sup>2</sup>] com 1 mm de espessura, cuja discretização é feita com elementos finitos sólidos hexaédricos associados a uma integração reduzida selectiva [Alves e Menezes 2001]. Devido à simetria geométrica e material, apenas um quarto da estrutura é simulada. A malha seleccionada corresponde a uma discretização uniforme no plano da chapa com um tamanho médio do elemento de 2 mm, com duas camadas de elementos em espessura. O material seleccionado é a liga de alumínio 6016-T4, cujo encruamento isotrópico é descrito com o auxílio de uma lei do tipo Voce e o encruamento cinemático é descrito pela lei de Lemaître e Chaboche. A anisotropia da chapa é descrita pelo critério de Hill'48. Na Tabela E.1 do Anexo E apresentam-se os parâmetros constitutivos do material [LPMTM 2001].

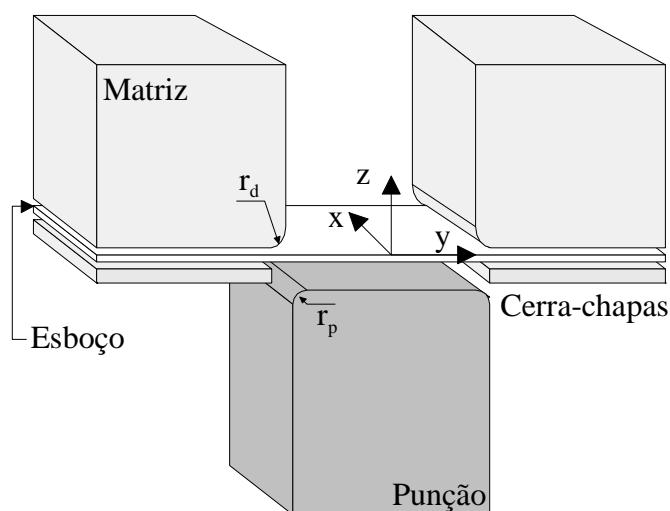


Figura 7.6 – Representação da geometria das ferramentas e do esboço para a conformação do perfil U.

A força de aperto inicial do cerra-chapas é 200 kN e cresce com o deslocamento do punção. Para este valor de força de aperto, os valores recomendados para o coeficiente de atrito correspondem a: (i) 0,195 para as zonas de contacto planas; (ii) 0,16 para a zona de curvatura da matriz e (iii) 0,21 para a zona de curvatura do punção [Wouters *et al.* 2002]. A simulação realizada com esta distribuição do coeficiente de atrito é designada por *Atrito por Zona*. Uma vez que estes valores são muito superiores aos utilizados na prática industrial, testa-se igualmente o valor constante de 0,10 para todas as zonas de contacto [Rohleder *et al.* 2002]. A simulação realizada nestas condições é designada seguidamente por *Atrito 0,10*.

A lei de atrito evolutiva determinada para este material apresenta os seguintes parâmetros:  $B = 0,117$ ,  $A = 0,28$ ,  $m = 0,326$  e  $n = 0,371$ , que corresponde à evolução representada na Figura 7.3 [Wouters *et al.* 2002]. A lei evolutiva é testada com as duas formas distintas de cálculo da área de contacto. A simulação realizada com o cálculo da área de contacto baseado apenas no estatuto dos nós é designada por *Lei de Atrito (1)*. A simulação realizada com a área de contacto calculada com base também na distância normal de contacto é designada por *Lei de Atrito (2)*.

Uma vez que o coeficiente de atrito é actualizado em cada incremento de deslocamento, estuda-se também a influência do tamanho do incremento. Para efectuar esta análise, actua-se sobre os parâmetros de controlo da estratégia  $r_{\min}$  (ver secção 3.2.1.1) de modo a diminuir o tamanho do incremento. A influência do tamanho do incremento é avaliada para as duas estratégias de cálculo da área aparente de contacto. Estas simulações são designadas por *Lei de Atrito (1/2)* e *Lei de Atrito (2/2)*. Na Tabela 7.2 resumem-se as características principais das simulações realizadas.

Tabela 7.2 – Simulações realizadas para o perfil U na análise do modelo de descrição do coeficiente de atrito.

	<i>Atrito 0,10</i>	<i>Atrito por Zonas</i>	<i>Lei de Atrito (1)</i>	<i>Lei de Atrito (2)</i>	<i>Lei de Atrito (1/2)</i>	<i>Lei de Atrito (2/2)</i>
$\mu$	Constante, 0,10	Constante por Zonas	Lei evolutiva	Lei evolutiva	Lei evolutiva	Lei evolutiva
$A_{\text{final}}^{[\text{nó}]}$			Equação (7.23)	Equação (7.25)	Equação (7.23)	Equação (7.25)
Estratégia $r_{\min}$		$\Delta\varepsilon_{\max} = 0,050$ $\Delta\omega_{\max} = 2,50$ $a = 7,0$ $b = 7,0$		$\Delta\varepsilon_{\max} = 0,025$ $\Delta\omega_{\max} = 1,25$ $a = 3,5$ $b = 3,5$		

Na Figura 7.7 apresenta-se a evolução da força do punção em função do seu deslocamento. Considerando como referência a simulação *Atrito 0,10*, constata-se um aumento de cerca de 100% para a força máxima prevista pela simulação *Atrito por Zonas* e de 64% para as simulações com a lei de atrito evolutiva. Não se observam diferenças na evolução da força do punção para as duas funções de determinação da pressão de contacto, nem qualquer influência do tamanho médio do incremento. As simulações realizadas com a lei de atrito evolutiva apresentam uma evolução com um patamar mais homogéneo e portanto menos sensível ao aumento crescente da força de aperto do cerra-chapas. Na Figura 7.7 mostram-se também as curvas de evolução de força do

punção obtidas experimentalmente<sup>1</sup>. As simulações que conduzem à melhor aproximação para o valor máximo de força do punção são as realizadas com a lei de atrito evolutiva.

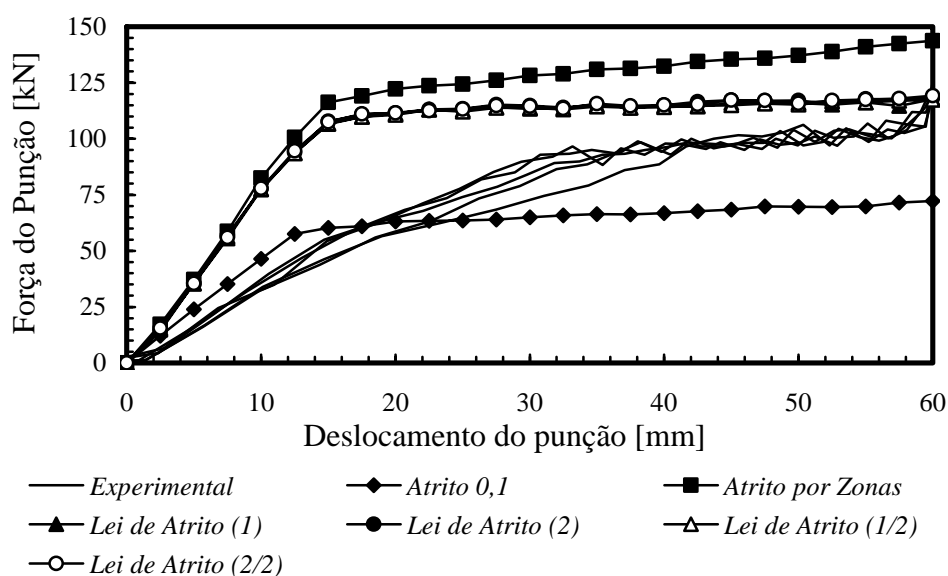


Figura 7.7 – Evolução da força do punção, na simulação da conformação do perfil U. Influência do modelo de descrição do coeficiente de atrito.

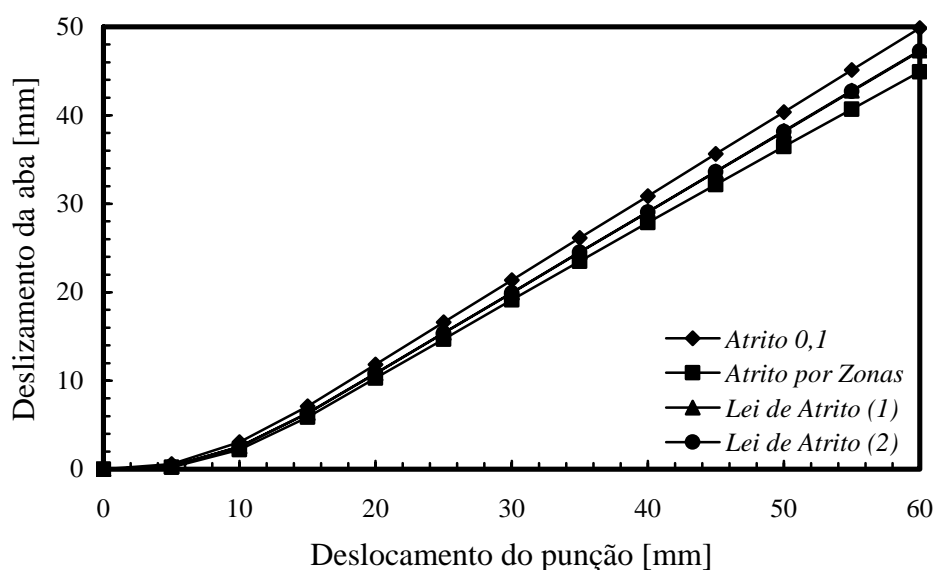


Figura 7.8 – Evolução do deslizamento da aba com o deslocamento do punção, na simulação da conformação do perfil U. Influência do modelo de descrição do coeficiente de atrito.

O aumento global da força máxima prevista está associado ao aumento do valor médio do coeficiente de atrito que se observa para a simulação *Atrito por Zonas*, bem como para as simulações realizadas com a lei de atrito evolutiva. Este aumento induz diferenças no deslizamento da aba do perfil U, como se pode observar na Figura 7.8, onde se apresenta a evolução do deslizamento da aba com o deslocamento do punção. As diferenças observadas no deslizamento da aba nas diferentes simulações são menores do que as observadas para a força do punção. Considerando como referência o deslizamento

<sup>1</sup> Resultados cedidos pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, no âmbito do projecto 3DS.

da aba obtido no final da fase de avanço para a simulação *Atrito 0.1*, constata-se uma redução de 10% no deslizamento da aba na simulação *Atrito por Zonas* e de 6% para as simulações com a lei de atrito evolutiva. A redução do deslizamento da aba é suficiente para induzir um maior estiramento da parede vertical do perfil U, associado a um aumento global da deformação plástica equivalente, como se mostra na Figura 7.9. Nesta figura é possível observar que o aumento da deformação plástica equivalente ocorre também nas zonas de curvatura do punção e da matriz, em particular para a simulação realizada com o coeficiente de atrito constante por zonas. No deslizamento da aba e na distribuição da deformação plástica equivalente não se constata diferenças induzidas pelas diferentes formas de determinação da área aparente de contacto, nem pelo tamanho médio do incremento.

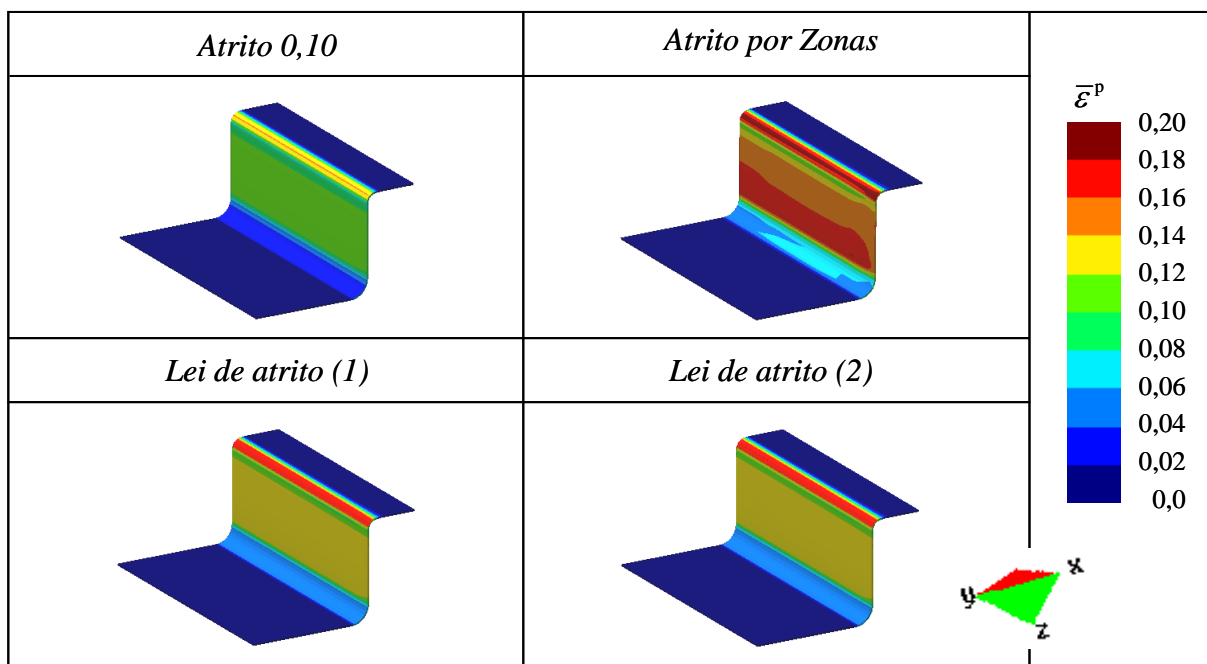


Figura 7.9 – Isovalores de deformação plástica equivalente para o perfil U, na simulação da conformação do perfil U. Influência do modelo de descrição do coeficiente de atrito.

As geometrias previstas para a secção média transversal, após retorno elástico, são as que se mostram na Figura 7.10. Não existem diferenças significativas entre as secções previstas com os diferentes algoritmos de avaliação da área de contacto, nem com diferente dimensão do incremento de deslocamento. Os resultados apresentados para o retorno elástico das abas estão correlacionados com as distribuições de deformação plástica equivalente apresentados na Figura 7.9. De facto, a simulação *Atrito por Zonas* apresenta os maiores níveis de deformação plástica na parede vertical. Deste modo, após retorno elástico, apresenta uma parede vertical de menor curvatura que contribui para a redução do ângulo de retorno elástico da aba. Na Figura 7.10 apresentam-se dois resultados experimentais obtidos por [Reis *et al.* 2003]. A comparação dos resultados numéricos e experimentais realça a importância do recurso a uma lei evolutiva para a descrição do coeficiente de atrito.

Para quantificar as diferenças induzidas pelo coeficiente de atrito na geometria final da secção transversal recorreu-se a um programa específico de comparação de geometrias, o *NXT Post Processor II* [Kase *et al.* 1999]. Na Figura 7.11 apresenta-se a evolução do ângulo de retorno elástico da secção transversal média. Mostra-se também a evolução da



geometria ideal de CAD. As diferenças mais significativas nos ângulos de retorno elástico ocorrem para o ângulo da aba designado por  $\alpha$  e no ângulo da parede vertical designado por  $\theta_3$ , o que confirma a interdependência do retorno elástico com as distribuições de deformação plástica equivalente. A comparação com a evolução do ângulo de retorno elástico obtido experimentalmente permite confirmar que, a melhor correlação é obtida considerando a dependência do coeficiente de atrito da pressão de contacto.

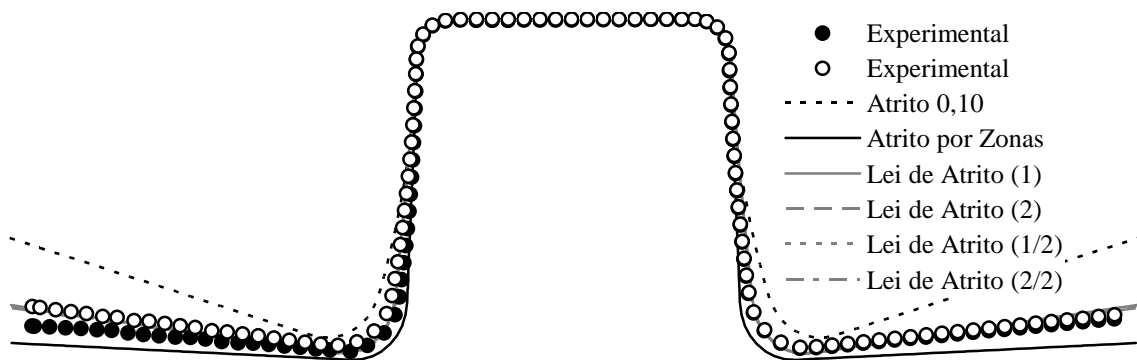


Figura 7.10 – Secção transversal do plano de simetria do perfil U, após retorno elástico. Influência do modelo de descrição do coeficiente de atrito.

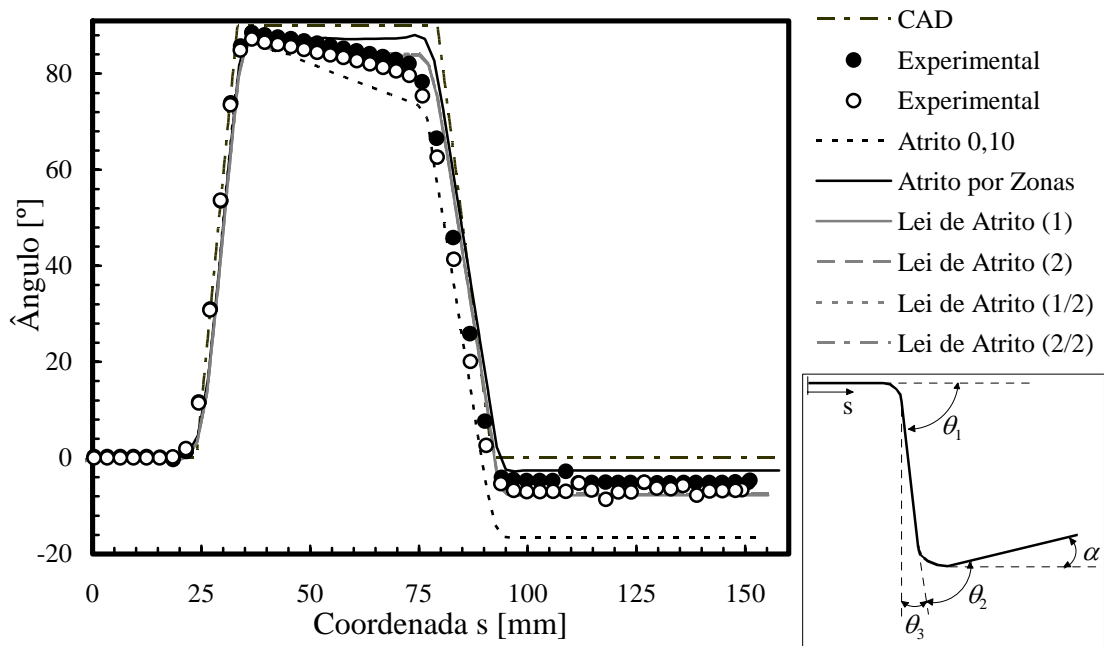


Figura 7.11 – Evolução do ângulo de retorno elástico na secção transversal do plano de simetria do perfil U. Influência do modelo de descrição do coeficiente de atrito.

Na Figura 7.12 apresenta-se o resumo dos dois ângulos,  $\alpha$  e  $\theta_3$ , previstos para as diferentes distribuições do coeficiente de atrito. Considerando como referência a geometria prevista com o coeficiente de atrito constante igual a 0,10, constata-se que o ângulo  $\alpha$  apresenta uma redução de aproximadamente 55% para as simulações realizadas com a lei de atrito evolutiva e de 84% para a distribuição por zonas. A redução é ainda maior para o ângulo  $\theta_3$ , atingindo os 80% para as simulações com a lei de atrito evolutiva e 94% para a distribuição por zonas. A comparação com os resultados

experimentais confirma a melhor correlação obtida pelas simulações realizadas com a lei de atrito evolutiva, em particular para o ângulo  $\alpha$ . As diferenças induzidas pela diferente forma de cálculo da área de contacto são mínimas. Também o tamanho do incremento induz diferenças desprezáveis (inferiores a 5%) nos ângulos de retorno elástico previstos.

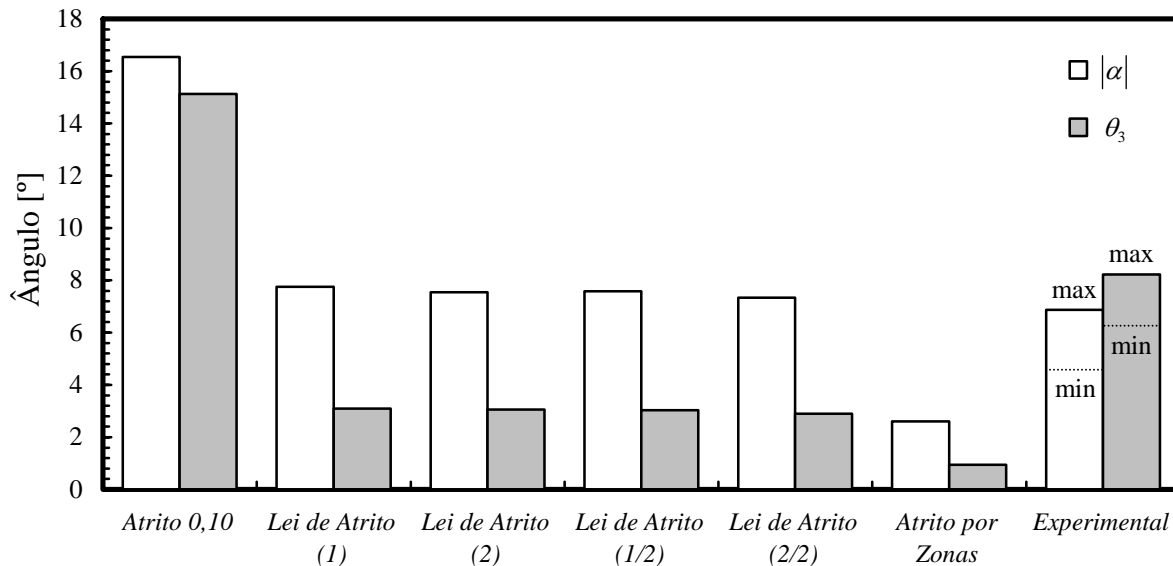


Figura 7.12 – Ângulos de retorno elástico previstos na simulação da conformação do perfil U. Influência do modelo de descrição do coeficiente de atrito.

Na Figura 7.13 apresenta-se a distribuição da pressão de contacto para um deslocamento do punção de 20, 40 e 60 mm, para as duas funções distintas de avaliação da área de contacto. A pressão de contacto apresenta diferenças entre as duas simulações, sendo que a função de cálculo baseada na distância normal de contacto (*Lei de Atrito (2)*) apresenta valores 15% inferiores aos estimados pela função baseada apenas nos estatutos de contacto dos nós (*Lei de Atrito (1)*). No entanto, as diferenças nos valores de força normal de contacto são inferiores a 1% (ver Figura 7.7). Na geometria em estudo, a força de contacto máxima surge na parede vertical, próxima da zona de curvatura do punção. Para o deslocamento do punção de 60 mm a diferença na pressão máxima de contacto aumenta em resultado da actualização dos estatutos de contacto dos nós para a fase seguinte de retorno elástico. Isto porque, todos os nós em contacto com a ferramenta punção passam a ter atribuído o estatuto de contacto livre. Este facto altera o valor da área estimada pela função baseada nos estatutos de contacto. Este aumento da pressão de contacto, e a conseqüente diminuição do coeficiente de atrito, não influencia os resultados finais porque estes nós passam a ter estatuto de contacto livre até ao final da simulação. Optou-se por apresentar este resultado para alertar para a maior sensibilidade da função baseada apenas nos estatutos de contacto no cálculo da área aparente de contacto.

Os parâmetros numéricos da lei de atrito evolutiva foram determinados com base num conjunto de ensaios experimentais realizados para uma gama de pressões de contacto no intervalo de 0,5 a 80 MPa [Wouters *et al.* 2002]. A Figura 7.13 permite aferir que os valores de pressão de contacto estimados ultrapassam esta gama de valores, utilizada nos ensaios experimentais. No entanto, a estabilidade numérica da lei evolutiva

utilizada permite a sua extrapolação sem a necessidade de recorrer a artifícios numéricos adicionais.

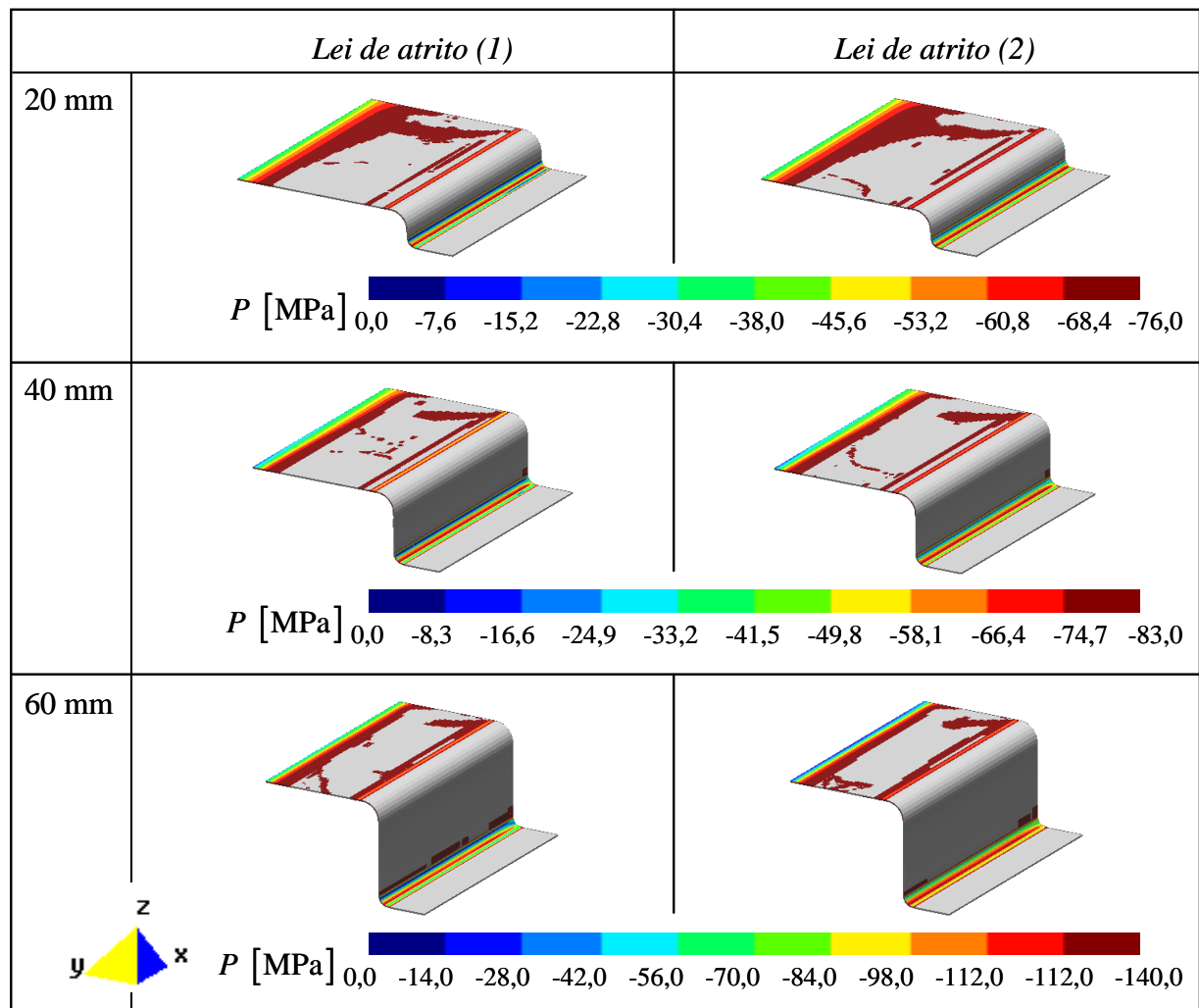


Figura 7.13 – Isovalores da pressão de contacto para três valores de deslocamento do punção, obtidos na simulação do perfil U. Influência do algoritmo de cálculo da área de contacto.

Na Figura 7.14 apresenta-se a distribuição do coeficiente de atrito obtida para as simulações *Lei de Atrito (1)* e *Lei de Atrito (2)* para três valores de deslocamento do punção (20, 40 e 60 mm). A distribuição do coeficiente de atrito, bem como a zona de contacto efectiva entre o corpo deformável e as ferramentas, evoluem de modo semelhante para as duas simulações. A semelhança nas distribuições do coeficiente de atrito resulta de a lei de atrito evolutiva apresentar um patamar de saturação, onde grandes variações de pressão de contacto induzem pequenas variações do coeficiente de atrito. Esta figura evidencia o facto de que nós com pequenas pressões de contacto têm associados valores elevados de coeficiente de atrito, em particular nas zonas de contacto plano. A distribuição do coeficiente de atrito no final da fase de conformação permite aferir os valores propostos para a simulação com coeficientes de atrito constantes por zonas. A distribuição do coeficiente de atrito correlaciona-se de modo correcto com os valores médios atribuídos. Para a zona de contacto plano, os valores médios previstos pela lei evolutiva são ligeiramente mais altos que os utilizados nas simulações com o coeficiente de atrito constante por zonas. Em contrapartida, para a zona de curvatura do punção, os valores médios previstos pela lei evolutiva são inferiores aos utilizados na

simulação com o coeficiente de atrito constante por zonas. A evolução do coeficiente de atrito ao longo da simulação permite ainda constatar que os valores médios característicos de cada zona são aproximadamente constantes.

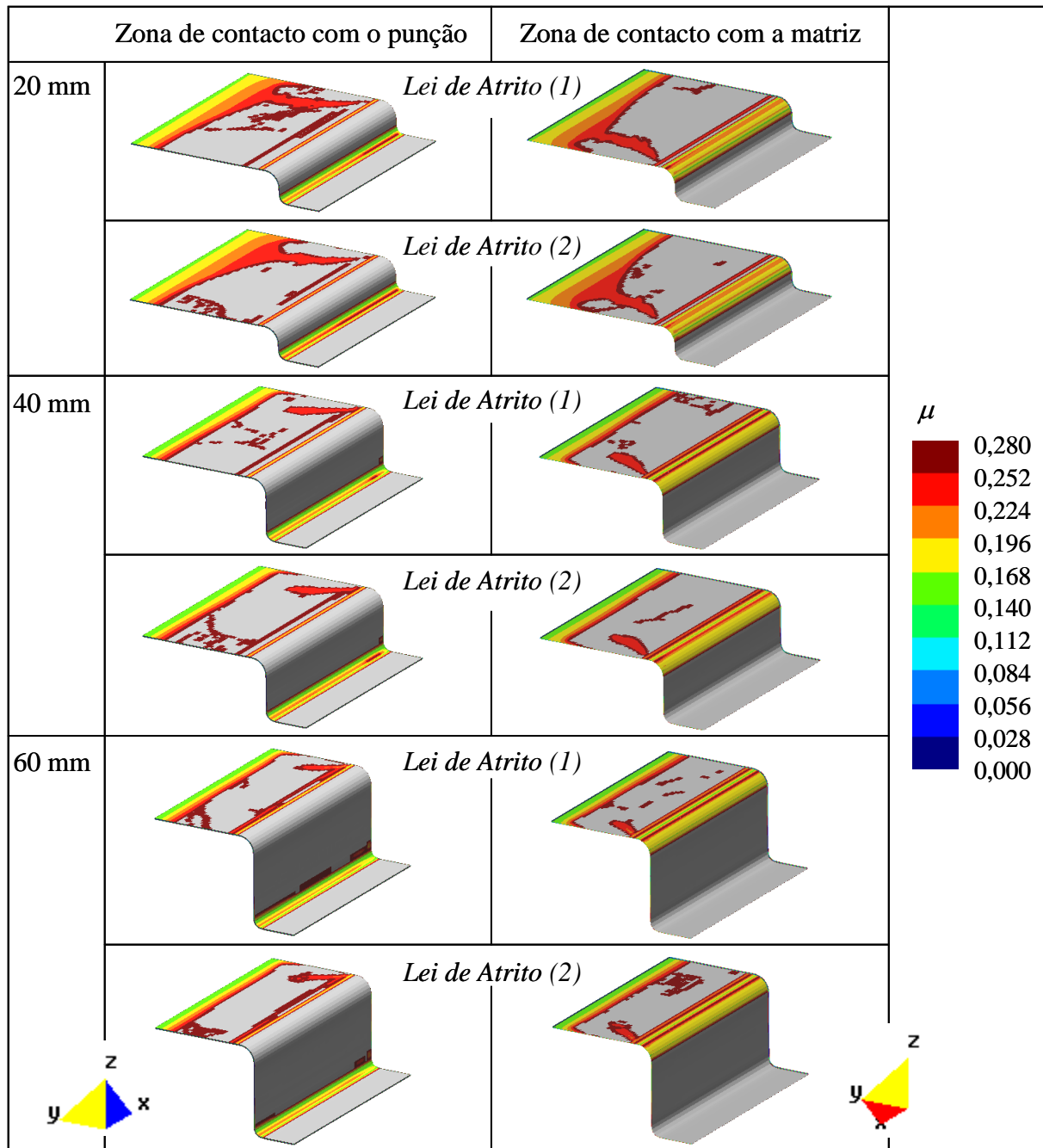


Figura 7.14 – Isovalores de coeficiente de atrito obtidos na simulação do perfil U, recorrendo à lei de atrito evolutiva.

Os resultados obtidos evidenciam uma boa correlação entre os coeficientes de atrito médios estimados ao longo da simulação pela lei evolutiva e os valores propostos para os coeficientes de atrito constantes. No entanto, na análise precedente evidenciaram-se diferenças na força máxima prevista, no deslizamento da aba, nos ângulos de retorno elástico e na deformação plástica equivalente. Estas resultam da evolução da distribuição do coeficiente de atrito no decurso da simulação do processo de conformação. No final da fase de aperto do cerra-chapas, este estabelece contacto com toda a flange. Isto equivale a

uma pressão de contacto da ordem dos 3 MPa (a força de aperto é de 200 kN e a área da flange é de 66000 mm<sup>2</sup>). Para este valor de pressão de contacto, o valor estimado para o coeficiente de atrito na zona de contacto plana pela lei evolutiva é de 0,216, claramente superior ao valor médio constante utilizado de 0,195 para esta zona. Quando o punção inicia o seu deslocamento, a força normal de contacto exercida pelo cerra-chapas deixa de estar uniformemente distribuída por toda a flange e localiza-se no bordo exterior da aba, como se mostra na Figura 7.15. Nesta figura apresenta-se a evolução da força normal de contacto na simulação do perfil U, para as simulações *Atrito por Zonas* e *Lei de Atrito (2)*.

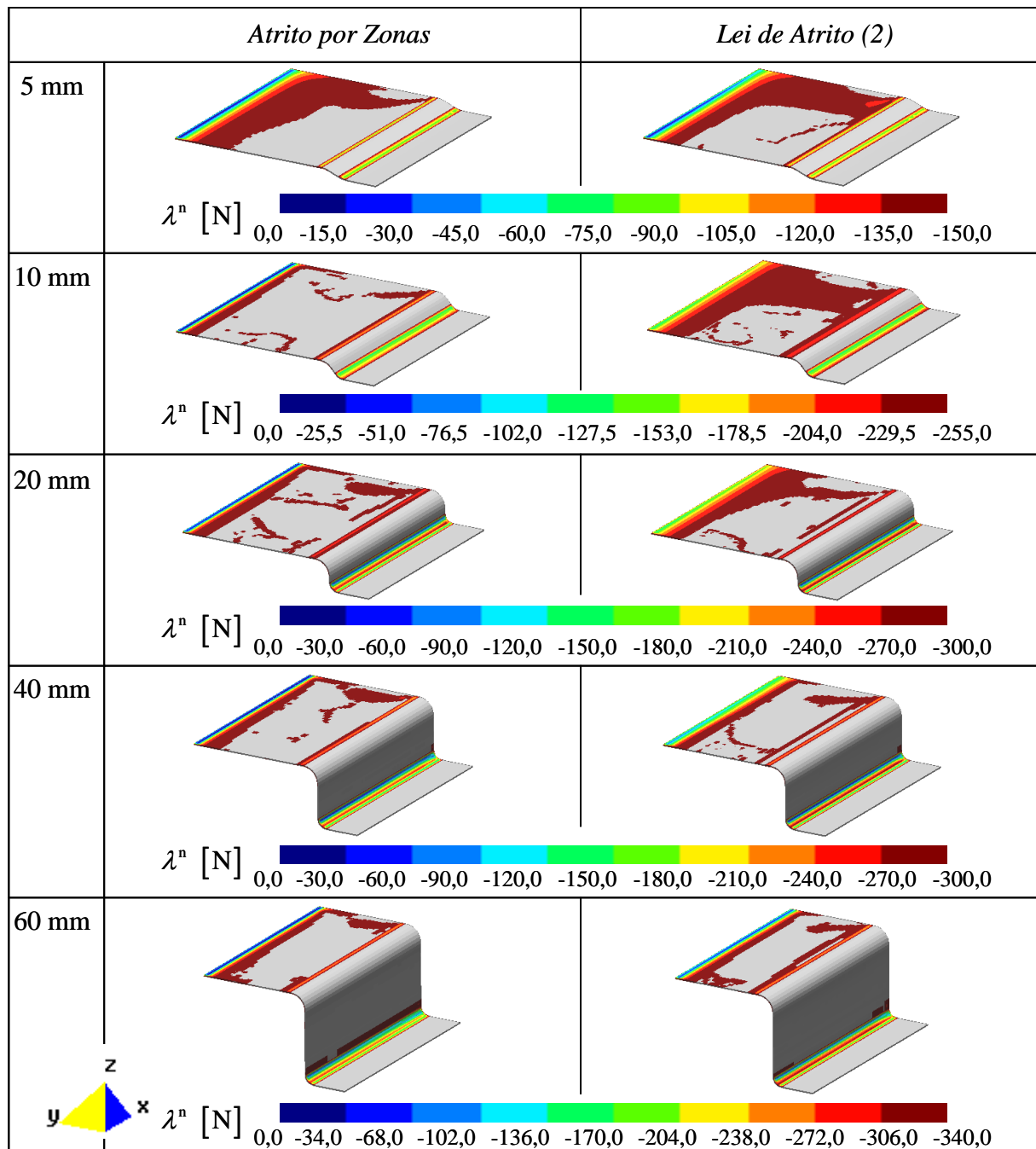


Figura 7.15 – Isovalores de força normal de contacto obtidos na simulação do perfil U. Influência do modelo de descrição do coeficiente de atrito.

A localização da força normal de contacto conduz, nas simulações realizadas com a lei de atrito evolutiva, a uma redução do coeficiente de atrito, uma vez que este varia de forma inversamente proporcional à pressão de contacto (ver Figura 7.14). A redução do coeficiente de atrito permite o deslizamento da aba do perfil, o que garante um menor estiramento do material na zona da flange e, conseqüentemente, uma maior distribuição da força de contacto. Na simulação realizada com o coeficiente de atrito constante por zonas, a localização da força normal de contacto na aba exterior contribui para aumentar a força tangencial mínima necessária para o deslizamento da aba. Deste modo, o deslizamento da aba é menor para a simulação *Atrito por Zonas* (ver Figura 7.8). Quanto menor é o deslizamento da aba, maior é o estiramento imposto ao material da flange. Tal obriga ao aperto do cerra-chapas para garantir contacto com a flange e contribui para dificultar a distribuição da força normal exercida pelo cerra-chapas. Sendo a área de contacto menor para a simulação *Atrito por Zonas*, a força normal de contacto exercida pelo cerra-chapas em cada ponto tem de aumentar de modo a garantir a mesma força total, o que tende a dificultar o escoamento do material da flange. Além disso, a folga entre o cerra-chapas e a matriz tem de diminuir de modo a garantir uma área efectiva de contacto para aplicação da força.

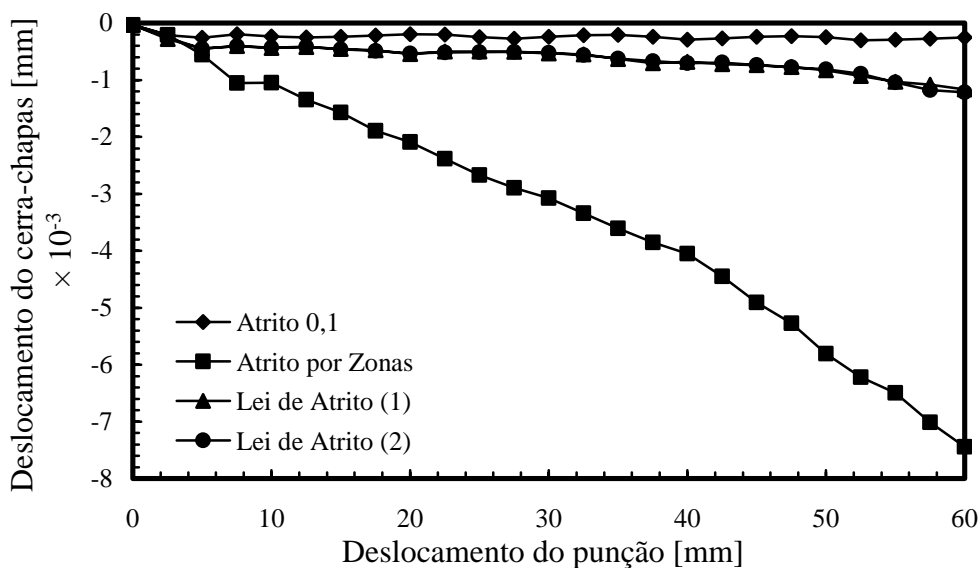


Figura 7.16 – Evolução do deslocamento do cerra-chapas com o deslocamento do punção na conformação do perfil U. Influência do modelo de descrição do coeficiente de atrito.

Na Figura 7.16 apresenta-se a evolução do deslocamento do cerra-chapas com o deslocamento do punção. O deslocamento da ferramenta cerra-chapas é negativo em todas as simulações realizadas, o que corresponde a uma diminuição da folga entre a matriz e o cerra-chapas. No final da fase de avanço do punção, o deslocamento do cerra-chapas da simulação *Atrito por Zonas* é seis vezes superior ao da simulação *Lei de Atrito (2)*. Tal indicia o maior estiramento do material em contacto com o cerra-chapas, na simulação *Atrito por Zonas*. No final da fase de avanço do punção a distribuição da força normal de contacto para a simulação *Atrito por Zonas* e *Lei de Atrito (2)* é muito semelhante (ver Figura 7.15). Ambas apresentam uma forte localização da força normal de contacto no bordo exterior da aba, em resultado da diminuição da área total da flange. No entanto, o coeficiente de atrito desta zona para a simulação *Lei de Atrito (2)* é de

0,145 (ver Figura 7.14), valor muito inferior ao utilizado na simulação *Atrito por Zonas* de 0,195.

Para avaliar a relação custo/benefício da implementação da lei de atrito evolutiva é importante determinar a sua influência no tempo de cálculo da simulação. Em geral o aumento global do coeficiente de atrito conduz a aumentos do tempo de cálculo [Lebon 2003]. Na Tabela 7.3 apresentam-se os tempos de cálculo obtidos, normalizados em relação ao tempo de cálculo da simulação *Atrito por Zonas*. Em termos globais, o recurso à lei de atrito evolutiva, que implica a avaliação no final de cada incremento da variável pressão de contacto, não induz fortes alterações no tempo de cálculo. A simulação realizada com a avaliação da área de contacto baseada apenas no estatuto de contacto do nó conduz a um aumento do tempo de cálculo de 7,5%. A simulação que recorre ao cálculo da área de contacto baseada na distância normal de contacto é realizada num tempo 11,8% inferior ao valor de referência. Estas variações do tempo de cálculo em relação à referência indicam que o custo associado à lei de atrito evolutiva é claramente compensado pela precisão de resultados obtidos na simulação numérica. A redução do tamanho do incremento (simulação *Lei de atrito (1/2)* e *Lei de atrito (2/2)*) conduz a um aumento do tempo de cálculo, não compensado em termos de precisão dos resultados finais da simulação.

Tabela 7.3 – Tempos de cálculo obtidos na simulação de um perfil U. Influência do modelo de descrição do coeficiente de atrito.

	<i>Atrito 0,10</i>	<i>Atrito por Zonas</i>	<i>Lei de Atrito (1)</i>	<i>Lei de Atrito (2)</i>	<i>Lei de Atrito (1/2)</i>	<i>Lei de Atrito (2/2)</i>
Tempo de CPU [%]	71,5	<b>100,0</b>	107,5	88,2	149,2	142,3

Para avaliar a relação custo/benefício da implementação da lei de atrito evolutiva também importa analisar a sensibilidade da função área de contacto à discretização do corpo deformável. Para analisar este efeito repetiram-se as simulações com o coeficiente de atrito constante igual a 0,1 e com a lei de atrito evolutiva para outras discretizações. Optou-se por estudar apenas a função de área de contacto do nó baseada na distância normal de contacto, uma vez que a análise anterior permitiu mostrar que esta conduz a valores mais uniformes de pressão de contacto. Os resultados discutidos até aqui foram obtidos com uma malha uniforme no plano da chapa, com um tamanho médio do elemento de 2,0 mm e duas camadas de elementos em espessura. Estudam-se agora mais duas discretizações uniformes com tamanho médio do elemento de 2,5 e 1,5 mm no plano da chapa e duas camadas em espessura. Na Tabela 7.4 resumem-se as principais características numéricas destas discretizações. Na coluna  $R$  apresenta-se a razão do elemento finito que corresponde ao quociente entre a menor dimensão do elemento finito no plano e em espessura. Apresenta-se igualmente, a razão entre a menor dimensão do elemento finito no plano e o menor raio de curvatura das ferramentas (10 mm), na coluna  $R_c$ . Trabalhos anteriores indicam que a razão  $R$  do elemento finito deve ser o mais próxima possível de 1,0 [Oliveira *et al.* 2002, Alves 2003]. Para isso, testou-se igualmente uma malha não-uniforme com estas condições (R1N). Esta malha apresenta elementos de dimensão no plano de 3,0 mm na zona de contacto com o cerra-chapas e de 1,0 mm na restante área do esboço com apenas uma camada de elementos em espessura.

Tabela 7.4 – Resumo da informação relativa às discretizações utilizadas na simulação do perfil U, para análise da influência da discretização do esboço e do modelo de descrição do coeficiente de atrito.

	<i>Dimensão no plano [mm]</i>	<i>Nº de Elementos</i>	<i>Nº de Nós</i>	<i>R</i>	<i>R<sub>c</sub></i>
R5	2,5	7200	11163	5	0,25
R4	2,0	11250	17328	4	0,20
R3	1,5	20000	30603	3	0,15
R1N	3,0/1,0	15200	30828	3/1	0,10

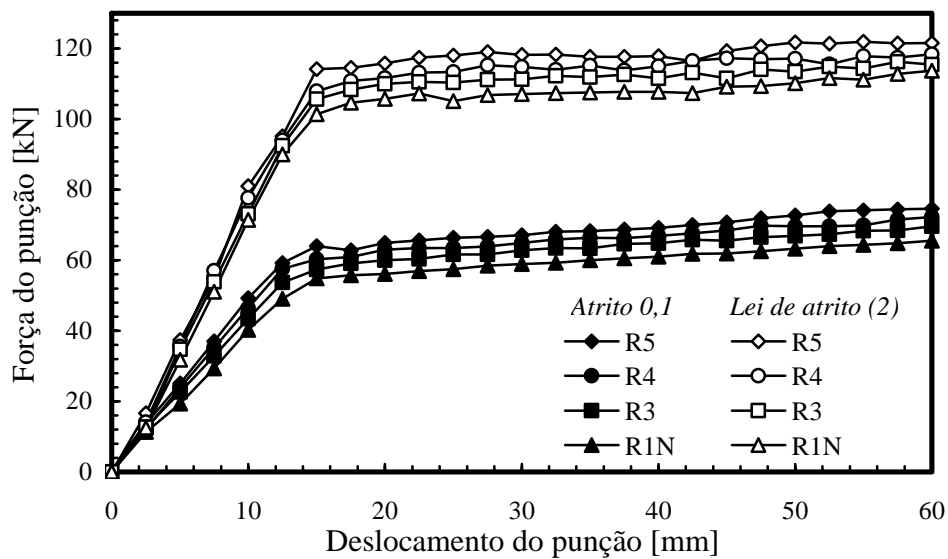


Figura 7.17 – Evolução da força exercida pelo punção na simulação da conformação do perfil U. Influência da discretização do esboço e do modelo de descrição do coeficiente de atrito.

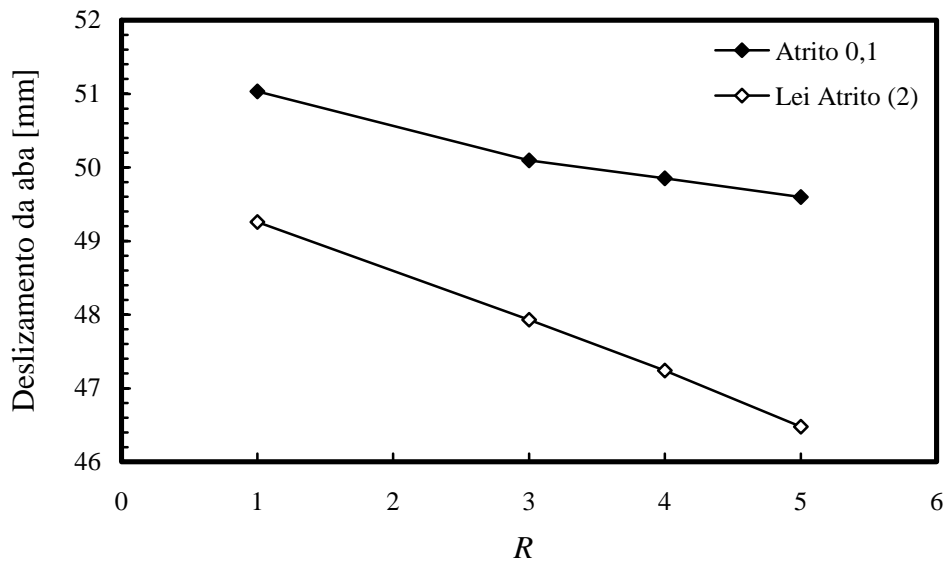


Figura 7.18 – Deslizamento da aba no final do processo de conformação, na simulação da conformação do perfil U. Influência da discretização do esboço e do modelo de descrição do coeficiente de atrito.



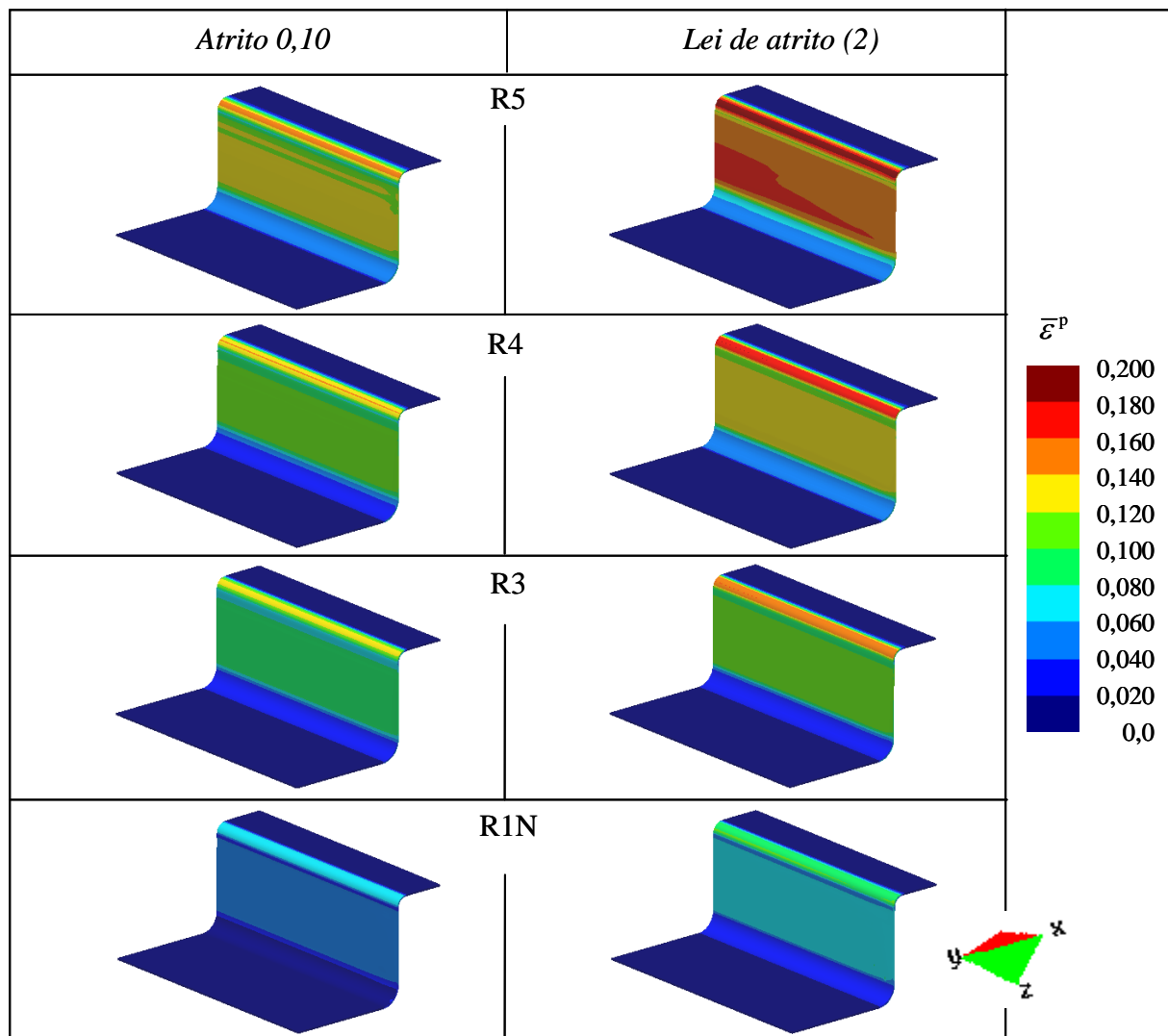


Figura 7.19 – Isovalores de deformação plástica equivalente obtidos no final do processo de conformação do perfil U. Influência da discretização do esboço e do modelo de descrição do coeficiente de atrito.

Na Figura 7.17 apresenta-se a evolução da força exercida pelo punção para as diferentes simulações realizadas. A força máxima prevista para o punção reduz-se ligeiramente com o refinamento da malha. Para facilitar a interpretação dos resultados, considera-se como referência a malha mais grosseira, designada por R5. Para as simulações com coeficiente de atrito constante de 0,1, a redução da força exercida pelo punção é de 3,8%, 6,9% e de 12,4% para as malhas R4, R3 e R1N, respectivamente. Para as simulações realizadas com a lei de atrito evolutiva, a redução é de 2,1% para a malha R4, 4,4% para a malha R3 e 6,5% para a malha R1N. Ou seja, as variações induzidas pelas diferentes discretizações na força máxima prevista para o punção não são afectadas pelo facto de se considerar ou não uma lei de atrito evolutiva.

No final do processo de conformação, a evolução da variável deslizamento da aba com a discretização é praticamente linear, como se mostra na Figura 7.18. Nesta confirma-se a pequena variação desta variável, quer nas simulações realizadas com atrito constante, quer nas simulações com a lei de atrito evolutiva. Para as simulações realizadas com atrito constante, o deslizamento da aba aumenta cerca de 1 mm da malha mais grosseira para a mais refinada. Para as simulações realizadas com a lei de atrito

evolutiva, o aumento do deslizamento da aba com o refinamento atinge cerca de 3 mm, da malha mais grosseira para a malha mais refinada. O facto do escoamento do material ao longo do processo de conformação ser facilitado com o refinamento da malha, induz alterações na distribuição da deformação plástica equivalente no final do processo de conformação, como se mostra na Figura 7.19. Esta variável apresenta uma maior variação para as simulações realizadas com a lei de atrito evolutiva em consequência das maiores variações de deslizamento da aba. Em consequência do deslizamento da aba e da distribuição obtida para as variáveis internas, as geometrias previstas após retorno elástico variam também com a discretização seleccionada, como se mostra na Figura 7.20. Apesar da forte variação dos ângulos de retorno elástico com a discretização seleccionada, observa-se que as soluções obtidas com a lei de atrito evolutiva são as que apresentam melhor correlação com os resultados experimentais.

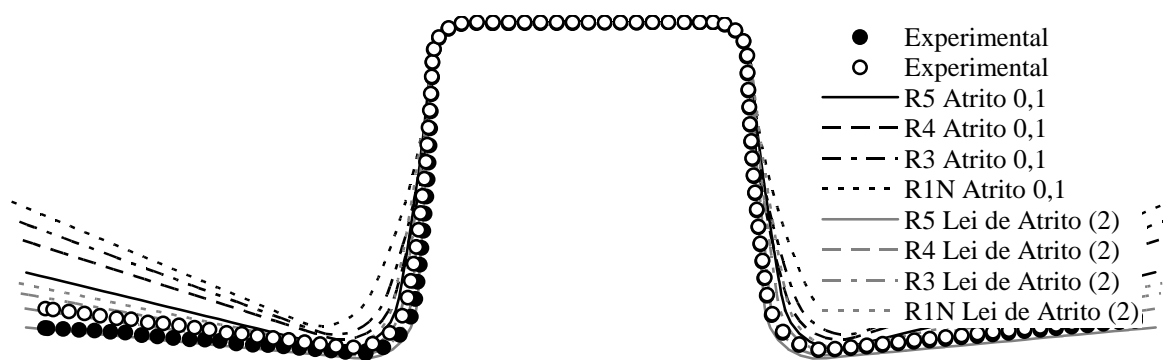


Figura 7.20 – Secção transversal do plano de simetria do perfil U, após retorno elástico. Influência da discretização do esboço e do modelo de descrição do coeficiente de atrito.

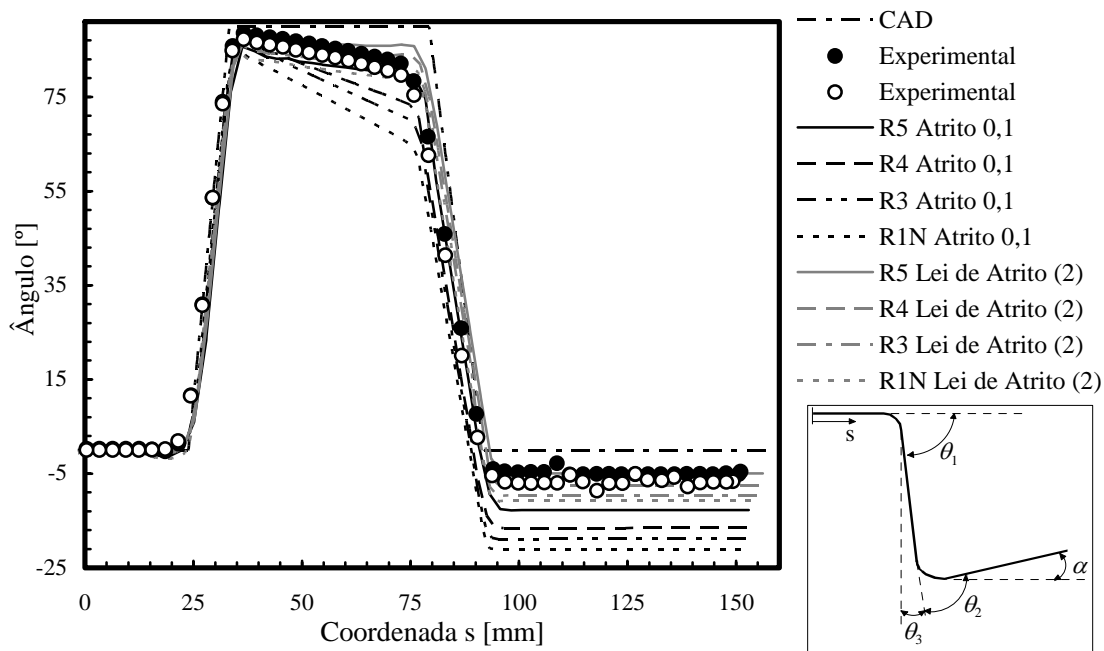


Figura 7.21 – Evolução do ângulo de retorno elástico na secção transversal do plano de simetria do perfil U. Influência da discretização do esboço e do modelo de descrição do coeficiente de atrito.

Analisando a evolução do ângulo de retorno elástico ao longo da secção transversal do perfil U, apresentada na Figura 7.21, constata-se que as maiores variações surgem no ângulo de retorno elástico da aba,  $\alpha$ , e no ângulo da parede vertical,  $\theta_3$ . Comparando com os resultados experimentais torna-se possível inferir que, para a malha mais refinada no plano, apesar de o ângulo  $\alpha$  apresentar uma pior correlação do que para as malhas mais grosseiras, a evolução do ângulo  $\theta_3$  apresenta uma melhor correlação.

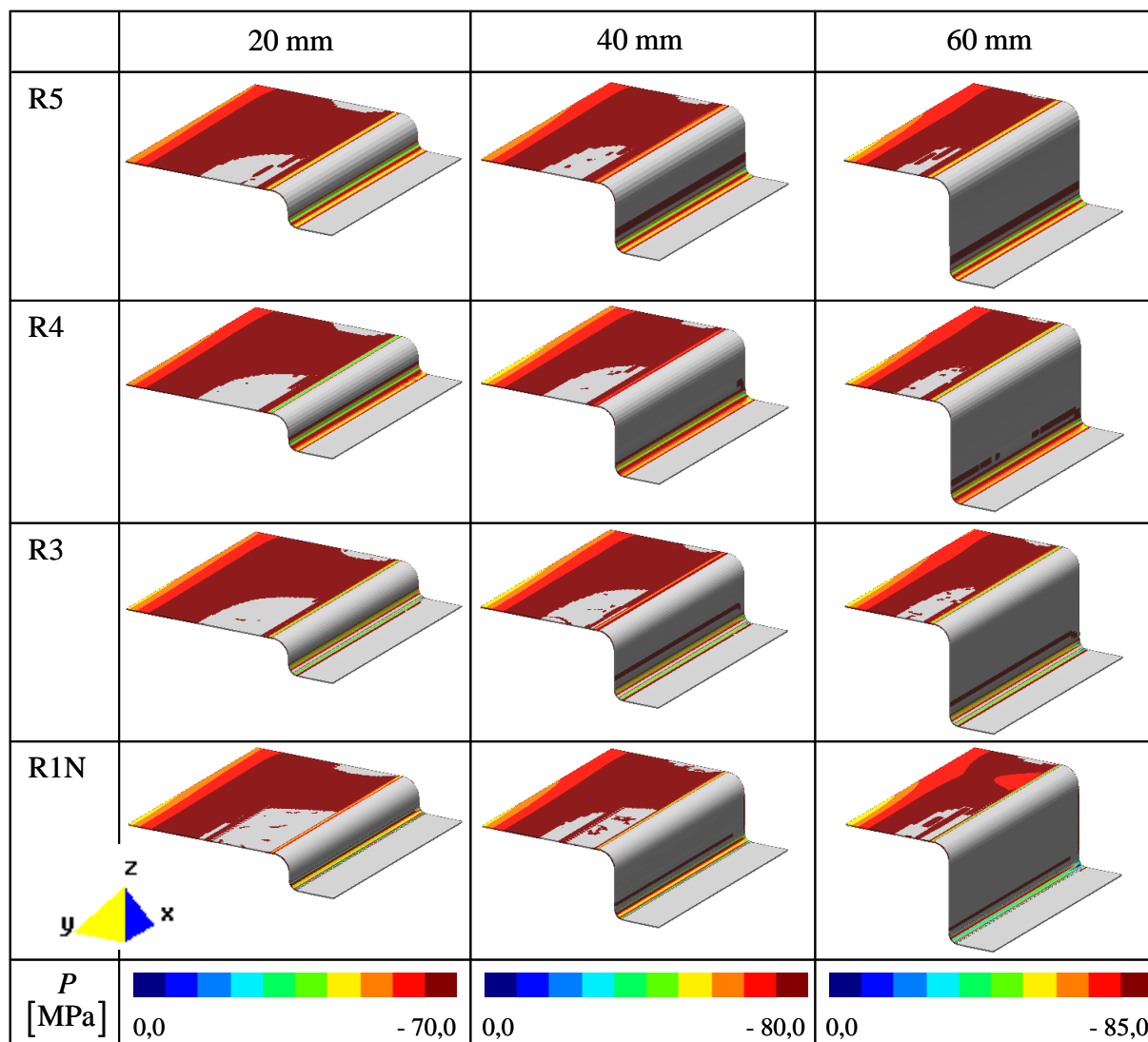


Figura 7.22 – Isovalores de pressão de contacto para três valores de deslocamento do punção, obtidos nas simulações do perfil U, com coeficiente de atrito  $\mu = 0,1$ .

Diferentes discretizações conduzem a diferentes distribuições de pressão de contacto ao longo do processo de conformação, como se mostra na Figura 7.22 (coeficiente de atrito constante) e na Figura 7.23 (lei de atrito evolutiva). As variações na distribuição da pressão de contacto resultam de a superfície ser tratada como uma variável discreta. As malhas mais refinadas permitem uma definição mais rigorosa da zona de contacto efectiva, o que implica uma redistribuição da força normal de contacto. Os resultados apresentados na Figura 7.22 e na Figura 7.23 confirmam que as zonas de contacto curvo são mais sensíveis à discretização seleccionada. Este facto é mais evidente para as simulações realizadas com o coeficiente de atrito  $\mu = 0,1$ , porque o contacto com a zona curva do punção ocorre, essencialmente, nas zonas de transição com as superfícies planas.

Assim, como as malhas mais refinadas permitem uma melhor definição desta zona do corpo deformável, resultam valores de pressão de contacto mais elevados.

Com a introdução da lei de atrito evolutiva, a distribuição do contacto entre o corpo deformável e as ferramentas altera-se ao longo do processo de conformação. O aumento dos valores médios do coeficiente de atrito reduz o escoamento do material. Tal provoca um aumento do estiramento do material na zona da aba. A zona de contacto plano altera-se, com uma maior localização da pressão de contacto no bordo exterior da aba e observa-se uma zona de contacto contínua entre o material do corpo deformável e a zona curva do punção. Esta zona suaviza a evolução da pressão de contacto determinada pelas diferentes discretizações, na zona de curvatura do punção. Ou seja, a variável pressão de contacto depende da discretização seleccionada, mas também do tipo de contacto. Quanto mais localizada for a zona de contacto, maior é a sua sensibilidade ao tamanho médio dos elementos finitos no plano da chapa.

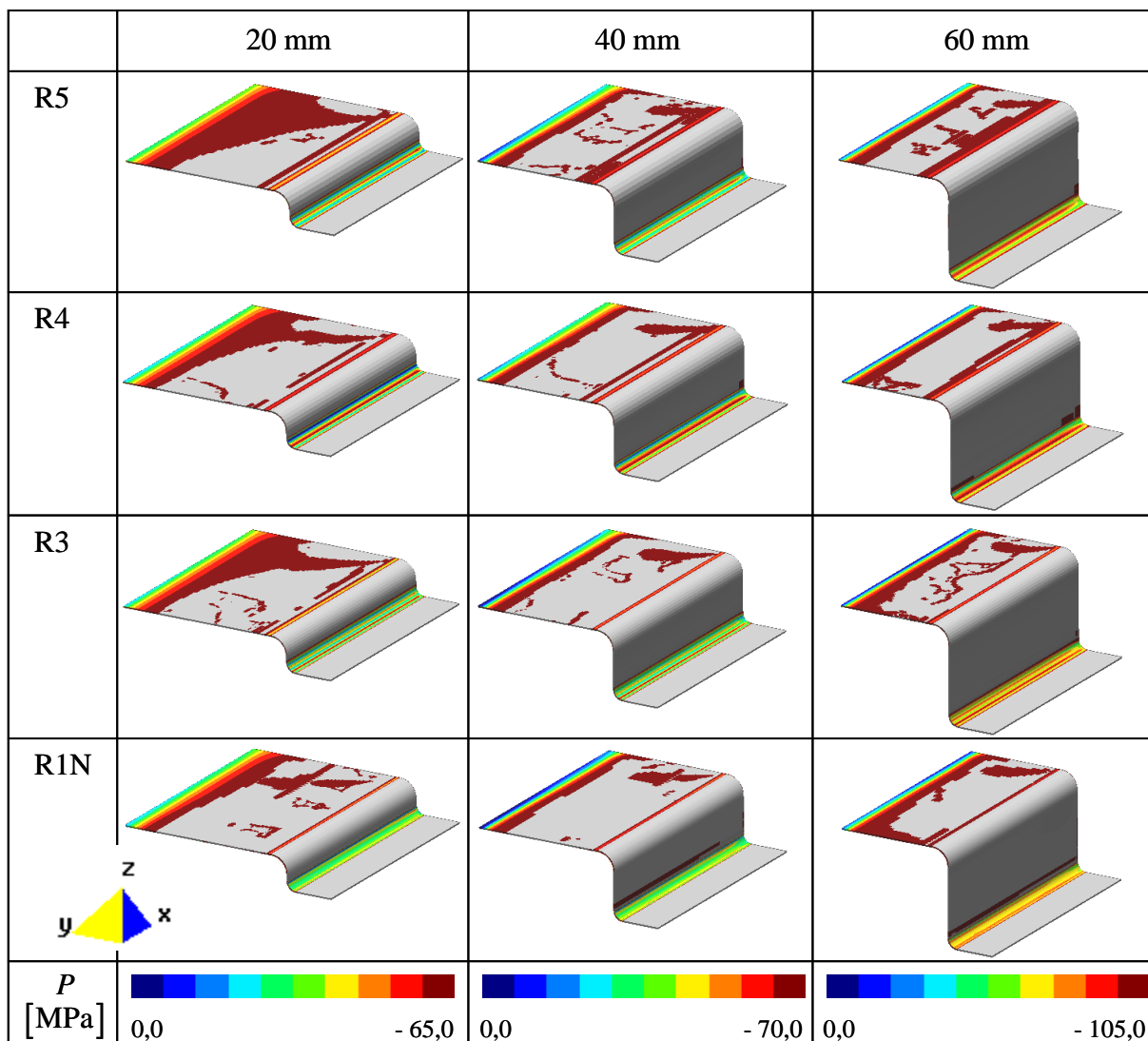


Figura 7.23 – Isovalores de pressão de contacto para três valores de deslocamento do punção, obtidos nas simulações do perfil U, com a lei de atrito evolutiva.

Na Figura 7.24 apresenta-se a distribuição da pressão de contacto ao longo da secção transversal do perfil, correspondente ao plano médio, no final da fase de conformação do perfil U, para as simulações realizadas com a lei de atrito evolutiva. Esta distribuição de

pressão confirma a pequena alteração desta variável com o tamanho médio do elemento, bem como da área aparente de contacto. Em termos globais, com a diminuição do tamanho médio do elemento no plano ocorre um ligeiro aumento da pressão de contacto.

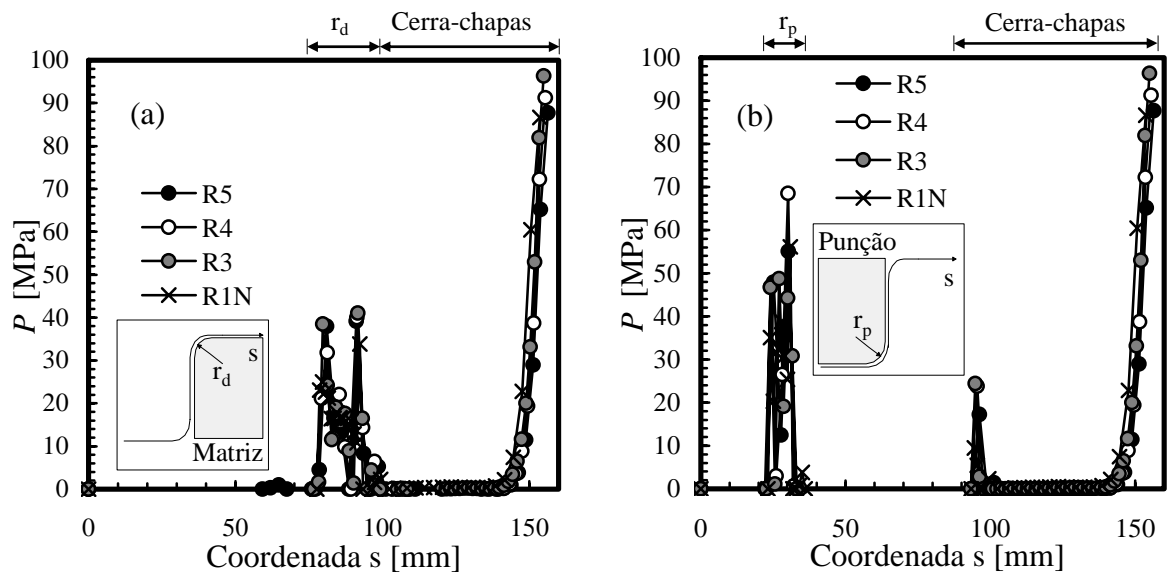


Figura 7.24 – Pressão de contacto na secção transversal correspondente ao plano médio, no final da fase de avanço do punção. (a) Superfície inferior da chapa e (b) Superfície superior da chapa.

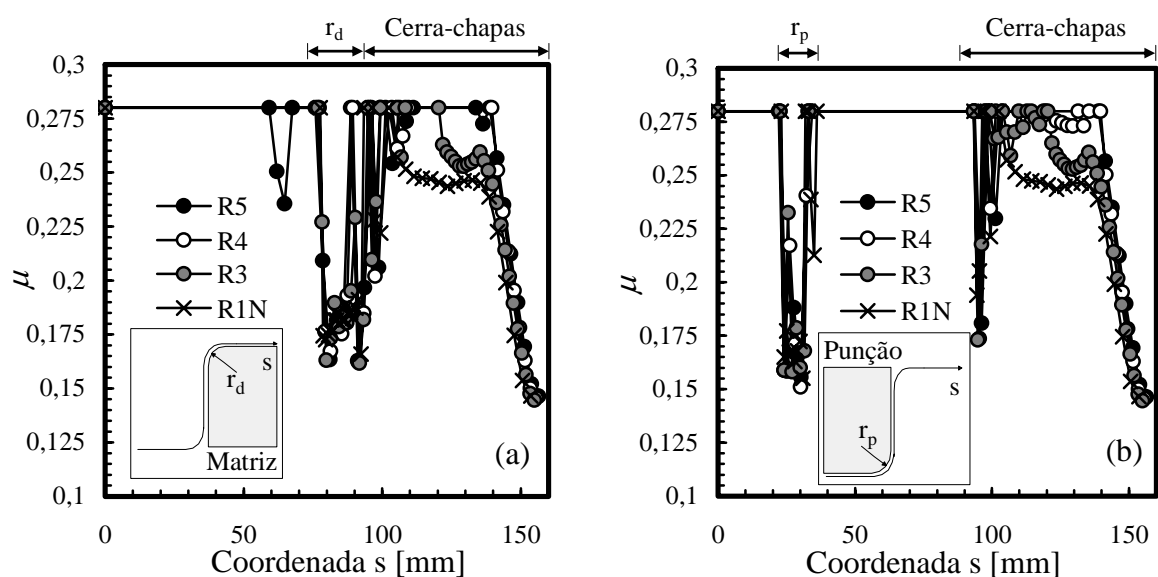


Figura 7.25 – Distribuição do coeficiente de atrito na secção transversal correspondente ao plano médio no final da fase de avanço do punção: (a) Superfície inferior da chapa e (b) Superfície superior da chapa.

Na Figura 7.25 apresenta-se a variação do coeficiente de atrito na mesma secção transversal. A distribuição do coeficiente de atrito nas zonas sujeitas a pressões mais elevadas é muito semelhante para todas as malhas, em resultado da rápida saturação do coeficiente de atrito com a pressão, na função seleccionada (ver Figura 7.3). As zonas mais sensíveis à alteração deste coeficiente são as zonas onde ocorrem as pressões mais baixas. Este facto pode observar-se na zona de contacto plano com o cerra-chapas. Nesta

zona, os valores da pressão de contacto são inferiores a 0,2 MPa para a malha designada R3 e inferiores a 0,5 MPa para a malha R1N. As restantes discretizações não prevêem contacto nesta zona, como se pode confirmar na Figura 7.23. Desta pequena variação da pressão de contacto resultam coeficientes de atrito da ordem de 0,25. Este facto é consequência da lei de atrito seleccionada exibir fortes variações do coeficiente de atrito para pressões baixas (ver Figura 7.3). Esta sensibilidade do coeficiente de atrito justifica as variações do deslizamento da aba com o refinamento da malha no plano. A análise do deslocamento do cerra-chapas (ver Figura 7.26) permite confirmar este facto. Esta variável sofre mais alterações para as simulações realizadas com a lei de atrito evolutiva, em particular para a discretização R1N.

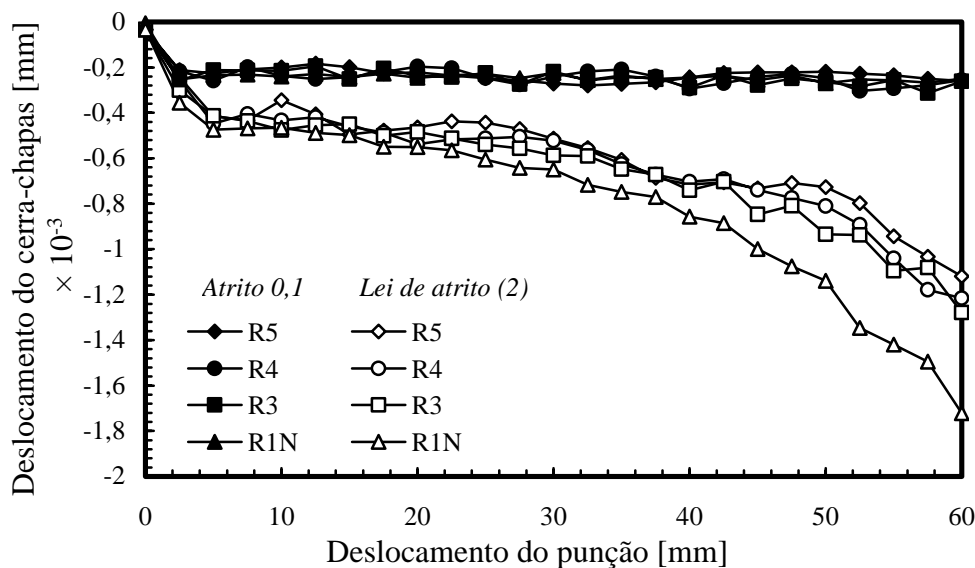


Figura 7.26 – Evolução do deslocamento do cerra-chapas com o deslocamento do punção na conformação do perfil U. Influência da discretização do esboço e do modelo de descrição do coeficiente de atrito.

### 7.3.1 Conclusões

A lei evolutiva do tipo Voce implementada no programa DD3IMP permite reproduzir com maior correcção os resultados experimentais obtidos para a conformação de um perfil U. A melhoria observada na correlação entre os resultados numéricos e experimentais, com o recurso à lei de atrito evolutiva, é promissora para esta área de estudo. A lei de atrito evolutiva contempla apenas a influência de uma variável interna: a pressão de contacto. Apesar disso, permite ter em conta nos resultados da simulação a influência não só da distribuição do coeficiente de atrito, mas também da sua evolução ao longo de todo o processo de conformação.

O recurso à lei de atrito evolutiva não introduz nenhum prejuízo adicional em termos de tempo de cálculo. A avaliação do coeficiente de atrito evolutivo é, no entanto, sensível à discretização seleccionada. No exemplo estudado, esta sensibilidade não afecta de forma significativa os resultados da simulação.

## Capítulo 8

# Modelação e Simulação de Casos Reais

*Apresentam-se estudos numéricos que evidenciam a importância de uma correcta modelação das condições do processo da conformação real. Estes estudos focam: (i) a estratégia seleccionada para a simulação da fase de retorno elástico; (ii) o algoritmo de controlo das ferramentas a força imposta e (iii) a descrição do comportamento elastoplástico do material. Avalia-se ainda a influência de parâmetros tecnológicos nas solicitações mecânicas da fase de conformação. Os parâmetros tecnológicos estudados são: (i) o deslocamento do punção; (ii) o valor da força de aperto do cerra chapas e (iii) a distribuição assimétrica da força exercida pelo cerra chapas.*

---

### 8.1 Enquadramento

A precisão das soluções obtidas com a simulação numérica depende fortemente dos parâmetros de entrada dos programas, bem como dos modelos utilizados para descrever o comportamento mecânico dos materiais e o contacto com atrito. A precisão do modelo utilizado na simulação depende também da correcta descrição do processo de conformação real. É este o aspecto que se procura evidenciar com os diferentes estudos apresentados neste capítulo.

A maioria dos estudos apresentados neste capítulo considera a conformação do perfil curvo cuja geometria foi definida na secção 4.3.3. A malha seleccionada corresponde ao melhor compromisso tempo de cálculo/precisão dos resultados. Simulações preliminares, com vários materiais, permitiram identificar a zona do esboço que nunca entra em contacto com o raio de curvatura da matriz. Nesta zona utilizam-se elementos finitos com a dimensão de 4 mm, no plano da chapa. Na zona intermédia é necessário recorrer a um tamanho de elemento finito inferior, devido ao contacto com as zonas curvas das ferramentas (2 mm). Utiliza-se apenas uma camada de elementos finitos hexaédricos em espessura, com integração reduzida selectiva [Oliveira *et al.* 2002]. Todos os estudos apresentados neste capítulo são realizados considerando o coeficiente de atrito constante  $\mu = 0,1$ , excepto os casos que servem de base ao estudo da influência da estratégia de remoção das ferramentas e da distribuição assimétrica da força exercida pelo cerra-chapas.

### 8.2 Simulação do Retorno Elástico: DD3OSS

A geometria final do componente obtido no processo de estampagem dita o sucesso da operação de conformação, bem como das operações subsequentes. Um dos efeitos que mais contribui para incorrecções na geometria final é o retorno elástico. A precisão geométrica e dimensional após retorno elástico é função: (i) das propriedades mecânicas

do material; (ii) das condições de lubrificação; (iii) da geometria das ferramentas e (iv) dos parâmetros do processo. O elevado número de variáveis que influencia o retorno elástico torna imprescindível o desenvolvimento de programas que o prevejam correctamente. Só deste modo podem desenvolver-se estratégias correctivas e de compensação eficientes.

Actualmente, nenhum programa de simulação do processo de conformação de chapa consegue prever exactamente o fenómeno do retorno elástico. De facto, além da dependência da própria operação de conformação, a simulação do retorno elástico é influenciada pelos próprios parâmetros numéricos, nomeadamente, os que influenciam a previsão do estado de tensão do corpo deformável no final do processo de conformação, que incluem: (i) a velocidade do punção; (ii) os parâmetros de contacto; (iii) a descrição das ferramentas; (iv) a integração da lei constitutiva; (v) o tipo de elemento finito; (vi) a forma e dimensão da malha de elementos finitos; (vii) o tipo de integração temporal e (viii) a estratégia para a remoção das ferramentas [Oliveira *et al.* 2002, Wagoner 2002, Guo *et al.* 2002]. Em relação a este último aspecto existem três estratégias alternativas. A primeira corresponde a inverter o deslocamento das ferramentas até à perda total de contacto com o corpo deformável. Esta estratégia pode ser entendida como a continuação do processo de conformação, e está mais de acordo com o processo de remoção real das ferramentas. Esta estratégia conduz facilmente a tempos de cálculo muito elevados, devido às fases necessárias para a inversão do movimento das ferramentas. A segunda estratégia consiste em substituir a acção das ferramentas pelas forças correspondentes que actuam na chapa e diminuir sucessivamente o seu valor até serem nulas [Kawka *et al.* 1998]. Este método é claramente mais estável que o anterior, pois evita o tratamento do problema de contacto com atrito. No entanto, ao longo do processo de remoção das ferramentas altera-se o valor e a direcção das forças de contacto. Quando se despreza o contacto é difícil prever estas alterações. Uma descarga proporcional não consegue representar correctamente o processo físico e pode, inclusivamente, conduzir a problemas de convergência [Guo *et al.* 2002]. A terceira estratégia considera apenas as tensões residuais do final da fase de conformação. Uma vez esta fase concluída, as forças internas são libertadas e o sistema não-linear resultante é resolvido, de modo a restabelecer o equilíbrio estático do corpo deformável. A libertação das forças internas pode ser feita de uma só vez, através da eliminação directa das ferramentas, ou por várias fases, através da eliminação progressiva das ferramentas. Para problemas com pequenas deformações ou situações em que é aceitável uma solução aproximada, a fase de retorno pode ser obtida com um algoritmo não-iterativo designado por *single step* [Finn *et al.* 1995].

Nesta secção, procedeu-se ao estudo da influência da estratégia de remoção das ferramentas na previsão de defeitos geométricos resultantes do fenómeno de retorno elástico. A simulação da fase de conformação foi realizada considerando a força inicial de aperto do cerra-chapas de 90 kN e o valor de coeficiente de atrito  $\mu = 0,15$ . O material utilizado neste estudo foi a liga de alumínio 5182-O. A componente isotrópica do encruamento é descrita pela Lei de Voce e o encruamento cinemático pela Lei de Lemaître e Chaboche. A anisotropia é descrita pelo critério de Hill'48. No Anexo E (Tabela E.2) apresenta-se um resumo dos parâmetros constitutivos [LPMTM 2001]. A malha de elementos finitos sólidos hexaédricos é não-regular, com um tamanho médio de elemento nas zonas planas de contacto com a matriz ou com o cerra-chapas de 6 mm. Este tamanho médio é reduzido para 3 mm na zona intermédia (ver Figura 8.1). Em



espessura considera-se apenas uma camada de elementos finitos hexaédricos com integração reduzida selectiva.

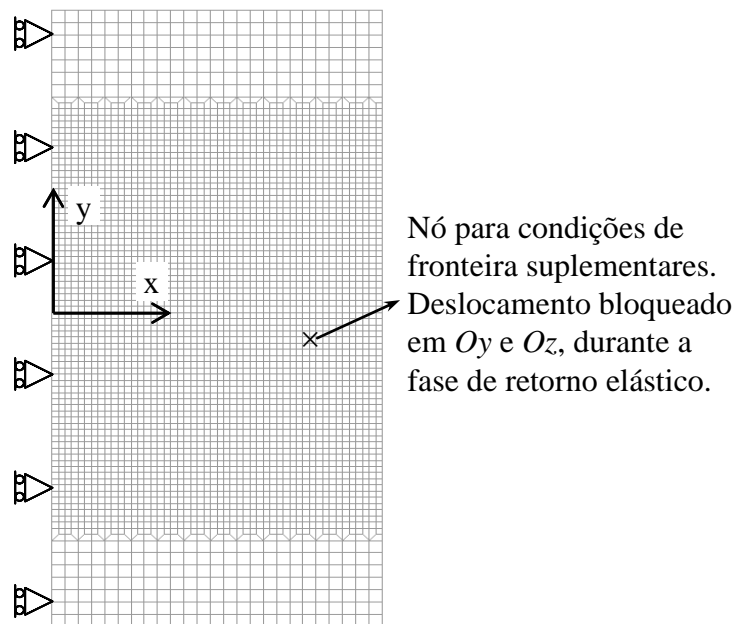


Figura 8.1 – Discretização do corpo deformável, condições de fronteira para o processo de conformação e condições de fronteira suplementares para a remoção das ferramentas.

Analisaram-se duas das estratégias referidas anteriormente: a de deslocamento e a de eliminação das ferramentas. A base comum é partirem da configuração de equilíbrio no final da fase de conformação, obtida pelo programa implícito DD3IMP. No caso do perfil curvo o processo de conformação envolve um cerra-chapas, uma matriz e um punção. O processo de conformação do perfil curvo está dividido em duas fases. Na primeira, o cerra-chapas move-se até estabelecer contacto com a chapa e atingir o valor de força prescrito. Na segunda, o punção inicia o seu deslocamento até atingir a profundidade de embutidura pretendida (60 mm). Durante esta fase a força exercida pelo cerra-chapas aumenta proporcionalmente com o deslocamento do punção até ao valor máximo de 118 kN.

O primeiro esquema de eliminação das ferramentas baseia-se no seu deslocamento até à perda de contacto. A etapa de eliminação é dividida num número de fases igual ao número total de ferramentas a remover. Em cada uma dessas fases inverte-se o movimento das ferramentas. A primeira fase consiste na inversão do deslocamento do punção até perder o contacto com a chapa. Depois, inverte-se o movimento do cerra-chapas até que este perca, também, o contacto. No final destas duas fases a chapa pode ainda estar retida no interior da matriz. Assim, é necessária uma fase suplementar, que corresponde a movimentar a matriz para garantir a perda total de contacto com o corpo deformável. Esta última fase exige condições de fronteira suplementares para prevenir movimentos de corpo rígido e evitar problemas de convergência.

O segundo esquema de eliminação das ferramentas consiste na sua remoção por fases. Ou seja, na fase de remoção de uma ferramenta todas as superfícies que a definem deixam de pertencer ao conjunto de superfícies candidatas a estabelecer contacto com o corpo deformável. Neste caso, a configuração de ensaio, solução da fase de *Previsão*, é obtida admitindo que todos os nós em contacto com essa ferramenta perdem o contacto.

A ferramenta não é substituída pela força nos nós, essa força é simplesmente eliminada. A nova configuração de equilíbrio deve ser determinada pelo processo iterativo da fase de *Correcção*. Quando é eliminada a última ferramenta é necessário introduzir condições de fronteira suplementares para prevenir movimentos de corpo rígido e, conseqüentemente, problemas de convergência.

No terceiro e último esquema eliminam-se todas as ferramentas numa única fase. Ou seja, todas as restrições impostas pelas ferramentas desaparecem no início da fase de remoção das ferramentas, pelo que as forças de contacto se anulam. Sendo assim, a configuração de ensaio corresponde à configuração final da fase de conformação, com todas as forças de contacto iguais a zero. Esta estratégia conduziu ao desenvolvimento do programa DD3OSS que simula o retorno elástico num único incremento [Alves 2003]. Como a nova configuração de equilíbrio é determinada iterativamente na ausência de todas as ferramentas é natural que ocorram problemas de convergência, em consequência do forte desequilíbrio associado à remoção instantânea dos constrangimentos associados às ferramentas. Para estabilizar o ciclo iterativo de equilíbrio, o algoritmo implementado no programa DD3OSS recorre a um método de Newton-Raphson modificado. Este baseia-se na introdução de um parâmetro de estabilização  $\zeta^j$  para o vector de correcção dos deslocamentos incrementais  $\mathbf{du}^j$ , em cada iteração  $j$ . A correcção efectiva aos deslocamentos incrementais (ponto 6 da Tabela 3.3) é dada por

$$\mathbf{du}_{\text{efec}}^j = \zeta^j \mathbf{du}^j. \quad (8.1)$$

A maior dificuldade no recurso ao método de Newton-Raphson modificado é a selecção do parâmetro de estabilização  $\zeta \in [0;1]$ . A maioria das estratégias propostas baseia-se na definição de uma função objectivo associada ao vector resíduo. Algumas destas estratégias permitem aumentar o raio de convergência. Porém, nenhuma garante a convergência global do algoritmo [Hirota 2002]. Ao observar o processo de convergência global constata-se que, em alguns casos, apenas um número reduzido de nós não converge e oscila continuamente em torno da sua posição de equilíbrio, podendo mesmo divergir após algumas iterações [Esche *et al.* 1997]. No caso do algoritmo implementado no programa DD3OSS o parâmetro de estabilização pode ser constante durante todo o processo iterativo, ou determinado em função do critério de convergência da iteração  $j$  (equação (5.86)) a partir das seguintes relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} C^{\text{Crit}} \geq 150000,0 \Rightarrow \zeta = 0,75 \\ 1000,0 < C^{\text{Crit}} < 150000,0 \Rightarrow \zeta = 1,0 - 0,25 \exp\left(-\frac{10000,0}{C^{\text{Crit}} - 1000,0}\right) \\ C^{\text{Crit}} \leq 1000,0 \Rightarrow \zeta = 1,0 \end{array} \right. \quad (8.2)$$

As condições de fronteira suplementares são introduzidas apenas num nó (Figura 8.1), que neste caso corresponde à posição do furo que é realizado na peça experimental para fixação e medição.

Na estratégia baseada na inversão do deslocamento testa-se a seguinte sequência: primeiro o punção, seguido do cerra-chapas e por último da matriz. Para a estratégia baseada na remoção das ferramentas testa-se a mesma sequência e uma outra em que se inverte a ordem entre o punção e o cerra-chapas. Na terceira estratégia, designada por OSS (*One Step Springback*) procede-se à remoção das ferramentas num único incremento. Na Tabela 8.1 apresenta-se o resumo das estratégias de remoção das ferramentas testadas.

Tabela 8.1 – Estratégias de remoção das ferramentas testadas na simulação do retorno elástico do perfil curvo.

Estratégia de remoção das ferramentas	<i>Deslocamento</i>	<i>Remoção (1)</i>	<i>Remoção (2)</i>	<i>OSS</i>
Número total de fases	3	3	3	1
Fase 1	Punção	Punção	Cerra-chapas	
Ferramenta Fase 2	Cerra-chapas	Cerra-chapas	Punção	Fase única
Fase 3	Matriz	Matriz	Matriz	

A comparação das geometrias obtidas após retorno elástico pelas várias estratégias é realizada com o auxílio do programa *NXT Post Processor II* [Kase *et al.* 1999]. A comparação é realizada em duas secções transversais e numa longitudinal, representadas na Figura 8.2.

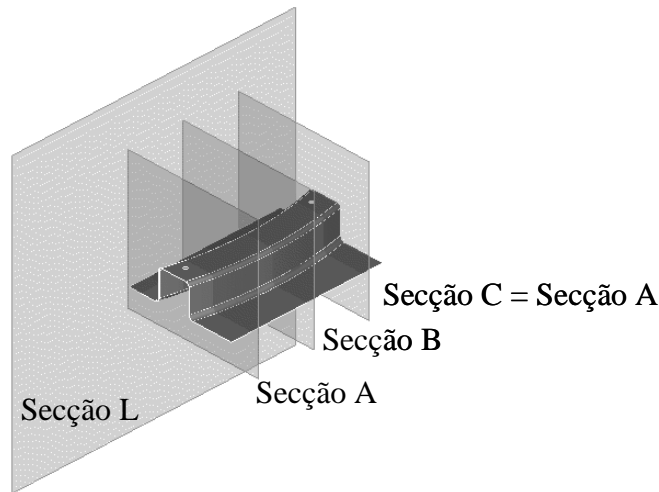


Figura 8.2 – Geometria nominal de comparação e secções definidas para a avaliação dos defeitos geométricos para o perfil curvo.

Na Figura 8.3 comparam-se as geometrias obtidas após a primeira fase da estratégia de inversão do deslocamento e remoção de ferramentas. Quando a primeira fase corresponde à remoção do punção (*Deslocamento e Remoção (1), Fase 1*), os perfis das várias secções são idênticos. As abas tendem a mover-se na direcção do cerra-chapas. Porém, uma vez que este movimento é restringido pelo cerra-chapas, as abas permanecem planas (ver *Secção L*). Após a remoção do cerra-chapas (*Fase 2*) estas duas estratégias conduzem a resultados muito próximos, como se pode observar na Figura 8.4. Porém, existe uma pequena diferença do ângulo de retorno elástico previsto para a aba interior, em particular na *Secção A* ( $< 0,7^\circ$ ). Esta diferença acentua-se na geometria global da *Secção L*, apesar do ângulo de retorno elástico previsto ser o mesmo. Quando a primeira ferramenta a ser retirada é o cerra-chapas (*Remoção (2)*) o ângulo de retorno elástico das abas na primeira fase aumenta. As abas deixam de ser planas (ver *Secção L-Figura 8.4*). Uma vez removido o punção a geometria final é ligeiramente diferente da obtida com as duas estratégias anteriores (*Deslocamento e Remoção (1)*). Considere-se como referência a geometria obtida por deslocamento das ferramentas. A diferença máxima ocorre novamente para a aba interior na *Secção A*, sendo de  $1,3^\circ$ . Para a *Secção B*, as diferenças nos ângulos de retorno elástico são inferiores a  $0,5^\circ$ . A *Secção L* apresenta uma geometria global distinta com um raio de curvatura superior.

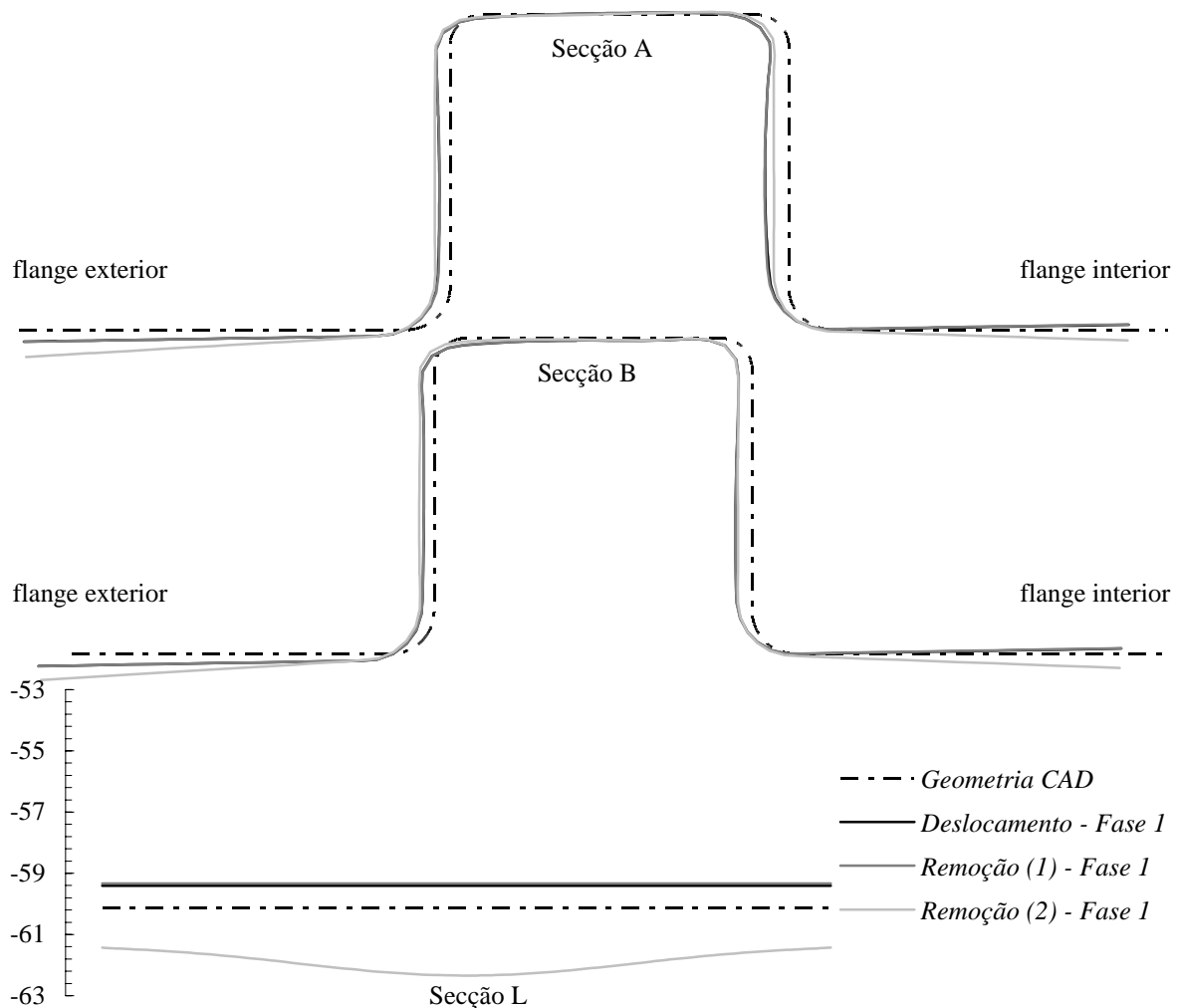


Figura 8.3 – Simulação da conformação do perfil curvo. Perfis obtidos para as secções A, B e L após a Fase 1 da previsão do retorno elástico com as estratégias de deslocamento e remoção das ferramentas.

Na Figura 8.5 apresentam-se as três secções obtidas após a remoção de todas as ferramentas, com as várias estratégias propostas. Globalmente, os perfis obtidos são muito semelhantes. As maiores diferenças ocorrem para o ângulo de retorno elástico da aba interior da Secção A. Para além dos resultados das simulações numéricas, apresentam-se igualmente resultados experimentais. Estes resultados mostram que as diferenças previstas pelas diferentes estratégias para a simulação do fenómeno de retorno elástico são inferiores à própria dispersão experimental.

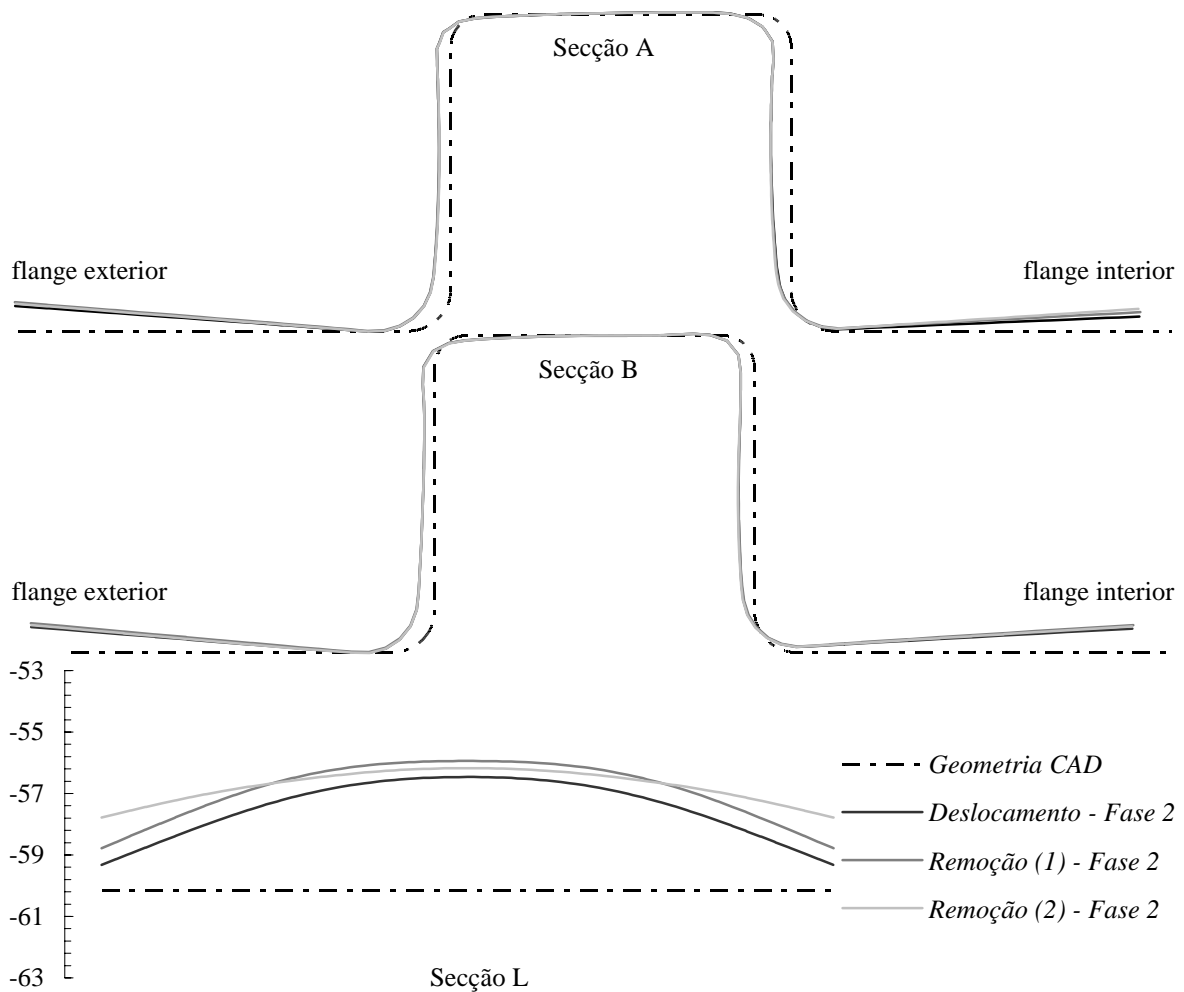


Figura 8.4 – Simulação da conformação do perfil curvo. Perfis obtidos para as secções A, B e L após a Fase 2 da previsão do retorno elástico com as estratégias de deslocamento e remoção das ferramentas.

Na Figura 8.6 apresenta-se a distribuição da tensão equivalente prevista em função da estratégia de remoção das ferramentas adoptada. No final da fase de conformação, o valor máximo de tensão equivalente prevista é 300 MPa. Após retorno elástico, observa-se uma redução global desta tensão, não se identificando diferenças significativas entre as várias estratégias apresentadas. Na Figura 8.7 apresenta-se a evolução das forças de contacto para as estratégias baseadas no deslocamento e na remoção. Constata-se que ao retirar primeiro o punção, mantendo o cerra-chapas numa posição espacial fixa, ocorre um aumento ligeiro da força de aperto do cerra-chapas. Este aumento pode justificar as ligeiras diferenças observadas para a segunda sequência de remoção das ferramentas e para a estratégia OSS. Na fase 1 da estratégia de Remoção (2), o punção está em contacto com a superfície interior da chapa. Porém, a força total exercida por esta ferramenta reduz-se. Quando a única ferramenta em contacto é a matriz confirma-se novamente a semelhança entre as configurações previstas.

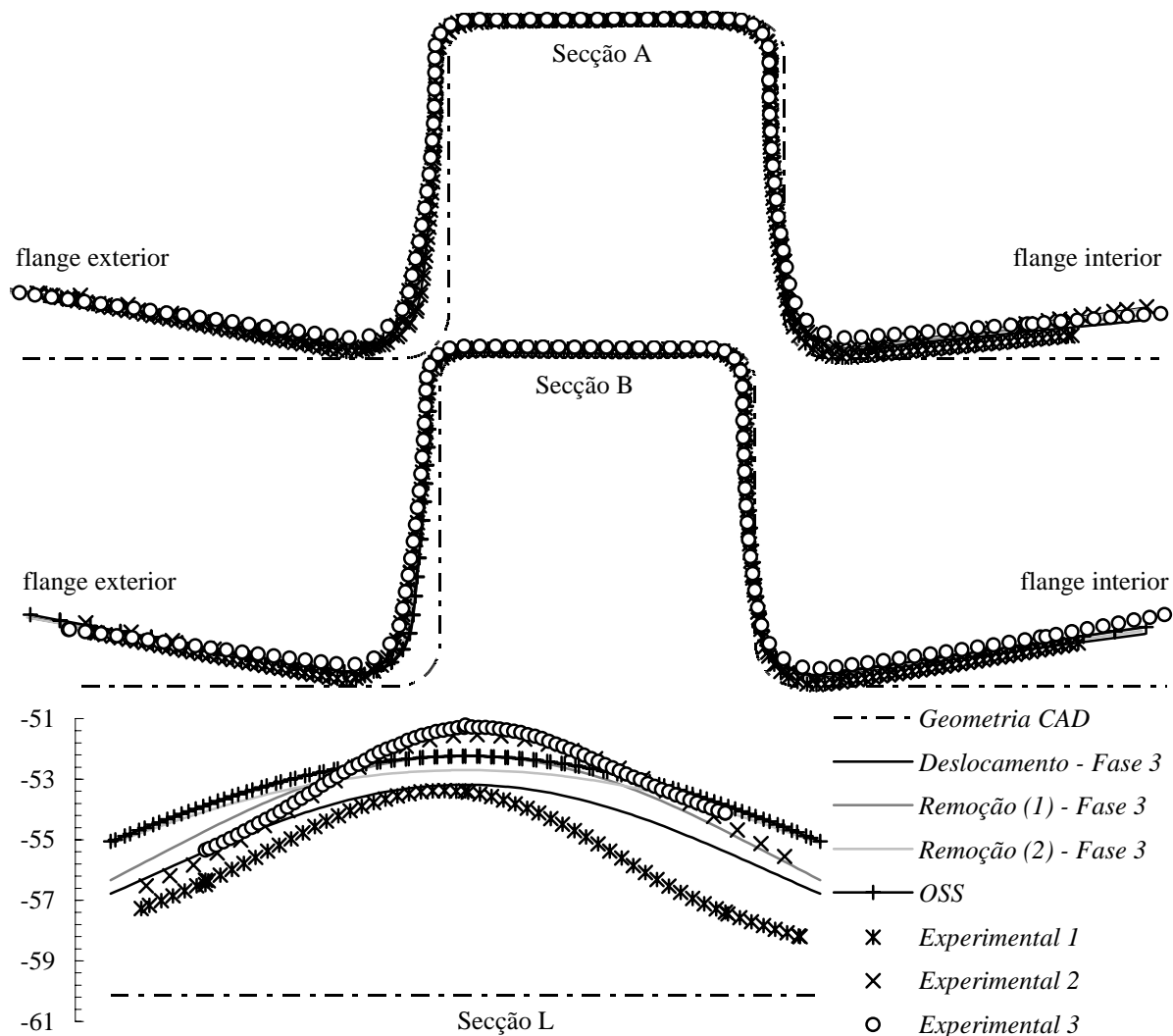


Figura 8.5 – Simulação da conformação do perfil curvo. Perfis obtidos experimentalmente<sup>1, 2, 3</sup> e por simulação numérica para as secções A, B e L: previsão do retorno elástico com as estratégias de deslocamento, de remoção das ferramentas e remoção num único incremento.

A principal diferença entre as três estratégias de remoção das ferramentas reside no tempo de computação. A simulação do retorno elástico realizada com a estratégia baseada na inversão de deslocamento depende 35% do tempo necessário para o cálculo da fase de conformação. Com a estratégia baseada na remoção por fases, o tempo de computação do retorno elástico reduz-se para cerca de 15% do tempo de simulação da conformação. Quando se opta pela estratégia de remoção das ferramentas num único incremento o tempo de computação do retorno elástico é inferior a 1% do tempo de computação necessário para simular a fase de conformação.

<sup>1</sup> Resultados cedidos pela USINOR S.A., no âmbito do projecto 3DS.

<sup>2</sup> Resultados cedidos pela Pechiney C.R.V., no âmbito do projecto 3DS.

<sup>3</sup> Resultados cedidos pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, no âmbito do projecto 3DS.

O programa DD3IMP disponibiliza qualquer uma das estratégias de remoção das ferramentas descritas. No entanto, atendendo aos resultados comparativos apresentados nesta secção, as simulações apresentadas nas secções seguintes foram realizadas com a estratégia OSS (*One Step Springback*) para simular o retorno elástico.

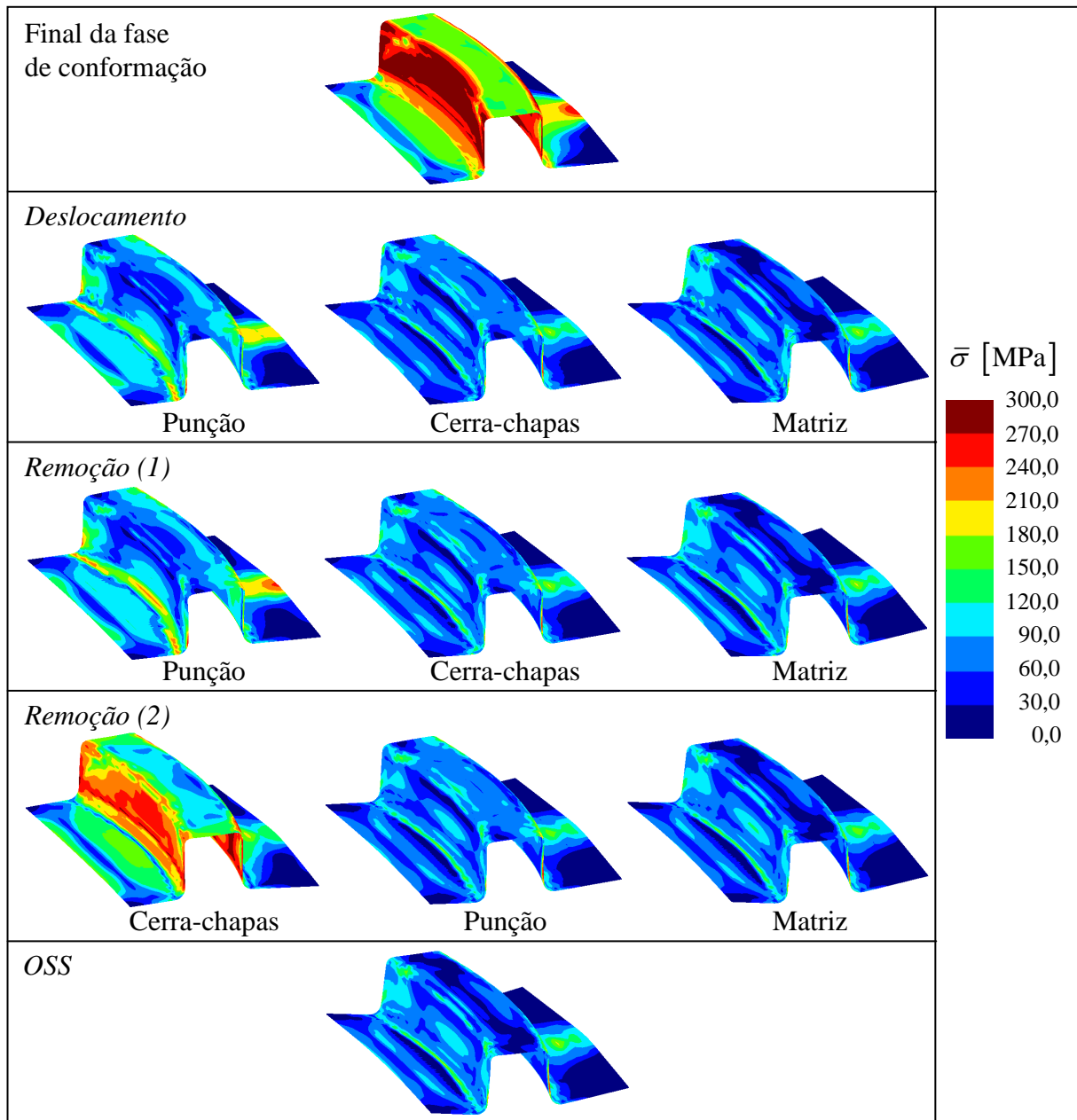


Figura 8.6 – Simulação da conformação do perfil curvo. Isovalores de tensão equivalente residual em função da estratégia de remoção das ferramentas adoptada.

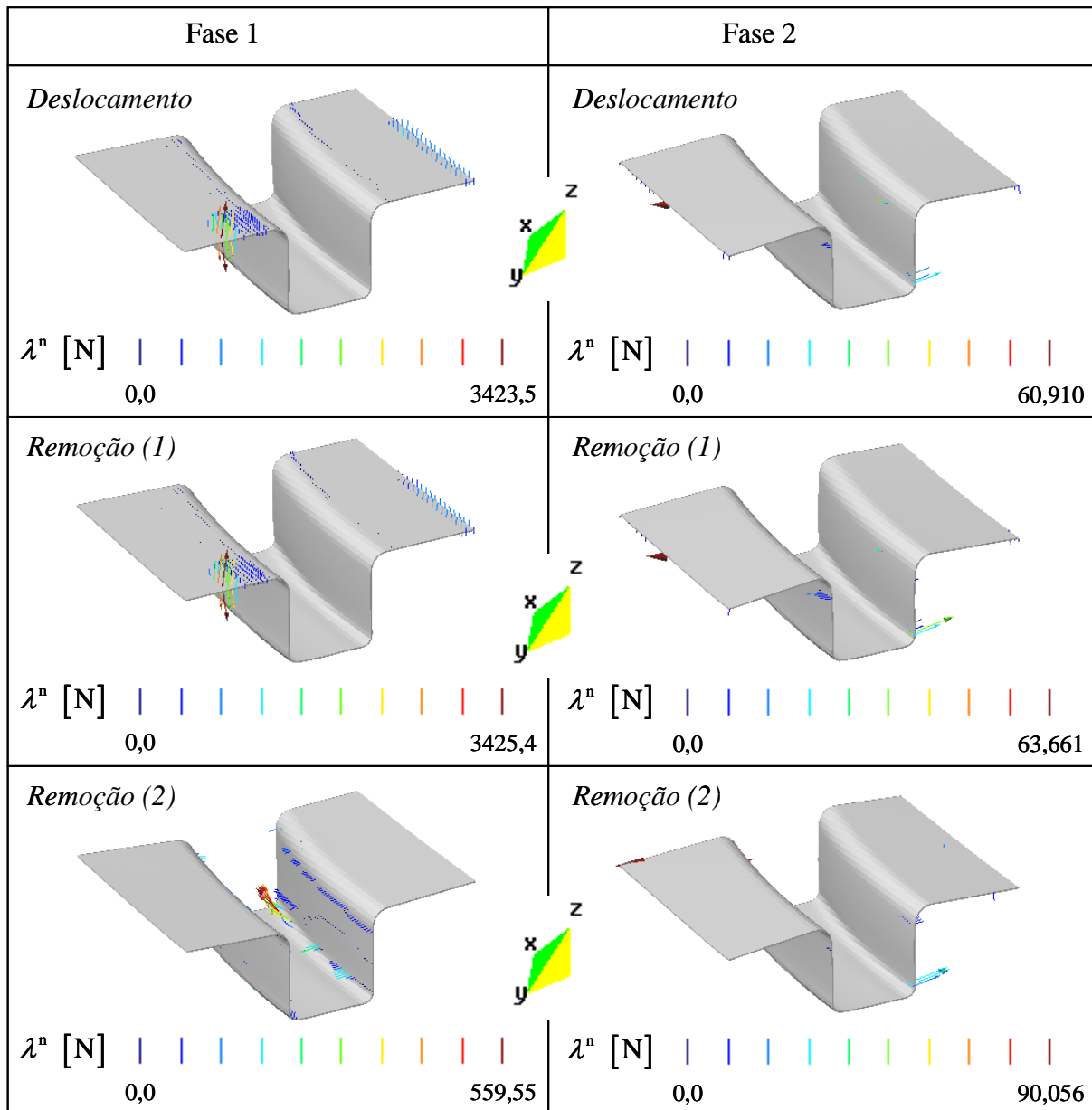


Figura 8.7 – Simulação da conformação do perfil curvo. Evolução da força de contacto prevista nas fases intermédias de remoção das ferramentas para as estratégias baseadas no deslocamento e na remoção.

### 8.3 Modelação das Ferramentas a Força Imposta

Uma das maiores fontes de erro cometidos na simulação numérica de processos de conformação é a incorrecta identificação de condições de fronteira. No caso específico do processo de estampagem, as condições de fronteira são evolutivas pois dependem da área e da força de contacto. Estas variáveis, incógnitas do modelo, são calculadas quer em função de parâmetros tecnológicos quer de parâmetros e estratégias numéricas. Neste contexto, um dos parâmetros tecnológicos mais importantes é a força imposta ao cerra-chapas. Esta força define o movimento do material. Usualmente, considera-se que a força de aperto do cerra-chapas é constante ao longo de todo o processo. No entanto, é cada vez mais importante que programas de simulação numérica consigam modelar diferentes modelos de evolução da força do cerra-chapas. Por exemplo, observa-se que o



aumento da força de aperto do cerra-chapas na fase final do processo de conformação pode minimizar os efeitos associados ao fenómeno de retorno elástico [Traversin e Kergen 1995]. Também é importante prever correctamente a distribuição da força na área efectiva de contacto. No processo de conformação real, o cerra-chapas não actua em toda a área da aba, mas está limitado à zona de contacto efectivo entre a chapa e o cerra-chapas, que não é constante durante o processo de conformação.

A estratégia numérica mais utilizada para modelar o cerra-chapas é distribuir uniformemente a força imposta pelos nós em contacto, independentemente das condições de contacto (ver, por exemplo, [Zhou e Wagoner 1997]). Esta estratégia influencia fortemente os resultados na simulação da estampagem de componentes de geometria complexa ou com materiais anisotrópicos. Com efeito, no caso específico das ferramentas controladas a força imposta é fundamental prever a área de contacto e a sua evolução ao longo do processo de conformação [Sriram e Wagoner 2000]. Para tal, é essencial que a distribuição da força de aperto do cerra-chapas seja sensível às variações de espessura da chapa que ocorrem na zona de contacto [Huh e Choi 1999]. No caso de uma ferramenta controlada por força imposta, para prever a área de contacto efectiva é necessário que a sua posição espacial evolua [Menezes e Teodosiu 1999]. A evolução da posição espacial deste tipo de ferramenta é influenciada pelas propriedades mecânicas do corpo deformável, que ditam a evolução da distribuição de espessura na zona da aba. Porém, na simulação numérica a evolução espacial da ferramenta controlada a força imposta depende igualmente de parâmetros numéricos como o tipo de elemento finito [El-Abbasi e Meguid 2000] ou a discretização utilizada para o esboço [Alves 2003].

Nesta secção, avalia-se a influência da correcta modelação da ferramenta a força imposta para o perfil curvo. Neste estudo seleccionaram-se dois materiais: um aço de alta resistência, designado por HSLA, e um aço macio, designado por DC06. O comportamento mecânico dos dois materiais é descrito pelo modelo microestrutural de Teodosiu completo e pelo critério de Hill'48. No Anexo E apresenta-se um resumo dos parâmetros necessários à descrição do comportamento do aço macio (Tabela E.3) e do aço de alta resistência (Tabela E.4) [LPMTM 2001]. A simulação da fase de conformação foi efectuada considerando que a força inicial de aperto do cerra-chapas é 300 kN.

Na montagem experimental o cerra-chapas é suportado por seis cilindros interligados. Em cada uma das zonas planas do cerra-chapas actuam três cilindros. Deste modo garante-se o melhor equilíbrio de forças possível. Estes cilindros comportam-se como molas de gás, pelo que a pressão exercida pelo cerra-chapas não é constante, mas crescente com o deslocamento do punção [Col 2002]. Esta evolução é considerada na simulação numérica do processo.

O cerra-chapas é descrito por duas superfícies de Bézier, uma que actua sobre a aba interior do corpo deformável e outra que actua na aba exterior (ver Figura 4.6). Consideram-se dois modelos distintos para o controlo da ferramenta a força imposta. No primeiro, impõe-se a condição de que a soma das forças que actuam nas abas interior e exterior do corpo deformável corresponda, em cada instante, ao valor prescrito pelo comportamento das molas de gás. Este modelo é designado por Caso 1. No segundo modelo acrescenta-se a condição de que, em cada instante, as forças exercidas pelo cerra-chapas nas abas interior e exterior do corpo deformável têm de ser iguais. Este modelo é designado por Caso 2.

Os resultados obtidos para a evolução da força do punção com o deslocamento são apresentados na Figura 8.8. Apesar de ambos os modelos preverem o mesmo valor

máximo para a força do punção, no caso do aço de alta resistência a evolução da força exercida pelo punção é bastante diferente entre os casos 1 e 2.

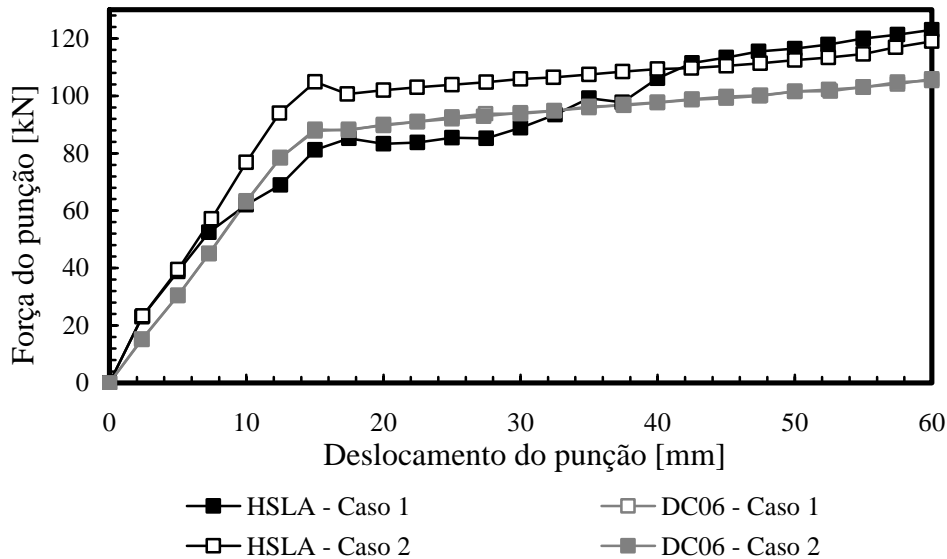


Figura 8.8 – Evolução da força do punção na simulação da conformação do perfil curvo. Influência do modelo de descrição da ferramenta a força imposta.

Na Figura 8.9 mostram-se os perfis obtidos para a secção transversal, correspondente ao plano de simetria do perfil curvo (secção B, Figura 8.2), recorrendo aos dois modelos para o cerra-chapas, e os correspondentes resultados experimentais<sup>1</sup>. Para o aço de alta resistência são evidentes as diferenças entre os casos 1 e 2 no que diz respeito aos valores de deslizamentos das abas e ângulos de retorno elástico. Para o aço macio os modelos conduzem a valores idênticos de deslizamento das abas e ângulos de retorno elástico.

Na Figura 8.10 apresenta-se a evolução da força exercida pelo cerra-chapas nas abas interior e exterior do corpo deformável, em função do deslocamento do punção. Nesta figura apresenta-se, também, a evolução da força total exercida pelo cerra-chapas. É possível observar que ambos os modelos garantem que a soma da força exercida nas duas abas é igual e que corresponde à evolução definida pelas molas de gás. Uma vez que no Caso 1 não é imposta nenhuma restrição ao valor de força a aplicar a cada aba, o comportamento para os dois materiais é diferente. Para o aço macio, apesar do componente não ser simétrico, a força exercida em ambas as abas é idêntica, à excepção de um ligeiro desvio após um deslocamento do punção de 40 mm. A partir deste valor de deslocamento, observa-se que a força exercida na aba interior tende a aumentar ligeiramente. No final do processo de conformação a força aplicada pelo cerra-chapas na aba interior é 7% superior ao valor aplicado na aba exterior. Para o aço de alta resistência, após um deslocamento do punção de 5 mm, existe já uma diferença de 10% entre a força que o cerra-chapas exerce nas abas interior e exterior. Esta diferença aumenta até ao valor de deslocamento do punção de 40 mm, altura em que a força aplicada na aba exterior é 75% superior à força aplicada na aba interior. A partir deste valor de deslocamento do punção, a diferença diminui até ao final da fase de conformação. Analisando a Figura 8.10 pode concluir-se que as diferenças entre os casos 1 e 2, para o aço de alta resistência,

<sup>1</sup> Resultados cedidos pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, no âmbito do projecto 3DS.

são resultado de condições de contacto distintas, originadas pela modelação da ferramenta a força imposta.

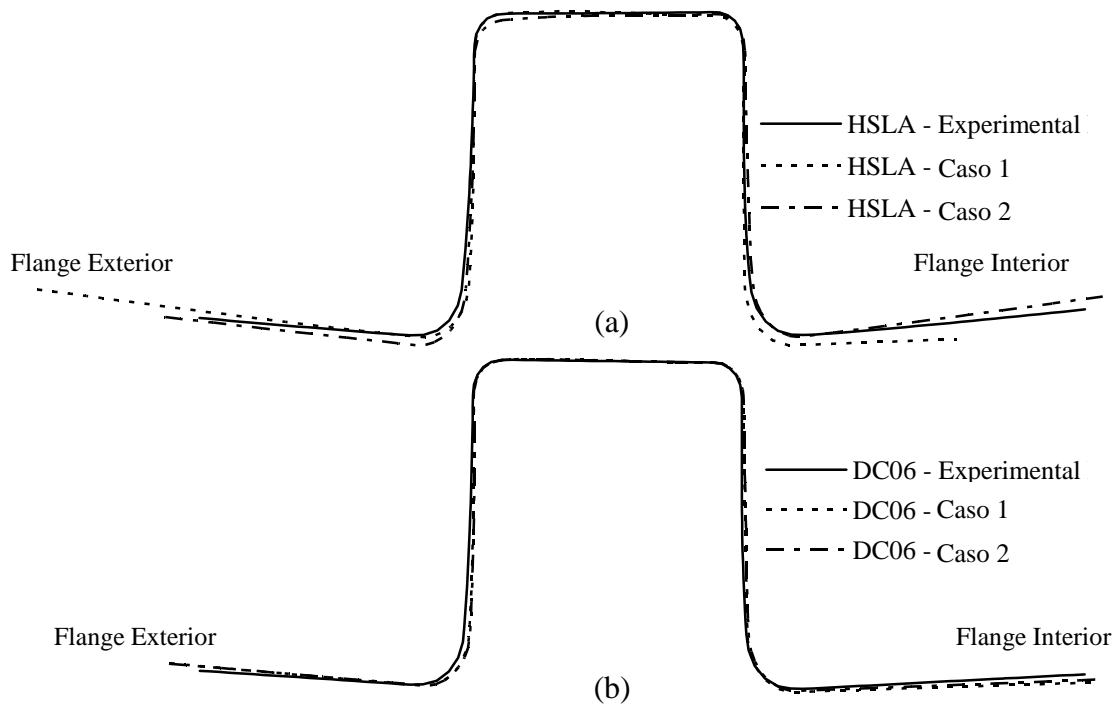


Figura 8.9 – Perfis da secção transversal média obtidos da simulação da conformação do perfil curvo com dois modelos distintos para a descrição da ferramenta a força imposta: (a) aço HSLA e (b) aço DC06.

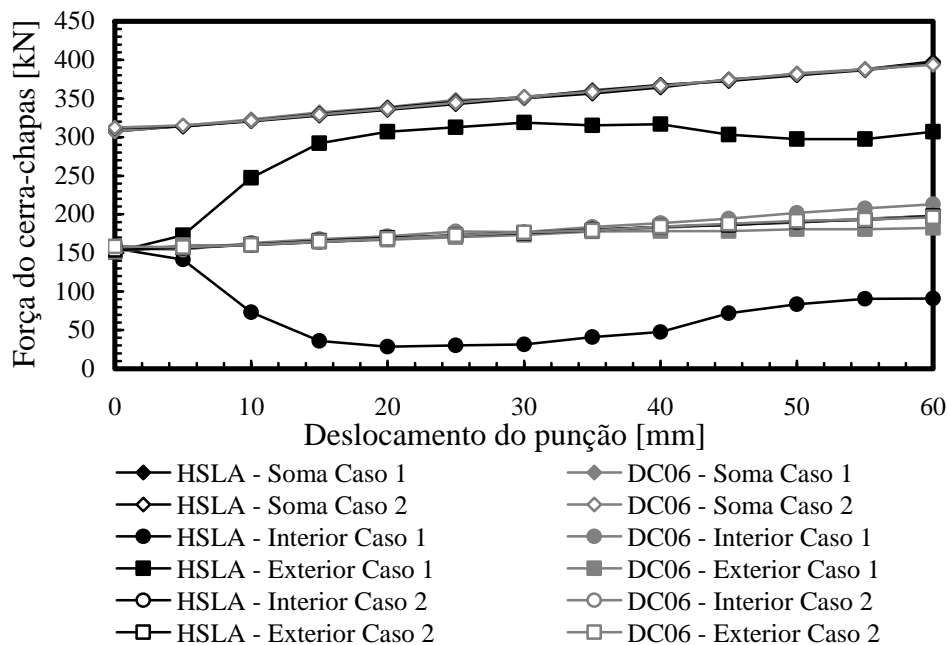


Figura 8.10 – Evolução da força total exercida pelo cerra-chapas, bem como das componentes exercidas nas abas interior e exterior do corpo deformável em função do modelo utilizado para a descrição da ferramenta a força imposta e do material utilizado para o corpo deformável.

Para o Caso 1, uma vez que se impõe unicamente a restrição ao valor total da força do cerra-chapas, as duas superfícies que o definem são tratadas como uma ferramenta

única, para a qual é necessário avaliar a evolução do deslocamento (ver secção 5.4.4.1). Deste modo, a posição espacial das duas superfícies é igual em cada instante. Tal pode conduzir a valores distintos de força imposta na aba interior e exterior. No Caso 2 a restrição suplementar ao valor de força exercida por cada superfície do cerra-chapas obriga a um tratamento independente, sendo necessário prever uma evolução do deslocamento distinta para cada uma das superfícies. Deste modo, pode associar-se uma posição espacial diferente ao mesmo valor de força exercida sobre as abas interior e exterior. Na Figura 8.11 apresenta-se a evolução do deslocamento do cerra-chapas, previsto para cada um dos modelos de controlo da ferramenta a força imposta para os dois materiais. A evolução suave do deslocamento do cerra-chapas permite constatar que a escolha da dimensão média dos elementos no plano da malha de elementos finitos é correcta [Alves 2003]. Um deslocamento negativo do cerra-chapas corresponde a uma redução da folga entre a matriz e o cerra-chapas. Um deslocamento positivo corresponde a um aumento dessa folga. Para o aço macio, a folga entre a matriz e o cerra-chapas é sempre negativa. Para o aço de alta resistência é sempre positiva.

No aço macio, a diferença em termos de evolução do deslocamento do cerra-chapas é insignificante. Constata-se que o ligeiro aumento da força exercida na aba interior no Caso 1 após os 40 mm de avanço do punção é compensado no Caso 2 por um deslocamento menor do cerra-chapas que actua nesta aba. Para a aba exterior no Caso 2, o deslocamento do cerra-chapas que actua deste lado é maior do que o deslocamento global do Caso 1, de modo a evitar o pequeno decréscimo da força de aperto previsto no Caso 1 para esta aba.

Para o aço de alta resistência no Caso 1, o deslocamento global do cerra-chapas conduz a um aumento da folga entre o cerra-chapas e a matriz, até atingir 40 mm de avanço do punção, altura em que a folga começa a diminuir. O aumento da folga resulta na diminuição da força aplicada na aba interior (ver Figura 8.10). Apesar da folga entre a matriz e o cerra-chapas estar também a aumentar na aba exterior, a força exercida pelo cerra-chapas aumenta para esta aba, devido à geometria não-simétrica do perfil curvo. Após os 40 mm de avanço do punção, a folga entre o cerra-chapas e a matriz começa a diminuir, o que conduz ao ligeiro aumento da força de aperto na aba interior e à consequente diminuição do valor de força de aperto na aba exterior.

Para o aço de alta resistência no Caso 2, ao impor valores iguais de força de aperto para as duas abas, a ferramenta que actua sobre a aba interior praticamente não se desloca durante o processo de conformação, enquanto que a que actua sobre a aba exterior apresenta um deslocamento elevado, logo após os 5 mm de avanço do punção. Ou seja, no Caso 1 o deslocamento global previsto para o cerra-chapas é demasiado elevado para garantir uma área de contacto efectiva com a aba interior. Por outro lado, este deslocamento global é demasiado pequeno para impedir um forte aumento da força de aperto na aba exterior. Isto conduz a uma evolução da força exercida pelo cerra-chapas de acordo com a evolução imposta pelas molas de gás, mas distribuída de forma desequilibrada entre as duas abas. Este comportamento está associado à falta de simetria da geometria do perfil curvo. A distribuição desequilibrada da força de aperto do cerra-chapas conduz a um valor de força de aperto na aba interior da chapa demasiado pequeno para impedir o escoamento do material deste lado da peça, o que conduz ao pequeno comprimento da aba prevista por esta simulação para a peça final (ver Figura 8.9).

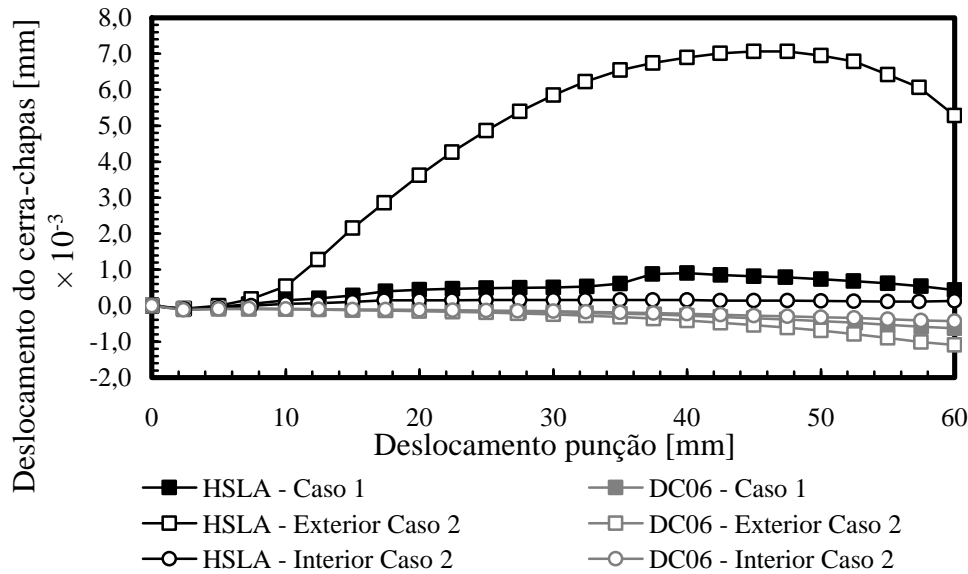


Figura 8.11 – Evolução do deslocamento do cerra-chapas em função do deslocamento do punção, na simulação da conformação do perfil. Influência do modelo de descrição da ferramenta a força imposta.

A interpretação dos resultados obtidos realça a interligação entre três variáveis: (i) a força do cerra-chapas; (ii) a folga entre a matriz e o cerra-chapas e (iii) a área efectiva de contacto. Na Figura 8.12 apresenta-se a evolução da área de contacto para os casos 1 e 2, para os dois materiais estudados. Para o aço de alta resistência confirma-se que no Caso 1 há um aumento da folga entre a matriz e o cerra-chapas logo no início do processo de conformação. Este deslocamento é necessário para controlar o valor global da força de aperto. Porém, conduz a uma redução da área de contacto com a aba interior. Esta redução facilita o escoamento do material na aba interior, o que resulta numa evolução diferente da área efectiva de contacto. Para um deslocamento do punção de 5 mm a área de contacto é muito semelhante. Para um deslocamento de 10 mm já é possível constatar o maior escoamento da aba interior no Caso 1 e a perda de contacto desta aba com o cerra-chapas. A partir de cerca de 40 mm de avanço do punção, a área de contacto entre a aba interior e o cerra-chapas aumenta, como consequência da diminuição da folga entre a matriz e o cerra-chapas (ver Figura 8.11). Ou seja, no Caso 1, a força de aperto é aplicada essencialmente na aba exterior, o que conduz a um aumento da área de contacto desta aba com o cerra-chapas (quando comparada com a área de contacto prevista no Caso 2). No caso do aço macio, a evolução da área de contacto das abas é idêntica, em ambos os modelos considerados.

Adicionalmente, a área efectiva de contacto e a sua evolução ao longo do processo de conformação depende da variação de espessura do corpo deformável. Na Figura 8.13 apresentam-se os isovalores de deformação  $\varepsilon_{33}$  no final do processo. Estes valores podem ser correlacionados com a distribuição da área de contacto que se mostra na Figura 8.12. Observa-se que o maior deslocamento do cerra-chapas que actua na aba exterior da chapa no Caso 2, no aço de alta resistência, está correlacionado com a distribuição da deformação em espessura. Na aba exterior, a análise do plano de simetria para o aço de alta resistência permite distinguir uma zona de redução de espessura próxima do bordo livre, seguida de uma zona de aumento de espessura próxima da zona de curvatura da matriz. Esta distribuição de espessura no final da fase de conformação está relacionada

com a distribuição de tensão. Ao longo do plano de simetria, na aba exterior, a forma curva do perfil induz tensões normais de tracção ( $\sigma_{xx}$ ) próximo do bordo livre e de compressão próximo do raio de curvatura no plano da matriz (ver Figura 8.13). O inverso ocorre na aba interior, o que justifica a diminuição de espessura próximo do raio de curvatura, apesar da folga entre o cerra-chapas e a matriz ser positiva (Figura 8.11). No Caso 2, o aumento de espessura na aba exterior é maior, devido ao maior deslizamento da aba, e conduz ao maior deslocamento do cerra-chapas em contacto com esta aba. No Caso 1, o escoamento de material na aba exterior não é suficiente para levar a esse aumento de espessura.

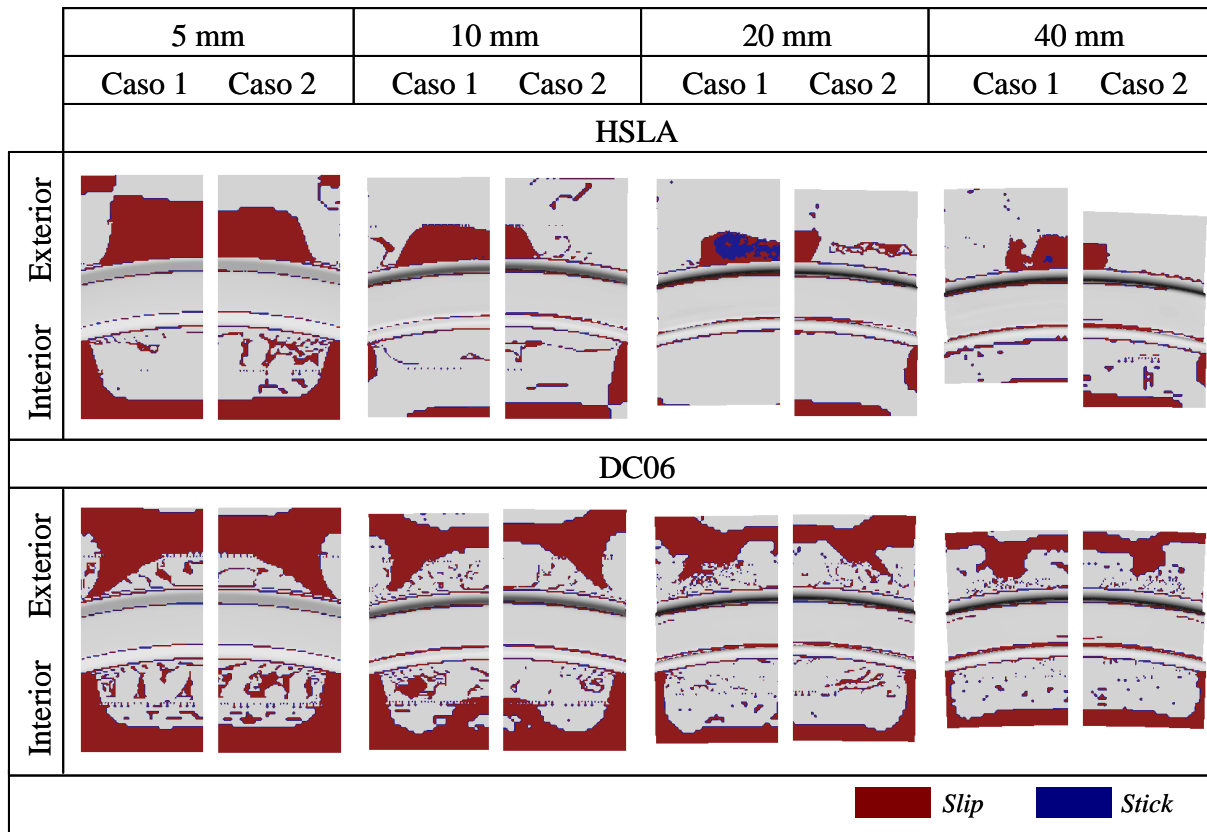


Figura 8.12 – Evolução da área de contacto efectiva na simulação da conformação do perfil curvo. Influência do modelo de descrição da ferramenta a força imposta.

Em relação ao aço macio, a distribuição de espessuras é muito idêntica para os dois modelos. Para a aba exterior, a distribuição de tensões  $\sigma_{xx}$  é bastante diferente da que se observa no aço de alta resistência, uma vez que ao longo do plano de simetria as tensões  $\sigma_{xx}$  são de compressão. De facto, para a aba interior o contacto estabelece-se essencialmente com o bordo livre da aba, para ambos os materiais. Para a aba exterior a distribuição da área de contacto é muito diferente para os dois materiais desde o início do processo de conformação, mesmo no Caso 2.

As propriedades mecânicas dos dois aços estudados determinam a distribuição da força de aperto do cerra-chapas. A comparação entre os resultados das simulações no Caso 2 e os resultados experimentais permite concluir que o sistema constituído pelos seis cilindros de gás utilizados para controlar a força do cerra-chapas garante uma distribuição equilibrada da força de aperto nas duas abas (ver Figura 8.8 e Figura 8.9). Esta situação não é correctamente simulada ao impor apenas um valor prescrito de força de aperto, como se mostra para as simulações realizadas no Caso 1. A distribuição

desequilibrada da força de aperto nas duas abas, induzida pela geometria não-simétrica do perfil e pelas propriedades mecânicas do material, conduz a uma previsão incorrecta das variáveis do processo.

O modelo considerado para controlar as ferramentas a força imposta deve correlacionar-se correctamente com as condições reais do processo, sendo necessário prever com exactidão o deslocamento da ferramenta. Apesar deste valor de deslocamento poder parecer desprezável, influencia fortemente o escoamento do material. Este problema, associado às condições de fronteira evolutivas, parece ser mais grave para os materiais com tensão limite de elasticidade mais elevada. Estes materiais são mais sensíveis à correcta modelação dos parâmetros tecnológicos do processo de conformação, exigindo cuidados suplementares para garantir uma melhoria efectiva dos resultados da simulação numérica.

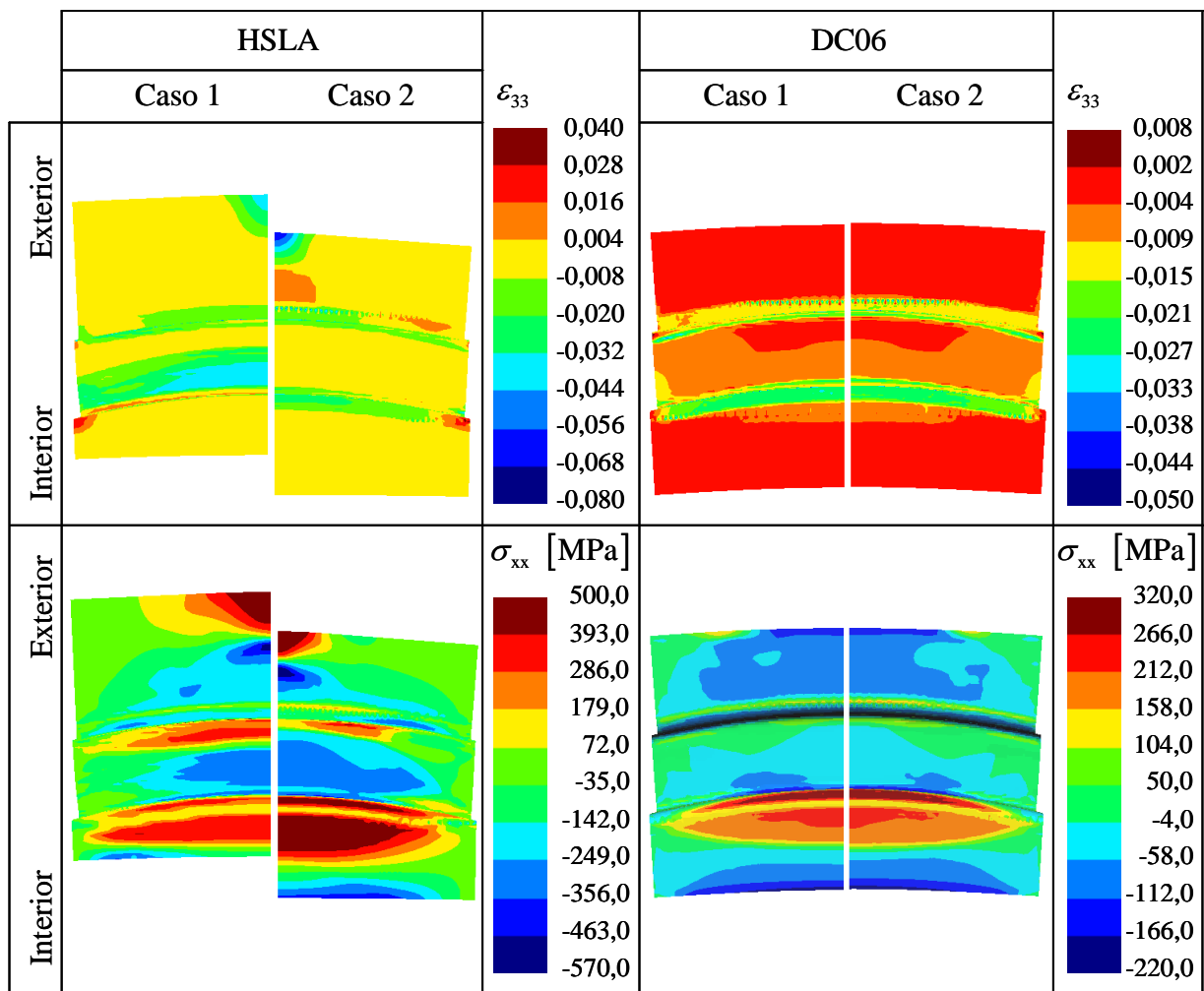


Figura 8.13 – Isovalores de deformação  $\epsilon_{33}$  e de tensão  $\sigma_{xx}$  no final da fase de conformação do perfil curvo, para os dois materiais. Influência do modelo de descrição da ferramenta a força imposta.

## 8.4 Lei de Encruamento

Nesta secção, procura avaliar-se a influência da lei de encruamento nos resultados da conformação do perfil curvo. Tendo em conta o trabalho experimental suplementar envolvido na determinação dos parâmetros constitutivos associados a leis de encruamento mais sofisticadas, é importante avaliar os benefícios associados com a sua utilização na simulação numérica dos processos de estampagem.

O facto de o estudo ser realizado com um programa implícito, DD3IMP, é uma garantia de que a avaliação da influência da descrição do comportamento mecânico dos materiais será levada a cabo de modo correcto. Estudos semelhantes realizados com programas que recorrem a formulações explícitas podem ser discutíveis, pois as estratégias numéricas que envolvem tendem a suavizar a influência do comportamento do material [Chenot e Bay 1998]. O método estático implícito apresenta ainda a vantagem de prever mais correctamente a geometria, mesmo para discretizações mais grosseiras [Lee *et al.* 1999].

O material seleccionado é o aço *dual-phase* (DP600), cujos valores dos parâmetros constitutivos para cada uma das leis de encruamento utilizadas são os apresentados na Tabela 8.2. Considera-se o valor inicial de força de aperto do cerra-chapas de 90 kN. A designação adoptada para cada simulação é a indicada entre parênteses na Tabela 8.2.

Tabela 8.2 – Parâmetros constitutivos associados às leis de encruamento para o aço *Dual-phase* (DP600) [LPMTM 2001]. As unidades dos parâmetros dimensionais são [MPa].

<i>Lei de Swift</i>		<i>Lei de Voce</i>				<i>Modelo Microestrutural de Teodosiu completo</i>					
<i>(Swift)</i>	<i>Lei de Lemaître e Chaboche (Swift + KH)</i>	<i>(Voce)</i>		<i>Lei de Lemaître e Chaboche (Voce + KH)</i>		<i>(TeodosiuC)</i>					
$Y_0$	330,3	$Y_0$	308,3	$Y_0$	303,3	$Y_0$	308,3	$Y_0$	308,3	$C_X$	53,5
$n$	0,187	$n$	0,132	$C_R$	16,3	$C_R$	6,75	$C_R$	49,7	$X_0$	153,0
$C$	1093,0	$C$	790,2	$R_{sat}$	543,4	$R_{sat}$	365,6	$R_{sat}$	433,5	$C_{SD}$	4,0
		$C_X$	15,8			$C_X$	73,7	$S_{sat}$	387,2	$C_{SL}$	0,0
		$X_{sat}$	169,2			$X_{sat}$	225,3	$n$	0,0	$n_p$	649,0
								$r$	0,0	$f$	0,862
								$C_p$	0,13		
Módulo de Young		210 000 MPa				Coeficiente de Poisson		0,3			
Critério de Plasticidade de Hill'48											
$F$	0,51274				$H$	0,50249					
$G$	0,49751				$N = M = L$	1,27292					

O aço utilizado caracteriza-se por apresentar um patamar de estagnação do encruamento após inversão de trajectória de deformação, correspondente ao ensaio de Bauschinger, como se mostra na Figura 8.14.

Na Figura 8.15 apresentam-se as curvas de evolução de força do punção previstas pelos diferentes modelos constitutivos, bem como resultados experimentais<sup>1</sup>. De uma

<sup>1</sup> Resultados cedidos pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, no âmbito do projecto 3DS.



forma genérica, a evolução da força exercida pelo punção é independente do modelo constitutivo. Para quantificar as diferenças induzidas pela caracterização mecânica do material toma-se como referência a simulação realizada com a lei de Swift, sem encruamento cinemático. A escolha desta referência reflecte a opção tradicionalmente utilizada pela maioria dos programas de simulação do processo de estampagem. A introdução do encruamento cinemático nos dois modelos de encruamento isotrópico (Swift e Voce) resulta numa redução de aproximadamente 6% no valor máximo previsto para a força de estampagem. A redução para o modelo microestrutural de Teodosiu completo é de aproximadamente 8%.

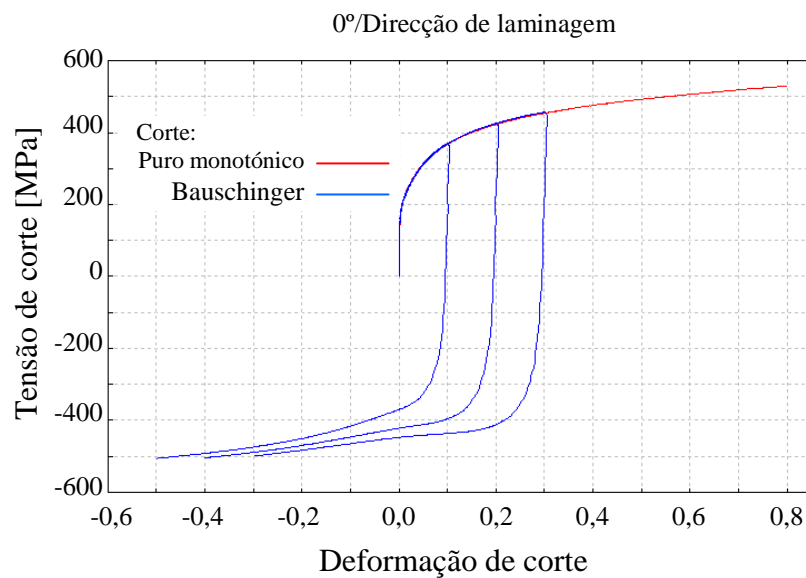


Figura 8.14 – Comportamento mecânico do aço DP600: resultados de ensaios experimentais [LPMTM 2001].

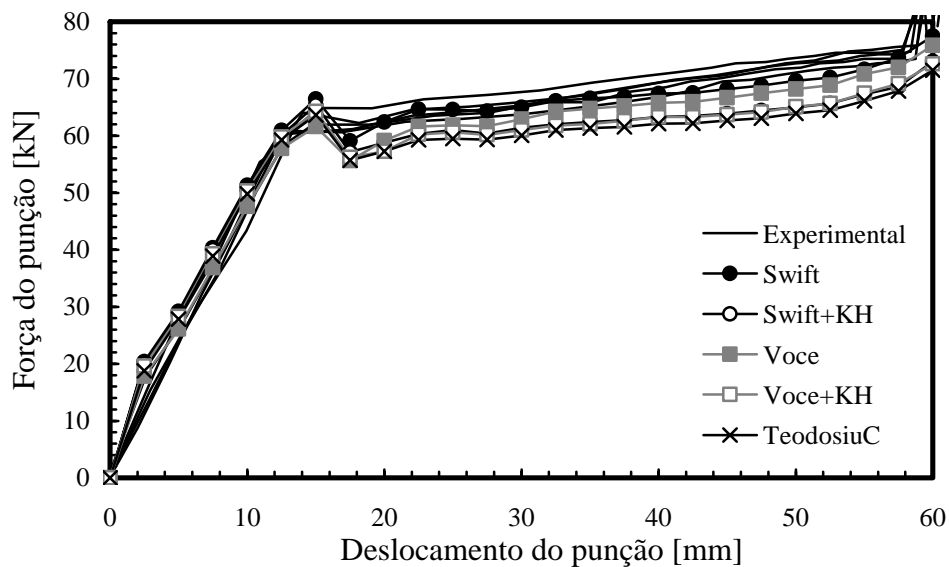


Figura 8.15 – Evolução da força exercida pelo punção na simulação da conformação do perfil curvo. Influência do modelo constitutivo.

Na Figura 8.16 apresenta-se os deslizamentos das abas interior e exterior previstos pelos diferentes modelos constitutivos, no final da fase de conformação (ver Figura 4.10).

No início do processo de conformação as abas interior e exterior apresentam uma área de contacto com o cerra-chapas idêntica. A evolução da força aplicada pelo cerra-chapas em ambas as abas é também idêntica (ver secção 8.3). No entanto, devido à geometria assimétrica do perfil, o deslizamento da aba interior é sempre superior ao da aba exterior. Globalmente, a curvatura das flanges no plano está de acordo com a geometria esperada, em consequência do escoamento do material. Ou seja, para a aba interior, o deslizamento é maior no plano de simetria. Para a aba exterior é menor neste plano. Os deslizamentos de aba previstos com o modelo microestrutural de Teodosiu completo e com os modelos que recorrem à lei de Swift para descrever o encruamento isotrópico são idênticos. Apresentam uma diferença de 1% em relação aos obtidos nas simulações que recorrem à lei de Voce.

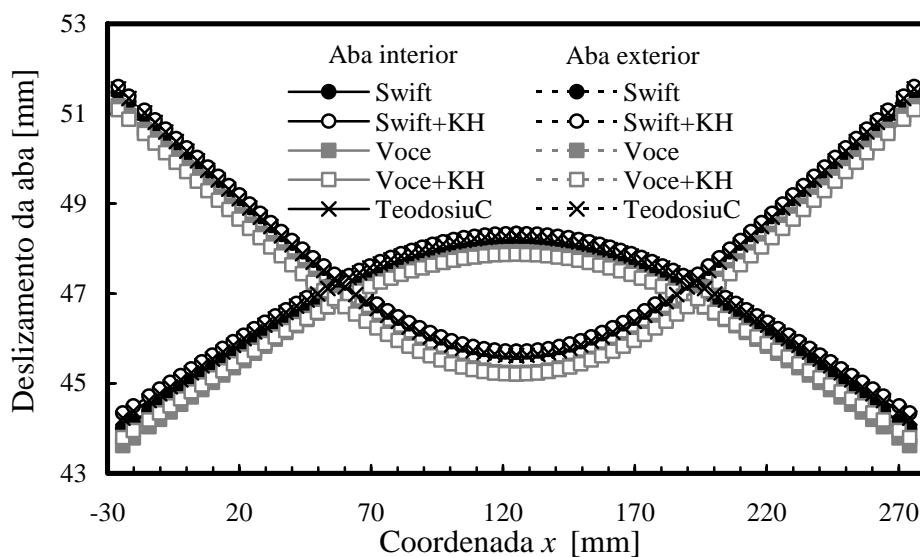


Figura 8.16 – Deslizamento das abas interior e exterior, no final da fase de conformação do perfil curvo. Influência do modelo constitutivo.

Para avaliar as diferenças após retorno elástico, seleccionam-se as secções A e B indicadas na Figura 8.2. Os resultados obtidos para as diferentes descrições do comportamento mecânico dos materiais são os que se apresentam na Figura 8.17 (Secção B). A comparação dos resultados obtidos pelos diferentes modelos constitutivos é baseada nos ângulos de retorno elástico das abas, avaliados com o auxílio do programa *NXT Post Processor II*. Na Figura 8.18 apresenta-se um resumo dos ângulos obtidos para as abas interior e exterior nas duas secções transversais. A aba interior apresenta variações ligeiramente superiores dos ângulos de retorno elástico, pelo que parece ser mais sensível ao modelo constitutivo. O modelo microestrutural de Teodosiu completo prevê o menor ângulo de retorno elástico. As simulações realizadas desprezando a componente cinemática do encruamento apresentam ângulos de retorno elástico máximos. A simulação com a lei de Voce conduz a ângulos no máximo 1° superiores à realizada com a lei de Swift. A introdução do encruamento cinemático reduz o valor previsto para o ângulo de retorno elástico, sendo este em média 1,5° inferior ao estimado considerando apenas encruamento isotrópico. Para o modelo microestrutural, esta diferença aumenta para 2°. A comparação dos ângulos de retorno elástico para as duas secções transversais faz realçar as conclusões da comparação do deslizamento da aba. Assim, na aba exterior

os resultados obtidos com a lei de Swift com encruamento cinemático aproximam-se mais dos resultados do modelo microestrutural de Teodosiu completo. Porém, na aba interior, os resultados obtidos com a lei de Voce e encruamento cinemático estão mais próximos do modelo microestrutural completo. Na Figura 8.17 e na Figura 8.18 apresentam-se também resultados experimentais para evidenciar a dificuldade na selecção da lei de encruamento. De facto, a dispersão dos resultados experimentais é superior à dispersão observada para as simulações realizadas com os diferentes modelos constitutivos. No entanto, o valor mais próximo da média experimental é o que se obtém com o modelo microestrutural de Teodosiu completo, com uma diferença máxima de  $3,5^\circ$  na aba exterior e  $2,75^\circ$  na aba interior.

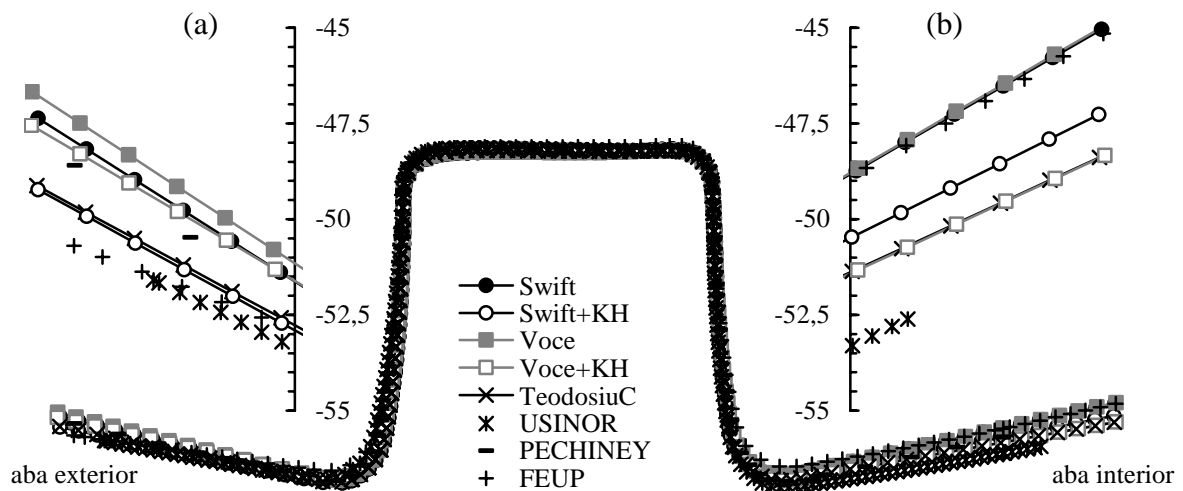


Figura 8.17 – Perfis da secção transversal média (Secção B) obtida após retorno elástico para o perfil curvo<sup>1, 2, 3</sup>. Pormenor do retorno elástico da aba (a) exterior e (b) interior. Influência do modelo constitutivo.

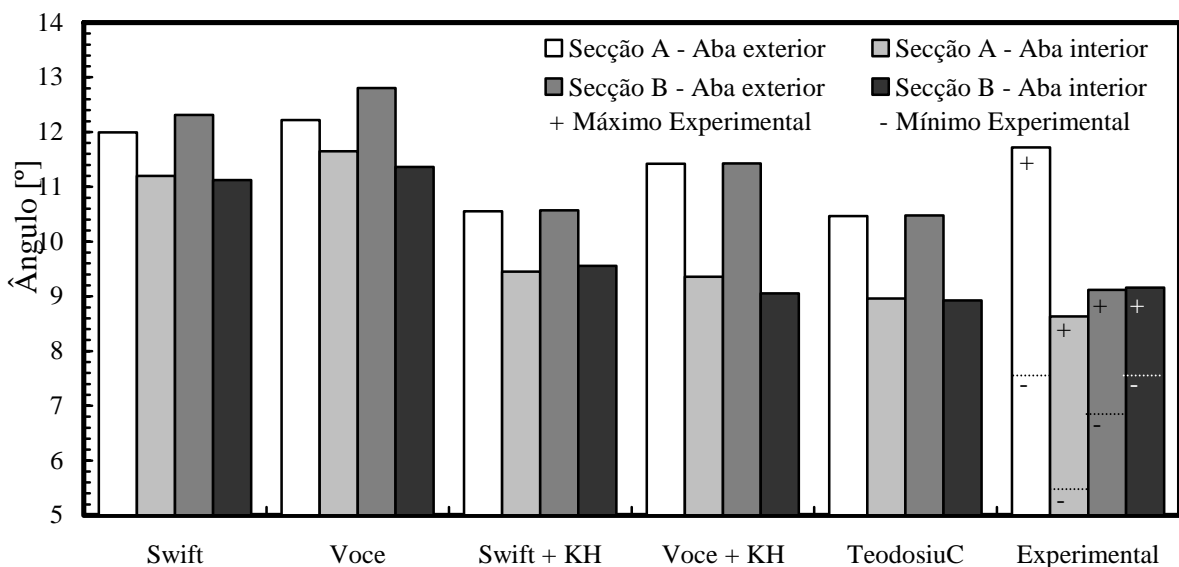


Figura 8.18 – Ângulo de retorno elástico previstos na simulação da conformação do perfil curvo<sup>1, 2, 3</sup>. Influência do modelo constitutivo.

<sup>1</sup> Resultados cedidos pela USINOR S.A., no âmbito do projecto 3DS.

<sup>2</sup> Resultados cedidos pela Pechiney C.R.V., no âmbito do projecto 3DS.

<sup>3</sup> Resultados cedidos pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, no âmbito do projecto 3DS.

A reduzida influência do modelo constitutivo nos resultados obtidos no processo de conformação do perfil curvo pode ser associada ao baixo nível de deformação plástica equivalente no final do processo de conformação (inferior a 16%). De facto, constata-se que a dificuldade das leis de Swift e Voce com encruamento cinemático em descrever os patamares de estagnação, originados pela inversão da trajectória de deformação (ver Figura 8.14), é tanto maior quanto maior é o nível de pré-deformação (ver Figura 8.19). No caso do perfil curvo em análise, as mudanças de trajectória ocorrem para valores baixos de pré-deformação. Tal facto atenua as diferenças entre os modelos. O mesmo comportamento é reportado para o *Benchmark Reverse Deep Drawing of a Cylindrical Cup* da conferência Numisheet'99 [Menezes *et al.* 2002], bem como para o perfil U [Alves 2003].

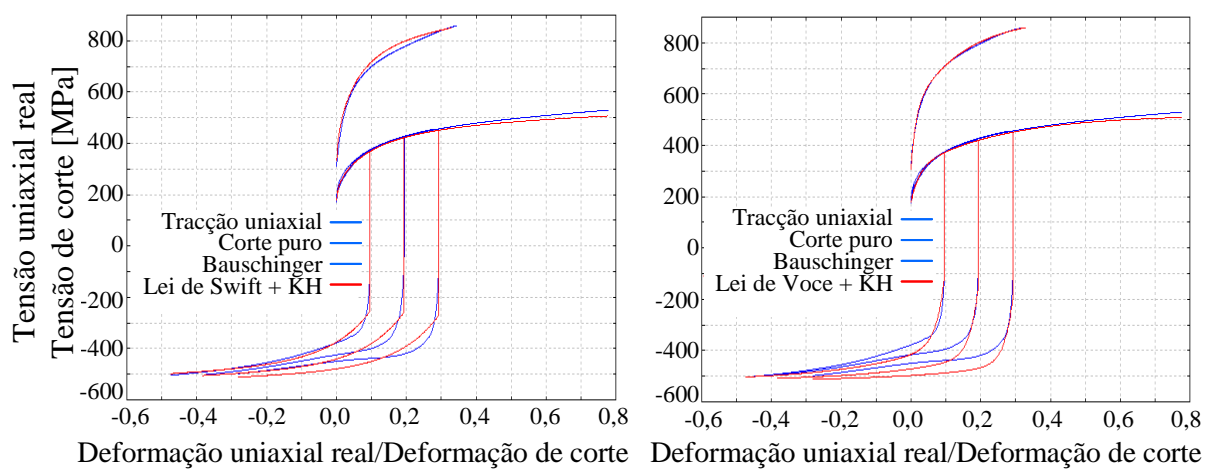


Figura 8.19 – Comportamento mecânico do aço DP600: comparação dos modelos constitutivos com os resultados experimentais [LPMTM 2001].

Em relação às diferenças observadas com a introdução da descrição do comportamento cinemático, outros trabalhos revelaram a sua importância na previsão do retorno elástico. No entanto, a descrição não-linear do encruamento cinemático com o auxílio da lei de Lemaître e Chaboche não permite representar correctamente o efeito de Bauschinger para níveis de pré-deformação mais elevados, para os quais surge um desvio no valor de tensão previsto [Geng *et al.* 2002], como se pode confirmar na Figura 8.19. Daí advém a necessidade de recorrer a modelos mais complexos.

Na Figura 8.20 apresentam-se os isovalores de tensão equivalente no final do processo de conformação e após retorno elástico. No final do processo de conformação é evidente que as distribuições resultam diferentes, pois dependem de se considerar ou não a componente cinemática do encruamento. Os níveis máximos de tensão equivalente no final do processo são obtidos com as simulações realizadas considerando apenas a componente isotrópica do encruamento. Para a lei de Voce e Swift obtém-se um valor máximo de 794 e 775 MPa, respectivamente. O facto da simulação com a lei de Voce apresentar o valor mais elevado de tensão equivalente, associado ao valor mais baixo de deformação plástica equivalente, está de acordo com a descrição deste modelo do aço *dual-phase* (ver Figura 8.19). Ao introduzir a componente cinemática do encruamento, as tensões equivalentes baixam, atingindo os valores máximos de 619 e 549 MPa para as simulações *Swift + KH* e *Voce + KH*, respectivamente. Para a simulação com o modelo

de Teodosiu completo a tensão equivalente máxima no final é de 545 MPa, valor muito próximo do obtido pela simulação *Voce + KH*. As diferenças nos valores máximos de tensão residual são menores do que as observadas no final da conformação. As simulações realizadas sem considerar o encruamento cinemático apresentam uma redução de 10% enquanto que, a simulação *Swift + KH* reduz 5,5% e as simulações *Voce + KH* e *TeodosiuC* reduzem esse valor 7,6%.

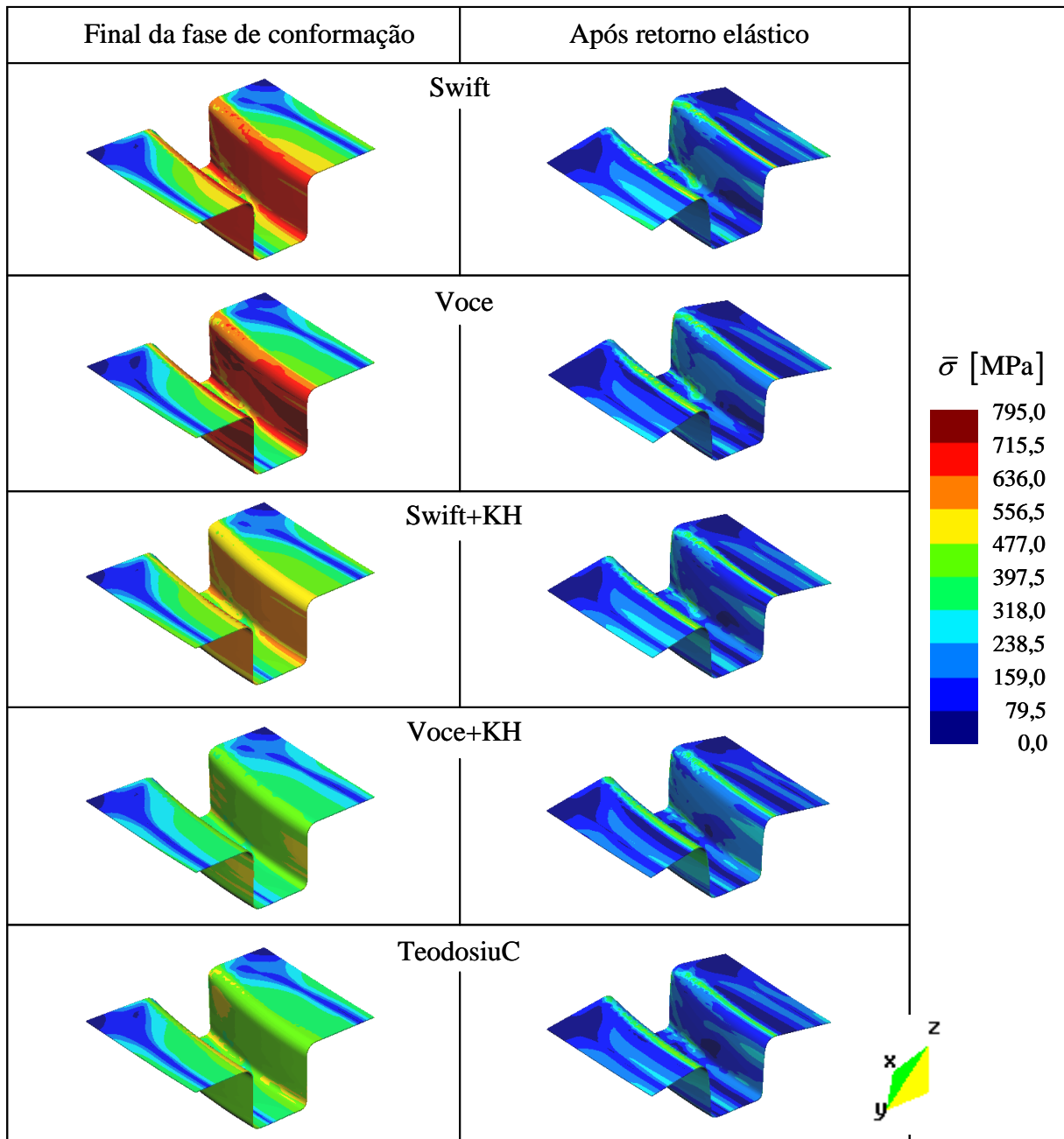


Figura 8.20 – Isovalores de tensão equivalente obtidos no final do processo de conformação do perfil curvo e após retorno elástico. Influência do modelo constitutivo.

Os resultados apresentados permitem atestar a importância da descrição do encruamento cinemático para uma previsão correcta da distribuição de tensões, factor crucial para melhorar a simulação numérica do fenómeno de retorno elástico. Um estudo semelhante, realizado para um aço de alta resistência (HSLA340) revela a mesma influência [Chaparro *et al.* 2004].

## 8.5 Força de Aperto do Cerra-chapas

Nesta secção avalia-se a influência da força de aperto do cerra-chapas no retorno elástico, quer para o perfil U quer para o perfil curvo. Consideram-se dois materiais com propriedades mecânicas distintas: (i) um aço de alta resistência (HSLA340) e (ii) uma liga de alumínio (5182-O). Os dois valores de força de cerra-chapas analisados correspondem aos valores iniciais de 90 kN e de 300 kN. A geometria simples do perfil U permite uma interpretação mais fácil da influência deste parâmetro tecnológico. O perfil curvo introduz, em relação ao perfil U, uma complexidade suplementar resultante das tensões circunferenciais que surgem na zona de curvatura da matriz.

O aço de alta resistência apresenta propriedades mecânicas muito semelhantes às do aço *dual-phase*, descrito na secção anterior (ver Figura 8.21). O comportamento deste material pode ser descrito recorrendo à lei de Swift para a descrição do encruamento isotrópico e à lei de Lemaître e Chaboche para o encruamento cinemático [LPMTM 2001].

A liga de alumínio 5182-O caracteriza-se por não apresentar estagnação do encruamento na inversão de trajetória, correspondente ao ensaio de Bauschinger (ver Figura 8.22). De facto, para este material o efeito de Bauschinger é pouco pronunciado (diferença inferior a 4% entre as tensões limite de elasticidade). Dadas estas características, o comportamento mecânico deste material pode ser correctamente descrito pela lei de Voce com encruamento cinemático. Apesar de o efeito de Bauschinger ser muito pequeno, a introdução da componente cinemática permite uma melhor descrição do encruamento [LPMTM 2001].

Assim, para o perfil U, a descrição do comportamento mecânico dos materiais recorre aos modelos constitutivos mais simples: leis de Swift e Voce, ambas com encruamento cinemático. Para o perfil curvo, devido à maior complexidade geométrica, opta-se pelo modelo microestrutural de Teodosiu. No Anexo E apresenta-se o resumo dos parâmetros constitutivos utilizados na descrição do comportamento da liga de alumínio da série 5000 (Tabela E.2) e do aço de alta resistência (Tabela E.4) [LPMTM 2001].

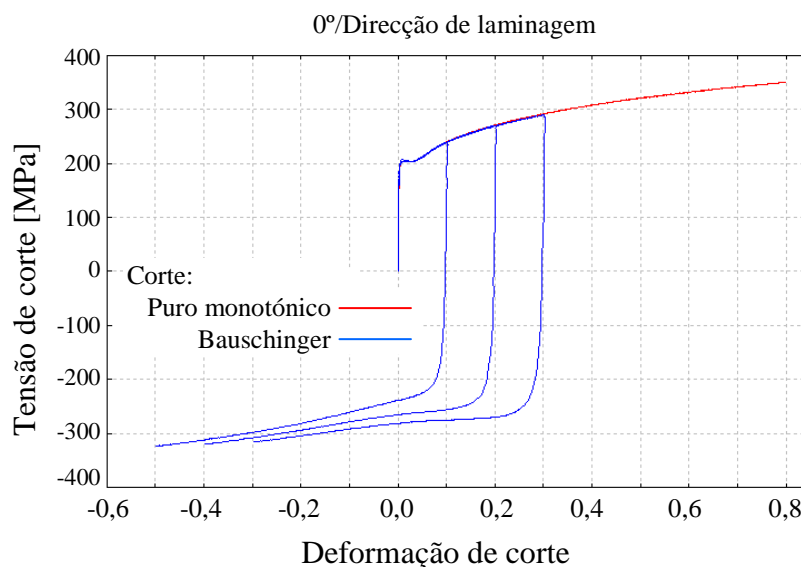


Figura 8.21 – Comportamento mecânico do aço HSLA: resultados de experimentais [LPMTM 2001].

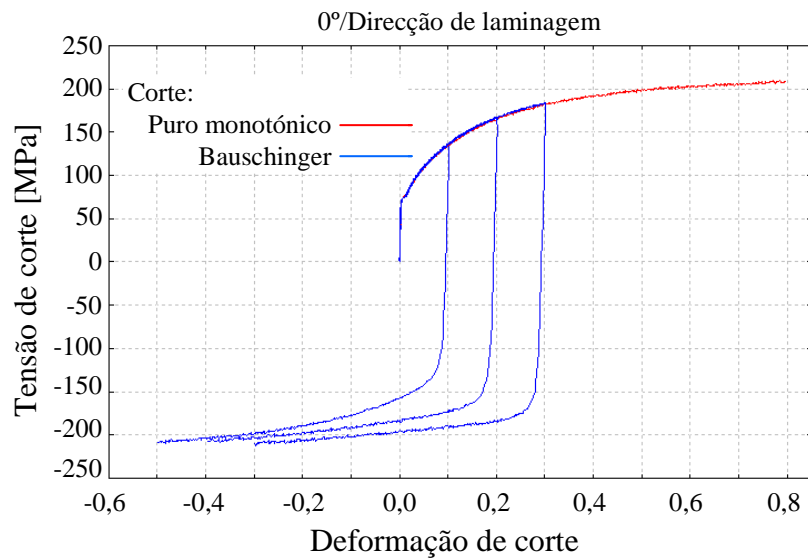


Figura 8.22 – Comportamento mecânico da liga de alumínio 5182-O: resultados de ensaios experimentais [LPMTM 2001].

Para o perfil U considera-se apenas um quarto da geometria no modelo numérico, devido às condições de simetria geométrica, material e de carregamento. A discretização adoptada considera elementos finitos hexaédricos com 3,0 mm no plano, apenas uma camada em espessura e integração reduzida selectiva. Para o perfil curvo adopta-se a discretização mencionada no início do presente capítulo. O coeficiente de atrito considerado para ambos os exemplos é  $\mu = 0,10$ .

### 8.5.1 Perfil U

Na Figura 8.23 apresentam-se as curvas de evolução da força do punção, para os dois materiais. O aumento da força de aperto do cerra-chapas conduz a um aumento da força máxima necessária para realizar a conformação do perfil. Para o aço de alta resistência este aumento é de aproximadamente 75% e para a liga de alumínio 5182-O de 140%. Na Figura 8.23 apresentam-se, igualmente, resultados experimentais<sup>1</sup>. Para o valor mais elevado de força de aperto do cerra-chapas não foi possível obter resultados experimentais para a liga de alumínio. A evolução da força exercida pelo punção obtida experimentalmente conduz a uma estimativa para a força máxima superior aos valores obtidos por simulação numérica. Estes resultados indiciam que o coeficiente de atrito constante  $\mu = 0,10$  deverá ser demasiado baixo em relação à sua distribuição média real, em particular para a força de aperto mais alta. Convém sublinhar que o objectivo da comparação com os resultados experimentais não é avaliar a precisão da previsão do fenómeno de retorno elástico, uma vez que a discretização utilizada com uma razão do elemento finito de  $R = 3,0$  não permite esse rigor, mas sim avaliar qualitativamente a variação induzida pelo aumento da força de aperto.

O aumento da força de aperto do cerra-chapas induz uma diminuição no deslizamento das flanges. Este traduz-se num aumento do comprimento das abas no final da fase de conformação de 2,5 mm e 1,0 mm, para a liga de alumínio e para o aço de alta resistência, respectivamente. Associado a esta diminuição do deslizamento das abas surge

<sup>1</sup> Resultados cedidos pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, no âmbito do projecto 3DS.



um aumento da deformação plástica equivalente que ocorre, essencialmente, nas paredes verticais do perfil e na zona correspondente à curvatura do punção (ver Figura 8.24). Na Figura 8.25 apresenta-se a distribuição de tensão equivalente para o perfil U. Esta permite confirmar que o aumento de força no cerra-chapas conduz a um aumento global dos níveis de tensão equivalente, em particular para a liga de alumínio.

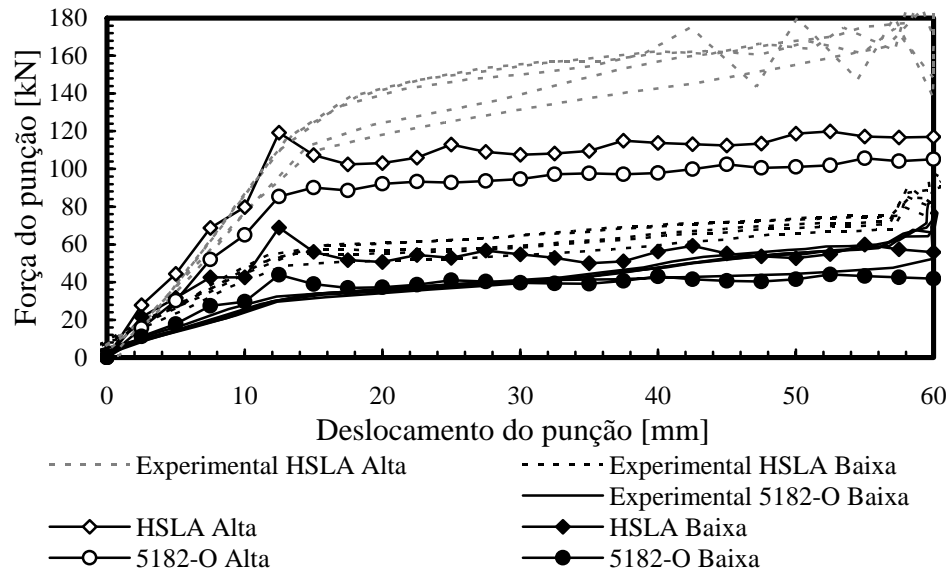


Figura 8.23 – Evolução da força do punção na simulação da conformação do perfil U. Influência da força de aperto do cerra-chapas.

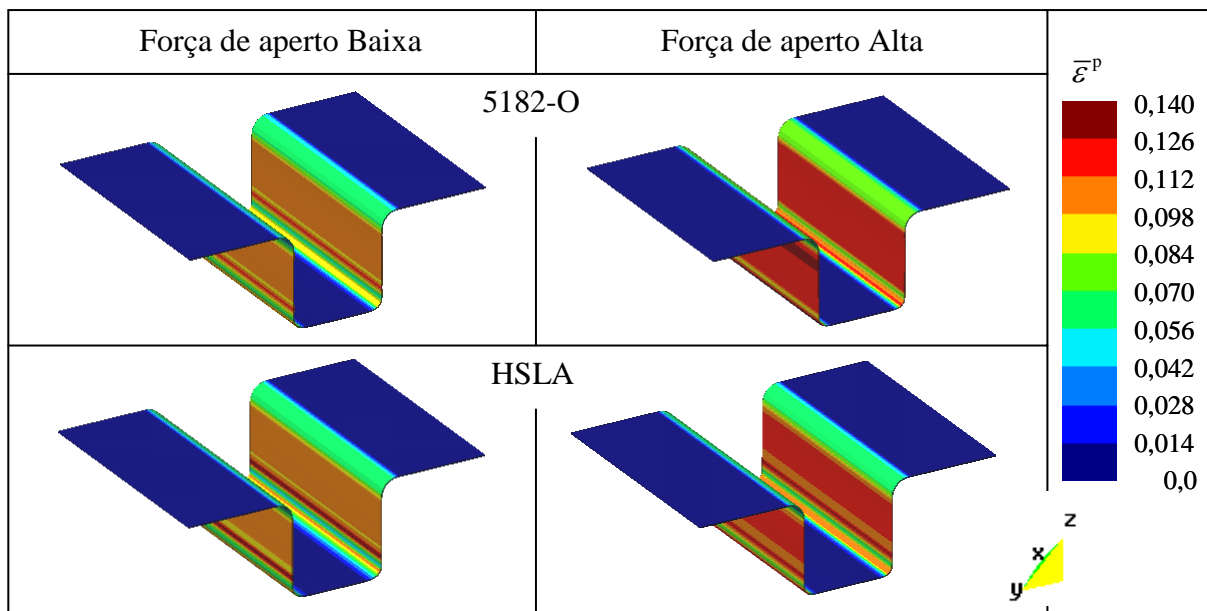


Figura 8.24 – Isovalores de deformação plástica equivalente no final do processo de conformação do perfil U. Influência da força de aperto do cerra-chapas.

Na Figura 8.26 apresenta-se a geometria do perfil para a liga de alumínio, após retorno elástico. O ângulo de retorno elástico das abas é de aproximadamente  $13^\circ$  para a força mais baixa e de  $8^\circ$  para a força mais alta. Ou seja, o aumento da força de aperto do cerra-chapas resulta numa redução de cerca de 40% no ângulo de retorno elástico. Neste caso, não é possível comparar com o resultado experimental, uma vez que não existem



resultados para a força de aperto mais elevada. Esta redução surge associada a um aumento da curvatura da parede vertical, consequência do maior nível de deformação plástica induzido nesta zona. Estudos realizados para este tipo de geometria indicam que a variação da curvatura da parede vertical é influenciada pela tensão de tracção instalada [Samuel 2000, Carden *et al.* 2002].

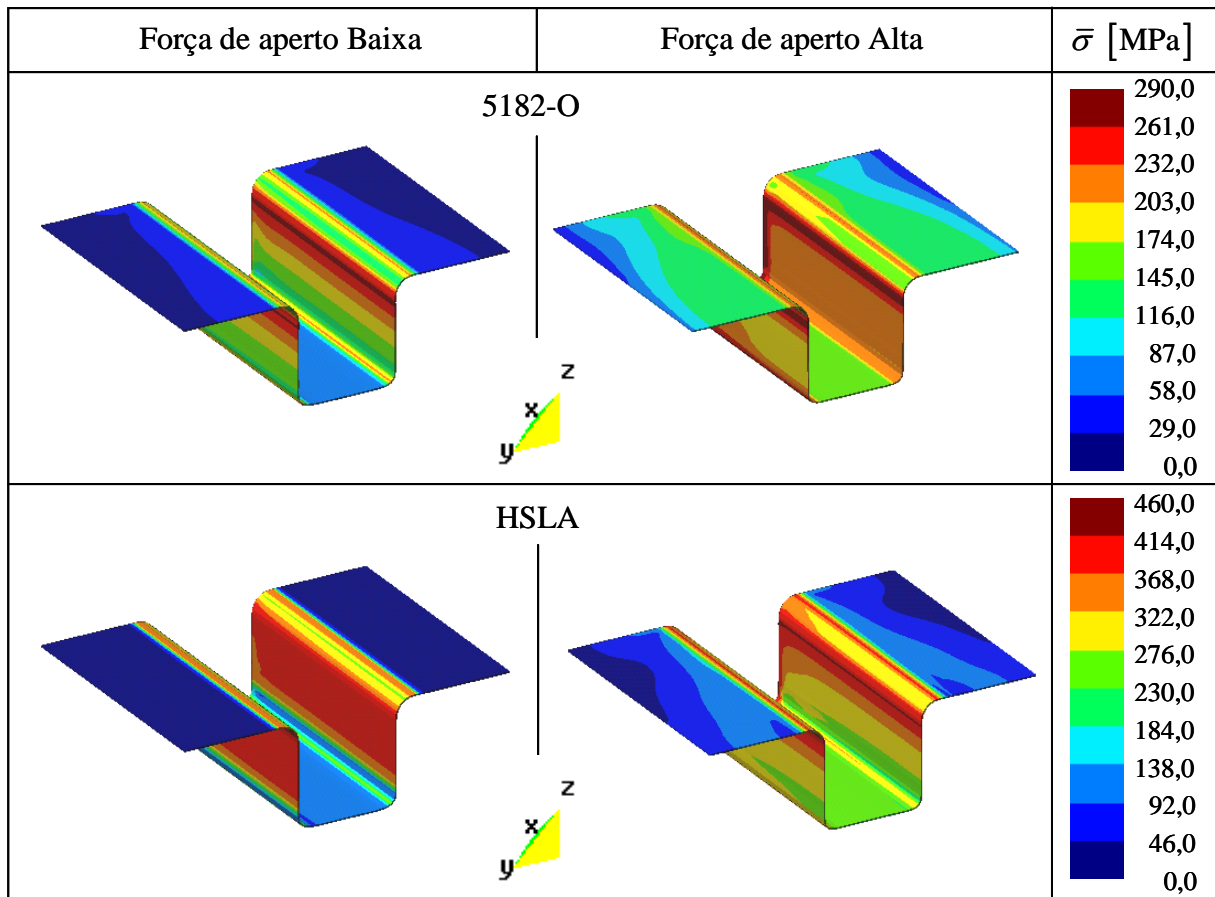


Figura 8.25 – Isovalores de tensão equivalente no final do processo de conformação do perfil U. Influência da força de aperto do cerra-chapas.

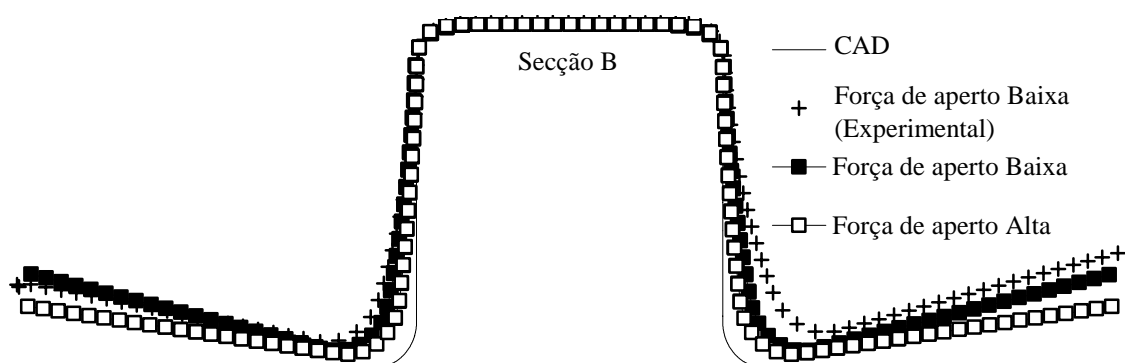


Figura 8.26 – Secção transversal média do perfil U, para os diferentes valores de força de aperto do cerra-chapas. Resultados referentes à liga de alumínio 5182-O.

De facto, na indústria recorre-se com frequência ao aumento da força de aperto do cerra-chapas para garantir geometrias finais com paredes verticais de maior raio de curvatura e, consequentemente, reduzir o retorno elástico. No entanto, só se consegue este efeito se ocorrer deformação plástica da parede. Ou seja, se a tensão equivalente na

parede ultrapassar a tensão limite de elasticidade do material. No final do processo de conformação, para a liga de alumínio e força mais baixa, observa-se uma zona da parede vertical cuja tensão equivalente é inferior à tensão limite de elasticidade em tracção do material ( $Y_0 = 148,5$  MPa, ver Figura 8.25). Para a força de aperto mais alta a tensão equivalente em toda a parede vertical é superior a este valor. Estudos anteriores, realizados com geometrias de perfil U confirmam que, para forças de aperto mais baixas, o punção induz essencialmente tensões de flexão na chapa. Por outro lado, para valores mais elevados as tensões induzidas na fase de conformação são essencialmente de tracção [Papeleux e Ponthot 2002].

Na Figura 8.27 apresenta-se a geometria obtida após retorno elástico para o aço de alta resistência. Nesse caso, a previsão numérica para a força de aperto inferior aponta um ângulo de retorno elástico das abas de cerca de  $7^\circ$ . Para a força mais alta, este valor reduz para  $5,8^\circ$  (redução de 20%). Esta pequena variação pode associar-se à distribuição de tensão equivalente, apresentada na Figura 8.25. Nesta figura pode constatar-se que, para a força de aperto mais baixa, o aço de alta resistência apresenta uma tensão equivalente nas paredes verticais superior à tensão limite de elasticidade em tracção, que neste caso é de  $Y_0 = 367,7$  MPa. Ou seja, ocorre deformação plástica da parede mesmo para a força de aperto mais baixa. Este facto pode justificar a menor variação do ângulo de retorno elástico das abas para o aço de alta resistência. O aumento da força de aperto do cerra-chapas induz uma redistribuição das tensões que resultam no aumento da deformação plástica equivalente na zona de curvatura da matriz e do punção.

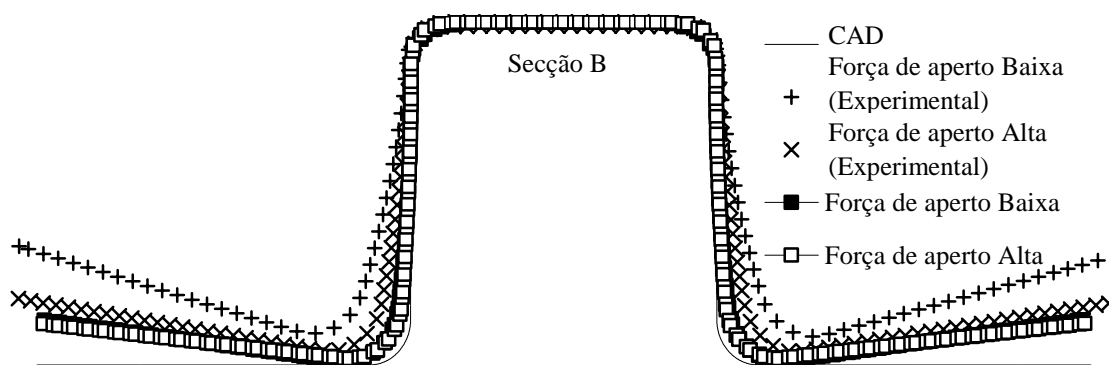


Figura 8.27 – Secção transversal média do perfil U, para os diferentes valores de força de aperto do cerra-chapas. Resultados referentes ao aço de alta resistência HSLA.

### 8.5.2 Perfil Curvo

Na Figura 8.28 apresentam-se as curvas de evolução de força com o deslocamento do punção. Constata-se um aumento significativo da força máxima prevista para o punção com o aumento da força de aperto do cerra-chapas. Este é de aproximadamente 100% para o aço de alta resistência e de 150% para a liga de alumínio. Os resultados experimentais<sup>1</sup> apresentados na mesma figura indiciam, mais uma vez, uma incorrecta avaliação do coeficiente de atrito utilizado na simulação numérica, em particular para o aço de alta resistência.

<sup>1</sup> Resultados cedidos pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, no âmbito do projecto 3DS.

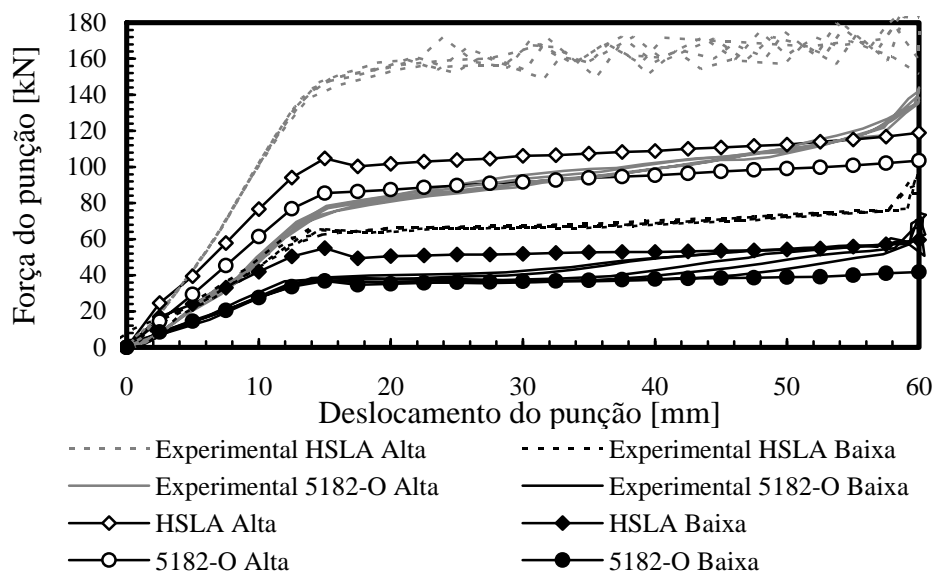


Figura 8.28 – Evolução da força exercida pelo punção na simulação da conformação do perfil curvo. Influência da força de aperto do cerra-chapas.

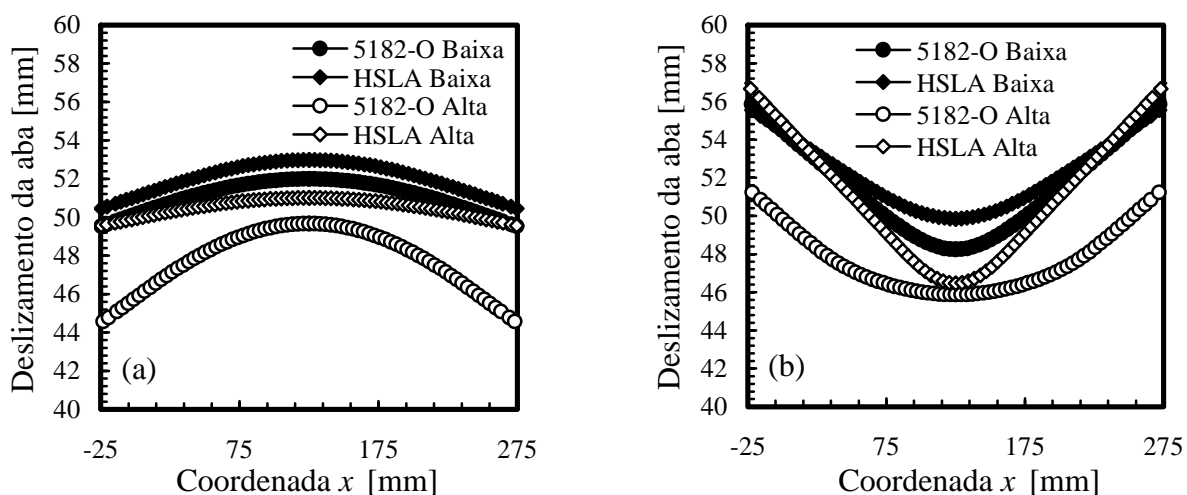


Figura 8.29 – Influência da força de aperto do cerra-chapas, no deslizamento das abas, no final da fase de conformação do perfil curvo: (a) aba interior e (b) aba exterior.

Na Figura 8.29 apresenta-se o deslizamento das abas no final da fase de conformação. Para a força de aperto mais baixa os dois materiais apresentam valores muito semelhantes para o deslizamento das abas. O aumento da força de aperto do cerra-chapas conduz a uma redução global do deslizamento das duas abas. Porém, os dois materiais apresentam um comportamento distinto. Para a aba interior, o aço de alta resistência diminui o deslizamento em cerca de 2,0 mm no plano médio e apresenta uma geometria praticamente plana. A liga de alumínio apresenta uma redução no deslizamento da aba interior no plano médio próximo de 3,0 mm. Esta redução acentua-se no bordo livre atingindo os 5,0 mm. Para a aba exterior, o aço de alta resistência apresenta uma redução de deslizamento, essencialmente no plano médio, inferior a 3,5 mm. Para a liga de alumínio, o deslizamento global da aba exterior é menor, com uma redução da ordem dos 3,5 mm. Globalmente, a redução do deslizamento das abas devido ao aumento da força de aperto do cerra-chapas é mais pronunciado na aba interior. Este comportamento sugere

que o escoamento do material é facilitado pela maior curvatura da matriz na zona correspondente à aba exterior. É por isso de prever que o retorno elástico seja maior nesta zona.

A geometria prevista após retorno elástico é apresentada na Figura 8.30 e na Figura 8.31, para a liga de alumínio e para o aço de alta resistência, respectivamente. Destas figuras ressalta a diferença de comportamento apresentada pelos dois materiais. Para a liga de alumínio o aumento da força de aperto conduz a uma redução efectiva do ângulo de retorno elástico na aba interior, sem alteração sensível no ângulo de retorno elástico da aba exterior. O comportamento qualitativo dos resultados experimentais é muito semelhante, sem alteração do ângulo de retorno elástico da aba exterior. O aço de alta resistência apresenta uma ligeira redução do ângulo de retorno elástico das duas abas, quer nos resultados numéricos quer nos experimentais.

Apesar de não serem aqui apresentados os resultados referentes a outros três materiais estudados no âmbito do projecto 3DS (aço DC06, aço DP600 e liga de alumínio 6016-T4), constata-se que o comportamento apresentado pela liga de alumínio é característico de todos os materiais com menor tensão limite de elasticidade (aço macio DC06 e liga de alumínio 6016-T4). Da mesma forma, o comportamento apresentado pelo aço de alta resistência é idêntico ao observado para o aço DP600.

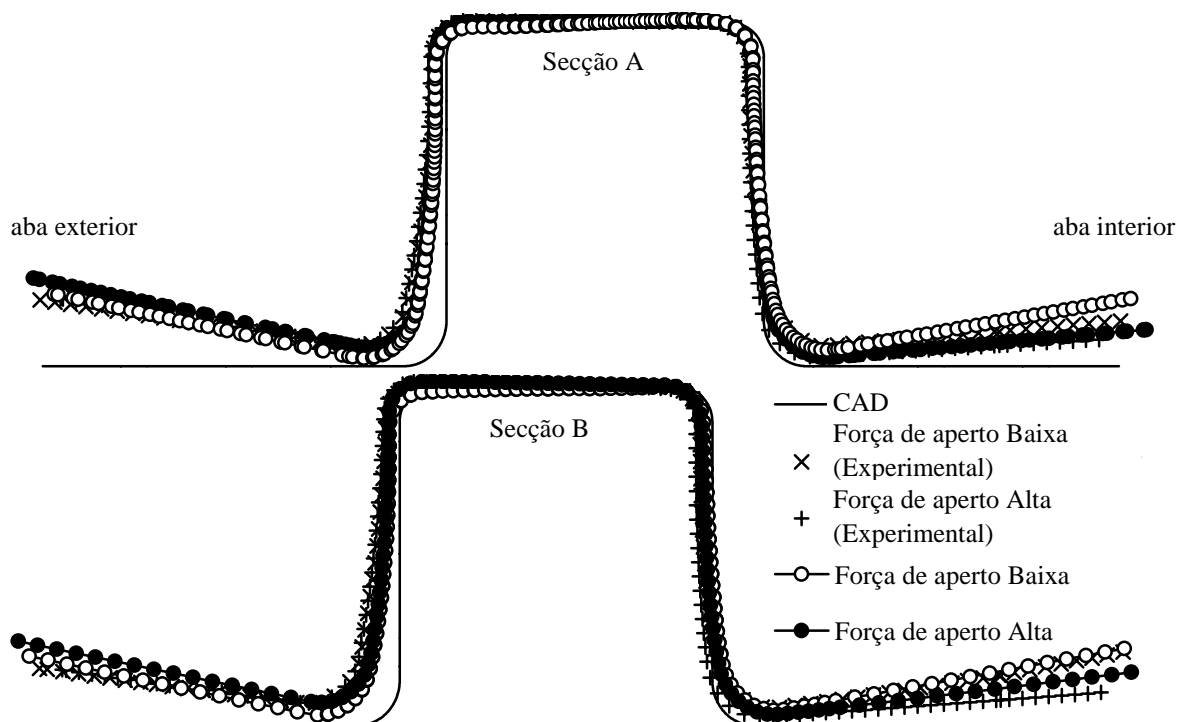


Figura 8.30 – Secções transversais do perfil curvo, para os diferentes valores de força de aperto do cerra-chapas. Resultados referentes à liga de alumínio 5182-O.

Na Figura 8.32 apresentam-se os isovalores de deformação plástica equivalente, no final da fase de conformação do perfil curvo. O aumento da força de aperto do cerra-chapas resulta num aumento global da deformação plástica. Este aumento justifica a redução do retorno elástico observada no aço de alta resistência, assim como a redução do ângulo de retorno elástico da aba interior para a liga de alumínio da série 5000. Porém, o aumento global da deformação plástica parece contradizer o facto do ângulo de retorno elástico da aba exterior não apresentar variações significativas.

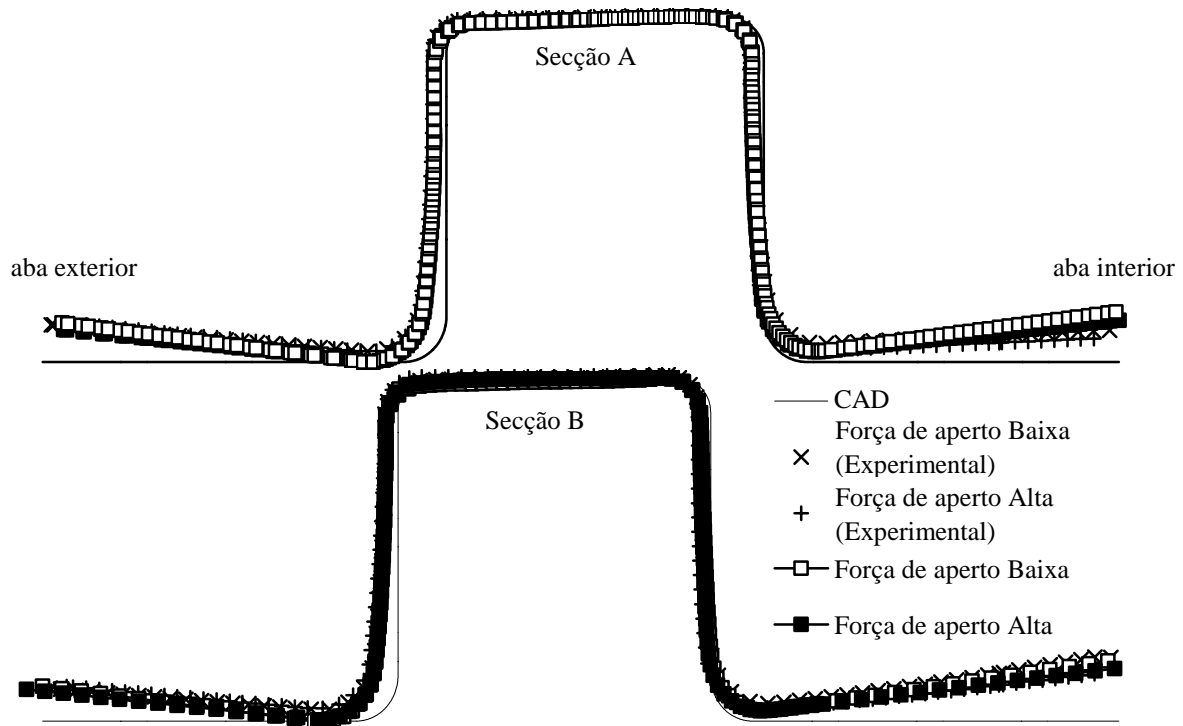


Figura 8.31 – Secções transversais do perfil curvo, para os diferentes valores de força de aperto do cerra-chapas. Resultados referentes ao aço de alta resistência HSLA.

Para tentar compreender o diferente comportamento da aba exterior para os materiais com tensão limite de elasticidade mais baixa, na Figura 8.33 apresenta-se a evolução do deslocamento do cerra-chapas para os diferentes valores de força de aperto. Para o aço de alta resistência o deslocamento das superfícies que actuam em ambas as abas é sempre positivo. Tal corresponde a um aumento da folga entre a matriz e o cerra-chapas. O deslocamento da superfície que actua na aba exterior é sempre maior do que o da aba interior. De facto, o deslocamento da superfície que actua na aba interior aproxima-se de zero com o aumento da força. A liga de alumínio apresenta deslocamentos positivos para a força de aperto mais baixa, com um deslocamento da superfície que actua na aba interior muito próximo de zero. Com o aumento da força de aperto, o deslocamento de ambas as superfícies torna-se negativo, o que corresponde a uma diminuição da folga entre a matriz e o cerra-chapas. Para a força de aperto mais alta, no final da fase de conformação, o deslocamento da superfície que actua na aba exterior é maior do que o deslocamento da superfície que actua na aba interior. O diferente comportamento da aba exterior surge assim associado a uma diferente distribuição da força de contacto do cerra-chapas, como se pode observar na Figura 8.34. Para o aço de alta resistência, o aumento da força de aperto do cerra-chapas conduz, essencialmente, a uma ampliação da zona de contacto. A área sujeita a maior pressão de contacto não se altera. Por outro lado, para a liga de alumínio, este comportamento só é válido para a aba interior. Na aba exterior, a zona sujeita a maior pressão de contacto altera-se. Este diferente comportamento resulta das diferentes propriedades mecânicas dos dois materiais.

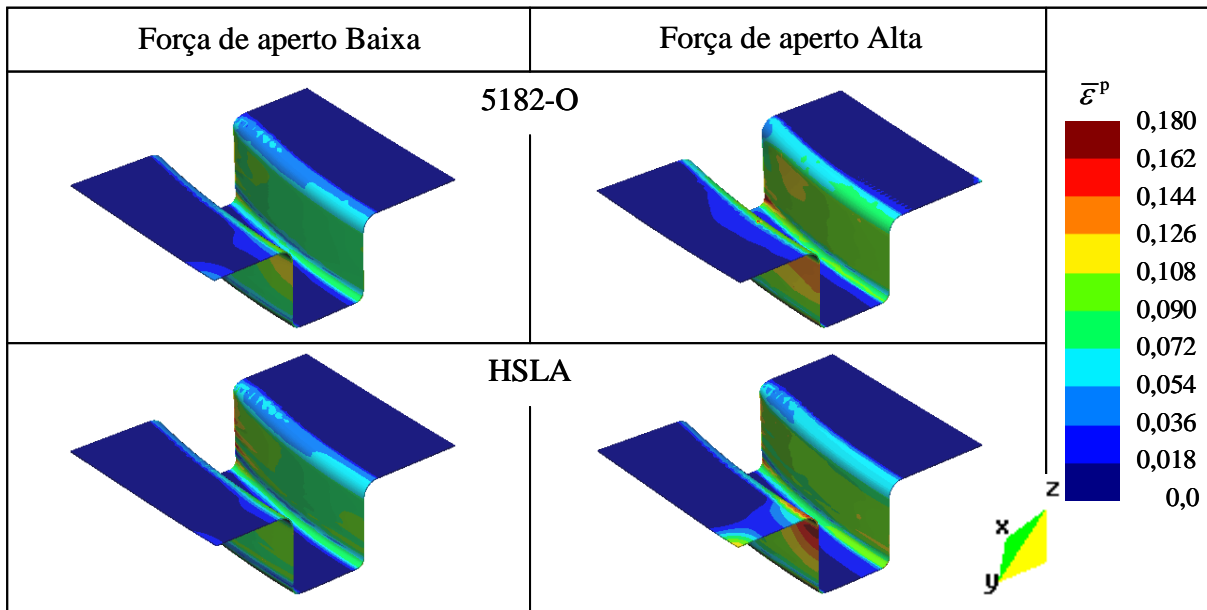


Figura 8.32 – Isovalores de deformação plástica equivalente no final do processo de conformação do perfil curvo. Influência da força de aperto do cerra-chapas.

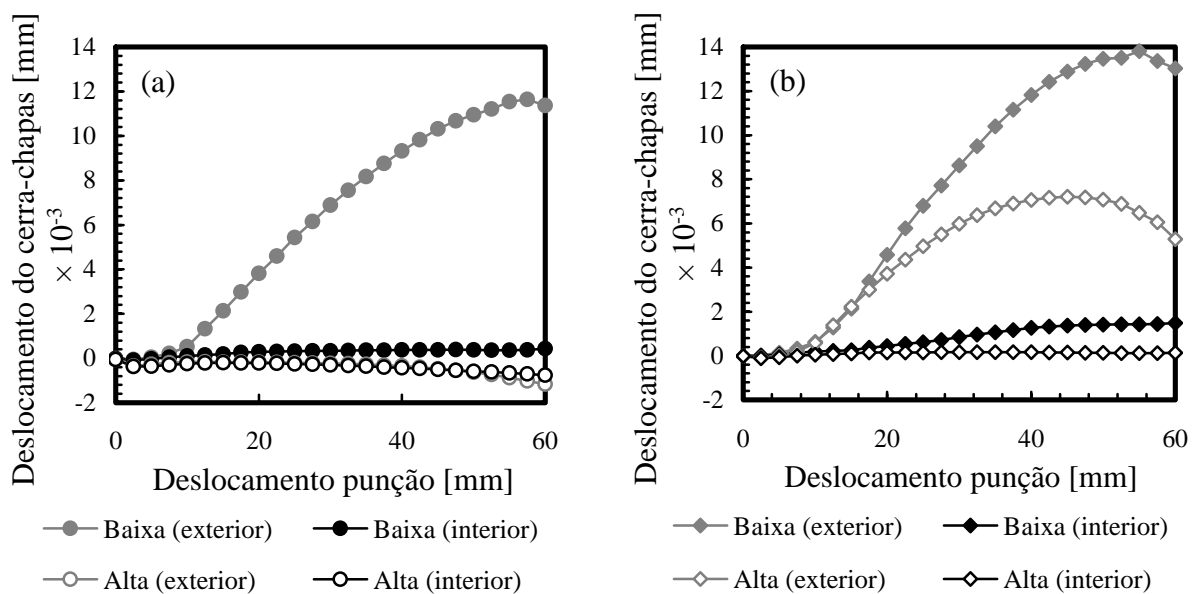


Figura 8.33 – Evolução do deslocamento do cerra-chapas com o deslocamento do punção nas abas exterior e interior em função da força de aperto do cerra-chapas: (a) liga de alumínio 5182-O e (b) aço de alta resistência HSLA.

Em conclusão, o estudo aqui apresentado confirma a importância do controlo da força exercida pelo cerra-chapas. Para além de permitir evitar a formação de pregas ou rugas, um valor correcto da força de aperto permite controlar o retorno elástico. O estudo apresentado nesta secção realça que as variações introduzidas pelo aumento da força de aperto do cerra-chapas são função da geometria do componente bem como das propriedades mecânicas do material seleccionado. Os resultados obtidos evidenciam o facto de os materiais com maior tensão limite de elasticidade serem menos sensíveis à influência deste parâmetro tecnológico.

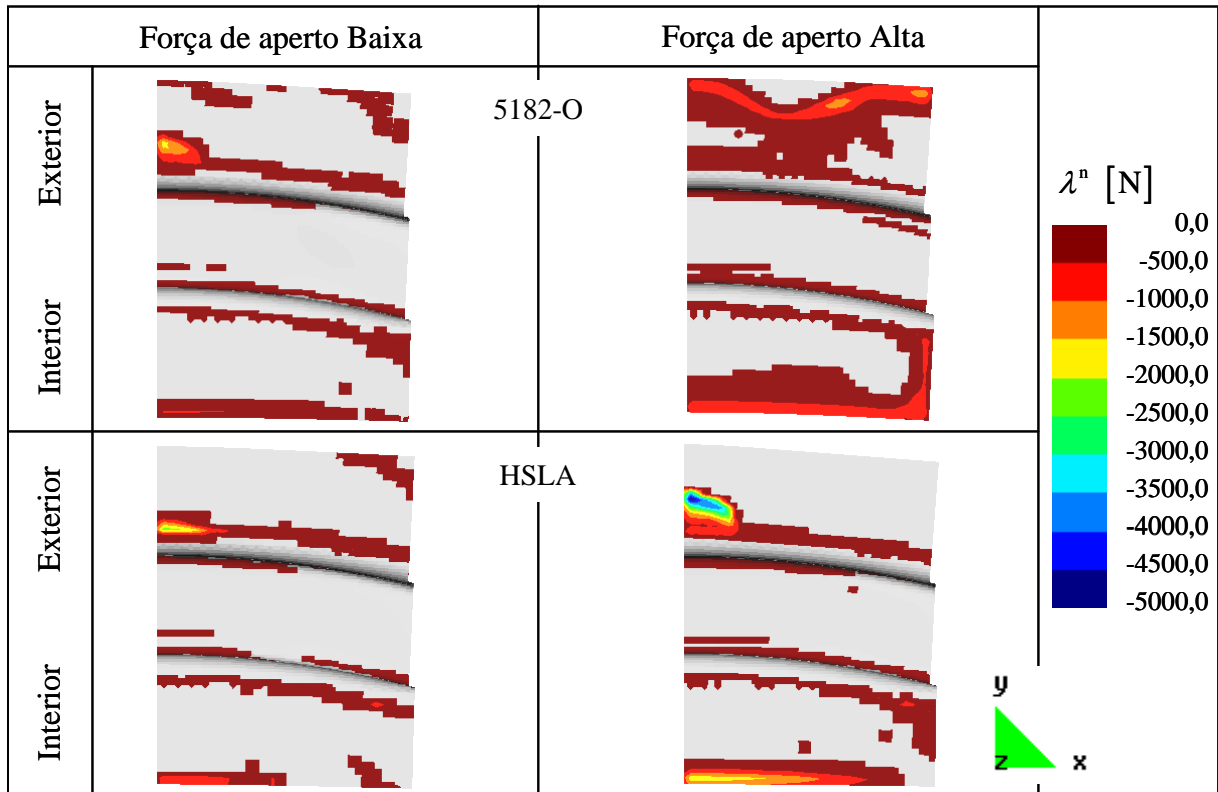


Figura 8.34 – Isovalores de força de contacto no final do processo de conformação do perfil curvo. Influência da força de aperto do cerra-chapas.

## 8.6 Deslocamento do Punção

As secções transversais obtidas após retorno elástico do perfil curvo (Figura 8.5 e Figura 8.17) sugerem um pequeno desfasamento no deslocamento máximo do punção entre os ensaios numéricos e os ensaios experimentais. Para avaliar a importância do controlo preciso do deslocamento do punção na previsão do retorno elástico, realizou-se um conjunto de simulações para o perfil curvo com diferentes valores de deslocamento do punção. O material utilizado nas simulações foi o aço DP600 caracterizado com o modelo microestrutural de Teodosiu. Os parâmetros constitutivos estão definidos na Tabela 8.2. A conformação do perfil curvo foi realizada para deslocamentos totais do punção no domínio [56 mm; 64 mm], com intervalos de 1 mm.

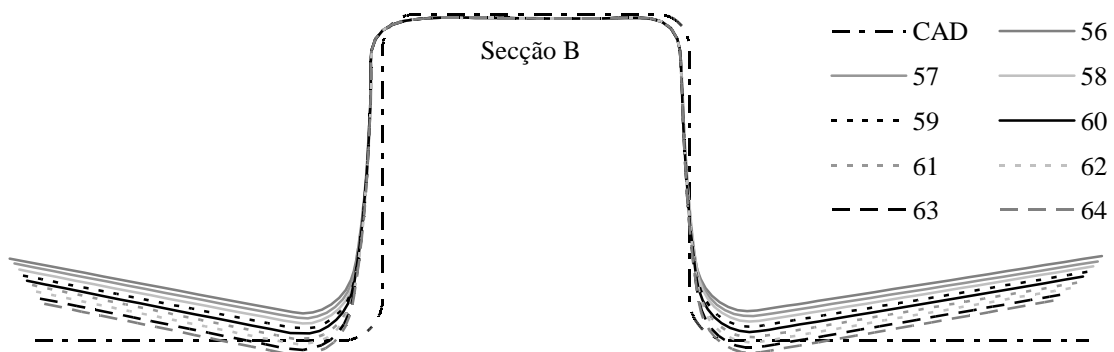


Figura 8.35 – Secção transversal média do perfil curvo após retorno elástico. Influência do valor de deslocamento total do punção.

Na Figura 8.35 apresentam-se os perfis obtidos após retorno elástico para os diferentes valores de deslocamento do punção. Na figura observa-se que a simulação numérica não prevê alterações na parte superior do perfil nem na curvatura da parede vertical. O raio de curvatura da parede varia com a profundidade do embutido. Para quantificar as diferenças no ângulo de retorno elástico considera-se como referência a simulação realizada com um deslocamento do punção de 60 mm. Avaliam-se os ângulos de retorno elástico das abas para as secções A e B (ver Figura 8.2). Na Figura 8.36 (a) apresenta-se um resumo das diferenças de ângulo em relação à referência. Pode constatar-se a tendência para o aumento do ângulo de retorno elástico com o avanço do punção. As pequenas alterações a este comportamento, que se observam essencialmente na aba exterior da Secção B, podem associar-se ao erro cometido na determinação dos ângulos. A principal conclusão a tirar desta análise é que uma variação de 8 mm na profundidade do embutido conduz a variações nos ângulos de retorno elástico das abas inferior a 1°.

Resultados de testes experimentais realizados para o perfil U com diferentes deslocamentos totais do punção apresentam a mesma tendência [Santos *et al.* 2004]. Após o retorno elástico, quanto maior é o deslocamento total do punção maior é o retorno elástico da aba. Porém, a variação é muito pequena.

Na Figura 8.36 (b) apresentam-se as diferenças de deslizamento, em relação à referência, das abas interior e exterior das secções A e B, função do deslocamento total do punção. À medida que se aumenta o deslocamento total do punção as abas interiores e exteriores apresentam maior deslizamento. Apesar da geometria complexa do perfil curvo, esta variação do deslizamento das abas é linear, à semelhança da variação do ângulo de retorno elástico com o deslocamento total do punção.

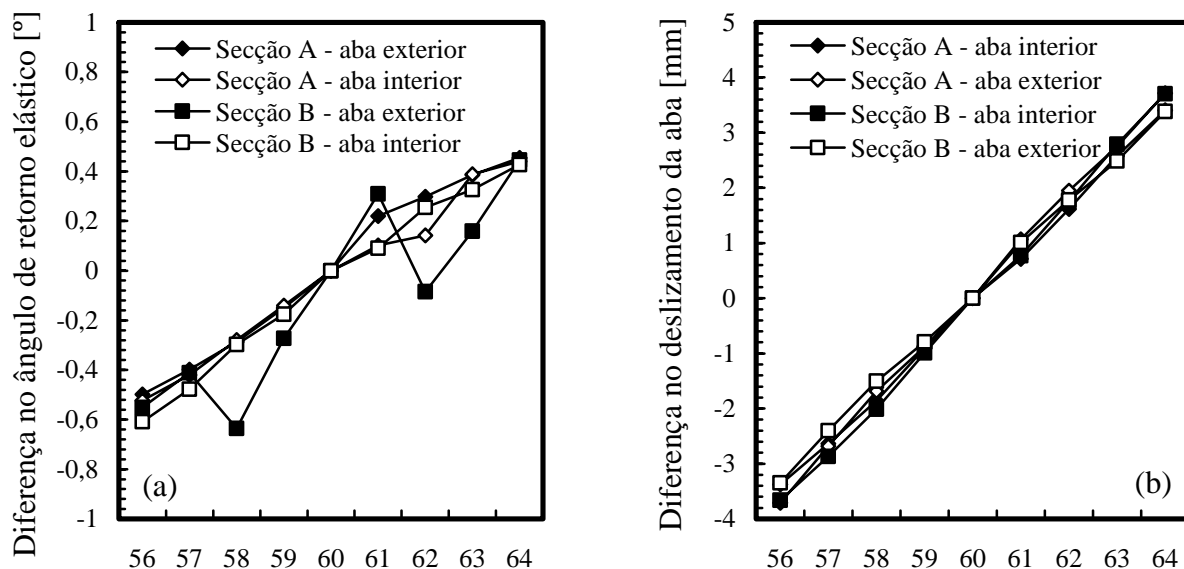


Figura 8.36 – Diferenças previstas em função do deslocamento do punção considerando como referência a simulação realizada com um deslocamento do punção de 60 mm: (a) ângulo de retorno elástico e (b) deslizamento da aba.

O controlo preciso do deslocamento do punção no procedimento experimental envolve o recurso a pinos sólidos (*stopper*), obrigando a uma estimativa do valor da força máxima exercida por esta ferramenta. O recurso a actuadores eléctricos para parar o



deslocamento do punção não garante o seu controlo exacto. No entanto, o estudo numérico realizado nesta secção permite concluir que pequenas alterações no deslocamento do punção traduzem-se numa influência reduzida na geometria final do componente.

## 8.7 Distribuição Assimétrica da Força Imposta pelo Cerra-chapas.

As peças estampadas apresentam defeitos de geometria que podem associar-se, por exemplo, a um maior deslizamento momentâneo de uma aba, devido a uma instabilidade. Este deslizamento ocorre mesmo para as peças simétricas. Por exemplo, a estampagem do perfil U, estudado ao longo deste capítulo (ver Figura 8.26 e Figura 8.27), conduziu a algumas peças como as apresentadas na Figura 8.37. O maior deslizamento de uma das abas não está associado a um posicionamento inicial incorrecto do esboço, uma vez que não ocorre sempre para o mesmo lado. Com efeito, a posição dos furos das peças apresentadas na Figura 8.37, mostra que não é sempre a mesma aba que desliza. Estes furos são introduzidos no final do processo de estampagem com o auxílio de um contra-punção. O posicionamento dos furos e o valor da força exercida pelo contra-punção foram determinados de modo a garantir uma interferência mínima destes factores na geometria final do perfil. Tal permitiu realizar as simulações do processo sem considerar o efeito do contra-punção e do puncionamento dos furos [Santos *et al.* 2002]. Uma vez que a geometria do perfil U é pouco rígida, torna-se bastante sensível a pequenas variações dos parâmetros tecnológicos. A análise das peças obtidas experimentalmente indica que a dispersão sistemática observada nos comprimentos das abas dos perfis em U é maior para as ligas de alumínio. O deslizamento momentâneo de uma das abas pode resultar de uma distribuição assimétrica da força exercida pelo cerra-chapas. Esta distribuição assimétrica pode ser induzida por um desvio do cerra-chapas da sua posição horizontal ou por uma distribuição incorrecta do lubrificante na chapa. Estes dois parâmetros foram considerados no modelo numérico para avaliar as consequências na geometria final do perfil U. As simulações foram realizadas com a liga de alumínio 5182-O e com o aço de alta resistência HSLA340, e dois valores iniciais de 90 e 300 kN para a força de aperto do cerra-chapas. O comportamento mecânico da liga de alumínio é descrito pela lei de Voce. Para o aço de alta resistência recorre-se à lei de Swift. O encruamento cinemático é descrito em ambos os casos com a lei de Lemaître e Chaboche. Os parâmetros constitutivos são apresentados no Anexo E, Tabela E.2 para a liga de alumínio e na Tabela E.4 para o aço de alta resistência [LPMTM 2001].

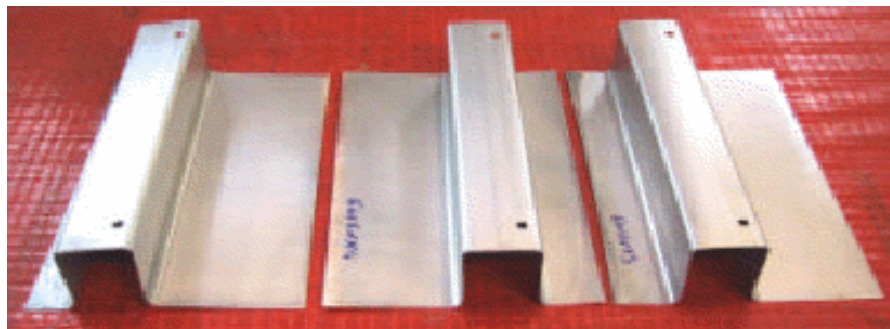


Figura 8.37 – Três peças obtidas experimentalmente pela ARCELOR S.A. para a liga de alumínio da série 6000.

Uma vez que é induzida uma assimetria no componente, torna-se necessário considerar metade da geometria no modelo numérico. Recorre-se a uma discretização uniforme do esboço com elementos finitos hexaédricos e integração reduzida selectiva. A dimensão média dos elementos no plano é de 3,0 mm e utiliza-se apenas uma camada em espessura.

### 8.7.1 Desvio da Posição Horizontal do Cerra-chapas

Para avaliar a influência de um desvio predefinido da posição horizontal do cerra-chapas impõem-se vários valores iniciais para este desvio. O desvio imposto é o que se representa de forma esquemática na Figura 8.38 [Doege e Elend 2001]. Os valores seleccionados correspondem a uma diferença de  $10^{-4}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-2}$  e  $10^{-1}$  mm na folga inicial entre a matriz e o cerra-chapas. Estas simulações foram designadas por *Desvio-4*, *Desvio-3*, *Desvio-2*, *Desvio-1*, respectivamente. A simulação realizada com o cerra-chapas na posição horizontal correcta é designada por *Desvio 0*. O lado da flange da chapa correspondente à menor folga é designado por aba (1) e o outro por aba (2) (ver Figura 8.38).

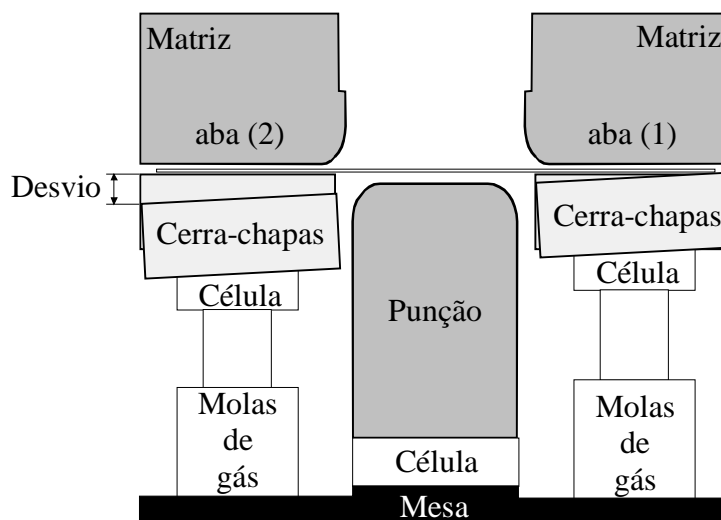


Figura 8.38 – Representação esquemática do desvio imposto ao cerra-chapas no início do processo.

#### 8.7.1.1 Força de Aperto do Cerra-chapas de 90 kN

Na Figura 8.39 apresenta-se a evolução da força exercida pelo punção para os vários desvios testados, para as simulações realizadas com a força de aperto do cerra-chapas de 90 kN. Da análise da figura pode observar-se que o desvio imposto ao cerra-chapas não conduz a diferenças significativas na força máxima prevista.

Na Figura 8.40 apresenta-se o deslizamento de cada uma das abas da chapa no final do processo. Nas simulações realizadas sem desvio do cerra-chapas, o deslizamento das duas abas é idêntico. Com o aumento do desvio da posição horizontal do cerra-chapas observa-se um aumento do deslizamento da aba (2) acompanhado de uma redução, de idêntico valor, do deslizamento da aba (1). Os valores de deslizamento das abas são diferentes para os dois materiais. Por exemplo, para o desvio mais elevado da posição horizontal do cerra-chapas (*Desvio-1*), a diferença no comprimento das abas é de 9,5 mm,

no caso do aço de alta resistência, e de 15,3 mm, na liga de alumínio. Este resultado está de acordo com a análise experimental que mostra maior sensibilidade da liga de alumínio a pequenas variações dos parâmetros tecnológicos.

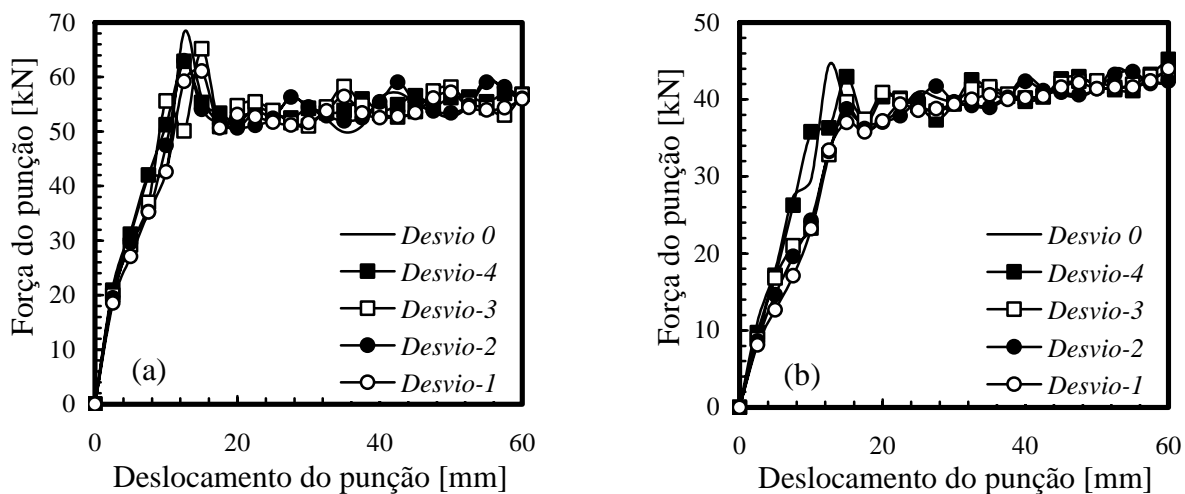


Figura 8.39 – Evolução da força exercida pelo punção na simulação da conformação do perfil U para a força de aperto do cerra-chapas de 90 kN. Influência do desvio do cerra-chapas: (a) aço de alta resistência HSLA e (b) liga de alumínio 5182-O.

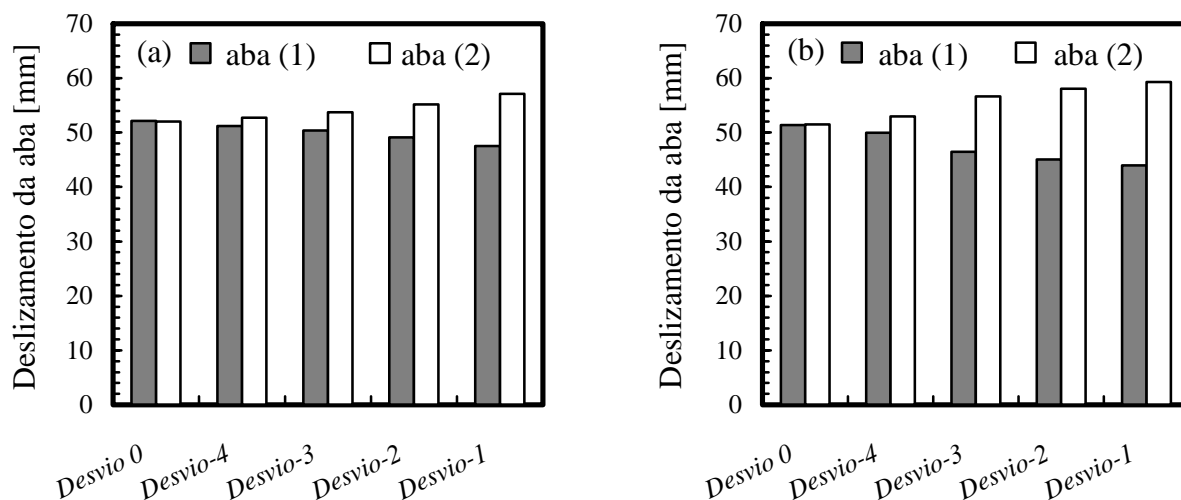


Figura 8.40 – Deslizamento das abas no final da fase de conformação, para a força de aperto do cerra-chapas de 90 kN. Influência do desvio do cerra-chapas: (a) aço de alta resistência HSLA e (b) liga de alumínio 5182-O.

O comportamento distinto dos dois materiais está associado à distribuição da força de aperto do cerra-chapas. Esta é alterada pelo desvio induzido no cerra-chapas. Na fase de aperto do cerra-chapas, o deslocamento necessário para garantir o valor da força imposta é sempre superior para a liga de alumínio. À medida que o desvio do cerra-chapas aumenta, o deslocamento inicial da fase de aperto aumenta também. Porém, continua a ser sempre superior para a liga de alumínio, como consequência das diferentes propriedades mecânicas. O maior deslocamento inicial do cerra-chapas traduz-se numa zona de contacto mais larga entre o corpo deformável e o cerra-chapas/matriz para a liga de alumínio (ver Figura 8.41). No entanto, este valor mais elevado do deslocamento

inicial não conduz a um maior equilíbrio na força de contacto entre as duas abas. Seria de esperar que para a liga de alumínio a aba (2) estabelecesse contacto com o cerra-chapas mais cedo, de modo a equilibrar a força exercida em ambas as abas. No entanto, como a zona de contacto inicial é mais larga, torna-se mais difícil compensar as diferenças entre as duas abas. Este efeito conduz a maiores diferenças no deslizamento das abas. No final da fase de conformação, os valores totais de deslocamento do cerra-chapas são idênticos nos dois materiais para os diferentes valores de desvio do cerra-chapas.

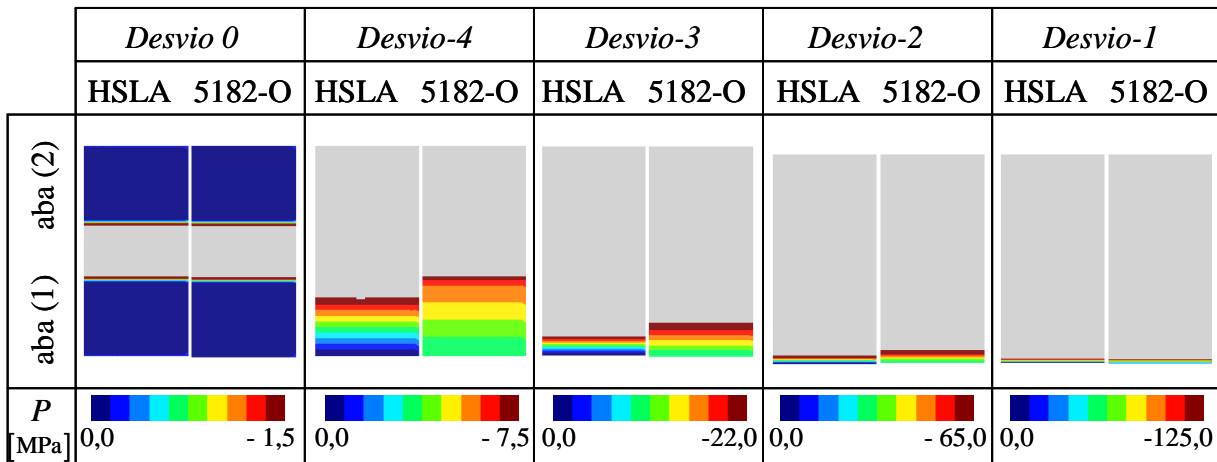


Figura 8.41 – Isovalores de pressão de contacto para as simulações do perfil U realizadas para a força de aperto do cerra-chapas de 90 kN. Influência do desvio do cerra-chapas nas zonas de contacto entre a chapa e o cerra-chapas (fase final de aperto).

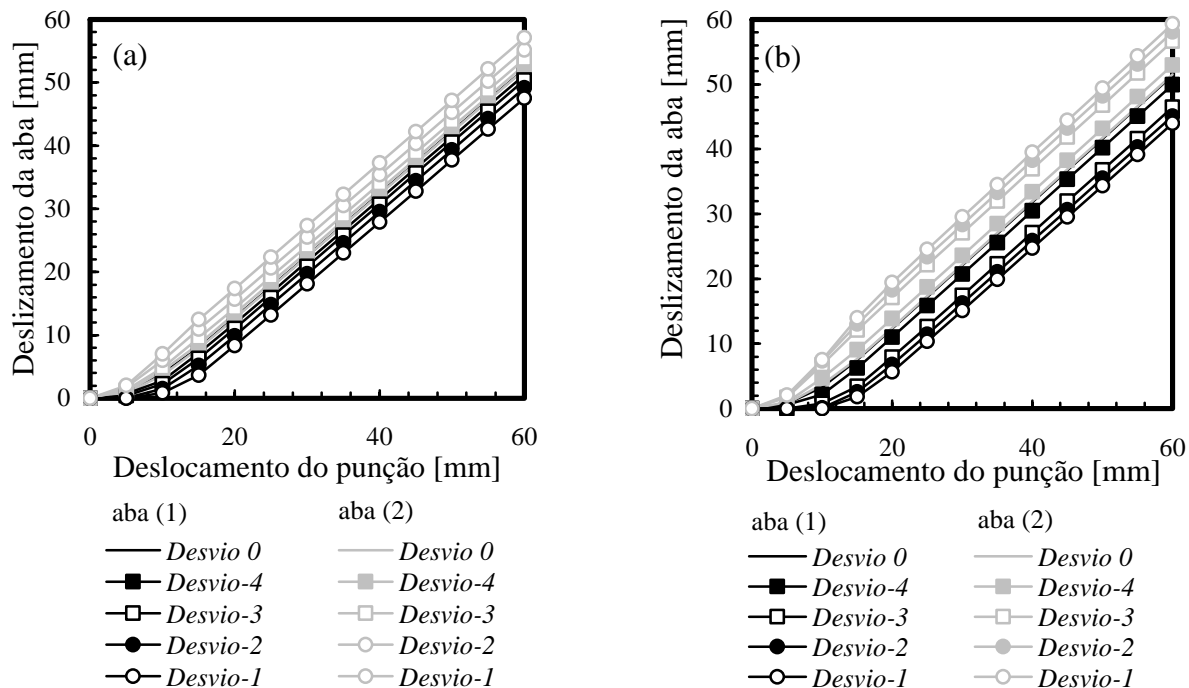


Figura 8.42 – Evolução do deslizamento das duas abas para a força de aperto do cerra-chapas de 90 kN. Influência do desvio do cerra-chapas: (a) aço de alta resistência HSLA e (b) liga de alumínio 5182-O.

Na Figura 8.42 apresenta-se a evolução do deslizamento das abas com o deslocamento do punção. Esta evolução mostra que a diferença entre o deslizamento das

duas abas é induzida logo no início do processo de conformação, permanecendo praticamente constante após cerca de 15 mm de deslocamento do punção. Quanto maior é o desvio da posição horizontal induzido no cerra-chapas, menor é o deslizamento inicial da aba (1), o que induz o maior deslizamento da aba (2).

O facto de o deslizamento da aba (1) ser bloqueado no início do processo resulta da assimétrica distribuição da força do cerra-chapas no final da fase de aperto. No final desta fase a força de aperto é maioritariamente aplicada na aba (1), como se mostra na Figura 8.43. Nesta figura apresenta-se a evolução da força de aperto em cada uma das abas com o deslocamento do punção. Pode observar-se que quanto maior for o desvio do cerra-chapas, maior é a diferença entre a força aplicada em cada aba, em particular para a liga de alumínio.

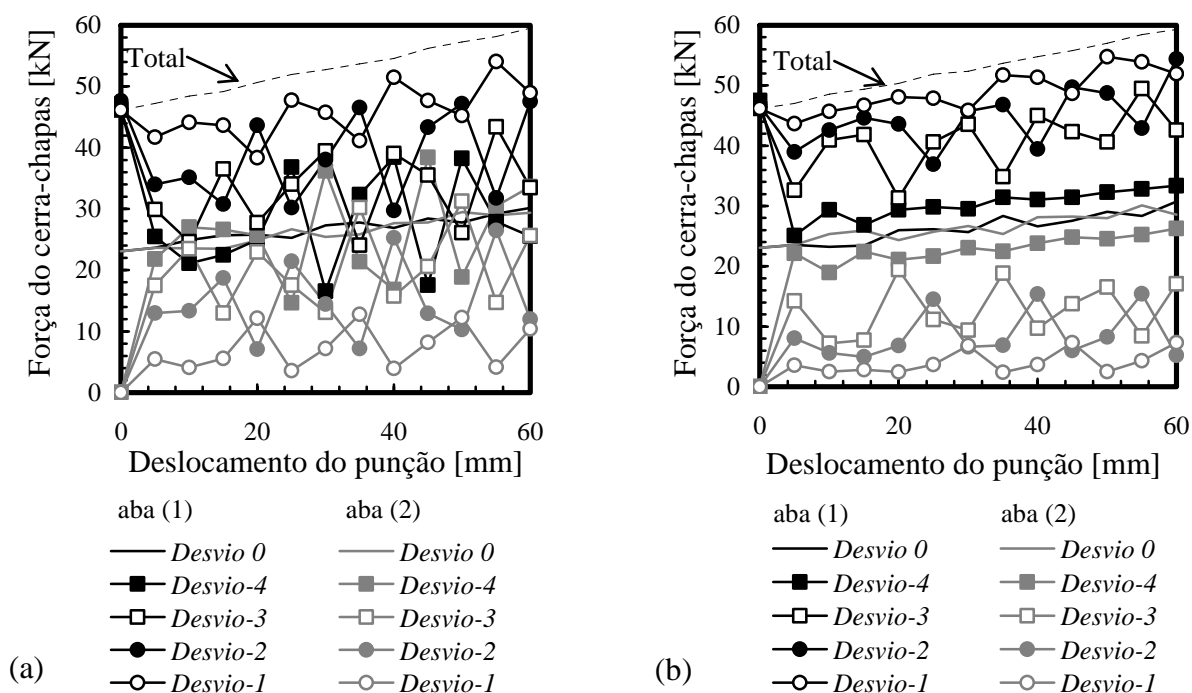


Figura 8.43 – Evolução da força de aperto do cerra-chapas em cada aba para a força de aperto do cerra-chapas de 90 kN. Influência do desvio do cerra-chapas: (a) aço de alta resistência HSLA e (b) liga de alumínio 5182-O.

A assimetria no comprimento final das abas conduz a geometrias após retorno elástico diferentes, como se mostra na Figura 8.44. As diferenças manifestam-se nos ângulos de retorno elástico das abas mas também na curvatura da parede vertical. As maiores variações ocorrem na aba (2). Estes resultados confirmam os resultados experimentais, que mostram que a aba que desliza mais apresenta menores ângulos de retorno elástico [Col e Santos 2004].

Na Figura 8.45 apresentam-se os resultados que resumem a evolução do ângulo de retorno elástico das abas com o desvio do cerra-chapas, para os dois materiais mencionados. O comportamento de ambos é idêntico para a aba (2), mostrando uma diminuição do ângulo de retorno elástico com o aumento do desvio do cerra-chapas. Para a aba (1) no caso do aço de alta resistência é possível observar uma ligeira tendência para o aumento do ângulo de retorno elástico com o aumento do desvio do cerra-chapas.

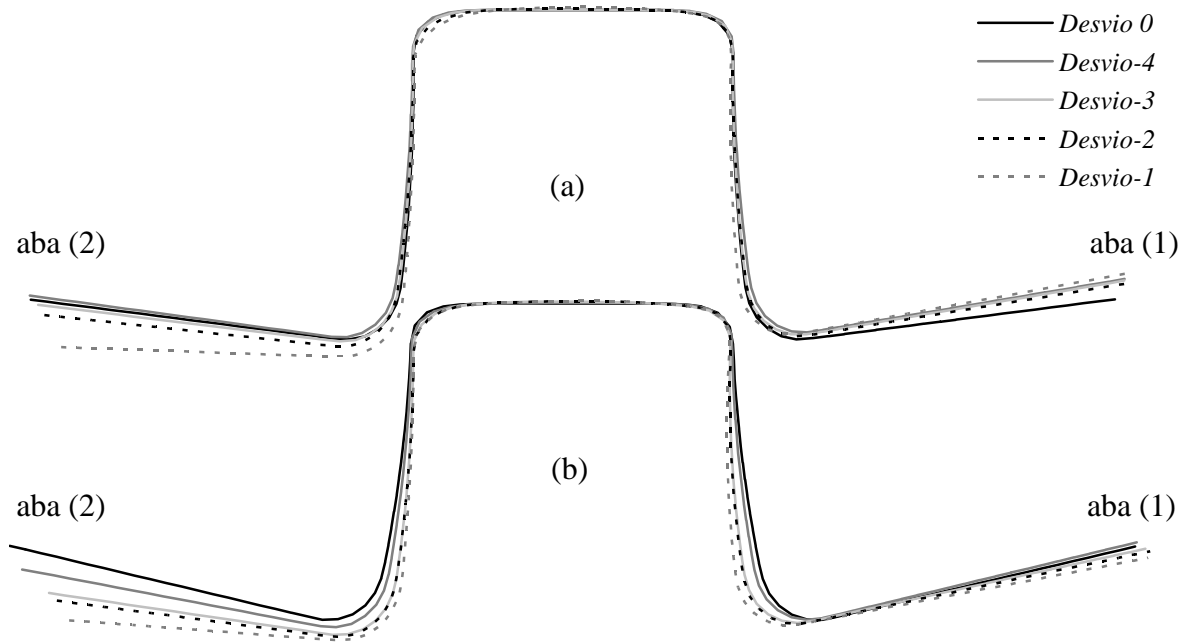


Figura 8.44 – Secção transversal obtida após retorno elástico para a força de aperto do cerra-chapas de 90 kN. Influência do desvio do cerra-chapas: (a) aço de alta resistência HSLA e (b) liga de alumínio 5182-O.

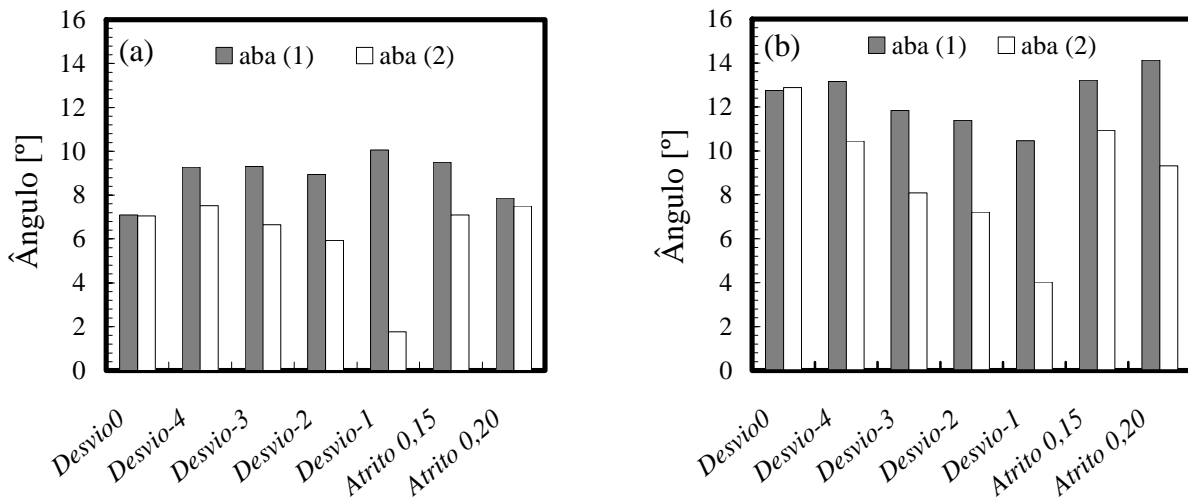


Figura 8.45 – Ângulo de retorno elástico das abas para a força de aperto do cerra-chapas de 90 kN. Influência do desvio do cerra-chapas e da distribuição assimétrica do coeficiente de atrito: (a) aço de alta resistência HSLA e (b) liga de alumínio 5182-O.

### 8.7.1.2 Força de Aperto do Cerra-chapas de 300 kN

Na Figura 8.46 apresenta-se a evolução da força do punção com o deslocamento, para a força de aperto do cerra-chapas mais alta (valor inicial de 300 kN). No aço de alta resistência não se observa influência do desvio do cerra-chapas no valor de força máxima prevista. No entanto, para a liga de alumínio, o aumento do desvio provoca uma diminuição de cerca de 40% no valor máximo da força do punção.

Na Figura 8.47 apresenta-se o valor do deslizamento das abas no final da fase de conformação, para os cinco valores de desvio estudados. Para uma posição correcta do cerra-chapas (perfeitamente horizontal) o deslizamento das abas é idêntico em ambos os

materiais. Também neste caso, o deslizamento da aba (1) é compensado pelo deslizamento da aba (2). No entanto, o comportamento dos dois materiais é muito distinto. Para os dois valores menores de desvio do cerra-chapas (*Desvio-4* e *Desvio-3*), a diferença do deslizamento das abas é maior para o aço de alta resistência. Para os dois valores maiores de desvio do cerra-chapas (*Desvio-2* e *Desvio-1*), esta tendência inverte-se em consequência do deslizamento nulo da aba (1), que ocorre para a liga de alumínio. Com o aumento da força de aperto do cerra-chapas, as diferenças nos comprimentos das abas de ambos os materiais aumentam. Por exemplo, para o valor de desvio de  $10^{-3}$  o aço de alta resistência apresenta uma diferença de 23,0 mm entre o comprimento das abas e a liga de alumínio 16,5 mm. De notar que, para a força de aperto mais baixa, estas diferenças são de 3,5 e 10,0 mm, respectivamente. Esta variação está relacionada com o deslocamento inicial da fase de aperto do cerra-chapas.

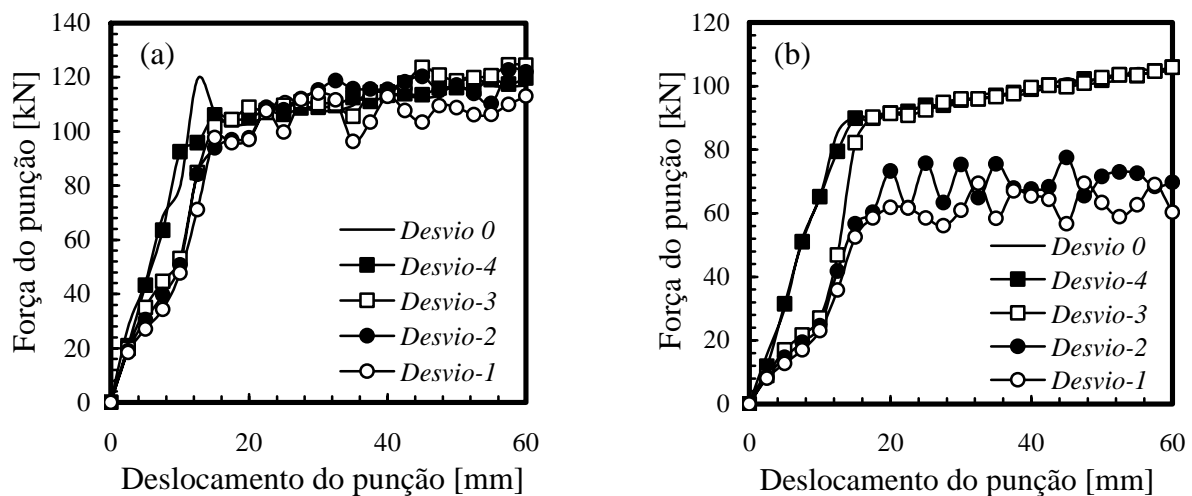


Figura 8.46 – Evolução da força exercida pelo punção na simulação da conformação do perfil U, para a força de aperto do cerra-chapas de 300 kN. Influência do desvio do cerra-chapas: (a) aço de alta resistência HSLA e (b) liga de alumínio 5182-O.

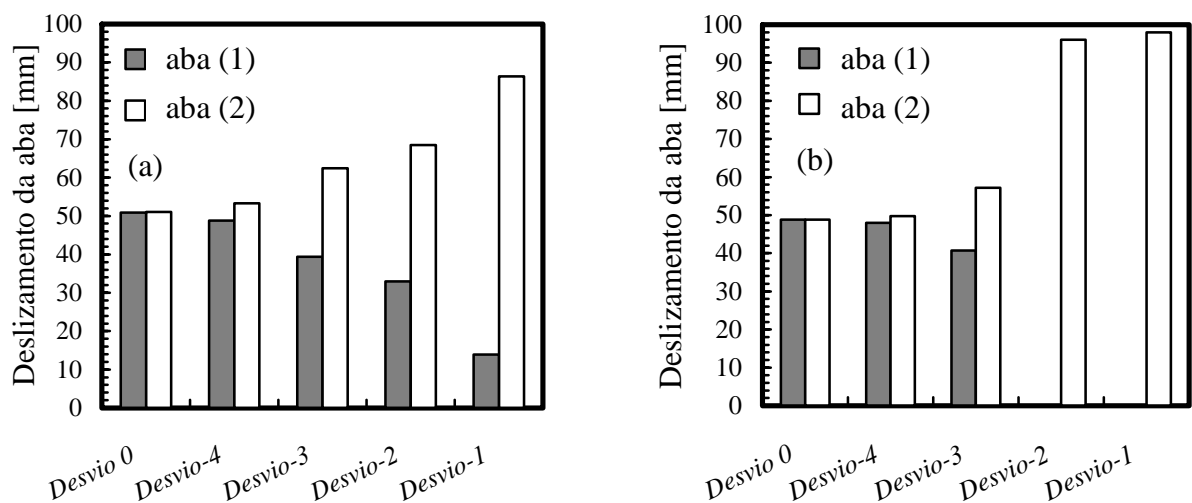


Figura 8.47 – Deslizamento das abas no final da fase de conformação para a força de aperto do cerra-chapas de 300 kN. Influência do desvio do cerra-chapas: (a) aço de alta resistência HSLA e (b) liga de alumínio 5182-O.

O deslocamento inicial do cerra-chapas aumenta com o aumento da força de aperto imposta. O deslocamento do cerra-chapas na fase inicial é maior no caso da liga de alumínio, devido às diferentes propriedades mecânicas. Para os dois valores menores de desvio do cerra-chapas (*Desvio-4* e *Desvio-3*), este maior deslocamento inicial permite que a aba (2) estabeleça contacto com o cerra-chapas e compense o desequilíbrio no valor da força de aperto. Na Figura 8.48 mostra-se que a evolução da força de aperto do cerra-chapas é mais próxima do valor de equilíbrio para a liga de alumínio, para os dois valores de desvio do cerra-chapas menores (*Desvio-4* e *Desvio-3*).

A diferença na evolução da força de aperto do cerra-chapas em cada aba traduz-se numa evolução diferente do deslizamento das flanges, como se mostra na Figura 8.49. Para os dois valores menores de desvio do cerra-chapas (*Desvio-4* e *Desvio-3*), as diferenças no deslizamento das abas surgem logo no início do processo de conformação e permanecem constantes após um deslocamento do punção de cerca de 15 mm. No entanto, para os restantes valores de desvio do cerra-chapas (*Desvio-2* e *Desvio-1*) o comportamento é completamente distinto. Para a liga de alumínio, a aba (1) permanece bloqueada durante todo o processo de conformação. Para o aço de alta resistência, a partir de um determinado valor de deslocamento do punção, a aba (1) começa a deslocar-se mais lentamente.

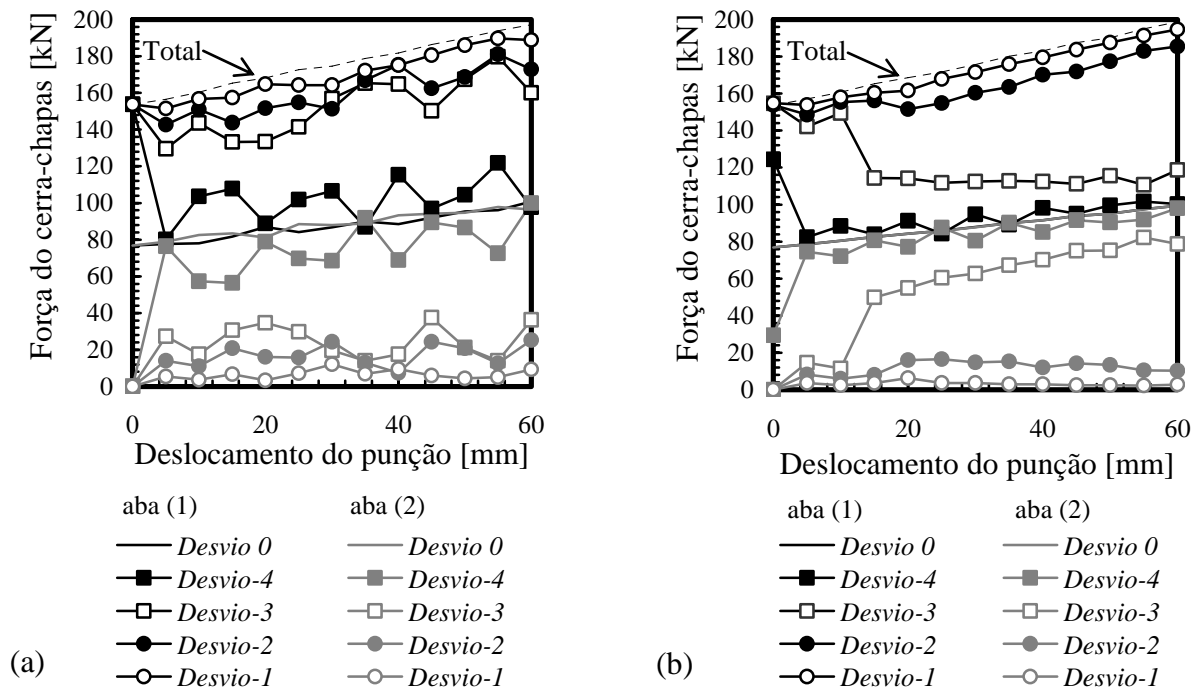


Figura 8.48 – Evolução da força e aperto do cerra-chapas em cada aba para a força de aperto do cerra-chapas de 300 kN. Influência do desvio do cerra-chapas: (a) aço de alta resistência HSLA e (b) liga de alumínio 5182-O.

Na Figura 8.50 apresenta-se o resumo das secções transversais previstas após retorno elástico para as simulações realizadas com a força de aperto mais alta. Com o aumento do desvio do cerra-chapas, observa-se uma redução da curvatura das paredes verticais conduzindo, após retorno elástico, a perfis em U mais fechados. Os valores dos ângulos de retorno elástico das abas, obtidos para os diferentes desvios do cerra-chapas, são apresentados na Figura 8.51. Nesta figura observa-se a diminuição do ângulo de retorno elástico das abas, induzido pelo fenómeno de escorregamento associado ao desvio



imposto à posição do cerra-chapas. De novo os resultados evidenciam a maior sensibilidade da liga de alumínio a este factor. A comparação da Figura 8.50 com a Figura 8.45 permite também constatar que para valores menores de desvio do cerra-chapas (*Desvio-4* e *Desvio-3*) a influência na geometria final é menor para a força de aperto mais alta do que para a força de aperto mais baixa.

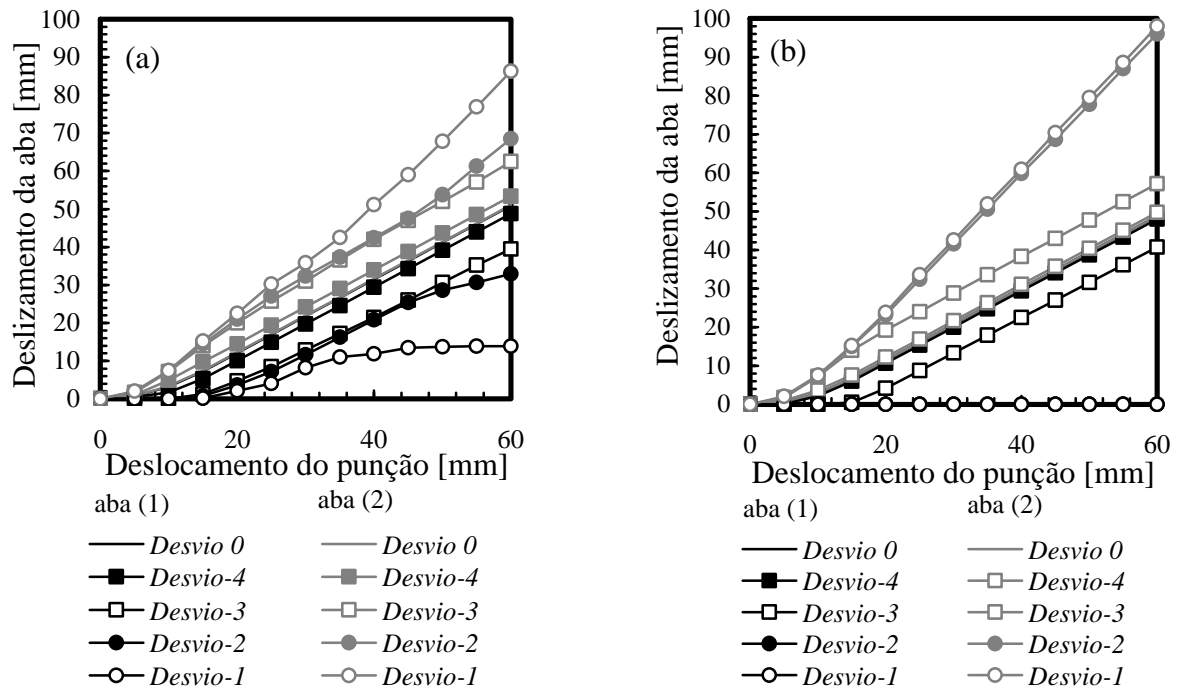


Figura 8.49 – Evolução do deslizamento das duas abas para a força de aperto do cerra-chapas de 300 kN. Influência do desvio do cerra-chapas: (a) aço de alta resistência HSLA e (b) liga de alumínio 5182-O.

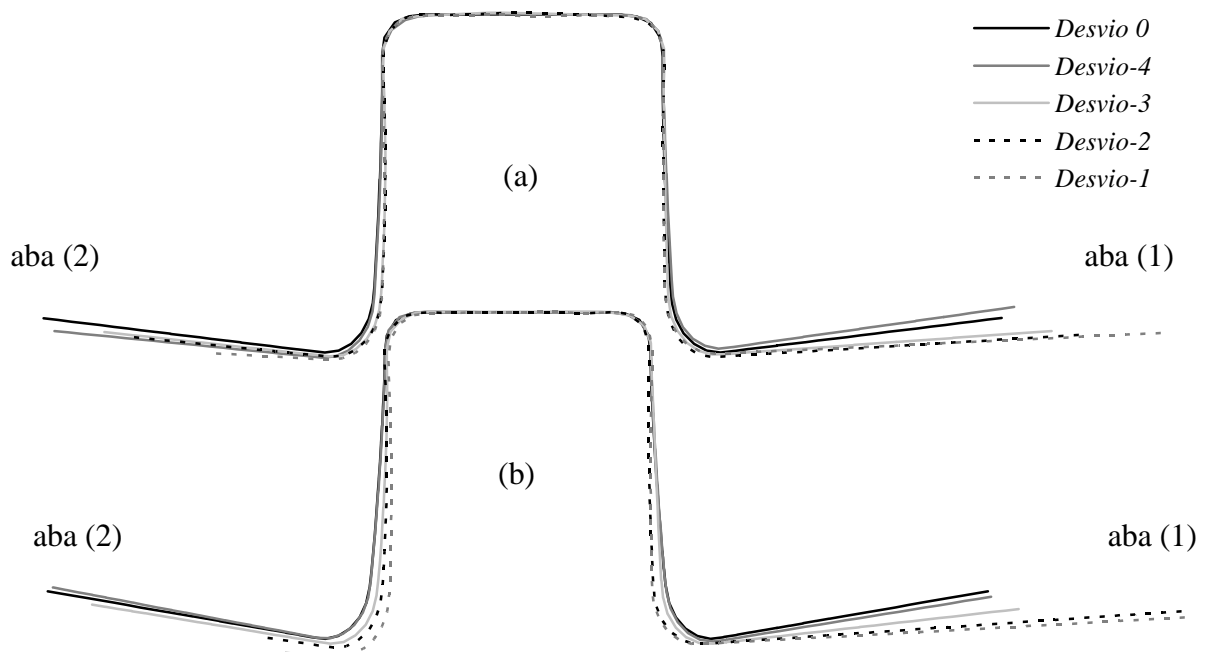


Figura 8.50 – Secção transversal obtida após retorno elástico para a força de aperto do cerra-chapas de 300 kN. Influência do desvio do cerra-chapas: (a) aço de alta resistência HSLA e (b) liga de alumínio 5182-O.

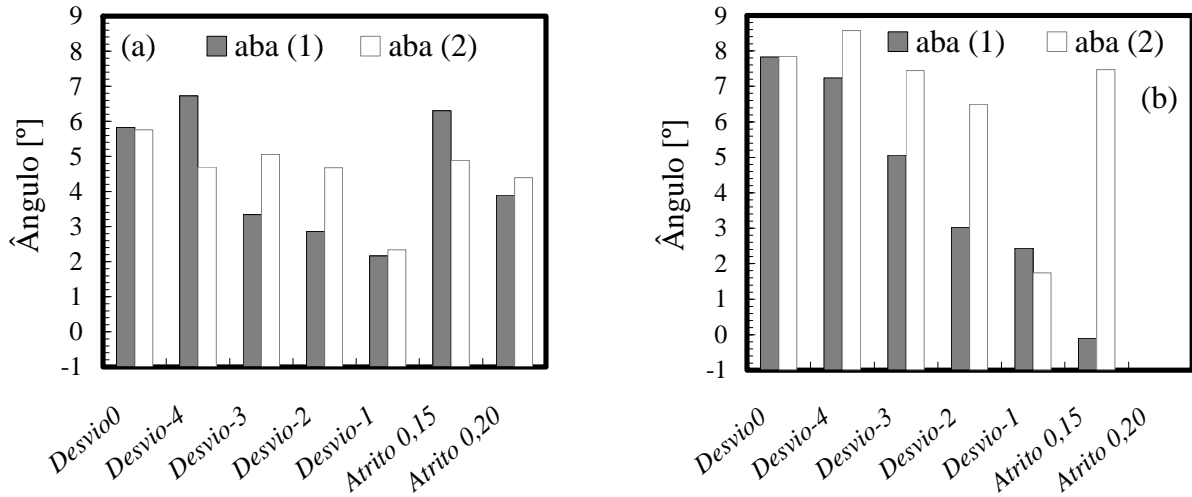


Figura 8.51 – Ângulo de retorno elástico das abas para a força de aperto do cerra-chapas de 300 kN. Influência do desvio do cerra-chapas e da distribuição assimétrica do coeficiente de atrito: (a) aço de alta resistência HSLA e (b) liga de alumínio 5182-O.

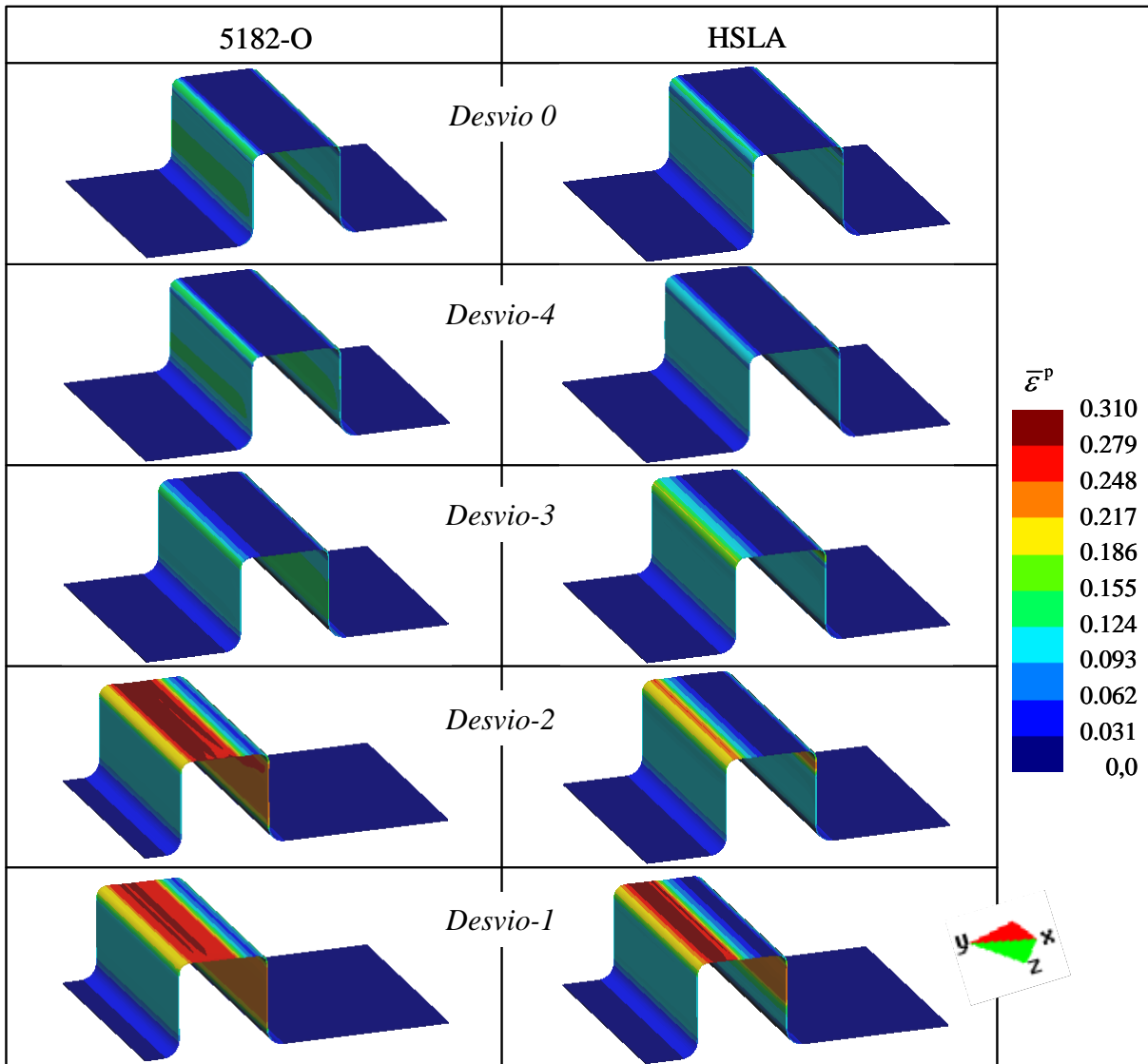


Figura 8.52 – Isovalores de deformação plástica equivalente para as simulações do perfil U realizadas para a força de aperto de 300 kN. Influência do desvio do cerra-chapas.

Na Figura 8.52 apresentam-se os isovalores de deformação plástica equivalente no final da fase de conformação, para as simulações realizadas com a força de aperto mais alta. O maior estiramento ocorre na parede vertical do lado da aba (1), para a qual o movimento é restringido. Este efeito é mais evidente para a liga de alumínio, em consequência da maior restrição ao movimento do material na aba (1). A Figura 8.52 permite ainda realçar o efeito associado ao deslizamento da aba na curvatura do punção, do lado da aba (2). Os pontos que escorregam na zona do raio de curvatura do punção sofrem dobragem, seguida de desdobragem, o que conduz ao aumento da deformação plástica equivalente.

## 8.7.2 Distribuição Assimétrica do Coeficiente de Atrito

Um outro parâmetro tecnológico muito importante para o controlo do escoamento do material é a distribuição do coeficiente de atrito. Uma distribuição diferente em ambas as abas pode provocar a assimetria do componente. Para avaliar a influência deste parâmetro realizaram-se simulações numéricas em que é restringido o movimento da aba (1), impondo um valor de coeficiente de atrito maior nessa zona de contacto com o cerra-chapas. Os valores seleccionados para este estudo são:  $\mu = 0,15$  e  $0,20$ . Todas as outras zonas de contacto permanecem com um coeficiente de atrito constante  $\mu = 0,10$ . As designações adoptadas são *Atrito 0,15* e *Atrito 0,20*, para os estudos com o coeficiente de atrito  $0,15$  e  $0,20$  na aba (1), respectivamente.

### 8.7.2.1 Força de Aperto do Cerra-chapas de 90 kN

Uma vez que o movimento da aba (1) é restringido, é de esperar um aumento da força exercida pelo punção com o aumento do coeficiente de atrito. Este efeito ocorre mesmo para a menor força de aperto do cerra-chapas, como se mostra na Figura 8.53. Para o aço de alta resistência, o aumento do coeficiente de atrito conduz a um aumento inferior a 5% da força máxima exercida pelo punção ( $\mu = 0,2$  na aba (1)). Para a liga de alumínio, o aumento da força máxima do punção é mais pronunciado: 14% e 28% para os coeficientes de atrito de  $0,15$  e  $0,2$  na aba (1), respectivamente.

Na Figura 8.54 compara-se a evolução do deslizamento das abas entre as simulações realizadas com uma distribuição assimétrica do coeficiente de atrito e a simulação com um coeficiente de atrito  $\mu = 0,10$ . A evolução do deslizamento das abas é muito semelhante ao observado para um desvio do cerra-chapas de  $10^{-3}$  mm, para ambos os coeficientes de atrito e em particular para o aço de alta resistência. No final da fase de conformação a diferença no comprimento das abas é de aproximadamente 3,0 mm, em ambos os materiais, para o coeficiente de atrito  $\mu = 0,15$ . Para o coeficiente de atrito  $\mu = 0,20$ , a diferença no comprimento das abas é de 3,5 mm para o aço de alta resistência e de 7,5 mm para a liga de alumínio. Nestas simulações, a força de aperto do cerra-chapas em cada instante é distribuída de igual modo pelas duas abas. Ou seja, globalmente a distribuição é idêntica à que ocorre para a simulação realizada sem desvio do cerra-chapas, à excepção da componente de atrito.

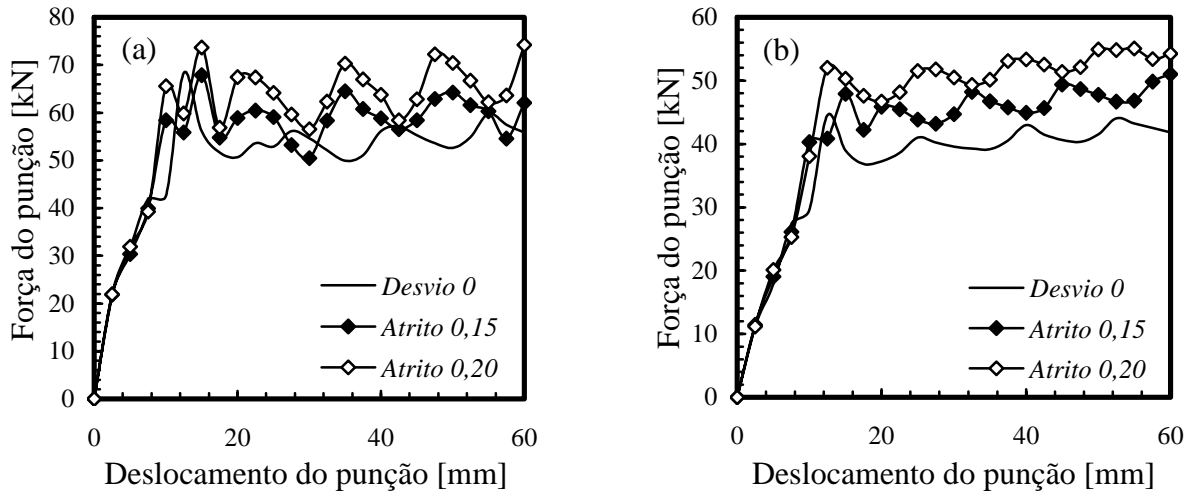


Figura 8.53 – Evolução da força exercida pelo punção na simulação da conformação do perfil U para a força de aperto do cerra-chapas de 90 kN. Influência da distribuição do coeficiente de atrito: (a) aço de alta resistência HSLA e (b) liga de alumínio 5182-O.

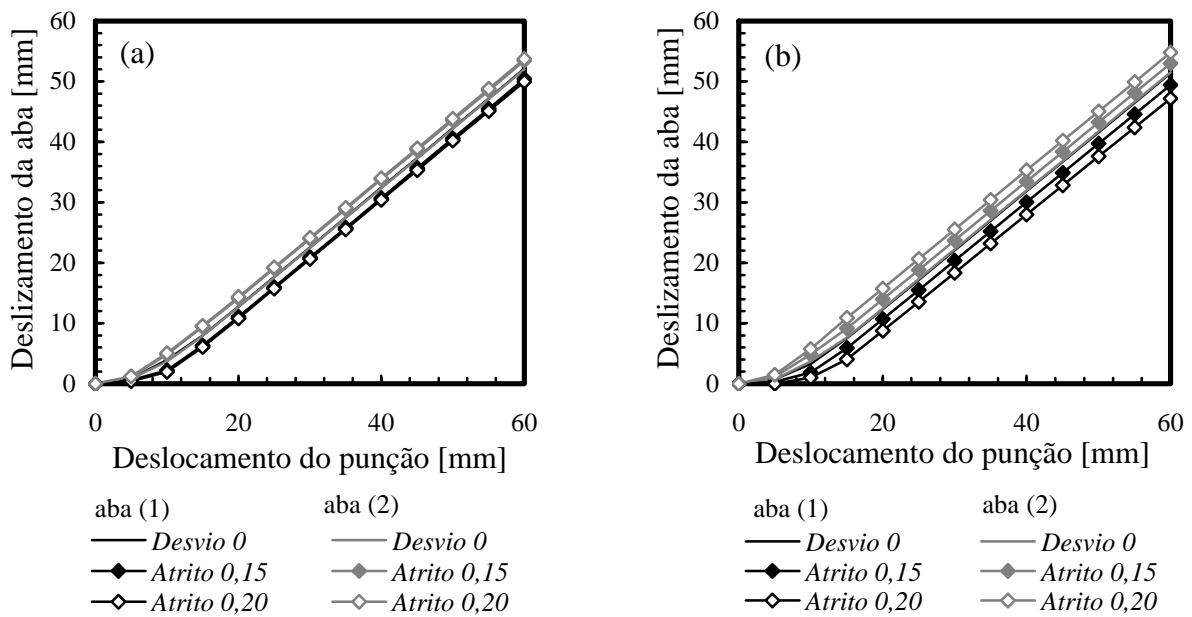


Figura 8.54 – Evolução do deslizamento das duas abas para a força de aperto do cerra-chapas de 90 kN. Influência da distribuição do coeficiente de atrito: (a) aço de alta resistência HSLA e (b) liga de alumínio 5182-O.

Na Figura 8.55 apresentam-se as secções transversais previstas após retorno elástico. Para efeitos de comparação da geometria final apresenta-se, igualmente, a obtida para um coeficiente de atrito uniforme  $\mu = 0,10$ . Para o aço de alta resistência a influência da alteração do coeficiente de atrito na aba (1) na geometria final do componente é relativamente baixa. Para o ângulo de retorno elástico da aba (1) a diferença máxima obtida é de  $2^\circ$  (ver Figura 8.45). Para a liga de alumínio o efeito da alteração do coeficiente de atrito é mais pronunciado. Os resultados conduzem a um aumento do ângulo de retorno elástico para a aba (1) e uma redução para a aba (2).

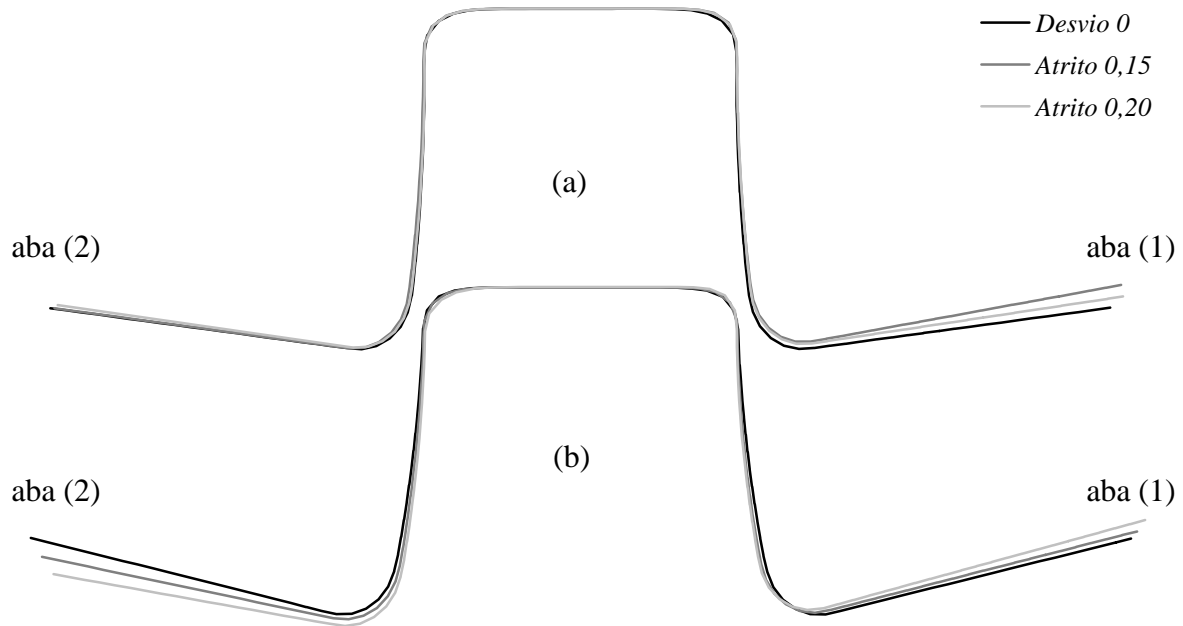


Figura 8.55 – Secção transversal obtida após retorno elástico para a força de aperto do cerra-chapas de 90 kN. Influência da distribuição do coeficiente de atrito: (a) aço de alta resistência HSLA e (b) liga de alumínio 5182-O.

### 8.7.2.2 Força de Aperto do Cerra-chapas de 300 kN

Na Figura 8.56 apresenta-se a evolução da força do punção com o deslocamento, para as simulações realizadas com a maior força de aperto. Para o aço de alta resistência, o aumento da força máxima exercida pelo punção é de 15% e 34%, para o coeficiente de atrito na aba (1) de 0,15 e 0,20, respectivamente. Para a liga de alumínio, ocorre um aumento de 20% para o coeficiente de atrito na aba (1) de 0,15. O coeficiente de atrito de 0,20 na aba (1) conduz à rotura, após um deslocamento do punção de aproximadamente 30 mm. A rotura ocorre na parede vertical no lado correspondente à aba (1), em consequência da restrição ao movimento do material, como se mostra na Figura 8.57.

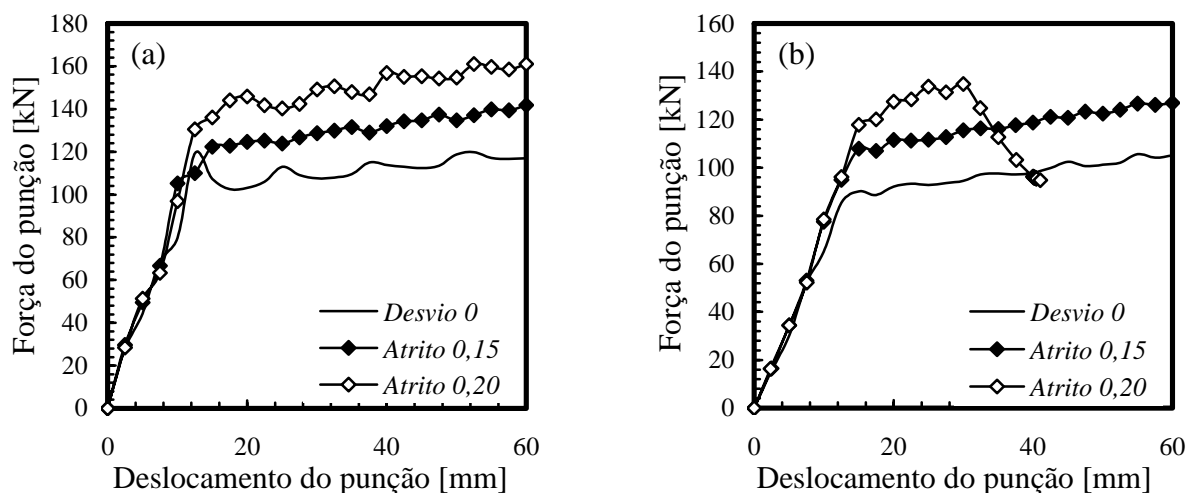


Figura 8.56 – Evolução da força exercida pelo punção na simulação da conformação do perfil U, para a força de aperto do cerra-chapas de 300 kN. Influência da distribuição do coeficiente de atrito: (a) aço de alta resistência HSLA e (b) liga de alumínio 5182-O.

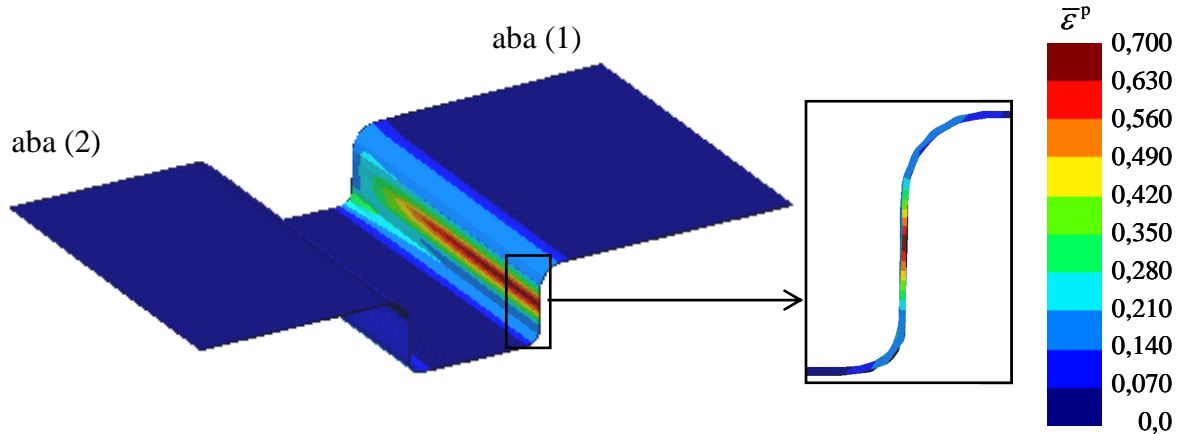


Figura 8.57 – Rotura da parede vertical prevista para a liga de alumínio para a força de aperto do cerra-chapas de 300 kN. Coeficiente de atrito  $\mu = 0,20$  na aba (1). Isovalores de deformação plástica equivalente.

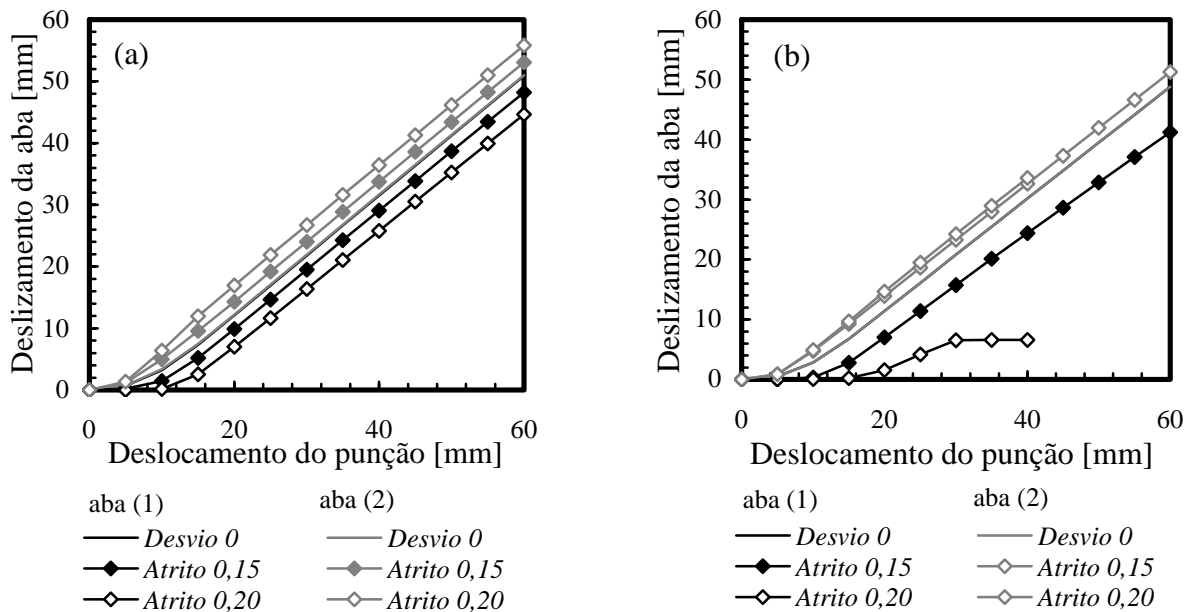


Figura 8.58 – Evolução do deslizamento das duas abas para a força de aperto do cerra-chapas de 300 kN. Influência da distribuição do coeficiente de atrito: (a) aço de alta resistência HSLA e (b) liga de alumínio 5182-O.

Na Figura 8.58 apresenta-se a evolução do deslizamento das abas, para as simulações realizadas com a força de aperto do cerra-chapas mais elevada. O aço de alta resistência apresenta o mesmo tipo de evolução observado anteriormente para a força mais baixa. Para o coeficiente de atrito  $\mu = 0,15$  os resultados são muito semelhantes aos obtidos com um desvio do cerra-chapas de  $10^{-4}$  mm. No caso do coeficiente de atrito  $\mu = 0,20$ , o valor de deslizamento encontra-se entre os obtidos para esse desvio do cerra-chapas e os obtidos com um desvio de  $10^{-3}$  mm. Para a liga de alumínio com o coeficiente de atrito  $\mu = 0,15$ , o deslizamento da aba (1) é muito semelhante ao obtido para um desvio do cerra-chapas de  $10^{-3}$  mm. No entanto, a aba (2) apresenta um deslizamento menor. Este facto conduz à diminuição de espessura da parede vertical no lado da aba (1). Quando o coeficiente de atrito aumenta de 0,15 para 0,20 na aba (1), o deslocamento da aba (2) praticamente não se altera. Porém, o deslocamento da aba (1) é mais restringido. Como é

imposta a condição de ambas as abas apresentarem em cada instante igual valor para a força de aperto do cerra-chapas, o menor deslocamento da aba (1) não é compensado pela aba (2) o que conduz à rotura da parede vertical (ver Figura 8.57). No final da fase de conformação, o aço de alta resistência apresenta diferenças no comprimento das abas de, aproximadamente, 5 mm e 11 mm para os coeficientes de atrito de 0,15 e 0,20, respectivamente. Na liga de alumínio a diferença de comprimento das abas com um coeficiente de atrito de  $\mu = 0,15$  é de 10 mm.

A Figura 8.59 apresenta as geometrias das secções transversais previstas após retorno elástico. Para a maior força de aperto obtêm-se perfis em U mais fechados. De facto, para o coeficiente de atrito de 0,20 na aba (1), a diminuição no ângulo de retorno elástico de ambas as abas é de aproximadamente  $1.5^\circ$  (ver Figura 8.51). A Figura 8.51 confirma que, na liga de alumínio, não se observa alteração no ângulo de retorno elástico da aba (2). A aba (1) inverte a tendência global, apresentando um ângulo de retorno elástico próximo de zero. A diminuição do ângulo de retorno elástico na aba (1) surge associada a um aumento da força de atrito, em consequência do aumento do coeficiente de atrito e do valor de pressão de contacto ser igual nas duas abas.

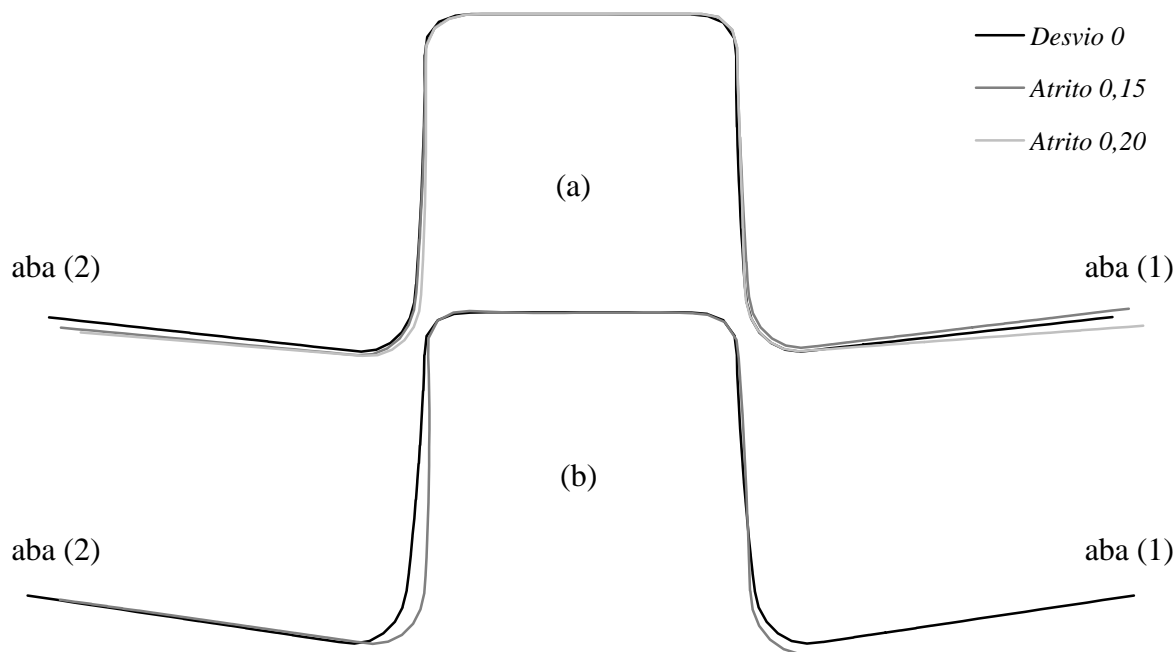


Figura 8.59 – Secção transversal obtida após retorno elástico para a força de aperto do cerra-chapas de 300 kN. Influência da distribuição do coeficiente de atrito: (a) aço de alta resistência HSLA e (b) liga de alumínio 5182-O.

### 8.7.2.3 Conclusões

O estudo realizado sobre o desvio da posição horizontal do cerra-chapas indica uma forte influência deste parâmetro na geometria final do perfil, em particular para forças mais altas. De facto, o comportamento elástico da prensa utilizada influencia a precisão dimensional, a reprodutibilidade do processo e o ciclo de vida das ferramentas. Uma forma de caracterizar a qualidade das diferentes prensas é quantificar o desvio da posição horizontal em função da força nominal aplicada pela prensa. Porém, este factor varia ao longo da vida da prensa e é influenciado pelo sistema de guiamento das ferramentas. Devido à deformação elástica de todo o conjunto, a força exercida pelo cerra-chapas não

é distribuída de forma uniforme [Wagener 1997]. Neste estudo, para além do cerra-chapas ser considerado rígido, admitiu-se uma distribuição assimétrica da força exercida em cada aba. Na montagem experimental utilizada, a distribuição assimétrica da força exercida pelo cerra-chapas é evitada com um controlo independente da força exercida em cada aba (ver secção 8.3), pelo que não deve ser este o parâmetro tecnológico que dita o deslizamento momentâneo de uma das abas observado na Figura 8.37. No entanto, este estudo mostra que pequenas alterações das posições nominais das ferramentas contribuem para variações dimensionais ou mesmo defeitos finais do componente.

O estudo realizado, considerando uma distribuição assimétrica do coeficiente de atrito, indica que para obter fortes assimetrias do componente é necessária uma diferença muito acentuada nos valores de coeficiente de atrito. Ou seja, para obter uma geometria como as apresentadas na Figura 8.37 é necessário que o coeficientes de atrito imposto na aba que desliza seja muito pequeno. Só para valores muito reduzidos é possível que o material escoe para o interior da matriz, evitando a rotura do componente. A análise dos resultados experimentais parece confirmar que tal situação pode ocorrer para as ligas de alumínio. De facto, nas condições de lubrificação utilizadas para a realização dos ensaios experimentais, a curva de Stribeck (ver Figura 7.1) apresenta uma grande variação do coeficiente de atrito entre o regime limite e misto bem como, uma variação muito acentuada no regime misto. Deste modo, pequenas variações nas condições de lubrificação podem conduzir a grandes variações do coeficiente de atrito [Col e Santos 2004].

O estudo realizado nesta secção evidencia o potencial da simulação numérica do processo de estampagem, como ferramenta de auxílio na interpretação da multiplicidade de parâmetros que controlam o processo tecnológico. Com efeito, o recurso a um modelo numérico permite um controlo preciso de cada parâmetro tecnológico, isolando a sua influência nas solicitações mecânicas da fase de conformação e de retorno elástico. Assim, a simulação numérica permite identificar os parâmetros tecnológicos que necessitem de maior controlo e identificar as causas que conduzem à dispersão dos resultados experimentais.



## Capítulo 9

# Considerações Finais

*Apresentam-se as conclusões globais deste trabalho.  
Referem-se algumas perspectivas de trabalho futuro.*

---

### 9.1 Conclusões

O trabalho realizado no âmbito desta dissertação enquadra-se no objectivo global de desenvolver os modelos, os algoritmos e os métodos numéricos implementados no programa de elementos finitos DD3IMP, desenvolvido com o objectivo específico da simulação numérica do processo de estampagem de chapas metálicas [Menezes 1995]. O contributo deste trabalho traduz-se, essencialmente, nos melhoramentos introduzidos nos modelos e algoritmos de tratamento e gestão do contacto com atrito. Neste contexto, ao longo de todo o trabalho, foram exploradas cinco áreas distintas: (i) a descrição das ferramentas; (ii) o algoritmo de detecção de contacto; (iii) o método de regularização do problema de contacto com atrito; (iv) o modelo de atrito e (v) a validação experimental dos modelos e algoritmos desenvolvidos. As principais conclusões de cada uma destas áreas são resumidas nos parágrafos seguintes.

A descrição das ferramentas recorrendo a superfícies de Bézier impõe cuidados na definição do conjunto de superfícies que define cada ferramenta. Realizou-se um estudo numérico sobre a influência do grau e da condição de continuidade das superfícies paramétricas nos resultados das simulações. O estudo contemplou a conformação de uma taça quadrada. Apesar de ser uma geometria simples este estudo permitiu concluir que:

- as zonas de concordância descritas por superfícies geradas a partir de arcos de círculo devem apresentar, no mínimo, grau 3. Geometrias de grau 2 nestas zonas introduzem um erro na definição das superfícies que se traduz em incorrecções nos resultados previstos pela simulação numérica;
- o tempo de cálculo aumenta com o aumento do grau das superfícies devido ao consequente aumento do número de operações do algoritmo de gestão de contacto e
- a definição de superfícies adjacentes deve obedecer à continuidade geométrica  $G^1$  de modo a garantir a convergência do algoritmo de gestão de contacto com atrito e minimizar o tempo de cálculo.

No caso de geometrias simples aconselha-se proceder à determinação analítica das coordenadas dos vértices dos polinómios característicos das superfícies, uma vez que deste modo se garante a continuidade geométrica  $G^1$ . Para geometrias complexas é obrigatório recorrer a programas comerciais de CAD, pelo que é imprescindível controlar as tolerâncias a impor à definição das superfícies paramétricas. Este controlo deve ser realizado no ficheiro de interface de saída da informação, que permite definir o grau máximo e as tolerâncias que ditam a continuidade das superfícies paramétricas adjacentes.

Procedeu-se ainda à optimização do algoritmo de gestão das ferramentas a força imposta. As alterações introduzidas ao nível da actualização da posição de referência conduziram a fortes reduções no tempo de cálculo, pois permitem uma estabilização mais rápida dos estatutos de contacto. O modelo considerado para controlar as ferramentas a força imposta deve traduzir as condições reais do processo, não só em termos do valor total de força aplicada mas, também, na sua distribuição. Para tal, é essencial proceder a uma previsão correcta do deslocamento da ferramenta, uma vez que este influencia fortemente o escoamento do material e dita as condições de fronteira evolutivas com a ferramenta a força imposta. O estudo numérico realizado com os perfis U e curvo demonstrou que um valor correcto da força de aperto do cerra-chapas permite controlar o fenómeno de retorno elástico, para além de evitar a formação de pregas ou rugas. O estudo realçou que as variações introduzidas pelo aumento da força de aperto do cerra-chapas são, no entanto, função da geometria do componente e das propriedades mecânicas do material seleccionado. No controlo do retorno elástico, os materiais que apresentam uma tensão limite de elasticidade mais elevada são menos sensíveis à influência deste parâmetro tecnológico.

Em relação à estratégia utilizada para proceder à remoção das ferramentas e simular a fase de retorno elástico constatou-se que não existem diferenças significativas nos resultados obtidos, entre a estratégia de eliminação das ferramentas por deslocamento ou remoção e o método implementado no programa DD3OSS, que elimina todas as ferramentas num único incremento. O programa DD3OSS permite a simulação da fase de retorno elástico de forma muito mais eficiente. Garante-se assim a melhor relação entre a precisão dos resultados e o tempo de cálculo. No entanto, o exemplo estudado alerta para o facto de que a sequência de eliminação das ferramentas pode induzir diferenças no retorno elástico, caso os constrangimentos impostos pelas ferramentas se alterem. Neste caso, é preferível optar pela estratégia de remoção das ferramentas para simular a fase de retorno elástico, com uma sequência idêntica à do processo real.

O algoritmo de detecção de contacto deve ser suficientemente robusto para identificar todos os pontos potenciais de contacto, sem penalizar a sua eficiência em termos de tempo de cálculo. O método de Newton-Raphson, utilizado nos algoritmos de detecção de contacto local, caracteriza-se por apresentar velocidade de convergência quadrática na vizinhança da solução. Para tal, é fundamental garantir uma correcta aproximação inicial através do algoritmo de detecção de contacto global. O algoritmo implementado no programa DD3IMP conduziu a melhorias efectivas do algoritmo de gestão do contacto. Este algoritmo pré-selecciona o conjunto de superfícies candidatas ao contacto com determinado nó da malha de elementos finitos, com base na distância do nó ao ponto médio e aos vértices da superfície. Os teste numéricos realizados permitem concluir que o algoritmo de detecção de contacto desenvolvido:

- é robusto na identificação do conjunto de superfícies candidatas ao contacto, mesmo em geometrias complexas, caracterizadas por um grande número de superfícies de diferentes dimensões;
- reduz o número de iterações necessárias para a convergência dos algoritmos de detecção local e previne situações de divergência, uma vez que utiliza como aproximação inicial para o método de Newton-Raphson a informação acerca da posição do vértice mais próximo do nó candidato ao contacto;
- melhora a definição do vector de perturbação associado ao algoritmo de impacto. Neste caso, utiliza-se a normal à superfície para definir o vector de direcção de

impacto, avaliada próximo do ponto de impacto eventual. Esta solução é mais robusta, em particular para superfícies de grande curvatura.

Apesar de à partida este algoritmo de detecção de contacto necessitar de mais operações, o aumento do tempo de cálculo não é significativo e é largamente compensado pelo aumento de robustez.

O método do lagrangeano aumentado é o método de regularização do problema de contacto com atrito que melhor garante a relação entre o rigor dos resultados e a eficiência numérica do algoritmo de gestão de contacto. Este método garante a insensibilidade da precisão da solução obtida ao parâmetro de penalidade escolhido. No entanto, o valor escolhido para o parâmetro de penalidade influencia a convergência dos métodos numéricos utilizados, podendo mesmo comprometer o sucesso da simulação. Neste trabalho, estudaram-se duas estratégias distintas para a optimização do valor do parâmetro de penalidade. A primeira admite um único parâmetro de penalidade para controlar a condição de contacto com atrito. O valor deste parâmetro é variável em cada nó, ao longo do processo iterativo. Nesta estratégia desenvolveram-se dois algoritmos para a selecção automática do parâmetro de penalidade. Um baseado na força normal de contacto e outro baseado na força e distância normais de contacto. A segunda estratégia admite parâmetros de penalidade diferentes para controlar as restrições associadas ao contacto unilateral e ao atrito. Ambas as estratégias foram implementadas no programa DD3IMP tendo-se realizado testes numéricos para avaliar a sua eficiência. Os testes elementares realizados para um ensaio de compressão simples revelaram que:

- os problemas de convergência do algoritmo de equilíbrio podem ser induzidos por estatutos de contacto incorrectos em zonas limitadas do problema, nomeadamente num único nó;
- à excepção das simulações realizadas com contacto plano, em todas as outras simulações realizadas com parâmetro de penalidade constante observa-se sensibilidade da velocidade de convergência com o parâmetro de penalidade;
- as simulações realizadas com parâmetros de penalidade distintos para as componentes do multiplicador aumentado apresentam claros problemas de convergência. O único ciclo iterativo para a resolução simultânea das não-linearidades associadas ao problema de contacto com atrito e ao processo de deformação limita as hipóteses de controlar eficazmente a relação entre os dois valores do parâmetro de penalidade. O sucesso da simulação depende fortemente da combinação de valores escolhidos para o parâmetro de penalidade. Tanto ocorrem fortes reduções como ligeiros aumentos da velocidade de convergência;
- a utilização do parâmetro de penalidade variável permite estabilizar nós que ao longo do processo iterativo oscilam entre direcções de escorregamento opostas e previne eficazmente os problemas de convergência observados. O algoritmo baseado na força e distância normais de contacto permite, igualmente, estabilizar alterações ao estatuto de contacto associadas à condição de contacto unilateral e
- é possível estimar um valor por defeito para o parâmetro de penalidade constante que garante o número mínimo de iterações até à convergência.

Em resumo, o recurso ao parâmetro de penalidade variável permite reduzir a influência na velocidade de convergência do parâmetro de penalidade definido pelo utilizador. O algoritmo baseado na força e distância normais de contacto mostrou-se mais dispendioso do que o baseado apenas na força normal.

No programa DD3IMP foi ainda implementado um modelo de atrito que estabelece a evolução do coeficiente de atrito em função da pressão de contacto. Estudaram-se duas estratégias alternativas para proceder à avaliação geométrica da área de contacto, necessária para determinar a pressão de contacto associada a cada nó em contacto. A primeira baseia-se no estatuto de contacto dos nós adjacentes. A segunda toma em consideração também a distância normal de contacto dos nós adjacentes. A lei de atrito evolutiva foi testada na simulação da conformação de um perfil U. No primeiro conjunto de testes numéricos realizados, para além da lei de atrito evolutiva, foi testado um coeficiente de atrito constante e um conjunto de coeficientes de atrito constantes por zonas da ferramenta. Este conjunto de ensaios numéricos permitiu concluir que:

- as simulações que conduzem à melhor aproximação do valor máximo da força do punção obtido experimentalmente são as realizadas com a lei de atrito evolutiva. Não se observam diferenças na evolução da força do punção para as duas funções de determinação da pressão de contacto, nem influência do tamanho médio do incremento em consequência da actualização explícita do coeficiente de atrito;
- a estratégia de avaliação da área de contacto com base apenas nos estatutos de contacto é mais sensível a pequenas oscilações do estatuto de contacto previsto para cada nó;
- os valores de pressão de contacto previstos pela simulação numérica ultrapassam a gama de valores utilizada nos ensaios experimentais. No entanto, a estabilidade numérica da lei evolutiva utilizada permite a sua extrapolação sem ser necessário recorrer a artifícios numéricos adicionais e
- as simulações que conduzem à melhor aproximação do ângulo de retorno elástico da aba obtido experimentalmente são as realizadas com a lei de atrito evolutiva.

Realizou-se um segundo conjunto de testes numéricos para avaliar a sensibilidade da lei evolutiva à discretização do corpo deformável, uma vez que esta influencia a avaliação da força e área de contacto de cada nó. Para além da lei de atrito evolutiva testou-se ainda um coeficiente de atrito constante. Este estudo permitiu concluir que:

- discretizações mais refinadas permitem uma definição mais rigorosa da zona de contacto efectiva. Tal implica uma redistribuição da força normal de contacto e, conseqüentemente, valores de pressão de contacto mais elevados. A variável pressão de contacto depende não só da discretização seleccionada, mas também do tipo de contacto. Quanto mais localizada for a zona de contacto, maior é a sua sensibilidade ao tamanho médio dos elementos finitos no plano e
- apesar do aumento da pressão de contacto observado com o refinamento da malha no plano, a distribuição do valor do coeficiente de atrito é muito semelhante, uma vez que a função utilizada para traduzir a evolução deste coeficiente apresenta uma rápida saturação com o aumento da pressão.

Uma das dificuldades da análise e interpretação dos resultados obtidos pela simulação numérica foi a confrontação com os resultados experimentais, devido à dispersão destes. O recurso à simulação numérica permitiu interpretar os resultados experimentais e avaliar os factores que contribuem para a sua dispersão.

A comparação dos resultados numéricos com os experimentais permitiu constatar que as melhorias introduzidas no decurso deste trabalho no programa DD3IMP são fundamentais para assegurar a precisão dos resultados obtidos. Na Tabela 9.1 apresenta-se um exemplo de comparação de resultados experimentais e numéricos do retorno elástico de um perfil curvo. A comparação com resultados numéricos fornecidos

por outros programas comerciais, utilizados no âmbito do projecto 3DS, permitem confirmar o rigor dos resultados obtidos com os programas DD3IMP e DD3OSS. O resultado apresentado para cada programa corresponde à simulação que apresenta a melhor correlação com o resultado experimental.

Tabela 9.1 – Razão entre o ângulo de retorno elástico da aba obtido por simulação numérica e experimentalmente. Resultados referentes ao perfil curvo [3DS 2004].

<i>Material</i>	<i>5182-O</i>	<i>6016-T4</i>	<i>DC06</i>	<i>DP600</i>	<i>HSLA</i>
<i>Força do Cerra-chapas 90kN</i>					
PAM-STAMP 2G™	0,91	0,93	0,96	0,97	0,96
AUTOFORM™	0,97	0,98	0,99	0,99	0,98
DD3IMP/DD3OSS	0,96	0,96	0,99	0,98	0,97
LS-DYNA™	0,96	0,95			
<i>Força do Cerra-chapas 200kN</i>					
AUTOFORM™	1,03	1,03	1,01	0,95	0,99
DD3IMP/DD3OSS	1,00	1,01	1,01	0,94	1,00
LS-DYNA™	1,02		1,01	0,92	0,98

## 9.2 Perspectivas de Trabalho Futuro

O desenvolvimento da família de programas DD3 garante uma boa plataforma de trabalho para a concretização de alguns dos desafios que actualmente se colocam à simulação numérica dos processos de estampagem. De entres estes desafios, o mais premente relaciona-se com o desenvolvimento de procedimentos automáticos de optimização do processo de estampagem, incluindo a fase de retorno elástico. A integração da simulação numérica num procedimento de optimização permitirá determinar a melhor combinação de parâmetros tecnológicos para compensar o fenómeno de retorno elástico. Para atingir este objectivo é essencial garantir o rigor dos resultados da simulação e, simultaneamente, aumentar a eficiência computacional. Para tal, devem ser abordadas quatro áreas distintas: (i) o modelo constitutivo para a descrição do comportamento mecânico do corpo deformável; (ii) o modelo para a descrição do contacto com atrito; (iii) a discretização do corpo deformável e (iv) a modelação do processo.

Em relação ao modelo constitutivo para a descrição do comportamento mecânico do corpo deformável é necessário avaliar a relevância da descrição anisotrópica do comportamento elástico, bem como da evolução do valor do módulo de elasticidade com a deformação plástica. Pequenas alterações do módulo de elasticidade com a deformação, como as que ocorrem, por exemplo, em algumas ligas de alumínio com uma alteração de 3% em cada 10% de deformação, estão a ser consideradas como uma aproximação necessária para melhorar a precisão dos resultados da simulação numérica do processo de estampagem. Este aspecto envolve o contínuo desenvolvimento do programa DD3MAT, para garantir uma determinação correcta dos parâmetros constitutivos associados ao modelo seleccionado.

A descrição do contacto com atrito é uma das áreas que necessita de grandes desenvolvimentos. É imprescindível desenvolver ensaios experimentais que permitam

avaliar o coeficiente de atrito e os parâmetros que definem a sua evolução. Deste modo, será possível utilizar, na simulação numérica, leis de atrito evolutivas que tomem em consideração a variação desses parâmetros durante o processo de conformação.

O desenvolvimento de procedimentos de adaptabilidade de malha para diminuir a sensibilidade dos resultados da simulação ao refinamento da malha, é um dos aspectos a desenvolver. Para tal é necessário recorrer a indicadores de erro, técnicas para a construção da nova discretização e de transferência das variáveis de estado e das condições de fronteira para a nova discretização. Estes últimos itens têm sido estudados no âmbito do desenvolvimento do programa DD3TRIM que, associado ao programa DD3IMP, permite simular processos multi-etapa [Baptista *et al.* 2004]. O recurso simultâneo a elementos finitos do tipo sólido e casca deverá também ser estudado pois pode traduzir-se numa redução efectiva do tempo de computação sem perda de rigor dos resultados. Tal implica a implementação no programa DD3IMP de elementos finitos casca, bem como o desenvolvimento e implementação de elementos finitos híbridos de ligação entre os elementos sólidos e casca.

A deformação elástica das ferramentas é, também, um parâmetro a ter em conta para a simulação do processo de estampagem, sobretudo devido à crescente utilização de chapas metálicas com valores elevados de tensão limite de elasticidade [Takamura *et al.* 2004]. Este aspecto reveste-se de particular importância quando associado às novas formas de controlo do cerra-chapas, com o auxílio de cerra-chapas deformáveis [Doege e Elend 2001] ou forças variáveis no espaço [Sheng *et al.* 2004, Liu *et al.* 2002].

O recurso a geometrias mais complexas para os componentes estampados envolve um número crescente de superfícies de Bézier para a definição da geometria. Pormenores de geometria complexa conduzem à coexistência de superfícies de dimensões muito distintas no modelo, que podem introduzir dificuldades adicionais para o algoritmo de detecção de contacto. O aumento do número de superfícies que definem cada ferramenta apresenta igualmente custos em termos do algoritmo de detecção de contacto. O recurso a descrições das superfícies com mais parâmetros, como por exemplo a descrição por NURBS, permite reduzir o número de superfícies na definição de cada ferramenta. Esta opção envolve uma reestruturação dos algoritmos de detecção local de contacto. O facto de a descrição por NURBS possuir propriedades de suporte local confere-lhe também vantagens na utilização em procedimentos de alteração de geometria para compensação do retorno elástico.

## Anexo A

# Notação, Nomenclatura e Siglas

### A.1 Notações Algébricas

$\mathbf{0}$	- Tensor nulo
$a, \dots, z;$	- Escalares em $\mathbb{R}$
$A, \dots, Z;$	
$\alpha, \dots, \omega$	
$\mathbf{a}, \dots, \mathbf{z};$	- Tensores em $\mathbb{R}^3$
$\mathbf{A}, \dots, \mathbf{Z};$	
$\boldsymbol{\alpha}, \dots, \boldsymbol{\omega}$	
$\mathbf{a}'$	- Parte desviadora do tensor $\mathbf{a}$
$\dot{\mathbf{a}}$	- Derivada parcial do tensor $\mathbf{a}$ em ordem ao tempo
$\dot{\mathbf{a}}^J$	- Derivada objectiva de Jaumann do tensor $\mathbf{a}$
$\overset{\sim}{\mathbf{a}}$	- Derivada de Truesdell do tensor $\mathbf{a}$
$\overset{\circ}{\mathbf{a}}$	- Derivada temporal objectiva de $\mathbf{a}$
$\hat{\mathbf{a}}$	- Tensor $\mathbf{a}$ rodado para o sistema de ortotropia
$\bar{\mathbf{a}}$	- Variável $\mathbf{a}$ avaliada pelo método $\bar{B}$ de integração reduzida do elemento
$\ \mathbf{a}\ $	- Norma do tensor $\mathbf{a}$
$\mathbf{a}^{-1}$	- Tensor resultante da inversão do tensor $\mathbf{a}$
$\mathbf{a}^A$	- Parte anti-simétrica do tensor $\mathbf{a}$
$\mathbf{a}^S$	- Parte simétrica do tensor $\mathbf{a}$
$\mathbf{a}^T$	- Tensor resultante da transposição do tensor $\mathbf{a}$
$\mathbf{ab}$	- Produto dos vectores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$
$\mathbf{a} : \mathbf{b}$	- Produto interno dos tensores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$
$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	- Produto tensorial do tensor $\mathbf{a}$ pelo tensor $\mathbf{b}$
$da$	- Incremento infinitesimal da variável genérica $a$
$\delta \mathbf{a}$	- Campo virtual do tensor $\mathbf{a}$
$\Delta a$	- Incremento da variável genérica $a$
$\delta_{ij}$	- Símbolo de Kronecker
$J, \det(\mathbf{a})$	- Determinante do tensor $\mathbf{a}$
$\mathbf{I}$	- Tensor identidade de segunda ordem
$\mathbf{I}_4$	- Tensor identidade de quarta ordem
$\text{tr}(\mathbf{a})$	- Traço do tensor $\mathbf{a}$

### A.2 Operadores e Funções

$( \ , \ )$	- Produto escalar
$\cos( \ )$	- Função co-seno
$\text{dist}( \ )$	- Função distância

$\text{div}(\ )$	- Operador divergente
$\text{exp}(\ )$	- Função exponencial
$\text{grad}(\ ), \nabla$	- Operador vectorial gradiente
$\text{log}(\ )$	- Função logaritmo
$\text{max}(\ )$	- Função máximo
$\text{min}(\ )$	- Função mínimo
$\text{proj}_{[a,b]}$	- Função projecção no intervalo $[a,b]$ . Por definição: $\text{proj}_{[a,b]}(x) = x$ se $x \in [a,b]$ ; $\text{proj}_{[a,b]}(x) = b$ se $x > b$ ; $\text{proj}_{[a,b]}(x) = a$ se $x < a$
$\text{sign}(\ )$	- Função sinal
$\text{sech}(\ )$	- Função secante hiperbólica
$\text{tanh}(\ )$	- Função tangente hiperbólica
$\Psi_{[a,b]}$	- Função indicatriz do intervalo $[a,b]$ . Por definição: $\Psi_{[a,b]}(x) = 0$ se $x \in [a,b]$ ; $\Psi_{[a,b]}(x) = +\infty$ se $x \notin [a,b]$
$\Psi_{[a,b]}^*$	- Função conjugada de Fenchel da função $\Psi_{[a,b]}$ . Por definição: $\Psi_{[a,b]}^*(x) = bx$ se $x \geq 0$ ; $\Psi_{[a,b]}^*(x) = -ax$ se $x < 0$
$\partial\Psi_{[a,b]}$	- Sub-diferencial da função $\Psi_{[a,b]}$ , $\subset \mathbb{R}$ . Por definição: $\partial\Psi_{[a,b]}(x) = \{0\}$ se $x \in ]a,b[$ ; $\partial\Psi_{[a,b]}(x) = ]-\infty, 0]$ se $x = a$ ; $\partial\Psi_{[a,b]}(x) = [0, +\infty[$ se $x = b$ ; $\partial\Psi_{[a,b]}(x) = 0$ se $x < a$ ou $x > b$
$\partial\Psi_{[a,b]}^*$	- Sub-diferencial da função $\Psi_{[a,b]}^*$ , $\subset \mathbb{R}$ . Por definição: $\partial\Psi_{[a,b]}^*(x) = \{a\}$ se $x \in ]-\infty, 0]$ ; $\partial\Psi_{[a,b]}^*(x) = [a, b]$ se $x = 0$ ; $\partial\Psi_{[a,b]}^*(x) = \{b\}$ se $x \in [0, +\infty[$

### A.3 Sub-índices e Super-índices

*	- Valor conhecido no espaço e no tempo
0	- Valor inicial
dev	- Componente desviadora
e	- Parte elástica
F	- Valor final
FI	- Relativo ao método de integração completa
gap	- Relativo ao estatuto de contacto de um nó livre
hid	- Componente hidrostática
Hill'48	- Relativo ao critério ortotrópico de Hill'48
Imp	- Relativo ao algoritmo de detecção local de impacto
l	- Relativo ao sistema de coordenadas locais associado ao contacto
LeC	- Relativo à lei de Lemaître e Chaboche de encruamento cinemático
max	- Valor máximo
TeodosiuC	- Relativo ao modelo microestrutural de Teodosiu completo
TeodosiuS	- Relativo ao modelo microestrutural de Teodosiu simplificado
n	- Componente na direcção normal
N	- Referente ao incremento de cálculo corrente
N + 1	- Referente ao incremento de cálculo seguinte
p	- Parte plástica



Prager	- Relativo à lei de Prager de encruamento cinemático
Proj	- Relativo ao algoritmo de detecção local de projecção
red	- Relativo ao sistema de equações lineares reduzido
slip	- Relativo ao estatuto de contacto de um nó em escorregamento
stick	- Relativo ao estatuto de contacto de um nó aderente
SRI	- Relativo ao método de integração reduzida selectiva
Swift	- Relativo à lei de Swift de encruamento isotrópico
t	- Componente na direcção tangencial
URI	- Relativo ao método de integração reduzida uniforme
Voce	- Relativo à lei de Voce de encruamento isotrópico
von Mises	- Relativo ao critério isotrópico de von Mises

## A.4 Mecânica dos Meios Contínuos

$C$	- Configuração corrente do corpo sólido deformável $\Omega$
$C_0$	- Configuração de referência do corpo sólido deformável $\Omega_0$
$C^R$	- Configuração relaxada local
$\mathbf{C}$	- Tensor de Cauchy-Green direito
$\mathbf{C}^e$	- Módulo elástico
$\mathbf{C}^{ep}$	- Módulo elastoplástico (tangente ou consistente)
$\mathbf{D}$	- Tensor velocidade de deformação, parte simétrica de $\mathbf{L}$
$\mathbf{E}$	- Tensor das deformações de Green-Lagrange
$\boldsymbol{\varepsilon}$	- Tensor das deformações
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$	- Deformação plástica equivalente
$\mathcal{F}$	- Função que descreve a superfície de plasticidade no espaço das tensões e o potencial plástico
$\mathbf{F}$	- Tensor gradiente da transformação
$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \lambda^n)$	- Operador de contacto com atrito
$\mathbf{F}^{\text{equi}}$	- Sub-operador de equilíbrio do operador de contacto com atrito
$\mathbf{F}^{\text{ext}}$	- Vector das forças externas
$\mathbf{F}^{\text{int}}$	- Vector das forças internas
$\mathbf{F}^{\text{sup}}$	- Sub-operador suplementar do operador de contacto com atrito
$h$	- Parâmetro escalar de encruamento isotrópico
$H'$	- Módulo de encruamento isotrópico
$\dot{\lambda}$	- Multiplicador plástico
$\mathbf{L}$	- Tensor gradiente da velocidade
$\mathbf{N}$	- Trajectória de deformação
$\mathbf{\Pi}$	- Segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff
$\hat{\mathbf{Q}}$	- Segunda derivada da tensão equivalente $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ em ordem ao tensor das tensões efectivo, $\boldsymbol{\Sigma}$
$\mathbf{R}$	- Tensor de rotação elástica
$\mathbf{s}$	- Vector tensão nominal
$\boldsymbol{\sigma}$	- Tensor das tensões de Cauchy
$\mathbf{S}$	- Primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff
$\Sigma$	- Fronteira exterior do corpo sólido deformável
$\boldsymbol{\Sigma}$	- Tensor das tensões efectivas
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$	- Tensão equivalente

$t$	- Instante de tempo genérico
$\mathbf{t}$	- Vector tensão de Cauchy
$\mathbf{u}$	- Vector deslocamento de um ponto material
$\mathbf{v}$	- Vector velocidade de um ponto material
$\mathbf{V}$	- Tensor de deformação elástica pura esquerdo
$\hat{\mathbf{V}}$	- Primeira derivada da tensão equivalente $\bar{\sigma}$ em ordem ao tensor das tensões efectivo, $\Sigma$
$\mathbf{W}$	- Tensor velocidade de rotação, parte anti-simétrica de $\mathbf{L}$
$\Omega$	- Domínio correspondente ao corpo sólido deformável
$\mathbf{x}$	- Vector posição de um ponto material, no instante corrente $t$
$\mathbf{x}_0$	- Vector posição de um ponto material, no instante inicial
$\mathbf{X}$	- Tensor das tensões inversas ( <i>back-stress</i> )

## A.5 Modelos de Comportamento e Propriedades dos Materiais

$\beta$	- Parâmetro quantificador da mudança de trajectória de deformação, tal que $\beta = \mathbf{N}_1 : \mathbf{N}_2$
$\beta_S$	- Parâmetro quantificador da orientação da trajectória de deformação relativamente à direcção da estrutura persistente de deslocações (modelo microestrutural de Teodosiu)
$C, \varepsilon_0$ e $n$	- Parâmetros constitutivos da lei de Swift
$C_P, C_{SD}, S_{sat}, n_P, C_{SL}, r$ e $n$	- Parâmetros específicos do modelo microestrutural de Teodosiu completo
$C_S, S_{sat}$	- Parâmetros específicos do modelo microestrutural de Teodosiu simplificado
$C_X$ e $X_{sat}$	- Parâmetros constitutivos da lei de Lemaître e Chaboche
$E$	- Módulo de elasticidade ou módulo de Young
$f_0$	- Parâmetro função da lei de encruamento, necessário para a definição do módulo elastoplástico tangente
$F, G, H, L, M$ e $N$	- Parâmetros de anisotropia do critério de Hill'48
$g$	- Parâmetro material que descreve a influência da polaridade da estrutura persistente de deslocações sobre $S_D$ (modelo microestrutural de Teodosiu)
$G$	- Módulo de rigidez ou módulo de corte
$h$	- Parâmetro material que descreve a variação suave de $S_D$ no principio de uma inversão de trajectória de deformação (modelo microestrutural de Teodosiu)
$k$	- Parâmetros constitutivos da lei de Prager
$K$	- Módulo de elasticidade à compressão
$\Lambda$	- Tensor função da lei de encruamento, necessário para a definição do módulo elastoplástico consistente
$\lambda, \mu$	- Coeficientes de Lamé
$\mathbf{M}$	- Tensor de anisotropia do critério de Hill'48
$\mathbf{P}$	- Tensor associado à polaridade da estrutura persistente de deslocações (modelo microestrutural de Teodosiu)

$\bar{r}$	- Valor médio dos coeficientes de anisotropia
$\rho$	- Massa volúmica
$R$	- Encruamento isotrópico associado à distribuição estatística de deslocações, isto é, não organizada (modelo microestrutural de Teodosiu)
$S$	- Resistência das estruturas de deslocações ou organização microestrutural (modelo microestrutural de Teodosiu simplificado)
$S_D$	- Resistência das estruturas de deslocações associadas aos sistemas de escorregamento activos (modelo microestrutural de Teodosiu)
$\mathbf{S}$	- Resistência direccionada das estruturas de deslocações ou organização microestrutural (modelo microestrutural de Teodosiu completo)
$S_L$	- Resistência das estruturas de deslocações associadas aos sistemas de escorregamento latentes (modelo microestrutural de Teodosiu)
$\nu$	- Coeficiente de Poisson
$Y$	- Tensão limite de elasticidade em tracção uniaxial
$Y_0$	- Tensão limite de elasticidade inicial em tracção uniaxial
$Y_{\text{sat}}, C_Y$ e $Y_0$	- Parâmetros constitutivos da lei de Voce

## A.6 Mecânica do Contacto

$A, B, m$ e $n$	- Parâmetros numéricos de ajuste para a lei de atrito evolutiva
$\mathcal{A}^{\text{def}}$	- Partícula situada na fronteira do corpo deformável
$\mathcal{A}^{\text{ref}}$	- Partícula de referência associada a $\mathcal{A}^{\text{def}}$ e situada na fronteira do corpo rígido, $\mathcal{G}^{\text{rig}}$
$C(\lambda^n)$	- Fatia do cone de Coulomb em $\lambda^n$
$C^{\text{aum}}(\sigma^n)$	- Convexo de atrito de Coulomb aumentado
$d^n$	- Distância normal de contacto
$\dot{\delta}$	- Vector de velocidade relativa
$\delta$	- Vector incremento de deslocamento
$\mathcal{G}^{\text{def}}$	- Fronteira do corpo deformável
$\mathcal{G}^{\text{rig}}$	- Fronteira do corpo rígido (ferramenta)
$\eta$	- Viscosidade do lubrificante
$\bar{F}_i$	- Valor de força prescrita para a ferramenta a actuar a força imposta
$k^m$	- Rigidez da mola que controla o valor de força prescrita para a ferramenta a actuar a força imposta
$l$	- Distância de escorregamento entre dois corpos em contacto
$L$	- Número de Sommerfeld
$L(\mathbf{v}, \gamma)$	- Lagrangeano de variáveis virtuais $\mathbf{v}$ e $\gamma$
$L_r(\mathbf{v}, \gamma^n)$	- Lagrangeano aumentado de variáveis virtuais $\mathbf{v}$ e $\gamma$
$\lambda$	- Vector força de contacto
$m$	- Coeficiente de atrito associado à lei de Tresca
$\mu$	- Coeficiente de atrito associado à lei de Coulomb
$\mathbf{n}$	- Normal exterior unitária no ponto $\mathcal{A}^{\text{ref}}$
$P$	- Pressão de contacto
$r$	- Parâmetro de penalidade
$R_a$	- Rugosidade da superfície
$\sigma(\mathbf{u}, \lambda)$	- Vector multiplicador aumentado

$S$	- Número de superfícies de Bézier que podem entrar em interacção com o ponto $\mathcal{A}^{\text{def}}$ da fronteira do corpo deformável $\mathcal{G}^{\text{def}}$
$\bar{S}$	- Número de superfícies de Bézier candidatas ao contacto com o ponto $\mathcal{A}^{\text{def}}$ , em determinada fase da simulação ( $\bar{N} < N$ )
$S^{\text{total}}$	- Número total de superfícies de Bézier que constituem as ferramentas associadas ao processo a simular
$[T_A]$	- Matriz de rotação que procede à passagem do referencial global para o referencial local de contacto
$\mathbf{t}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$	- Vector unitário de escorregamento tangencial
$\mathbf{x}^{\text{ref}}$	- Vector posição da partícula de referência $\mathcal{A}^{\text{ref}}$

## A.7 Descrição das Ferramentas

$B_{i,m}(\beta)$	- Funções de Bernstein de grau $m$
$\beta$ e $\eta$	- Parâmetros de uma curva ou de uma superfície de Bézier
$\mathbf{b}_{ij}$	- Tensor dos coeficientes polinomiais de grau $i$ e $j$ da definição paramétrica de uma superfície de Bézier
$C_m^i$	- Coeficiente de Newton
$\mathbf{d}^{\text{Imp}}$	- Vector direcção de impacto expectável
$\varepsilon_a^{\text{Conv}}, \varepsilon_F^{\text{Conv}}$	- Valores pré-definidos de tolerância para a convergência dos algoritmos de detecção local de contacto
$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{Imp}}$	- Vector perturbação à trajectória de impacto
$\mathbf{g}_\sigma(\beta, \eta)$	- Vector de base covariante
$\Gamma^{\text{def}}$	- Superfície exterior do corpo deformável
$\Gamma^{\text{rig}}$	- Superfície exterior do corpo rígido
$m, n$	- Classe ou grau das superfícies de Bézier nas direcções $\beta$ e $\eta$
$\mathbf{P}(\beta)$	- Coordenadas de uma curva de Bézier
$\mathbf{P}(\beta, \eta)$	- Coordenadas de uma superfície de Bézier
$\mathbf{P}^{\text{Imp}}(\beta, \bar{\eta}, \bar{T})$	- Ponto de impacto na superfície da ferramenta
$\mathbf{P}^{\text{Proj}}(\beta, \bar{\eta}, \bar{T})$	- Ponto de projecção na superfície da ferramenta
$\mathbf{s}_i$	- Vértices do polinómio característico de uma curva de Bézier
$\mathbf{s}_{ij}$	- Vértices da rede característica de uma superfície de Bézier

## A.8 Discretização por Elementos Finitos

$a, b$	- Numeração local (elementar) dos nós da malha de elementos finitos
$\alpha_{Ai}$	- Grandeza $\alpha$ associada ao grau de liberdade $i$ do nó $A$
$A, B$	- Numeração global dos nós da malha de elementos finitos
$[K^{\text{tan}}]$	- Matriz de rigidez tangente
$[K]^j$	- Matriz de rigidez da iteração $j$
$n_{el}$	- Número de nós do elemento finito $e$
$n_{eq}$	- Número total de equações
$n_{gp}^e$	- Número de pontos de integração do elemento $e$
$n_n$	- Número de nós
$n_{ct}$	- Número de nós susceptíveis de estabelecer contacto
$n_{fer}$	- Número de nós susceptíveis de estabelecer contacto com a ferramenta

	a força imposta
$N_a^e$	- Função de interpolação do nó $a$ pertencente ao elemento $e$
$\bar{N}_a$	- Função de interpolação do nó $a$ pertencente ao elemento $e$ , calculada no ponto de integração reduzida do elemento
$R$	- Quociente entre o menor comprimento no plano e a espessura (Razão do elemento finito)
$R_c$	- Quociente entre o menor comprimento no plano e o menor raio de curvatura das ferramentas
$w_g$	- Peso de integração do ponto de Gauss $g$
$\Omega_e$	- Domínio do elemento finito $e$
$\Omega_e^c$	- Domínio canónico do elemento finito $e$
$\xi, \eta$ e $\zeta$	- Coordenadas canónicas
$\mathbf{x}_a^e$	- Vector posição do nó $a$ do elemento finito $e$
$\xi_g$	- Vector posição em coordenadas canónicas do ponto de Gauss $g$

## A.9 Métodos Numéricos

$a^{[N,j]}$	- Valor da grandeza genérica $a$ na iteração de equilíbrio $j$ do incremento $N$
$a$ e $b$	- Parâmetros reais que definem o valor máximo admissível para o incremento de tensão (definidos pelo utilizador)
$\alpha, (1-\alpha)$	- Parâmetro de definição do regime de carregamento do material, para a determinação do módulo elastoplástico tangente
$\alpha_1, \alpha_2$	- Parâmetros numéricos de controlo do tamanho do incremento, em função da história dos incrementos
$A_{\text{corr}}^{[\text{nó}]}$	- Função de correcção da área de contacto do nó
$A_{\text{final}}^{[\text{nó}]}$	- Área de contacto do nó
$\beta, (1-\beta)$	- Parte elástica e elastoplástica do incremento de carga/tempo
$C_{\text{ensaio}}^{[N,0]}$	- Configuração de ensaio determinada na fase de <i>Previsão</i>
$C^{[N,0]}$	- Configuração tangente explícita
$C^{[N,j]}$	- Configuração associada ao incremento $N$ , na iteração $j$
$C^{\text{crit}}$	- Critério de convergência para resolução do problema de contacto com atrito
$\mathbf{C}, \mathbf{P}, \mathbf{C}^*$ e $\mathbf{P}^*$	- Matrizes auxiliares para o cálculo da matriz tangente associada ao estatuto de contacto aderente
$Da$	- Incremento da grandeza genérica $a$ linearizado em relação a $\mathbf{u}$ entre as configurações $C^{[N,j]}$ e $C^{[N,j+1]}$
$\Delta\varepsilon_{\text{max}}$	- Valor máximo admissível para o incremento das deformações principais (definido pelo utilizador)
$\Delta\omega_{\text{max}}$	- Valor máximo admissível para a norma das rotações incrementais (definido pelo utilizador)
"EPmod"	- Estratégia numérica que define a iteração para a introdução do módulo elastoplástico consistente
$\mathbf{E}, \mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{M}^*$ e $\mathbf{N}^*$	- Matrizes auxiliares para o cálculo da matriz tangente associada ao estatuto de contacto com escorregamento
$\mathcal{J}$	- Matriz tangente ou jacobiana

" <i>NTrialNST</i> "	- Estratégia numérica que avalia a necessidade de determinar uma nova configuração tangente explícita
$r_{ct}$	- Coeficiente positivo de redução do tamanho do incremento de carga que depende da penetração da ferramenta, na configuração de ensaio
$r_{fase}$	- Coeficiente positivo de redução do tamanho do incremento de carga que depende da ocorrência de uma eventual mudança de fase
$r_{min}$	- Coeficiente óptimo para a redução do tamanho do incremento de carga, $r_{min} \in [r_{inf}, r_{sup}]$
$r_{out}$	- Coeficiente positivo de redução do tamanho do incremento de carga que depende da frequência de saída de resultados durante a simulação
$r_{\varepsilon}$	- Coeficiente positivo de redução do tamanho do incremento de carga que depende do incremento de deformação, na configuração de ensaio
$r_{\sigma}$	- Coeficiente positivo de redução do tamanho do incremento de carga que depende do incremento de tensão, na configuração de ensaio
$r_{\omega}$	- Coeficiente positivo de redução do tamanho do incremento de carga que depende do incremento de rotação, na configuração de ensaio
$\mathcal{R}$	- Vector resíduo do método iterativo de Newton-Raphson
$\bar{\sigma}_T$	- Tensão equivalente correspondente ao estado de tensão de ensaio
<i>TOLEQ</i>	- Tolerância para a critério de convergência $C^{crit}$ (definida pelo utilizador)
" <i>UPlevel</i> "	- Estratégia numérica que define a necessidade de recorrer a um aumento do nível de pré-condicionamento do sistema de equações lineares
$\zeta$	- Parâmetro de estabilização do método de Newton-Raphson modificado

## A.10 Siglas e Abreviaturas

3DS	- Referente à contracção da designação do projecto <i>Digital Die Design System</i>
CAD	- Concepção assistida por computador. Contracção de <i>Computer Aided Design</i>
DD3	- Família de programas
DD3IMP	- Contracção de <i>Deep Drawing 3D IMPLICIT code</i>
DD3LT	- Contracção de <i>Deep Drawing 3D Learning and Teaching</i>
DD3MAT	- Contracção de <i>Deep Drawing 3D MATerials parameters identification</i>
DD3OSS	- Contracção de <i>Deep Drawing 3D One Step Springback</i>
DD3TRIM	- Contracção de <i>Deep Drawing 3D TRIMming</i>

## Anexo B

# Parâmetro de Penalidade Único

### B.1 Operador de Contacto com Atrito

Para determinar o operador de contacto com atrito é necessário impor a condição de estacionaridade ao lagrangeano aumentado associado. Para o contacto unilateral o lagrangeano aumentado pode ser definido pela expressão (5.21). Por definição

$$\text{dist}[z, C] = \|z - \text{proj}_C(z)\|, \quad (\text{B.1})$$

em que  $\text{proj}_C(z)$  é a projecção de  $z$  em  $C$ , ou seja, é o ponto mais próximo de  $z$  que pertence a  $C$ . Quando  $C$  é um cone convexo centrado na origem (por exemplo,  $\mathbb{R}_+^C$ ) as projecções em  $C$  e no seu cone polar  $C^0$  (no exemplo,  $\mathbb{R}_-^C$ ) satisfazem [Heegaard e Curnier 1993]

$$z = \text{proj}_C(z) + \text{proj}_{C^0}(z). \quad (\text{B.2})$$

Como

$$\nabla_z \left( \frac{1}{2} \|z\|^2 \right) = z, \quad \text{então} \quad \nabla_z \left( \frac{1}{2} \text{dist}^2[z, C] \right) = \text{proj}_{C^0}(z). \quad (\text{B.3})$$

Logo, para o problema de contacto unilateral, a determinação do ponto-sela  $(\mathbf{u}, \lambda^n)$  implica a verificação da condição definida na expressão (5.25), uma vez que

$$\nabla_{\mathbf{u}} [d^n(\mathbf{u})] = \mathbf{n}. \quad (\text{B.4})$$

O lagrangeano aumentado associado ao problema de contacto unilateral também pode ser definido pela expressão (5.22), o que conduz à seguinte condição para a determinação do ponto-sela  $(\mathbf{u}, \lambda^n)$ :

$$\left[ \nabla_{\mathbf{v}}, \nabla_{\gamma^n} \right] L_r(\mathbf{u}, \lambda^n) = \begin{cases} \nabla_{\mathbf{u}} \Phi(\mathbf{u}) + \left\{ \lambda^n + r d^n(\mathbf{u}) - \text{proj}_{\mathbb{R}^+} \left[ \lambda^n + r d^n(\mathbf{u}) \right] \right\} \mathbf{n} = \mathbf{0} \\ d^n(\mathbf{u}) - \frac{1}{r} \text{proj}_{\mathbb{R}^+} \left[ \lambda^n + r d^n(\mathbf{u}) \right] = 0 \end{cases}. \quad (\text{B.5})$$

Apesar das expressões serem formalmente diferentes conduzem, para um ponto potencial de contacto, ao mesmo operador de contacto (ver expressão (5.27)).

Para o problema de atrito puro o lagrangeano aumentado é definido pela expressão (5.28). No entanto, para definir a condição de estacionaridade em função da projecção no convexo para o qual são conhecidas as expressões analíticas de  $C$ , admite-se a existência de um convexo  $C_+$  para definir o lagrangeano aumentado [Heegaard e Curnier 1993]:

$$L_r(\mathbf{v}, \gamma^t) = \Phi(\mathbf{v}) - \frac{1}{2r} \|\gamma^t\|^2 + \frac{1}{2r} \text{dist}^2[\gamma^t + r\delta^t(\mathbf{v}), C_+]. \quad (\text{B.6})$$

Para determinar o operador de contacto com atrito puro é necessário determinar

$$\nabla_{\mathbf{u}} [\boldsymbol{\delta}^t(\mathbf{u})] = \nabla_{\mathbf{u}} [\boldsymbol{\delta} - (\boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] = \mathbf{I} - \mathbf{n} \mathbf{n}^T, \quad (\text{B.7})$$

e

$$\nabla_{\lambda} [\boldsymbol{\lambda}^t] = \nabla_{\lambda} [\boldsymbol{\lambda} - (\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] = \mathbf{I} - \mathbf{n} \mathbf{n}^T. \quad (\text{B.8})$$

Como  $(\mathbf{n} \mathbf{n}^T) \mathbf{t} = (\mathbf{n}^T \mathbf{t}) \mathbf{n} = \mathbf{0}$  o operador de contacto com atrito puro é o definido na expressão (5.29).

Finalmente, para o problema acoplado de contacto com atrito o *quasi-lagrangeano* aumentado é definido pela expressão (5.35). Novamente, admite-se a existência de um convexo  $C_+^{\text{aum}}$  que permite definir o *quasi-lagrangeano* aumentado

$$\begin{aligned} L_r(\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}) = & \Phi(\mathbf{v}) - \frac{1}{2r} \|\boldsymbol{\gamma}^n\|^2 + \frac{1}{2r} \text{dist}^2[\boldsymbol{\gamma}^n + r d^n(\mathbf{v}), \mathbb{R}^+] \\ & - \frac{1}{2r} \|\boldsymbol{\gamma}^t\|^2 - \frac{1}{2r} \text{dist}^2[\boldsymbol{\gamma}^t + r \boldsymbol{\delta}^t(\mathbf{v}), C_+^{\text{aum}}]. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Como  $\nabla_{\lambda} [\boldsymbol{\lambda}^n] = \nabla_{\lambda} [\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n}] = \mathbf{n}$  e  $(\mathbf{n} \mathbf{n}^T) \mathbf{t} = (\mathbf{n}^T \mathbf{t}) \mathbf{n} = \mathbf{0}$ , o operador de contacto com atrito  $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  é o definido na expressão (5.42).

## B.2 Matrizes Jacobianas

Para o estatuto de contacto *gap* o operador de contacto com atrito simplifica-se para:

$$\mathbf{F}^{\text{equi}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \Big|_{\text{gap}} = [\mathbf{0} \mathbf{n}(\mathbf{u}) + \text{proj}_{C\{0\}}[\boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})]] = [\mathbf{0}], \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{F}^{\text{sup}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \Big|_{\text{gap}} = \left[ -\frac{1}{r} [\boldsymbol{\lambda}^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{0}] \mathbf{n}(\mathbf{u}) - \frac{1}{r} [\boldsymbol{\lambda}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{0}] \right] = \left[ -\frac{1}{r} \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \right]. \quad (\text{B.11})$$

Para o estatuto de contacto *stick* o operador de contacto com atrito é igual a

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{equi}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \Big|_{\text{stick}} &= [\boldsymbol{\lambda}^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) + r d^n(\mathbf{u})] \mathbf{n}(\mathbf{u}) + [\boldsymbol{\lambda}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) + r \boldsymbol{\delta}^t(\mathbf{u})] \\ &= [\boldsymbol{\sigma}^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \mathbf{n}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})], \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{sup}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \Big|_{\text{stick}} &= -\frac{1}{r} [r d^n(\mathbf{u})] \mathbf{n}(\mathbf{u}) - \frac{1}{r} [\boldsymbol{\lambda}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{\lambda}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) - r \boldsymbol{\delta}^t(\mathbf{u})] \\ &= [d^n(\mathbf{u}) \mathbf{n}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\delta}^t(\mathbf{u})]. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Admitindo a simplificação correspondente a aproximar  $d^n \cong \boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{n}$ , o operador de contacto com atrito para o estatuto de contacto *stick* toma a forma

$$\mathbf{F}^{\text{equi}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \Big|_{\text{stick}} = [(\boldsymbol{\lambda}^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) + r \boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u})) \mathbf{n}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})] = [\boldsymbol{\lambda} + r \boldsymbol{\delta}(\mathbf{u})], \quad (\text{B.14})$$

$$\mathbf{F}^{\text{sup}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \Big|_{\text{stick}} = [(\boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u})) \mathbf{n}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\delta}^t(\mathbf{u})] = [\boldsymbol{\delta}(\mathbf{u})]. \quad (\text{B.15})$$

Finalmente, para o estatuto de contacto *slip* tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{equi}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \Big|_{\text{slip}} &= \left[ [\boldsymbol{\lambda}^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) + r d^n(\mathbf{u})] \mathbf{n}(\mathbf{u}) + \left[ -\mu \boldsymbol{\sigma}^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \frac{\boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})}{\|\boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})\|} \right] \right] \\ &= [\boldsymbol{\sigma}^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) [\mathbf{n}(\mathbf{u}) - \mu \mathbf{t}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})]], \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$



$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{sup}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \Big|_{\text{slip}} &= -\frac{1}{r} \left[ rd^n(\mathbf{u}) \right] \mathbf{n}(\mathbf{u}) - \frac{1}{r} \left[ \boldsymbol{\lambda}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) + \mu \boldsymbol{\sigma}^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \frac{\boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})}{\|\boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})\|} \right] \\ &= \left[ d^n(\mathbf{u}) \mathbf{n}(\mathbf{u}) - \frac{1}{r} \left[ \boldsymbol{\lambda}^t(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) + \mu \boldsymbol{\sigma}^n(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \mathbf{t}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \right] \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

A determinação das matrizes jacobianas associadas a cada estatuto de contacto envolve o cálculo prévio dos seguintes gradientes:

$$\begin{aligned} \nabla_{u_j} [\delta_i^t] &= \nabla_{u_j} [\delta_i - \delta_k n_k n_i] = I_{ij} - n_j n_i - \delta_k n_i \nabla_{u_j} n_k - \delta_k n_k \nabla_{u_j} n_i \\ &= I_{ij} - n_j n_i - [\delta_k n_i + \delta_p n_p I_{ik}] \nabla_{u_j} n_k, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} \nabla_{u_j} [t_i] &= \nabla_{u_j} \left[ \frac{\sigma_i^t}{\|\sigma_i^t\|} \right] = \frac{1}{\|\sigma_i^t\|} [1 - t_i t_j] \nabla_{u_j} [\lambda_i - \lambda_k n_k n_i + r \delta_i^t] \\ &= \frac{r}{\|\sigma_i^t\|} [I_{ij} - n_i n_j - t_i t_j] + \frac{1}{\|\sigma_i^t\|} [(\lambda_p + r \delta_p) n_p (t_i t_k - I_{ik}) \\ &\quad - (\lambda_k + r \delta_k) n_k] \nabla_{u_j} n_k, \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda_j} [t_i] &= \nabla_{\lambda_j} \left[ \frac{\sigma_i^t}{\|\sigma_i^t\|} \right] = \frac{1}{\|\sigma_i^t\|} [1 - t_i t_j] \nabla_{\lambda_j} [\lambda_i - \lambda_k n_k n_i + r \delta_i^t] \\ &= \frac{1}{\|\sigma_i^t\|} [I_{ij} - n_i n_j - t_i t_j]. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Tem-se então que:

### Estatuto *Gap*

$$\nabla_{u_j} F_i^{\text{equi}} = \nabla_{u_j} [0_i] = 0_{ij} \quad \text{e} \quad \nabla_{\lambda_j} F_i^{\text{equi}} = \nabla_{\lambda_j} [0_i] = 0_{ij}; \quad (\text{B.21})$$

$$\nabla_{u_j} F_i^{\text{sup}} = \nabla_{u_j} \left[ -\frac{1}{r} \lambda_i \right] = 0_{ij} \quad \text{e} \quad \nabla_{\lambda_j} F_i^{\text{sup}} = \nabla_{\lambda_j} \left[ -\frac{1}{r} \lambda_i \right] = -\frac{1}{r} I_{ij}. \quad (\text{B.22})$$

### Estatuto *Stick*

Caso não se considere a simplificação:

$$\begin{aligned} \nabla_{u_j} F_i^{\text{equi}} &= \nabla_{u_j} \left[ (\lambda_k n_k + rd^n) n_i + (\lambda_i - \lambda_k n_k n_i + r \delta_i^t) \right] \\ &= r [I_{ij} - n_i n_j + n_i \nabla_{u_j} d^n] + r [(d^n - \delta_p n_p) I_{ik} - \delta_k n_i] \nabla_{u_j} n_k, \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$\nabla_{\lambda_j} F_i^{\text{equi}} = \nabla_{\lambda_j} [\lambda_i + rd^n n_i + r \delta_i^t] = I_{ij}, \quad (\text{B.24})$$

$$\nabla_{u_j} F_i^{\text{sup}} = \nabla_{u_j} [d^n n_i + \delta_i^t] = [I_{ij} - n_i n_j + n_i \nabla_{u_j} d^n] + [(d^n - \delta_p n_p) I_{ik} - \delta_k n_i] \nabla_{u_j} n_k, \quad (\text{B.25})$$

$$\nabla_{\lambda_j} F_i^{\text{sup}} = \nabla_{\lambda_j} [d^n n_i + \delta_i^t] = 0_{ij}. \quad (\text{B.26})$$

Admitindo a simplificação ao operador de contacto com atrito, obtém-se:

$$\nabla_{u_j} F_i^{\text{equi}} = \nabla_{u_j} [\lambda_i + r \delta_i] = r I_{ij} \quad \text{e} \quad \nabla_{\lambda_j} F_i^{\text{equi}} = \nabla_{\lambda_j} [(\lambda_i + r \delta_i)] = I_{ij}; \quad (\text{B.27})$$

$$\nabla_{u_j} F_i^{\text{sup}} = \nabla_{u_j} [\delta_i] = I_{ij} \quad \text{e} \quad \nabla_{\lambda_j} F_i^{\text{sup}} = \nabla_{\lambda_j} [\delta_i] = 0_{ij}. \quad (\text{B.28})$$

### Estatuto *Slip*

$$\begin{aligned} \nabla_{u_j} F_i^{\text{equi}} &= \nabla_{u_j} [\lambda_k n_k n_i + rd^n n_i - \mu \lambda_k n_k t_i - \mu rd^n t_i] \\ &= r[n_i - \mu t_i] \nabla_{u_j} d^n - \frac{r \mu \sigma^n}{\|\sigma_i^t\|} [I_{ij} - n_i n_j - t_i t_j] + [\sigma^n I_{ik} + \lambda_k [n_i - \mu t_i] \\ &\quad + \frac{\mu \sigma^n}{\|\sigma_i^t\|} [(\lambda_k + r \delta_k) n_i - (\lambda_p + r \delta_p) n_p (t_i t_k - I_{ik})]] \nabla_{u_j} n_k, \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda_j} F_i^{\text{equi}} &= \nabla_{\lambda_j} [\lambda_k n_k n_i + rd^n n_i - \mu \lambda_k n_k t_i - \mu rd^n t_i] \\ &= [n_i - \mu t_i] n_j - \frac{\mu \sigma^n}{\|\sigma_i^t\|} [I_{ij} - n_i n_j - t_i t_j], \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

$$\begin{aligned} \nabla_{u_j} F_i^{\text{sup}} &= \nabla_{u_j} \left[ \frac{-\lambda_i + \sigma^n (n_i - \mu t_i)}{r} \right] = [n_i - \mu t_i] \nabla_{u_j} d^n - \frac{\mu \sigma^n}{\|\sigma_i^t\|} [I_{ij} - n_i n_j - t_i t_j] \\ &\quad + \frac{1}{r} [\sigma^n I_{ik} + \lambda_k [n_i - \mu t_i] \\ &\quad + \frac{\mu \sigma^n}{\|\sigma_i^t\|} [(\lambda_k + r \delta_k) n_i - (\lambda_p + r \delta_p) n_p (t_i t_k - I_{ik})]] \nabla_{u_j} n_k, \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda_j} F_i^{\text{sup}} &= \nabla_{\lambda_j} \left[ \frac{-\lambda_i + \sigma^n (n_i - \mu t_i)}{r} \right] = \frac{1}{r} [n_i - \mu t_i] n_j \\ &\quad - \frac{\mu \sigma^n}{r \|\sigma_i^t\|} [I_{ij} - n_i n_j - t_i t_j] - \frac{1}{r} I_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

## B.3 Sistema de Equações Lineares Global Misto

Nesta secção apresenta-se o sistema de equações lineares global misto definido na expressão (5.61), em função do estatuto de contacto do nó  $A$ :

### Estatuto *Gap*

$$\begin{cases} [K_{AB}]_{ij} \{du_B\}_j = \{df_A\}_i \\ \{d\lambda_A\}_j = -\{\lambda_A\}_i \end{cases}. \quad (\text{B.33})$$

A primeira equação traduz o equilíbrio do nó e a segunda garante que a força de contacto é nula.

### Estatuto *Stick*

Caso não se admita a simplificação no operador de contacto com atrito o sistema de equações lineares global obtido é dado por

$$\begin{cases} [K_{AB}]_{ij} \{du_B\}_j + \{d\lambda_A\}_i = \{df_A\}_i - \{\lambda_A\}_i \\ \left[ P_{ij} + C_{ik} \nabla_{u_j} n_k \right]_A \{du_A\}_j = -r \left\{ (d^n n + \delta^t)_A \right\}_i \end{cases} \quad (B.34)$$

Admitindo a simplificação proposta para o operador de contacto, o sistema de equações lineares global misto é dado por

$$\begin{cases} [K_{AB}]_{ij} \{du_B\}_j + \{d\lambda_A\}_i = \{df_A\}_i - \{\lambda_A\}_i \\ \{du_A\}_i = -\{\delta_A\}_i \end{cases} \quad (B.35)$$

Em ambos os casos a primeira equação permite avaliar a força de contacto, em função do equilíbrio dos nós adjacentes. A segunda equação permite o cálculo do vector deslocamento do nó  $A$ , que é conhecido uma vez que o estatuto é *stick*. A comparação entre os dois sistemas evidencia o facto da simplificação introduzida alterar a correcção ao incremento de deslocamento do nó de estatuto de contacto aderente.

#### Estatuto *Slip*

$$\begin{cases} [K_{AB}]_{ij} \{du_B\}_j + [rM_{ij} + N_{ik} \nabla_{u_j} n_k]_A \{du_A\}_j + [E_{ij}]_A \{d\lambda_A\}_j \\ \qquad \qquad \qquad = \{df_A\}_i - \{\sigma^n (n - \mu t)_A\}_i \\ \left[ rM_{ij} + N_{ik} \nabla_{u_j} n_k \right]_{ij} \{du_A\}_j + [(E_{ij} - I_{ij})]_{ij} \{d\lambda_A\}_j \\ \qquad \qquad \qquad = -\{-\lambda_A + \sigma^n (n - \mu t)_A\}_i \end{cases} \quad (B.36)$$

### B.4 Sistema de Equações Lineares Global Reduzido

O sistema de equações lineares global misto definido na expressão (5.61) é equivalente ao sistema de equações lineares global reduzido definido por [Menezes 1995]

$$\begin{cases} [K_{AB}^{\text{red}}]_{ij} \{du_B\}_j = \{\mathcal{F}_A^{\text{red}}\}_i \\ \{d\lambda_A\} = f(\mathbf{du}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -[B_A]_{ik} [K_{AB}]_{kj} \{du_B\}_j + [A_A]_{ij} \{du_A\}_j = \{\mathcal{F}_A^*\}_i \\ \{d\lambda_A\}_i = \{\mathcal{F}_A^{**}\}_i - [K_{AB}]_{ij} \{du_B\}_j \end{cases} \quad (B.37)$$

De seguida apresenta-se o sistema de equações lineares global reduzido obtido em função do estatuto de contacto do nó  $A$ :

#### Estatuto *Gap*

$$\begin{cases} [K_{AB}]_{ij} \{du_B\}_j = \{df_A\}_i \\ \{d\lambda_A\}_j = -\{\lambda_A\}_i \end{cases} \quad (B.38)$$

que corresponde ao sistema de equações lineares global misto apresentado na expressão (B.33), uma vez que para este estatuto de contacto apenas é necessário determinar o vector de deslocamento.

#### Estatuto *Stick*

Caso não se considere a simplificação do operador de contacto com atrito o sistema de equações lineares global reduzido é dado por:

$$\begin{cases} \left[ P_{ij} + C_{ik} \nabla_{u_j} n_k \right]_{ij} \{du_A\}_j = -r \left\{ (d^n n + \delta^t)_A \right\}_i, \\ \{d\lambda_A\}_j = \{df_A - \lambda_A\}_i - [K_{AB}]_{ij} \{du_B\}_j \end{cases}, \quad (\text{B.39})$$

que corresponde ao sistema de equações lineares global misto apresentado na expressão (B.34). Admitindo a simplificação para o estatuto de contacto *stick*:

$$\begin{cases} -[0]_{ik} [K_{AB}]_{kj} \{du_B\}_j + r [I]_{ij} \{du_A\}_j = -r \{\delta_A\}_i \\ \{d\lambda_A\}_i = \{df_A - \lambda_A\}_i - [K_{AB}]_{ij} \{du_B\}_j \end{cases}. \quad (\text{B.40})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \{du_A\}_i = -\{\delta_A\}_i \\ \{d\lambda_A\}_j = \{df_A - \lambda_A\}_i - [K_{AB}]_{ij} \{du_B\}_j \end{cases}$$

Também este é idêntico ao sistema de equações lineares global misto apresentado na expressão (B.35), uma vez que para este estatuto de contacto apenas é necessário determinar o vector de forças de contacto.

### **Estatuto *Slip***

Finalmente, para o estatuto de contacto *slip* o sistema de equações lineares reduzido é dado por:

$$\begin{cases} -[(E_{ik} - I_{ik})]_A [K_{AB}]_{kj} \{du_B\}_j + [rM_{ij} + N_{ik} \nabla_{u_j} n_k]_A \{du_A\}_j \\ \quad = \{\lambda_A - \sigma^n (n - \mu t)_A\}_i - [(E_{ik} - I_{ik})]_A \{df_A - \lambda_A\}_i. \\ \{d\lambda_A\}_i = \{df_A - \lambda_A\}_i - [K_{AB}]_{kj} \{du_B\}_j \end{cases}. \quad (\text{B.41})$$

## Anexo C

# Parâmetro de Penalidade Variável para cada Nó de Contacto

### C.1 Algoritmo Baseado na Força Normal de Contacto

Para estudar a influência do valor do parâmetro de penalidade  $r$  na regularização proposta pelo método do lagrangeano aumentado, analisa-se o sistema composto por um único nó em contacto, modelado pelo oscilador apresentado na Figura 6.1. O sistema de equações a resolver para obter a solução de equilíbrio do problema é o definido na expressão (6.5). A função do comportamento material elástico linear-plástico do nó é definida da seguinte forma:

$$S(u) = \begin{cases} -S_0 - k(u - u_0) & u < -u_0 \\ (K + k)u & u \in [-u_0, u_0] \\ S_0 + k(u - u_0) & u > u_0 \end{cases}. \quad (\text{C.1})$$

O estudo do comportamento do método iterativo de Newton-Raphson é realizado com base na análise directa do operador de contacto  $F(u, \lambda)$  [Alart 1997]. Este apresenta nove zonas de linearidade no plano  $(u, f^t)$  (ver Figura 6.2). As nove regiões correspondem a idênticos estatutos de contacto e comportamento do material (4 cones, 4 bandas e 1 quadrilátero). Devido à dificuldade de representar num gráfico uma aplicação de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ , sobrepõe-se ao plano  $(u, f^t)$  o plano  $(u, \lambda)$ . No plano  $(u, \lambda)$  segue-se o percurso eventual das iterações do método de Newton-Raphson. Neste estudo,  $\lambda$  corresponde à componente tangencial da força de contacto ao longo do processo iterativo. A componente normal da força de contacto ao longo do processo iterativo  $\lambda^n$  é considerada igual a  $f^n$ .

A instabilidade fundamental a evitar corresponde aos ciclos consecutivos entre as regiões  $(P+, S+)$  e  $(P-, S-)$  [Alart 1997]. Da análise da Figura 6.2 observa-se que um valor suficientemente baixo do parâmetro de penalidade permite minimizar a ocorrência da instabilidade fundamental.

Considere-se a solução inicial situada na zona  $(P+, S+)$  de coordenadas  $(u^0, \lambda^0)$ . Admitindo que a solução correcta corresponde a  $f^t = 0$  é possível determinar graficamente a iteração seguinte  $(u^1, \lambda^1)$ . Para o valor de parâmetro de penalidade  $r$  utilizado na figura, essa solução pertence à região  $(P-, S-)$ . A determinação do valor máximo que o parâmetro de penalidade  $r$  pode tomar sem que a solução  $(u^1, \lambda^1)$  pertença à região  $(P-, S-)$  requer o cálculo da ordenada  $u^1$  desse ponto. Para tal, define-se a recta que contém o ponto  $(u_0, \mu f^n + S_0)$  e declive  $k$ ,

$$f(u) = \mu f^n + S_0 + k(u - u_0). \quad (\text{C.2})$$

Uma vez que se admite que  $f^t = 0$ , para que a solução correcta corresponda ao estatuto de contacto aderente, então

$$f(u^1) = 0 \Leftrightarrow u^1 = u_0 - \frac{\mu f^n + S_0}{k}. \quad (\text{C.3})$$

Como por definição  $u_0 = S_0/K + k$ , o multiplicador aumentado toma neste ponto o valor:

$$\lambda^1 + ru^1 = \lambda^1 + r \left( \frac{S_0}{K+k} - \frac{\mu f^n + S_0}{k} \right). \quad (\text{C.4})$$

Para que o ponto  $(u^1, \lambda^1)$  pertença à região  $(P-, A)$  é necessário impor que

$$\lambda^1 + ru^1 \geq -\mu f^n, \quad (\text{C.5})$$

e que a força de contacto tangencial  $\lambda^1$  atinja no máximo o valor de  $\mu f^n$ . Substituindo na inequação (C.5) os valores de  $\lambda^1$  e  $u^1$ , obtém-se o valor máximo admissível para o parâmetro de penalidade

$$r \leq \frac{2k}{1 + \frac{S_0 K}{\mu f^n (K+k)}}. \quad (\text{C.6})$$

Esta equação define a condição a impor ao parâmetro de penalidade  $r$  de modo a prevenir instabilidades associadas a soluções consecutivas com vectores de escorregamento opostos, em torno da posição de equilíbrio. Esta condição é válida para nós que apresentem força de contacto negativa, ou seja, estejam em contacto com o obstáculo. Esta estimativa do parâmetro de penalidade é muito exigente para pontos em contacto com força normal de contacto próxima de zero, uma vez que conduz a parâmetros de penalidade muito pequenos. Estas condições de contacto ocorrem com frequência na zona de contacto plano entre o corpo deformável e o cerra-chapas e a matriz, bem como nas zonas de contacto com o punção na fase em que se inicia o escorregamento no cerra-chapas [Alart 1997].

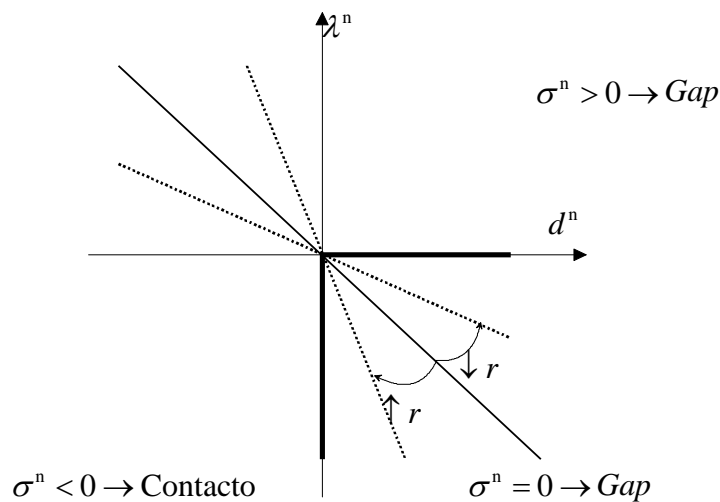


Figura C.1 – Influência do parâmetro de penalidade na linearização da condição de contacto unilateral.

A alteração do parâmetro de penalidade no ciclo iterativo modifica a linearização da condição de contacto com atrito, mas também a condição de contacto unilateral como se mostra na Figura C.1. Ao reduzir o valor do parâmetro de penalidade constata-se que se admitem nós em contacto para valores de distância normal mais positivos, mas deixam de considerar-se alguns nós que apresentam distâncias normais negativas e forças de

contacto positivas. Pelo contrário, ao aumentar o parâmetro de penalidade admitem-se nós em contacto apenas para menores valores de distância normal, mas consideram-se em contacto nós que apresentam distâncias normais negativas e forças de contacto positivas mais elevadas.

## C.2 Algoritmo Baseado na Força e Distância Normais de Contacto

No estudo realizado na secção anterior admite-se que o nó em análise está em contacto com uma força normal conhecida  $f^n$ . No entanto, ao longo do processo iterativo esta força normal de contacto não é constante, mas determinada pela componente normal do multiplicador aumentado. Substituindo na dedução anterior  $f^n$  pelo valor da componente normal do multiplicador aumentado  $\sigma^n = \lambda^n + rd^n$ , considera-se de forma acoplada o valor do parâmetro de penalidade que controla a distância normal de contacto e o vector de escorregamento. Nestas circunstâncias, a dedução do valor máximo do parâmetro de penalidade que evite a instabilidade fundamental associada aos ciclos consecutivos entre as regiões  $(P+, S+)$  e  $(P-, S-)$  procede do mesmo modo. O primeiro passo é o cálculo da coordenada de  $u^1$  correspondente à primeira solução do procedimento iterativo. Neste caso a recta que contém o ponto  $(u_0, \mu\sigma^n + S_0)$  e declive  $k$  é dada por

$$f(u) = \mu\sigma^n + S_0 + k(u - u_0). \quad (C.7)$$

Como para que o estatuto correcto seja o aderente é necessário impor que  $f^1 = 0$ , ou seja,

$$f(u^1) = 0 \Leftrightarrow u^1 = \frac{S_0}{K+k} - \frac{\mu\sigma^n + S_0}{k}, \quad (C.8)$$

em que se recorre à definição de  $u_0 = S_0/K + k$ . Substituindo este valor no multiplicador aumentado correspondente à componente tangencial,

$$\lambda^1 + ru^1 = \lambda^1 + r \left( \frac{S_0}{K+k} - \frac{\mu\sigma^n + S_0}{k} \right). \quad (C.9)$$

A instabilidade fundamental é evitada obrigando esta iteração a localizar-se na região  $(P-, A)$ , ou seja a apresentar estatuto aderente. Para tal é necessário impor que

$$\lambda^1 + ru^1 \geq -\mu\sigma^n, \quad (C.10)$$

em que a força de contacto tangencial  $\lambda^1$  toma no máximo o valor de  $\mu\sigma^n$ . Ao impor esta condição obtém-se uma inequação para a definição do valor máximo do parâmetro de penalidade idêntica à anterior, mas em que  $f^n$  é substituída pela componente normal do multiplicador aumentado.

$$r \leq \frac{2k}{1 + \frac{S_0 K}{\mu\sigma^n (K+k)}}. \quad (C.11)$$

Ou seja, a imposição sobre o valor de  $r$  para evitar a instabilidade fundamental é idêntica à obtida anteriormente. No entanto, ao substituir  $\sigma^n$  pela sua definição a condição obtida para o valor do parâmetro de penalidade é a função quadrática (6.9).

Esta expressão permite controlar nós cuja componente normal do multiplicador aumentado seja inferior a zero, ou seja, permitir controlar mais situações do que a anterior. De seguida analisam-se alguns casos particulares da inequação (6.9). Para um nó

que apresente distância normal de contacto  $d^n = 0$  a equação (6.9) resume-se a uma recta, pelo que a condição a impor ao parâmetro de penalidade reduz-se a

$$r \left( \frac{S_0 K}{(K+k)k} + \frac{\mu \lambda^n}{k} \right) - 2\mu \lambda^n \leq 0 \Leftrightarrow r \leq \frac{2\mu \lambda^n}{1 + \frac{S_0 K}{\mu \lambda^n (K+k)}}. \quad (\text{C.12})$$

Ou seja, recupera-se a expressão deduzida na secção anterior, o que parece confirmar que essa expressão deduzida é válida apenas para nós que apresentam distâncias normais de contacto nulas.

Outro caso particular ocorre para nós com força normal de contacto  $\lambda^n = 0$ . Nesse caso a equação (6.9) simplifica-se para

$$r^2 \frac{\mu d^n}{k} + r \left( \frac{S_0 K}{(K+k)k} - 2\mu d^n \right) \leq 0. \quad (\text{C.13})$$

Uma das raízes desta equação corresponde ao parâmetro de penalidade nulo, solução que não é admissível. A outra raiz é dada por

$$r = -\frac{S_0 K}{\mu d^n (K+k)} + 2k. \quad (\text{C.14})$$

Esta expressão é obtida na hipótese de a força normal de contacto ser nula. Logo, o nó só está em contacto se apresentar distância normal de contacto negativa. Assim, apesar do sinal negativo no primeiro termo da expressão esta conduz sempre a valores positivos para o parâmetro de penalidade. No entanto, esta expressão resulta em parâmetros de penalidade muito elevados para distâncias normais de contacto próximas de zero, pois a expressão apresenta uma assíntota para  $d^n = 0$ . Mesmo para força de contacto nulas a expressão conduz ao valor limite

$$\lim_{d^n \rightarrow -\infty} -\frac{S_0 K}{\mu d^n (K+k)} + 2k = 2k. \quad (\text{C.15})$$

Tal parece indicar que este deve ser o valor máximo a atribuir por defeito aos nós que, eventualmente, estabelecem contacto.



## Anexo D

# Parâmetro de Penalidade Distinto para as Condições de Contacto Unilateral e de Contacto com Atrito

### D.1 Operador de Contacto com Atrito

O recurso a parâmetro de penalidade distintos para o controlo do contacto unilateral e do contacto com atrito obriga a determinar as matrizes jacobianas associadas aos diferentes estatutos de contacto. A utilização de diferentes parâmetros de penalidade para cada uma das componentes do multiplicador aumentado impede algumas das simplificações utilizadas anteriormente. Deste modo, é necessário partir da definição do operador de contacto com atrito dada na expressão (6.15), bem como da nova definição do multiplicador aumentado (ver expressão (6.16)). O operador contacto com atrito para o estatuto de contacto *gap* passa a ser definido por:

$$\mathbf{F}^{\text{equi}}(\mathbf{u}, \lambda) \Big|_{\text{gap}} = \left[ \text{proj}_{C\{0\}} \left[ \boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{u}, \lambda) \right] \right] = [\mathbf{0}], \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{sup}}(\mathbf{u}, \lambda) \Big|_{\text{gap}} &= \left[ -\frac{1}{r^n} \left[ \lambda^n(\mathbf{u}, \lambda) \right] \mathbf{n}(\mathbf{u}) - \frac{1}{r^t} \left[ \lambda^t(\mathbf{u}, \lambda) \right] \right] \\ &= \left[ -\frac{1}{r^n} \lambda^n(\mathbf{u}, \lambda) \mathbf{n}(\mathbf{u}) - \frac{1}{r^t} \lambda^t(\mathbf{u}, \lambda) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Para o estatuto de contacto *stick* a definição é a apresentada na equação (B.33). Caso se adopte a simplificação, em que se considera que  $d^n \cong \boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{n}$ , o operador de contacto com atrito passa a ser definido por:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{equi}}(\mathbf{u}, \lambda) \Big|_{\text{stick}} &= \left[ \left( \lambda^n(\mathbf{u}, \lambda) + r^n \boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u}) \right) \mathbf{n}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{u}, \lambda) \right] \\ &= \lambda(\mathbf{u}, \lambda) + r^n \left( \boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u}) \right) \mathbf{n}(\mathbf{u}) + r^t \boldsymbol{\delta}^t(\mathbf{u}), \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

$$\mathbf{F}^{\text{sup}}(\mathbf{u}, \lambda) \Big|_{\text{stick}} = \left[ \left( \boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u}) \right) \mathbf{n}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\delta}^t(\mathbf{u}) \right] = \left[ \boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}) \right]. \quad (\text{D.4})$$

Finalmente, para o estatuto de contacto *slip*:

$$\mathbf{F}^{\text{equi}}(\mathbf{u}, \lambda) \Big|_{\text{slip}} = \left[ \sigma^n(\mathbf{u}, \lambda) \left[ \mathbf{n}(\mathbf{u}) - \mu \mathbf{t}(\mathbf{u}, \lambda) \right] \right], \quad (\text{D.5})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{sup}}(\mathbf{u}, \lambda) \Big|_{\text{slip}} &= -\frac{1}{r^n} \left[ r^n d^n(\mathbf{u}) \right] \mathbf{n}(\mathbf{u}) - \frac{1}{r^t} \left[ \lambda^t(\mathbf{u}, \lambda) + \mu \sigma^n(\mathbf{u}, \lambda) \frac{\boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{u}, \lambda)}{\|\boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{u}, \lambda)\|} \right] \\ &= d^n \mathbf{n}(\mathbf{u}) - \frac{1}{r^t} \left[ \lambda^t(\mathbf{u}, \lambda) + \mu \sigma^n(\mathbf{u}, \lambda) \mathbf{t}(\mathbf{u}, \lambda) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

## D.2 Matrizes Jacobianas

A determinação das matrizes jacobianas associadas a cada um dos estatutos de contacto envolve o cálculo prévio dos gradientes  $\nabla_{u_j} [\delta_i^t]$ ,  $\nabla_{u_j} [t_i]$  e  $\nabla_{\lambda_j} [t_i]$ . Com a introdução dos parâmetros de penalidade distintos o único gradiente que se altera em relação aos definidos no Anexo B é

$$\begin{aligned} \nabla_{u_j} [t_i] &= \nabla_{u_j} \left[ \frac{\sigma_i^t}{\|\sigma_i^t\|} \right] = [1 - t_i t_j] \frac{1}{\|\sigma_i^t\|} + \nabla_{u_j} [\lambda_i - \lambda_k n_k n_i + r^t \delta_i^t] \\ &= \frac{r^t}{\|\sigma_i^t\|} [I_{ij} - n_i n_j - t_i t_j] + \frac{1}{\|\sigma_i^t\|} [(\lambda_p + r^t \delta_p) n_p (t_i t_k - I_{ik}) \\ &\quad - (\lambda_k + r^t \delta_k) n_i] \nabla_{u_j} n_k, \end{aligned} \quad (D.7)$$

De seguida apresentam-se apenas os gradientes que se alteram em relação ao definido no Anexo B, para cada estatuto de contacto.

### Estatuto *Gap*

$$\nabla_{u_j} F_i^{\text{sup}} = \nabla_{u_j} \left[ -\frac{1}{r^n} \lambda_k n_k n_i - \frac{1}{r^t} (\lambda_i - \lambda_k n_k n_i) \right] = \left( \frac{r^n - r^t}{r^t r^n} \right) (\lambda_p n_p I_{ik} + \lambda_k n_i) \nabla_{u_j} n_k, \quad (D.8)$$

$$\nabla_{\lambda_j} F_i^{\text{sup}} = \nabla_{\lambda_j} \left[ -\frac{1}{r^n} \lambda_k n_k n_i - \frac{1}{r^t} (\lambda_i - \lambda_k n_k n_i) \right] = \left( \frac{r^n - r^t}{r^t r^n} \right) (n_i n_j) - \frac{1}{r^t} I_{ij}. \quad (D.9)$$

### Estatuto *Stick*

Caso não se considere a simplificação o único gradiente que se altera é:

$$\begin{aligned} \nabla_{u_j} F_i^{\text{equi}} &= \nabla_{u_j} [\lambda_i + r^n d^n n_i + r^t \delta_i^t] \\ &= [r^t (I_{ij} - n_i n_j) + r^n n_i \nabla_{u_j} d^n] + [(r^n d^n - r^t \delta_p n_p) I_{ik} - r^t \delta_k n_i] \nabla_{u_j} n_k. \end{aligned} \quad (D.10)$$

Devido à utilização de parâmetros de penalidade diferentes é necessário definir quatro matrizes auxiliares, uma vez que não é possível simplificar de modo a obter as matrizes por divisão pelo factor de penalidade.

Considerando a simplificação  $d^n \cong \delta \cdot \mathbf{n}$  constata-se que é possível simplificar a matriz associada ao estatuto de contacto aderente, uma vez que:

$$\begin{aligned} \nabla_{u_j} F_i^{\text{equi}} &= \nabla_{u_j} [\lambda_i + r^n \delta_k n_k n_i + r^t \delta_i^t] \\ &= [r^t I_{ij} + (r^n - r^t) n_i n_j] + (r^n - r^t) [\delta_k n_i + \delta_p n_p I_{ik}] \nabla_{u_j} n_k, \end{aligned} \quad (D.11)$$

### Estatuto *Slip*

$$\begin{aligned} \nabla_{u_j} F_i^{\text{equi}} &= \nabla_{u_j} [\lambda_k n_k n_i + r^n d^n n_i - \mu \lambda_k n_k t_i - \mu r^n d^n t_i] = r^n [n_i - \mu t_i] \nabla_{u_j} d^n \\ &\quad - \frac{\mu \sigma^n}{\|\sigma_i^t\|} [I_{ij} - n_i n_j - t_i t_j] + [\sigma^n I_{ik} + \lambda_k (n_i - \mu t_i) \\ &\quad + \frac{\mu \sigma^n}{\|\sigma_i^t\|} [(\lambda_k + r^t \delta_k) n_i + (\lambda_p + r^t \delta_p) n_p (t_i t_k - I_{ik})]] \nabla_{u_j} n_k \end{aligned} \quad (D.12)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{u_j} F_i^{\text{sup}} &= \nabla_{u_j} \left[ d^n n_i - \frac{1}{r^t} (\lambda_i^t + \mu \lambda_k n_k t_i + \mu r^n d^n t_i) \right] = \left[ n_i - \frac{\mu r^n t_i}{r^t} \right] \nabla_{u_j} d^n \\ &\quad - \frac{\mu \sigma^n}{\|\sigma_i^t\|} [I_{ij} - n_i n_j - t_i t_j] + \left[ \left( d^n + \frac{\lambda_k n_k}{r^t} \right) I_{ik} + \frac{\lambda_k}{r^t} (n_i - \mu t_i) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu \sigma^n}{r^t \|\sigma_i^t\|} \left[ (\lambda_k + r^t \delta_k) n_i + (\lambda_p + r^t \delta_p) n_p (t_i t_k - I_{ik}) \right] \right] \nabla_{u_j} n_k, \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda_j} F_i^{\text{sup}} &= \nabla_{\lambda_j} \left[ d^n n_i - \frac{1}{r^t} (\lambda_i - \lambda_k n_k n_i + \mu \lambda_k n_k t_i + \mu r^n d^n t_i) \right] \\ &= \frac{1}{r^t} [n_i - \mu t_i] n_j - \frac{\mu \sigma^n}{r^t \|\sigma_i^t\|} [I_{ij} - n_i n_j - t_i t_j] - \frac{1}{r^t} I_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

### D.3 Sistema de Equações Lineares Global Misto

Estas alterações às matrizes jacobianas alteram o sistema de equações lineares global definido em (5.61), que passa a ser definido

$$\begin{cases} [K_{AB}]_{ij} \{du_B\}_j + [A_A]_{ij} \{du_A\}_j + [C_A]_{ij} \{d\lambda_A\}_j = \{\mathcal{F}_A^1\}_i \\ [A_A^*]_{ij} \{du_A\}_j + [B_A]_{ij} \{d\lambda_A\}_j = \{\mathcal{F}_A^2\}_i \end{cases}. \quad (\text{D.15})$$

Ou seja, neste caso é necessário recorrer a uma matriz auxiliar  $[A_A^*]$ . Mostra-se de seguida o sistema de equações lineares obtido para cada estatuto de contacto.

#### Estatuto *Gap*

$$\begin{cases} [K_{AB}]_{ij} \{du_B\}_j = \{df_A\}_i \\ \left[ D_{ik} \nabla_{u_j} n_k \right]_A \{du_A\}_j + [F_A]_{ij} \{d\lambda_A\}_j = - \left\{ -\frac{1}{r^n} \lambda^n n_i - \frac{1}{r^t} \lambda_i^t \right\}_A \end{cases}. \quad (\text{D.16})$$

A primeira equação é idêntica à obtida anteriormente com um único parâmetro de penalidade. A segunda equação deve garantir que a força de contacto do nó se anula. Em resumo, as matrizes auxiliares definidas na expressão (5.48) tomam os valores:

$$[A_A]_{ij} = [C_A]_{ij} = 0_{ij}, \quad [A_A^*]_{ij} = \left[ D_{ik} \nabla_{u_j} n_k \right]_A \quad \text{e} \quad [B_A]_{ij} = [F_A]_{ij}, \quad (\text{D.17})$$

e os vectores:

$$\{\mathcal{F}_A^1\}_i = \{df_A\}_i \quad \text{e} \quad \{\mathcal{F}_A^2\}_i = - \left\{ -\frac{1}{r^n} \lambda^n n_i - \frac{1}{r^t} \lambda_i^t \right\}_A. \quad (\text{D.18})$$

**Estatuto *Stick***

Caso não se admita a simplificação do operador de contacto com atrito:

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_{AB}]_{ij} \{du_B\}_j + [P_{ij} + C_{ik} \nabla_{u_j} n_k]_A \{du_A\}_j + \{d\lambda_A\}_i \\ \qquad \qquad \qquad = \{df_A\}_i - \left\{ \lambda_A + (r^n d^n n_i + r^t \delta_i^t) \right\}_A \\ r^t [P_{ij}^* + C_{ik}^* \nabla_{u_j} n_k]_A \{du_A\}_j = -r^t \left\{ (d^n n + \delta^t) \right\}_i \end{array} \right. \quad (D.19)$$

Ou seja, as matrizes auxiliares do sistema de equações lineares global misto são dadas por:

$$[A_A]_{ij} = [P_{ij} + C_{ik} \nabla_{u_j} n_k]_A, \quad [A_A^*]_{ij} = r^t [P_{ij}^* + C_{ik}^* \nabla_{u_j} n_k]_A \quad \text{e} \quad [B_A]_{ij} = [C_{ij}]_A - I_{ij} = 0_{ij} \quad (D.20)$$

e os vectores:

$$\left\{ \mathcal{F}_A^1 \right\}_i = \{df_A\}_i - \left\{ \lambda_A + (r^n d^n n_i + r^t \delta_i^t) \right\}_A \quad \text{e} \quad \left\{ \mathcal{F}_A^2 \right\}_i = -r^t \left\{ (d^n n + \delta^t) \right\}_i \quad (D.21)$$

Admitindo a simplificação do operador de contacto com atrito:

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_{AB}]_{ij} \{du_B\}_j + [P_{ij} + C_{ik} \nabla_{u_j} n_k]_A \{du_A\}_j + \{d\lambda_A\}_i \\ \qquad \qquad \qquad = \{df_A\}_i - \left\{ \lambda_i + r^n \delta_k n_k n_i + r^t \delta_i^t \right\}_A \\ r^t [I]_{ij} \{du_A\}_j = -r^t \{ \delta_A \}_i \end{array} \right. \quad (D.22)$$

Caso se considere a simplificação para o operador de contacto com atrito as matrizes auxiliares tomam os valores:

$$[A_A]_{ij} = [P_{ij} + C_{ik} \nabla_{u_j} n_k]_A, \quad [A_A^*]_{ij} = r^t I_{ij} \quad \text{e} \quad [B_A]_{ij} = [C_{ij} - I_{ij}]_A = 0_{ij}, \quad (D.23)$$

e os vectores:

$$\left\{ \mathcal{F}_A^1 \right\}_i = \{df_A\}_i - \left\{ \lambda_i + r^n \delta_k n_k n_i + r^t \delta_i^t \right\}_A \quad \text{e} \quad \left\{ \mathcal{F}_A^2 \right\}_i = -r^t \{ \delta_A \}_i. \quad (D.24)$$

De novo, em ambos os sistemas obtidos para o estatuto *stick*, a primeira equação do sistema permite a determinação directa da força de contacto do nó  $A$ , e a segunda equação define o valor do deslocamento conhecido do nó.

**Estatuto *Slip***

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_{AB}]_{ij} \{du_B\}_j + [M_{ij} + N_{ik} \nabla_{u_j} n_k]_A \{du_A\}_j + [E_{ij}]_A \{d\lambda_A\}_j \\ \qquad \qquad \qquad = \{df_A\}_i - \left\{ \sigma^n (n - \mu t) \right\}_i \\ r^t [M_{ij}^* + N_{ik}^* \nabla_{u_j} n_k]_A \{du_A\}_j + [(E_{ij} - I_{ij})]_A \{d\lambda_A\}_j \\ \qquad \qquad \qquad = -\left\{ r^t d^n n_i - [\lambda_i^t + \mu \sigma^n t_i] \right\}_A \end{array} \right. \quad (D.25)$$

Opta-se por multiplicar a segunda equação do sistema por  $r^t$  de modo a poder definir as matrizes auxiliares por:

$$[A_A]_{ij} = [M_{ij} + N_{ik} \nabla_{u_j} n_k]_A, \quad [A_A^*]_{ij} = r^t [M_{ij}^* + N_{ik}^* \nabla_{u_j} n_k]_A \quad \text{e} \quad (D.26)$$

$$[B_A]_{ij} = [E_{ij} - I_{ij}]_A = [C_{ij} - I_{ij}]_A, \quad (D.27)$$

e os vectores:

$$\left\{ \mathcal{F}_A^1 \right\}_i = \left\{ df_A \right\}_i - \left\{ \sigma^n (n - \mu t)_A \right\}_i, \quad \left\{ \mathcal{F}_A^2 \right\}_i = - \left\{ r^t d^n n_i - \left[ \lambda_i^t + \mu \sigma^n t_i \right] \right\}_A. \quad (D.28)$$

## D.4 Sistema de Equações Lineares Global Reduzido

O estudo realizado para o sistema de equações linear global misto permite constatar que ao admitir parâmetros de penalidade distintos não se verifica a condição de igualdade entre a matriz auxiliar  $[A_A]$  e a matriz  $[A_A^*]$ . No entanto, é ainda possível construir o sistema de equações lineares reduzido, uma vez que a matriz auxiliar  $[B_A] = [C_A] - [I]$ . Esta condição é válida para o estatuto *stick* e para o estatuto *slip*, mas não se observa para o estatuto *gap*. O estatuto *gap* corresponde a uma situação particular pois a força de contacto tem de se anular, pelo que a segunda linha do sistema de equações lineares reduzido é conhecida. Para os outros estatutos como  $[B_A] = [C_A] - [I]$ , o sistema de equações lineares global misto pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} [K_{AB}]_{ij} \{ du_B \}_j + [A_A]_{ij} \{ du_A \}_j + [C_A]_{ij} \{ d\lambda_A \}_j = \{ \mathcal{F}_A^1 \}_i \\ [A_A^*]_{ij} \{ du_A \}_j + [C_A - I]_{ij} \{ d\lambda_A \}_j = \{ \mathcal{F}_A^2 \}_i \end{cases}. \quad (D.29)$$

E subtraindo a segunda linha à primeira:

$$\begin{aligned} \{ d\lambda_A \}_i &= \{ \mathcal{F}_A^1 \}_i - \{ \mathcal{F}_A^2 \}_i - [K_{AB}]_{ij} \{ du_B \}_j - [A_A - A_A^*]_{ij} \{ du_A \}_j \\ &= \{ \mathcal{F}_A^{**} \}_i - [K_{AB}]_{ij} \{ du_B \}_j - [A_A - A_A^*]_{ij} \{ du_A \}_j. \end{aligned} \quad (D.30)$$

Substituindo  $\{ d\lambda_A \}$  na segunda equação do sistema (D.29) obtém-se

$$-[B_A]_{ik} [K_{AB}]_{kj} \{ du_B \}_j + [A_A + C_A (A_A - A_A^*)]_{ij} \{ du_A \}_j = \{ \mathcal{F}_A^* \}_i. \quad (D.31)$$

O sistema de equações lineares global misto é equivalente ao sistema de equações lineares global reduzido definido por

$$\begin{cases} -[B_A]_{ik} [K_{AB}]_{kj} \{ du_B \}_j + [A_A + C_A (A_A - A_A^*)]_{ij} \{ du_A \}_j = \{ \mathcal{F}_A^* \}_i \\ \{ d\lambda_A \}_i = \{ \mathcal{F}_A^{**} \}_i - [K_{AB}]_{ij} \{ du_B \}_j - [A_A - A_A^*]_{ij} \{ du_A \}_j \end{cases}. \quad (D.32)$$

Este sistema de equações lineares reduzido é válido para os estatutos de contacto *stick* e *slip*. De seguida apresenta-se o sistema obtido para cada um desses estatutos de contacto:

### Estatuto *Stick*

Caso não se admitam as simplificações:

$$\begin{cases} r^t \left[ P_{ij}^* + C_{ik}^* \nabla_{u_j} n_k \right]_A \{ du_A \}_j = -r^t \left( d^n n_i + \delta_i^t \right)_A \\ \{ d\lambda_A \}_i = \{ df_A - \lambda_A \}_i + (r^t - r^n) \{ d^n n_i \}_A - [K_{AB}]_{ij} \{ du_B \}_j - [A_A - A_A^*]_{ij} \{ du_A \}_j \end{cases}. \quad (D.33)$$

Com:

$$\begin{aligned} [A_A^* - A_A]_{ij} &= r^t \left[ P_{ij}^* + C_{ik}^* \nabla_{u_j} n_k \right]_A - \left[ P_{ij} + C_{ik} \nabla_{u_j} n_k \right]_A \\ &= (r^t - r^n) \left[ n_i \nabla_{u_j} d^n \right]_A + (r^t - r^n) \left[ d^n I_{ik} \nabla_{u_j} n_k \right]_A. \end{aligned} \quad (D.34)$$

Para o estatuto *stick*, caso se considere a simplificação para o operador de contacto com atrito:

$$\begin{cases} \{du_A\}_i = -(\delta_A)_i \\ \{d\lambda_A\}_i = \{df_A - \lambda_A\}_i + (r^t - r^n)(\delta_k n_k n_i)_A - [K_{AB}]_{ij} \{du_B\}_j - [A_A - A_A^*]_{ij} \{du_A\}_j \end{cases} \quad (D.35)$$

O que de novo conduz ao mesmo sistema de equações obtido para o sistema de equações lineares global, para o cálculo do deslocamento e da força de contacto do nó  $A$ . Neste caso:

$$\begin{aligned} [A_A^* - A_A]_{ij} &= r^t [I]_{ij} - [P_{ij} + C_{ik} \nabla_{u_j} n_k]_A \\ &= (r^t - r^n) n_i n_j + (r^t - r^n) [(\delta_p n_p I_{ik} + \delta_k n_i) \nabla_{u_j} n_k]_A. \end{aligned} \quad (D.36)$$

### Estatuto *Slip*

$$\begin{cases} -[E_{ik} - I_{ik}]_A [K_{AB}]_{kj} \{du_B\}_j + [A_A + E_A (A_A - A_A^*)]_{ij} \{du_A\}_j \\ = -\{r^t d^n n_i - (\lambda_i^t + \mu \sigma^n t_i)\}_A - [E_{ik} - I_{ik}]_A [\{df_i - \lambda_i\} + (r^t - r^n) d^n n_i]_A \\ \{d\lambda_A\}_i = \{df_A - \lambda_A\}_i + (r^t - r^n) [d^n n_i]_A - [K_{AB}]_{ij} \{du_B\}_j - [A_A - A_A^*]_{ij} \{du_A\}_j \end{cases} \quad (D.37)$$

em que

$$\begin{aligned} [A_A^* - A_A]_{ij} &= r^t [P_{ij}^* + C_{ik}^* \nabla_{u_j} n_k]_A - [P_{ij} + C_{ik} \nabla_{u_j} n_k]_A \\ &= (r^t - r^n) [n_i \nabla_{u_j} d^n]_A + (r^t - r^n) [d^n I_{ik} \nabla_{u_j} n_k]_A. \end{aligned} \quad (D.38)$$

Apesar das diferentes definições das matrizes auxiliares  $[A_A]$  e  $[A_A^*]$  constata-se que a sua subtracção conduz ao mesmo resultado obtido para o estatuto de contacto *stick*, sem simplificação do operador de contacto com atrito.

Em todas as expressões apresentadas para parâmetros de penalidade idênticos  $(r^t - r^n)$  anula-se e obtêm-se as mesmas expressões apresentadas para um único parâmetro de penalidade.

## Anexo E

# Propriedades Mecânicas dos Materiais

Nas tabelas seguintes apresentam-se os parâmetros constitutivos associados ao critério de plasticidade de Hill'48 e às leis de encruamento para a descrição do comportamento mecânico dos materiais utilizados nos estudos realizados nos capítulos 5, 7 e 8.

### Liga de alumínio 6016-T4

Tabela E.1 - Parâmetros constitutivos associados ao critério de plasticidade de Hill'48 e à lei de encruamento para a liga de alumínio 6016-T4 [LPMTM 2001].

Módulo de Young	70000 MPa	Coeficiente de Poisson	0,29
<i>Lei de Voce com encruamento cinemático</i>			
$Y_0$	124,2 MPa	$C_X$	146,5
$C_R$	9,5	$X_{sat}$	34,9 MPa
$R_{sat}$	167,0 MPa		
<i>Critério de plasticidade de Hill'48</i>			
$F$	0,5978	$G$	0,5862
$H$	0,4138	$L = M = N$	1,2653

### Liga de alumínio 5182-O

Tabela E.2 - Parâmetros constitutivos associados ao critério de plasticidade de Hill'48 e às leis de encruamento para a liga de alumínio 5182-O [LPMTM 2001].

Módulo de Young	70000 MPa	Coeficiente de Poisson	0,29		
<i>Lei de Voce com encruamento cinemático</i>			<i>Modelo Microestrutural de Teodosiu simplificado</i>		
$Y_0$	148,5 MPa	$Y_0$	148,5 MPa	$C_X$	144,8
$C_R$	9,7	$C_R$	59,86	$X_0$	17,02 MPa
$R_{sat}$	192,4 MPa	$R_{sat}$	149,12 MPa	$C_S$	11,4
$C_X$	152,7	$S_{sat}$	198,0 MPa	$f$	0,747
$X_{sat}$	26,0 MPa				
<i>Critério de plasticidade de Hill'48</i>					
$F$	0,6305	$G$	0,5587		
$H$	0,4413	$L = M = N$	1,6065		

**Aço macio DC06**

Tabela E.3 - Parâmetros constitutivos associados ao critério de plasticidade de Hill'48 e às leis de encruamento para o aço macio DC06 [LPMTM 2001].

Módulo de Young	210000 MPa	Coeficiente de Poisson		0,30	
<i>Lei de Swift</i>		<i>Modelo Microestrutural de Teodosiu completo</i>			
$Y_0$	123,60 MPa	$Y_0$	122,20 MPa	$C_X$	614,60
$n$	0,2680	$C_R$	27,30	$X_0$	6,900 MPa
$C$	529,50 MPa	$R_{sat}$	202,20 MPa	$C_{SD}$	3,90
		$S_{sat}$	246,70 MPa	$C_{SL}$	1,10
		$n$	0,0	$n_p$	27,7
		$r$	1,900	$f$	0,415
		$C_p$	2,20		
<i>Critério de plasticidade de Hill'48</i>					
$F$	0,26350	$H$			0,71671
$G$	0,28329	$L = M = N$			1,27947

**Aço macio HSLA340**

Tabela E.4 - Parâmetros constitutivos associados ao critério de plasticidade de Hill'48 e às leis de encruamento para o aço de alta resistência HSLA [LPMTM 2001].

Módulo de Young	210000 MPa	Coeficiente de Poisson		0,30	
<i>Lei de Swift com encruamento cinemático</i>		<i>Modelo Microestrutural de Teodosiu completo</i>			
$Y_0$	367,7 MPa	$Y_0$	367,70 MPa	$C_X$	36,10
$n$	0,139	$C_R$	32,20	$X_0$	54,20 MPa
$C$	530,9 MPa	$R_{sat}$	391,30 MPa	$C_{SD}$	5,72
$C_X$	20,7	$S_{sat}$	137,90 MPa	$C_{SL}$	0,0
$X_{sat}$	98,0 MPa	$N$	0,0	$n_p$	290,0
		$r$	0,580	$f$	0,0
		$C_p$	0,442		
<i>Critério de plasticidade de Hill'48</i>					
$F$	0,43322	$H$			0,45055
$G$	0,54945	$L = M = N$			1,54279



# Referências Bibliográficas

- [3DS 2004] Final technical report, *Digital Die Design Systems (3DS) IMS 1999 000051*, (2004).
- [Ach *et al.* 1999] Ach K., Alart P., Barboteu M., Lebon F. e Mbodji B., Parallel frictional contact algorithms and industrial applications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177, 169-181 (1999).
- [Ahmetoglu *et al.* 1994] Ahmetoglu M.A., Gary K. e Taylan A., Computer simulation for tool and process design in sheet forming, *Journal of Materials Processing Technology*, 46, 421-441 (1994).
- [Alart e Curnier 1991] Alart P. e Curnier A., A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92, 353-375 (1991).
- [Alart 1992] Alart P., A simple contact algorithm applied to large sliding and anisotropic friction, *Contact Mechanics International Symposium*, Ed. Presses Polytechniques Romades, França (1992).
- [Alart 1993] Alart P., Contact avec frottement, *Memoire d'Habilitation a Diriger des Recherches*, Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, Université Montpellier II, França (1993).
- [Alart e Lebon 1995] Alart P. e Lebon F., Solution of frictional contact problems using ILU and coarse/fine preconditioners, *Computational Mechanics*, 16, 98-105 (1995).
- [Alart 1997] Alart P., Méthode de Newton généralisée en mécanique du contact, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 76, 83-108 (1997).
- [Al-Dojayli e Meguid 2002] Al-Dojayli M. e Meguid S.A., Accurate modeling of contact using cubic splines, *Finite Elements in Analysis and Design*, 38, 337-352 (2002).
- [Alves e Menezes 2001] Alves J.L. e Menezes L.F., Application of tri-linear and tri-quadratic 3-D solid finite elements in sheet metal forming process simulations, *NUMIFORM'01 - Simulation of Materials Processing: Theory, Methods and Applications*, Ed. Mori N., 639-644 (2001).
- [Alves e Menezes 2002] Alves J.L. e Menezes L.F., Resolução de sistemas lineares esparsos em simulação 3-D do processo de conformação de chapa. Estudo da influência da numeração da malha, do condicionador e do método iterativo, *V Congresso de Métodos Numéricos en Ingenieria*, Ed. Goicolea J.M., Mota Soares C., Pastor M. e Bugeda G., 107 (2002).
- [Alves *et al.* 2003] Alves J.L., Oliveira M.C. e Menezes L.F.; Influence of the Yield Criteria in the Numerical Simulation of the Deep Drawing of a Cylindrical Cup,

*COMPLAS'20032 VII International Conference on Computational Plasticity – Fundamentals and Applications*, Ed. Owen D.R.J., Oñate E., Suárez B., 158 (2003).

- [Alves 2003] Alves J.L., Simulação numérica do processo de estampagem de chapas metálicas-Modelação mecânica e métodos numéricos, *Tese de doutoramento*, Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade do Minho, Portugal (2003).
- [Alves *et al.* 2004] Alves J.L., Oliveira M.C. e Menezes L. F., Estratégias de identificação de parâmetros constitutivos, *VIII Congresso de Métodos Computacionais em Engenharia*, Ed. Mota Soares C.A., Batista A.L., Bugada G., Casteleiro M., Goicolea J.M., Martins J.A.C., Pina C.A.B. e Rodrigues H.C., 454 (2004).
- [Areias *et al.* 2004] Areias P.M.A., César de Sá J.M. e Conceição António C.A., Algorithms for the analysis of 3D finite strain contact problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61, 1107-1151 (2004).
- [Auricchio e Sacco 1996] Auricchio F. e Sacco E., Augmented lagrangian finite-elements for plate contact problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, 4141-4158 (1996).
- [Bandeira *et al.* 2004] Bandeira A.A., Wriggers P. e Pimenta P.M., Numerical derivation of contact mechanics interface laws using a finite element approach for large 3D deformation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59, 173-195 (2004).
- [Baptista *et al.* 2004] Baptista A.J., Alves J.L., Oliveira M.C., Rodrigues D.M. e Menezes L.F.; Numerical Simulation of Multi-Step Deep-Drawing Processes: Trimming 3D Solid Finite Element Meshes, *The Fourth International Conference on Engineering Computational Technology*, Ed. Topping B.H.V. e Mota Soares C.A., 78 (2004).
- [Bathe e Bouzinov 1997] Bathe K.J. e Bouzinov P.A., On the constraint function method for contact problems, *Computers & Structures*, 64, 1069-1085 (1997).
- [Bathe *et al.* 1997] Bathe K.J., Guillermin O., Walczak J. e Chen H.Y., Advances in nonlinear finite element analysis of automobiles, *Computers & Structures*, 64, 881-891 (1997).
- [Bathe 2004] Bathe K.J., On the state of finite element procedures for forming processes, *NUMIFORM'04 - Materials Processing and Design: Modelling, Simulation and Applications*, Ed. Glosch S., Castro J.C. e Lee J.K., 34 (2004).
- [Batoz *et al.* 2000] Batoz J.L., Guo Y.Q., Naceur H., Delaméziere A. e Knopf-Lenoir C., Recent improvements on the analysis and optimum process design in deep drawing using the inverse approach, *ECOMAS 2000 - European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, 1-21 (2000).
- [Behrens e Schafstall 1998] Behrens A. e Schafstall H., 2D and 3D simulation of complex multistage forging processes by use of adaptive friction coefficient, *Journal of Materials Processing Technology*, 80-81, 298-303 (1998).

- [Belgacem *et al.* 1998] Belgacem F.B., Hild P. e Laborde P., The mortar finite element method for contact problems, *Mathematical Computer Modelling*, 28, 253-271 (1998).
- [Belytschko e Lin 1987] Belytschko T. e Lin J.I., A Three-dimensional impact-penetration algorithm with erosion, *Computers & Structures*, 25, 95-104 (1987).
- [Belytschko e Neal 1991] Belytschko T. e Neal M.O., Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and lagrangian methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31, 547-572 (1991).
- [Belytschko e Fleming 1999] Belytschko T. e Fleming M., Smoothing, enrichment and contact in the element free Galerkin method, *Computers & Structures*, 71, 173-195 (1999).
- [Belytschko *et al.* 2002] Belytschko T., Daniel W.J.T. e Ventura G., A monolithic smoothing-gap algorithm for contact-impact based on the signed distance function, *International Journal for numerical methods in engineering*, 55, 101-125 (2002).
- [Bergman e Oldenburg 2004] Bergman G. e Oldenburg M., A finite element model for thermomechanical analysis of sheet metal forming, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59, 1167-1186 (2004).
- [Bézier 1977] Bézier P., Essai de définition numérique des courbes et des surfaces, *Tese de Doutorado*, Université Pierre et Marie Curie, França (1977).
- [Bouvier *et al.* 2005] Bouvier S., Alves J.L., Oliveira M.C. e Menezes L.F., Modelling of anisotropic work-hardening behaviour of metallic materials subjected to strain path changes, *Computational Material Science*, 32, 301-315 (2005).
- [Cao 1990] Cao H.L., Modélisation mecanique et simulation numérique de l'emboutissage, *Tese de Doutorado*, Institut National Polytechnique de Grenoble, França (1990).
- [Carden *et al.* 2002] Carden W.D., Geng L.M., Matlock D.K. e Wagoner R.H., Measurement of springback, *International Journal of Mechanical Science*, 44, 79-101 (2002).
- [Chabrand *et al.* 1998] Chabrand P., Dubois F. e Raous M., Various numerical methods for solving unilateral contact problems with friction, *Mathematical Computer Modelling*, 28, 97-108 (1998).
- [Chabrand *et al.* 2001] Chabrand P., Chertier O. e Dubois F., Complementarity methods for multibody friction contact problems in finite deformation, *International Journal for numerical methods in engineering*, 51, 553-578 (2001).
- [Chaparro *et al.* 2004] Chaparro B.M., Oliveira M.C., Alves J.L. e Menezes L.F., Work hardening models and the numerical simulation of the deep drawing process, *Materials Science Forum*, 717-722 (2004).
- [Chapelle e Bathe 1998] Chapelle D. e Bathe K.J., Fundamental considerations for the finite element analysis of shell structures, *Computers & Structures*, 66, 19-36 (1998).

- [Cheng e Han 2002] Cheng X. e Han W., Inexact Uzawa algorithms for variational inequalities of the second kind, *Reports on Computational Mathematics of the Numerical Computing Group at the University of Iowa* (2002) (<http://www.math.uiowa.edu/comp-math/comp-math-complete.htm>).
- [Chenot e Bay 1998] Chenot J.-L. e Bay F., An overview of numerical modelling techniques, *Journal of Materials Processing Technology*, 80, 8-15 (1998).
- [Christensen *et al.* 1998] Christensen P.W., Klarbring A., Pang J.S. e Stromberg N., Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 42, 145-173 (1998).
- [Col 2001] Col A., Presentation of the 3DS research project, *IDDRG'01 - International Deep Drawing Working Group Meeting*, Ed. Kleemola H. (2001).
- [Col 2002] Col A., Presentation of the "3DS" project: Digital Die Design System, *NUMISHEET'2002 - 5<sup>th</sup> International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes – Verification of Simulation with Experiment*, Ed. Yang D.-Y., Oh S.I., Huh H. e Kim Y.H., 643-647 (2002).
- [Col e Santos 2004] Col A. e Santos A., Final results of the "3DS" Project, *IDDRG'04 - International Deep Drawing Research Group Conference, Forming the future: Global trends in sheet metal forming*, Ed. Kergen R., Kessler L., Langerak N., Lenze F.-J., Janssen E. e Steinbeck G., 1-10 (2004).
- [Conn *et al.* 1996] Conn A.R., Gould N., Sartenaer A. e Toint P.H.L., Convergence properties of an augmented lagrangian algorithm for optimization with a combination of general equality and linear constraints, *SIAM Journal on Optimization*, 6, 674-703 (1996).
- [CRU 2001] Development of the minerals cycle and the need for minerals, *CRU Group International Ltd. Report RSIC Ref. No 0097/*, Relatório técnico encomendado pelo *International Institute for Environment and Development* (2001) (<http://www.iiied.org/mmsd/wp/>).
- [Cuomo e Ventura 2000] Cuomo M. e Ventura G., A complementary energy formulation of no tension masonry-like solids, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189, 313-339 (2000).
- [De Saxcé e Feng 1998] De Saxcé G. e Feng Z.Q., The bipotential method: a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms, *Mathematical Computer Modelling*, 28, 225-245 (1998).
- [Doege e Seydel 1988] Doege E. e Seydel M., Modelling of metal forming processes, Ed. Chenot J.L., Onate E., *Kluwer Academic Publishers*, 123 (1988).
- [Doege e Elend 2001] Doege E. e Elend L.E., Design and application of pliable blank holder systems for the optimization of process conditions in sheet metal forming, *Journal of Materials Processing Technology*, 111, 182-187 (2001).
- [Dokken *et al.* 1990] Dokken T., Daehlen M., Lyche T. e Mørken K., Good approximation of circles by curvature continuous Bézier curves, *Computer Aided Geometric Design*, 7, 33-41 (1990).

- [Duchene *et al.* 2002] Duchene L., Godinas A., Cescotto S. e Habraken A.M., Texture evolution during deep-drawing processes, *Journal of Materials Processing Technology*, 125, 110-118 (2002).
- [Duvaut e Lions 1972] Duvaut G. e Lions J.L., Les Inéquations en Mécanique et en Physique, Dunod, Gauthiers-Villars, Paris, França (1972).
- [El-Abbasi e Meguid 2000] El-Abbasi N. e Meguid S.A., A new shell element accounting for through-thickness deformation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189, 841-862 (2000).
- [El-Abbasi e Bathe 2001] El-Abbasi N. e Bathe K.J., Stability and patch test performance of contact discretizations and a new solution algorithm, *Computers & Structures*, 79, 1473-1486 (2001).
- [El-Abbasi *et al.* 2001] El-Abbasi N., Meguid S.A., Czekanski A., On the modelling of smooth contact surfaces using cubic splines, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, 953-967 (2001).
- [El Khaldi e Lambriks 2002] El Khaldi F. e Lambriks M., New requirements and recent development in sheet metal stamping simulation, *NUMISHEET'2002 5th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes – Verification of Simulation with Experiment*, Ed. Yang D.-Y., Oh S.I., Huh H. e Kim Y.H., 411-421 (2002).
- [Emmens 1998] Emmens W.C., The influence of surface roughness on friction, *IDDRG'98 – International Deep Drawing Research Group Conference*, Ed. Keeler S.P. (1998)
- [Esche *et al.* 1997] Esche S.K., Kinzel G.L. e Altan T., Issues in convergence improvement for non-linear finite element programs, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 4577-4594 (1997).
- [Farin 1993] Farin G., Curves and surfaces for computer aided geometric design – A practical guide, *Academic Press*, Third Edition (1993).
- [Feng *et al.* 2003] Feng Z.-Q., Peyraut F. e Labeled N., Solution of large deformation contact problems with friction between Blatz–Ko hyperelastic bodies, *International Journal of Engineering Science*, 41, 2213-2225 (2003).
- [Finn *et al.* 1995] Finn M.J., Galbraith P.C., Wu L., Hallquist J.O., Lum L. e Lin T.-L., Use of a coupled explicit-implicit solver for calculating springback in automotive body panels, *Journal of Materials Processing Technology*, 50, 395-406 (1995).
- [Francavilla e Zienkiewicz 1975] Francavilla A. e Zienkiewicz O.C., A note on numerical computation of elastic contact problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 9, 913-924 (1975).
- [Fromentina *et al.* 2001] Fromentina S., Martiny M., Ferron G., Tourkic Z., Moreira L.P. e Ferran G., Finite element simulations of sheet-metal forming processes for planar-anisotropic materials, *International Journal of Mechanical Sciences*, 43, 1833-1852 (2001).

- [Gearing *et al.* 2001] Gearing B.P., Moon H.S. e Anand L., A plasticity model for interface friction: application to sheet metal forming, *International Journal of Plasticity*, 17, 237-271 (2001).
- [Gelin *et al.* 1995] Gelin J.C., Boulmane L. e Boisse P., Quasi-static implicit and transient explicit analysis of sheet-metal forming using a C0 three-node shell element, *Journal of Materials Processing Technology*, 50, 54-69 (1995).
- [Geng *et al.* 2002] Geng L., Yao S. e Wagoner R.H., Anisotropic hardening equations derived from reverse-bend testing, *International Journal of Plasticity*, 18, 743-767 (2002).
- [Geng e Wagoner 2002] Geng L. e Wagoner R.H., Role of plastic anisotropy and its evolution on springback, *International Journal of Mechanical Sciences*, 44, 123-148 (2002).
- [Giannakopoulos 1989] Giannakopoulos A.E., The radial mapping method for the integration of friction constitutive relations, *Computers & Structures*, 6, 281-290 (1989).
- [Gontier 1994] Gontier C., About the numerical simulation of the sheet metal stamping process, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, 669-692 (1994).
- [Goudreau e Hallquist 1982] Goudreau G.L. e Hallquist J.O., Recent developments in large-scale finite element lagrangian hydrocode technology, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33, 725-757 (1982).
- [Guo *et al.* 2002] Guo Y.Q., Gati W., Naceur H. e Batoz J.L., An efficient DKT rotation free shell element for springback simulation in sheet metal forming, *Computers & Structures*, 80, 2299-2312 (2002).
- [Haar 1996] Haar R., Friction in sheet metal forming: The influence of (local) contact conditions and deformation, *Tese de Doutorado*, University of Twente, Holanda (1996).
- [Hallquist *et al.* 1985] Hallquist J.O., Goudreau G.L. e Benson D.J., Sliding interfaces with contact-impact in large-scale lagrangian computations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51, 107-137 (1985).
- [Hallquist *et al.* 1995] Hallquist J.O., Wainscott B. e Schweizerhof K., Improved simulation of thin-sheet metal forming using LS-DYNA3D on parallel computers, *Journal of Materials Processing Technology*, 50, 144-147 (1995).
- [Haslinger *et al.* 2004] Haslinger J., Kucera R. e Dostal Z., An algorithm for the numerical realization of 3D contact problems with Coulomb friction, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 164, 387-408 (2004).
- [Hauptmann *et al.* 2000] Hauptmann R., Schweizerhof K. e Doll S., Extension of the 'solid-shell' concept for application to large elastic and large elastoplastic deformations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49, 1121-1141 (2000).
- [He e Zhou 2000] He B. e Zhou J., A modified alternating direction method for convex minimization problems, *Applied Mathematics Letters*, 13, 123-130 (2000).

- [Heegaard e Curnier 1993] Heegaard J.H. e Curnier A., An augmented lagrangian method for discrete large-slip contact problems, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 36, 569-593 (1993).
- [Heege 1992] Heege A., Simulation numerique 3D du contact avec frottement et application à la mise en forme, *Tese de Doutorado*, Institut National Polytechnique de Grenoble, França (1992).
- [Heege *et al.* 1995] Heege A., Alart P. e Oñate E., Numerical modelling and simulation of frictional contact using a generalised Coulomb Law, *Engineering Computations*, 12, 641-656 (1995).
- [Heege e Alart 1996] Heege A. e Alart P., A frictional contact element for strongly curved contact problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, 165-184 (1996).
- [Hestenes 1969] Hestenes M.R., Multiplier and gradient methods, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 4, 303-320 (1969).
- [Hill 1948] Hill R., A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic materials, *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Science*, Royal Society London, A193, 281-297 (1948).
- [Hirota 2002] Hirota G., An improved finite element contact model for anatomical simulations, *Tese de Doutorado*, University of North Carolina, E.U.A. (2002).
- [Hongzhi e Zhongqin 2000] Hongzhi D. e Zhongqin L., Investigation of sheet metal forming by numerical simulation and experiment, *Journal of Materials Processing Technology*, 103, 404-410 (2000).
- [Hu *et al.* 1998] Hu J., Jonas J.J. e Ishikawa T., FEM simulation of the forming of texture aluminium sheets, *Materials Science & Engineering*, A256, 51-59 (1998).
- [Huétink 1986] Huétink J., On the simulation of thermo-mechanical forming processes, *Tese de Doutorado*, University of Twente, Holanda (1986).
- [Hughes *et al.* 1976] Hughes T.J.R., Taylor R.L., Sackman J.L., Curnier A. e Kanoknukulchai W., A finite element method for a class of contact-impact problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 8, 249-276 (1976).
- [Hughes 1980] Hughes T.J.R., Generalization of selective reduced integration procedures to anisotropic and nonlinear media, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15, 1413-1418 (1980).
- [Hughes e Winget 1980] Hughes T.J.R. e Winget J., Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15, 1862-1867 (1980).
- [Hughes *et al.* 1995] Hughes D.A., Weingarten L.I. e Dawson D.B., Numerical simulation and experimental observations of initial friction transients, *NUMIFORM'95 - Simulation of Materials Processing: Theory, Methods and Applications*, Ed. Shen S.F. e Dawson P.R. 265-270 (1995).

- [Huh e Choi 1999] Huh H. e Choi T.H., Modified membrane finite element formulation for sheet metal forming analysis of planar anisotropic materials, *International Journal of Mechanical Sciences*, 42, 1623-1643 (1999).
- [IISI 2004] Steel statistical yearbook 2003, *International Iron & Steel Institute*, Relatório técnico encomendado pelo Committee on Economic Studies, Brussels, February (2004) (<http://www.worldsteel.org/>).
- [Im 1999] Im Y.-T., A computer-aided-design system for forming processes, *Journal of Materials Processing Technology*, 89-90, 1-7 (1999).
- [Jones e Papadopoulos 2001] Jones R.E. e Papadopoulos P., A novel three-dimensional contact finite element based on smooth pressure interpolations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51, 791-811 (2001).
- [Ju *et al.* 1995] Ju S.H., Stone J.J. e Rowlands R.E., A new symmetric contact element stiffness matrix for frictional contact problems, *Computers & Structures*, 54, 289-301 (1995).
- [Kase *et al.* 1999] Kase K., Makinouchi A., Nakagawa T., Suzuki H. e Kimura F., Shape error evaluation method of free-form surfaces, *Computer-Aided design*, 31, 8, 495-505 (1999).
- [Kawka e Makinouchi 1995] Kawka M. e Makinouchi A., Shell-element formulation in the static explicit FEM code for the simulation of sheet metal forming, *Journal of Materials Processing Technology*, 50, 105-115 (1995).
- [Kawka *et al.* 1998] Kawka M., Kakita T. e Makinouchi A., Simulation of multi-steep sheet metal forming processes by a static explicit FEM code, *Journal of Materials Processing Technology*, 80-81, 54-59 (1998).
- [Kawka e Bathe 2001] Kawka M. e Bathe K.J., A new effective and reliable implicit scheme for the simulation of sheet metal forming processes, *NUMIFORM'01 - Simulation of Materials Processing: Theory, Methods and Applications*, Ed. Mori N., 615-619 (2001).
- [Kawka *et al.* 2001] Kawka M., Olejnik L., Rosochowski A., Sunaga H. e Makinouchi A., Simulation of wrinkling in sheet metal forming, *Journal of Materials Processing Technology*, 109, 283-289 (2001).
- [Kikuchi e Oden 1988] Kikuchi N. e Oden J.T., Contact problems in elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods, Ed. SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, *Studies in Applied Mathematics*, Filadélfia, E.U.A (1988).
- [Kim *et al.* 2000] Kim N.H., Choi K.K., Chen J.S. e Park Y.H., Meshless shape design sensitivity analysis and optimization for contact problem with friction, *Computational Mechanics*, 25, 157-168 (2000).
- [Klarbring 1986] Klarbring A., A Mathematics programming approach to three-dimensional contact problems with friction, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58, 175-200 (1986).



- [Klarbring 1995] Klarbring A., Large displacement frictional contact: a continuum framework for finite element discretization, *European Journal of Mechanics*, 14, 237-253 (1995).
- [Kloosterman *et al.* 2001] Kloosterman G., Van Damme R.M.J., Van den Boogaard A.H. e Huétink J., A geometrical-based contact algorithm using a barrier method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51, 865-882 (2001).
- [Kloosterman 2002] Kloosterman G., Contact methods in finite element methods, *Tese de Doutorado*, Netherlands Institute for Metals Research, University of Twente, Holanda (2002).
- [Knibloe e Wagoner 1989] Knibloe J.R. e Wagoner R.H., Experimental investigation and finite-element modeling of hemispherically stretched steel sheet, *Metallurgical Transactions A - Physical Metallurgy And Materials Science*, 20, 1509-1521 (1989).
- [Koistinen e Wang 1978] Koistinen, D.P. e Wang, N.M., Mechanics of Sheet Metal Forming, *Plenum Press*, Nova York, E.U.A. (1978).
- [Kubli e Reissner 1995] Kubli W. e Reissner J., Optimization of sheet-metal forming process using the special purpose program AUTOFORM, *Journal of Materials Processing Technology*, 50, 292-305 (1995).
- [Kulak 1989] Kulak R.F., Adaptive contact elements for three-dimensional explicit transient analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 72, 125-151 (1989).
- [Ladreyt 1992] Ladreyt T., Modélisation bidimensionnelle et simulation numérique des processus de mise en forme des tôles dans l'industrie automobile, *Tese de Doutorado*, Institut National Polytechnique de Grenoble, França (1992).
- [Laursen 1992] Laursen T. A., Formulation and treatment of frictional contact problems using finite elements, *Tese de Doutorado*, Stanford University, E.U.A. (1992).
- [Laursen e Oancea 1994] Laursen T.A. e Oancea V.G., Automation and assessment of augmented lagrangian algorithms for frictional contact problems, *Journal of Applied Mechanics*, 61, 956-963 (1994).
- [Laursen e Maker 1995] Laursen T.A. e Maker B.N., An augmented lagrangian quasi-Newton solver for constrained nonlinear finite element applications, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38, 3571-3590 (1995).
- [Laursen e Oancea 1997] Laursen T.A. e Oancea V.G., On the constitutive modeling and finite element computation of rate-dependent frictional sliding in large deformation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 143, 197-227 (1997).
- [Lebon 2003] Lebon F., Contact problems with friction: models and simulations, *Simulation Modelling Practice and Theory*, 11, 449-463 (2003).

- [Lee *et al.* 1996] Lee I.K., Kim M.S. e Elber G., Planar curve offset based on circle approximation, *Computer Aided Design*, 28 (8), 617-630 (1996).
- [Lee *et al.* 1999] Lee S.W., Yoon J. W. e Yang D.Y., Comparative investigation into the dynamic explicit and the static implicit method for springback of sheet metal stamping, *Engineering Computations*, 16, 347-373 (1999).
- [Lefebvre *et al.* 1996] Lefebvre D., Haug E. e Hatt F., Industrial applications of computer simulation in stamping, *Journal of Materials Processing Technology*, 46, 351-389 (1996).
- [Lemaître e Chaboche 1985] Lemaître J. e Chaboche J-L., Mechanics of solid materials, *Cambridge University Press*, Cambridge, Reino Unido (1985).
- [Levaillant e Chenot 1992] Levaillant C. e Chenot J.L., Physical modelling and numerical prediction of defects in sheet metal forming, *Journal of Materials Processing Technology*, 32, 383-397 (1992).
- [Li *et al.* 2002] Li K.P., Carden W.P. e Wagoner R.H., Simulation of springback, *International Journal of Mechanical Sciences*, 44, 103-122 (2002).
- [Li *et al.* 2003] Li S., Hoferlin E., Van Bael A., Van Houtte P. e Teodosiu C., Finite element modeling of plastic anisotropy induced by texture and strain-path change, *International Journal of Plasticity*, 19, 647-674 (2003).
- [Lin *et al.* 2001] Lin J., Ball A.A. e Zheng J.J., Approximating circular arcs by Bézier curves and its application to modelling tooling for FE forming simulations, *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 41, 703-717 (2001).
- [Ling e Stolarski 1997] Ling W. e Stolarski H.K., A contact algorithm for problems involving quadrilateral approximation of surface, *Computers & Structures*, 63, 963-975 (1997).
- [Liu *et al.* 2002] Liu G., Lin Z., Xu W. e Bao Y., Variable blank holder force in U-shape part forming for eliminating springback error, *Journal of Materials Processing Technology*, 120, 259-264 (2002).
- [LPMTM 2001] Laboratoire des Propriétés Mécaniques et Thermodynamiques des Matériaux, Selection and identification of elastoplastic models for the materials used in the benchmarks, *Digital Die Design Systems (3DS) IMS 1999 000051, Work Package 3, Task1, 18-Month Progress Report*, University Paris 13 (2001).
- [Luenberger 1984] Luenberger D.G., Linear and nonlinear programming, *Addison-Wesley Publishing Company*, Second Edition (1984).
- [Magny 2002] Magny C., Lois de frottement évolutives destinées à la simulation numérique de l'emboutissage. *La Revue de Métallurgie*, Février, 145-156 (2002).
- [Makinouchi e Kawka 1994] Makinouchi A. e M. Kawka, Process simulation in sheet metal forming, *Journal of Materials Processing Technology*, 46, 291-307 (1994).
- [Makinouchi 1996] Makinouchi A., Sheet metal forming simulation in industry, *Journal of Materials Processing Technology*, 60, 19-26 (1996).

- [Maker e Laursen 1994] Maker B.N. e Laursen T.A., A finite element formulation for rod/continuum interactions: the one-dimensional slideline, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, 1-18 (1994).
- [Martinet e Chabrand 2000] Martinet F. e Chabrand P., Application of ALE finite elements method to a lubricated friction model in sheet metal forming, *International Journal of Solids and Structures*, 37, 4005-4031 (2000).
- [McDevitt e Laursen 2000] McDevitt T.W. e Laursen T.A., A mortar-finite element formulation for frictional contact problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48, 1525-1547 (2000).
- [Mc-Meeking e Rice 1975] Mc-Meeking R.M. e Rice J.R., Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformation, *International Journal of Solids and Structures*, 11, 601-616 (1975).
- [Meinders 2000] Meinders T., Developments in numerical simulations of the real life deep drawing process, *Tese de Doutorado*, University of Twente, Ed. Ponsen & Looijen Wageningen, ISBN 90-36514002, Holanda (2000).
- [Menezes *et al.* 1991] Menezes L.F., Teodosiu C. e Makinouchi A., 3-D Solid elasto-plastic elements for simulating sheet metal forming processes by the finite element method, *FE - simulation of 3-D Sheet Metal Forming Processes in Automotive Industry*, VDI Berichte Nr.894, 381-403 (1991).
- [Menezes 1995] Menezes L.F., Modelação tridimensional e simulação numérica dos processos de enformação por deformação plástica – Aplicação à estampagem de chapas metálicas, *Tese de doutoramento*, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, Portugal (1995).
- [Menezes 1998] Menezes L.F., Grandes deformações – Modelação tridimensional e simulação numérica do processo de estampagem de chapas metálicas, *Escola de Elementos Finitos e Aplicações*, Ed. Centro Internacional de Matemática, Coimbra (1998).
- [Menezes e Teodosiu 1999] Menezes L.F. e Teodosiu C., Improvement of the frictional contact treatment in a single loop iteration algorithm specific to deep-drawing simulations, *NUMISHEET'99 - International Conference on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes*, Ed. Gelin J.C. e Picart P., 197-202 (1999).
- [Menezes e Teodosiu 2000] Menezes L.F. e Teodosiu C., Three-dimensional numerical simulation of the deep-drawing process using solid finite element, *Journal of Materials Processing Technology*, 97, 100-106 (2000).
- [Menezes *et al.* 2002] Menezes L.F., Thuillier S., Manach P.Y. e Bouvier S., Influence or work hardening models on the numerical simulation of a reverse deep drawing process, *PLASTICITY'02: The ninth International Symposium on Plasticity and its Current Applications: Plasticity, Damage and Fracture at Macro, Micro and Nanoscales*, Ed. Khan A.S. e Lopez-Pamies O.L., Neat Press, Fulton, 331-333 (2002).
- [Menezes *et al.* 2004] Menezes L.F., Oliveira M.C. e Alves J.L., DD3LT – O ensino e a aprendizagem das tecnologias de estampagem; *VIII Congresso de Métodos*

*Computacionais em Engenharia*, Ed. Mota Soares C.A., Batista A.L., Bugeda G., Casteleiro M., Goicolea J.M., Martins J.A.C., Pina C.A.B. e Rodrigues H.C., 75 (2004).

- [Mesquita *et al.* 2000] Mesquita R., Henriques E., Sousa P. e Vilaça P., Ensaio industrial e simulação da operação de estampagem de uma “Tailored Welded Blank”, *Relatório de Actividades do Projecto TECNACAM - Desenvolvimento de tecnologias avançadas para o trabalho de chapa metálica* (2000).
- [Mijar e Arora 2000] Mijar A.R. e Arora J.S., Review of formulations for elastostatic frictional contact problems, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 20, 167-189 (2000).
- [Moreau 1979] Moreau J.J., Application of convex analysis to some problems of dry friction, *Trends of Pure Mathematics Applied to Mechanics*, Ed. Zorski, Vol. II (1979).
- [Nagtegaal *et al.* 1974] Nagtegaal J.C., Parks D.M. e Rice J.R., On numerically accurate finite element solution in the fully plastic range, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 4, 153-177 (1974).
- [Narasimhan e Lovell 1999] Narasimhan N. e Lovell M., Predicting springback in sheet metal forming: an explicit to implicit sequential solution procedure, *Finite Elements in Analysis and Design*, 33, 29-42 (1999).
- [Nordlund 1998] Nordlund P., Adaptivity and wrinkle indication in sheet-metal forming, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 127-143 (1998).
- [Nour-Omid e Wriggers 1987] Nour-Omid B. e Wriggers P., A note on the optimum choice for penalty parameters, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 3, 518-585 (1987).
- [NUMISHEET'93] Numisheet'93, *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes – Verification of Simulation with Experiments*, Ed. Makinouchi A., Nakamachi E., Oñate E. e Wagoner R.H. (1993).
- [NUMISHEET'99] Numisheet'99, *Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes – Verification of Simulation with Experiments*, Ed. Gelin J.C. e Picart P., Vol. 2, 13-17 (1999).
- [NUMISHEET'02] Numisheet'02, *Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3F Forming Processes – Verification of Simulation with Experiments*, Ed. Yang D.-Y, Oh S.I., Huh H. e Kim Y.H, Vol. 2, 21-25 (2002).
- [Oliveira e Menezes 2002] Oliveira M.C. e Menezes L.F., Optimização da descrição das ferramentas por superfícies de b ezier na simula o do processo de estampagem, *V Congresso de Métodos Numéricos en Ingenieria*, Ed. Goicolea J.M., Mota Soares C., Pastor M. e Bugeda G., 107 (2002).
- [Oliveira *et al.* 2002] Oliveira M.C., Alves J.L. e Menezes L.F., Springback evaluation using 3-D finite elements, *NUMISHEET'2002 - 5<sup>th</sup> International Conference and*

- Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes–Verification of Simulation with Experiment*, Ed. Yang D.-Y., Oh S.I., Huh H. e Kim Y.H., 189-194 (2002).
- [Oliveira *et al.* 2003] Oliveira M.C., Alves J.L. e Menezes L.F., Improvement of a frictional contact algorithm for strongly curved contact problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58, 2083-2101 (2003).
- [Oliveira *et al.* 2003a] Oliveira M.C., Alves J.L., Menezes L.F., One step springback strategies in sheet metal forming, *COMPLAS'2003 VII International Conference on Computational Plasticity – Fundamentals and Applications*, Ed. Owen D.R.J., Oñate E. e Suárez B., 87 (2003).
- [Papeleux e Ponthot 2002] Papeleux L. e Ponthot J.P., Finite element simulation of springback in sheet metal forming, *Journal of Materials Processing Technology*, 125-126, 785-791 (2002).
- [Péric *et al.* 1999] Péric D., Vaz Jr. M. e Owen D.R.J., On adaptative strategies for large deformations of elasto-plastic solids at finite strains: computational issues and industrial applications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176, 279-312 (1999).
- [Pietrzak e Curnier 1999] Pietrzak G. e Curnier A., Large deformation frictional contact mechanics: continuum formulation and augmented lagrangian treatment, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177, 351-381 (1999).
- [Powell 1969] Powell M.J.D., A method for nonlinear constraints in minimization problems, *Optimization*, Ed. Fletcher R., Academic Press, London, 283-298 (1969).
- [Puso e Laursen 2002] Puso M.A. e Laursen T.A., A 3D contact smoothing method using Gregory patches, *International Journal for numerical methods in engineering*, 54, 1161-1194 (2002).
- [Puso e Laursen 2004] Puso M.A. e Laursen T.A., A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193, 601-629 (2004).
- [Refaat e Meguid 1994] Refaat M.H. e Meguid S.A., On the elastic solution of frictional contact problems using variational inequalities, *International Journal of Mechanical Science*, 36, 329-342 (1994).
- [Refaat e Meguid 1998] Refaat M.H. e Meguid S.A., A new strategy for the solution of frictional contact problems, *International Journal for numerical methods in engineering*, 43, 1053-1068 (1998).
- [Reis *et al.* 2003] Reis A., Santos A.D., Duarte J.F., Teixeira P., Barata Rocha A., Oliveira M.C., Alves J.L. e Menezes L.F., Reference experimental results for validating numerical predictions in sheet metal forming, *International Conference on Advances in Materials and Processing Technologies*, Ed. Olabi A.G. e Hashmi S.J., 378-381 (2003).

- [Rieger e Wriggers 2004] Rieger A. e Wriggers P., Adaptive methods for thermomechanical coupled contact problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59, 871-894 (2004).
- [Rohleder *et al.* 2002] Rohleder M., Roll K., Menezes L.F., Oliveira M.C., Andersson A. e Krantz F., Standardization of input-output data for benchmark tests, *Digital Die Design Systems (3DS) IMS 1999 000051, Work Package 2, Task 3* (2002).
- [Rojek *et al.* 1996] Rojek J., Jovicevic J. e Oñate E., Industrial applications of sheet stamping simulation using new finite element models, *Journal of Materials Processing Technology*, 60, 243-247 (1996).
- [Rojek *et al.* 2001] Rojek J., Zienkiewicz O.C., Oñate E. e Postek E., Advances in FE explicit formulation for simulation of metalforming processes, *Journal of Materials Processing Technology*, 119, 41-47 (2001).
- [Rothert *et al.* 1985] Rothert H., Idelberger H., Jacobi W. e Niemann L., On geometrically nonlinear contact problems with friction, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51, 139-155 (1985).
- [Samuel 2000] Samuel M., Experimental and numerical prediction of springback and side wall curl in U-bendings of anisotropic sheet metals, *Journal of Materials Processing Technology*, 105, 382-393 (2000).
- [Santos 1993] Santos A., Tool description and contact strategies used in the static explicit FEM code ITAS3D for simulation of 3-D sheet metal forming processes, *Tese de Doutorado*, University of Tokyo, Japão (1993).
- [Santos e Makinouchi 1995] Santos A. e Makinouchi A., Contact strategies to deal with different tool descriptions in static explicit FEM of 3-D sheet-metal forming simulation, *Journal of Materials Processing Technology*, 50, 277-291 (1995).
- [Santos *et al.* 2002] Santos A.D, Duarte J.F., Reis A., Barata da Rocha A., Menezes L., Oliveira M., Col A. e Ono T., Towards standar benchmarks and reference data for validation and improvement of numerical simulation in sheet metal forming, *Journal of Materials Processing Technology*, 125-126, 798-805 (2002).
- [Santos *et al.* 2004] Santos A.D., Teixeira P., Duarte J.F. e Rocha A.B., Conformação plástica de chapas – “Benchmarks” experimentais e modelação numérica, *VIII Congresso de Métodos Computacionais em Engenharia*, Ed. Mota Soares C.A., Batista A.L., Bugeda G., Casteleiro M., Goicolea J.M., Martins J.A.C., Pina C.A.B., Rodrigues H.C., 69 (2004).
- [Saracibar e Chiumenti 1999] Saracibar C.A. e Chiumenti M., On the numerical modeling of frictional wear design, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177, 401-426 (1999).
- [Schönbach *et al.* 2004] Schönbach E., Glanzer G., Kubli W. e Selig M., Springback simulation – The last missing link for a complete forming simulation, *IDDRG'04 - International Deep Drawing Research Group Conference, Forming the future: Global trends in sheet metal forming*, Ed. Kergen R., Kessler L., Langerak N., Lenze F.-J., Janssen E. e Steinbeck G., 83-94 (2004).

- [Schweizerof e Hallquist 1991] Schweizerhof K. e Hallquist J.O., Explicit Integration Schemes and Control Formulations for Thin Metal Forming, *FE - simulation of 3-D Sheet Metal Forming Processes in Automotive Industry*, VDI Berichte Nr.894, 405-439 (1991).
- [Shanno *et al.* 1995] Shanno D.F., Breitfeld M.G. e Evangelia M.S., Implementating barrier methods for nonlinear programming, *Rutcor Research Report 39-95*, Rutgers University, 14 (1995) (<http://rutcor.rutgers.edu/pub/rrr/reports95/39.ps>).
- [Sheng *et al.* 2004] Sheng Z.Q., Jirathearanat S. e Altan T., Adaptive FEM simulation for prediction of variable blank holder force in conical cup drawing, *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 44, 487-494 (2004).
- [Sidoroff 1981] Sidoroff H., Formulation elasto-plastique en grandes deformations, *Rapport GRECO 29* (1981).
- [Signorini 1933] Signorini A., Sopra alcune questioni di elastostatica, *Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze* (1933).
- [Simo e Taylor 1984] Simo J.C. e Taylor R.L., Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48, 101-118 (1984).
- [Simo 1985] Simo J.C., On the computational significance of the intermediate configuration and hyperelastic stress relations in finite deformation elastoplasticity, *Mechanics of Materials*, 4, 439 (1985).
- [Simo *et al.* 1985] Simo J.C., Wriggers P. e Taylor R. L., A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 50, 163-180 (1985).
- [Simo e Laursen 1992] Simo J.C. e Laursen T.A., An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction, *Computers & Structures*, 42, 97-116 (1992).
- [Sinou e Macquaire 2003] Sinou J.J. e Macquaire B., Anisotropic behaviour law for sheets used in stamping: A comparative study of steel and aluminium, *Comptes Rendus Mecanique*, 331, 33-40 (2003).
- [Sriram e Wagoner 2000] Sriram S. e Wagoner R.H., Adding bending stiffness to 3-D membrane FEM programs, *International Journal of Mechanical Sciences*, 42, 1753-1782 (2000).
- [Stadler *et al.* 2003] Stadler M., Holzapfel G. A. e Korelc J., Cn continuous modelling of smooth contact surfaces using NURBS and application to 2D problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57, 2177-2203 (2003).
- [Stoughton 2002] Stoughton T.B., A non-associated flow rule for sheet metal forming, *International Journal of Plasticity*, 18, 687-714 (2002).
- [Stromberg 1999] Stromberg N., A Newton method for three dimensional fretting problems, *International Journal of Solids and Structures*, 36, 2075-2090 (1999).
- [Stupkiewicz 2001] Stupkiewicz S., Extension of the node-to-segment contact element for surface-expansion-dependent contact laws, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, 739-759 (2001).

- [Talon e Curnier 2003] Talon C. e Curnier A., A model of adhesion coupled to contact and friction, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 22, 545-565 (2003).
- [Tanner 1996] Tanner J.A., Computational methods for frictional contact with applications to the space shuttle orbiter nose-gear tire - Development of frictional contact algorithms, *Nasa Technical Paper 3574*, (1996) (<http://techreports.larc.nasa.gov/ltrs/ltrs.html>).
- [Tekkaya 2000] Tekkaya A.E., State-of-the-art of simulation of sheet metal forming, *Journal of Materials Processing Technology*, 103, 14-22 (2000).
- [Takamura *et al.* 2004] Takamura M., Ohura K., Sunaga H., Kuwabara T., Makinouchi A. e Teodosiu C., Sheet Forming Simulation Using a Static FEM Program and Considering the Elastic Deformation of Tools, *NUMIFORM'04 - Materials Processing and Design: Modelling, Simulation and Applications*, Ed. Glosch S., Castro J.C. e Lee J.K., 34, (2004).
- [Teodosiu 1989] Teodosiu C., The plastic spin: Microstructural origin and computational significance, *2<sup>nd</sup> International Conference on Computational Plasticity*, Ed. Owen D.R.J., Hinton E. e Oñate E., (1989).
- [Teodosiu *et al.* 1991] Teodosiu C., Cao H.L., Ladreyt T. e Detraux J.M., Implicit versus explicit methods in the simulation of sheet metal forming, *FE - Simulation of 3-D Sheet Metal Forming Processes in Automotive Industry*, VDI Berichte, 894, 601-627 (1991).
- [Teodosiu *et al.* 1995] Teodosiu C., Daniel D., Cao H.-L. e Duval J.-L., Modelling and simulation of the can-making process using solid finite elements, *Journal of Materials Processing Technology*, 50, 133-143 (1995).
- [Teodosiu 1997] Teodosiu C., Dislocation modelling of crystalline plasticity, *Large Plasticity Deformation of Crystalline Aggregates*, Ed. Teodosiu C., CISM Courses and Lectures N° 376 (1997).
- [Teodosiu e Genevois 1988] Teodosiu C. e Genevois P., Modelling large deformation anisotropic plastic behaviour of mild steel sheet, *MECAMAT'98 - International Symposium on Inelastic Behaviour of Solids: Models and Utilisation*, 211-224, (1998).
- [Teodosiu e Hu 1998] Teodosiu C. e Hu Z., Microstructure in the continuum modelling of plastic anitropy, *19<sup>th</sup> Riso International Symposium on Materials Science: Modelling of Structure and Mechanics of Materials from Microscale to Products*, Riso National Laboratory, 149-168 (1998).
- [Traversin e Kergen 1995] Traversin M. e Kergen R., Closed-loop control of the blank-holder force in deep-drawing: Finite element modeling of its effects and advantages, *Journal of Materials Processing Technology*, 50, 306-317 (1995).
- [Volpert *et al.* 1997] Volpert Y., Szabo T., Paczelt I. e Szabo B., Application of the space enrichment method to problems of mechanical contact, *Finite Elements in Analysis and Design*, 24, 157-170 (1997).



- [Wagener 1997] Wagener H.W., New developments in sheet metal forming: sheet materials, tools and machinery, *Journal of Materials Processing Technology*, 72, 342-357 (1997).
- [Wagoner 2002] Wagoner R.H., Fundamental aspects of springback in sheet metal forming, *NUMISHEET'2002 - 5<sup>th</sup> International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming Processes – Verification of Simulation with Experiment*, Ed. Yang D.-Y., Oh S.I., Huh H. e Kim Y.H., 13-24, (2002).
- [Walter 1999] Walter H., Modelisation 3D par elements finites du contact avec frottement et del l'endommagement du beton: application a létude de fixations ancrees dans une structure de beton, *Tese de Doutorameto*, L'Institut National des Sciences Appliquees de Lyon, França (1999).
- [Wang e Nakamachi 1997] Wang S. e Nakamachi E., The inside-outside contact search algorithm for finite element analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 3665-3685 (1997).
- [Wang e Makinouchi 2000] Wang S. e Makinouchi A., Contact search strategies for FEM simulation of the blow molding process, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48, 501-521 (2000).
- [Wang *et al.* 2001] Wang F., Cheng J. e Yao Z., FFS contact searching algorithm for dynamic finite element analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52, 655-672 (2001).
- [Westeneng 2001] Westeneng J.D., Modelling of contact and friction in deep drawing processes, *Tese de Doutorameto*, University of Twente, Holanda (2001).
- [Wouters *et al.* 2002] Wouters P., Daniel D. e Magny C., Selection and identification of friction models for the 3DS materials – Identification of the friction behaviour, *Digital Die Design Systems (3DS) IMS 1999 000051, Work Package 3, Task1* (2002).
- [Wriggers *et al.* 1985] Wriggers P., Simo J.C. e Taylor R.L., Penalty and augmented lagrangian formulations for contact problems, *NUMETA'86 - International Conference on Numerical Methods in Engineering*, Ed. Middleton J. e Pande G.N. (1985).
- [Wriggers e Zavarise 1993] Wriggers P. e Zavarise G., Application of augmented lagrangian techniques for non-linear constitutive laws in contact interfaces, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9, 815-824 (1993).
- [Wriggers *et al.* 2001] Wriggers P., Krstulovic-Opara L. e Korelc J., Smooth C1-interpolations for two-dimensional frictional problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51, 1469-1495 (2001).
- [Xing *et al.* 1998] Xing H.L., Fujimoto T. e Makinouchi A., Static-explicit FE modeling of 3-D large deformation multibody contact problems on parallel computer, *NUMIFORM'98 - Simulation of Materials Processing: Theory, Methods and Applications*, Ed. Huétink J. e Baaijens F.T.P., 207-212 (1998).

- [Xu *et al.* 2003] Xu W., Di S. e Thomson P., Rigid-plastic/rigid-viscoplastic FE simulation using linear programming for metal forming, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56, 487-506 (2003).
- [Yamada *et al.* 1968] Yamada Y., Yoshimura N. e Sakurai T., Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method, *International Journal of Mechanical Science*, 10, 343-354 (1968).
- [Yoon *et al.* 1999] Yoon J.W., Yang D.Y., Chung K. e Barlat F., A general elasto-plastic finite element formulation based on incremental deformation theory for planar anisotropy and its application to sheet metal forming, *International Journal of Plasticity*, 15, 35-67 (1999).
- [Zavarise *et al.* 1995] Zavarise G., Wriggers P. e Schrefler B.A., On augmented lagrangian algorithms for thermomechanical contact problems with friction, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38, 2929-2949 (1995).
- [Zavarise *et al.* 1998] Zavarise G., Wriggers P. e Schrefler B.A., A method for solving contact problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42, 473-498 (1998).
- [Zavarise e Wriggers 1999] Zavarise G. e Wriggers P., A superlinear convergent augmented lagrangian procedure for contact problems, *Engineering Computations*, 16, 88-119 (1999).
- [Zhang *et al.* 2002] Zhang H.W., Xu W.L., Di S.L. e Thomson P.F., Quadratic programming method in numerical simulation of metal forming process, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 5555-5578 (2002).
- [Zhong e Nilsson 1994] Zhong Z.H. e Nilsson L., Automatic contact searching algorithm for dynamic finite element analysis, *Computers & Structures*, 52, 187-197 (1994).
- [Zhong e Nilsson 1996] Zhong Z.H. e Nilsson L., A unified contact algorithm based on the territory concept, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 130, 1-16 (1996).
- [Zhou e Wagoner 1995] Zhou D. e Wagoner R.H., Development and application of sheet-forming simulation, *Journal of Materials Processing Technology*, 50, 1-16 (1995).
- [Zhou e Wagoner 1997] Zhou D. e Wagoner R.H., An algorithm for improved convergence in forming analysis, *International Journal of Mechanical Science*, 39, 1363-1384 (1997).

# Algoritmos e Estratégias de Gestão do Problema de Contacto com Atrito em Grandes Deformações

## *Aplicação à Estampagem de Chapas Metálicas*

### Resumo

O objectivo deste trabalho é o desenvolvimento de modelos, algoritmos e métodos numéricos para a simulação numérica do processo de estampagem de chapas metálicas, que contribuam para aumentar a robustez e eficiência numérica dos programas de simulação e melhorar a precisão dos resultados obtidos. Os vários desenvolvimentos propostos são implementados e testados no programa de elementos finitos DD3IMP.

Enquadra-se o problema da simulação numérica do processo de estampagem referindo em particular os desafios tecnológicos e o interesse industrial. Apresenta-se a descrição cinemática dos meios contínuos em grandes transformações, adoptando uma formulação lagrangeana reactualizada, e formula-se a lei de comportamento elastoplástica. Expõem-se as bases teóricas necessárias para a formulação contínua do problema de contacto com atrito e descreve-se a sua formulação variacional. Detalha-se o algoritmo de integração temporal do tipo *Previsão-Correção*, que garante o equilíbrio da estrutura em cada instante de cálculo. Descrevem-se os elementos finitos sólidos e os métodos de integração utilizados. Desenvolve-se o algoritmo de detecção de contacto que tem por base a descrição das ferramentas por superfícies de Bézier. Discutem-se alguns dos métodos mais utilizados para impor a condição de impenetrabilidade e de contacto com atrito, com particular ênfase ao método do lagrangeano aumentado. Desenvolvem-se as matrizes tangentes necessárias à resolução do problema com o auxílio do método de Newton-Raphson. Apresentam-se estudos numéricos que evidenciam a importância de uma correcta modelação das condições de processo da conformação real.

O contributo deste trabalho incide fundamentalmente em cinco áreas distintas: (i) a descrição das ferramentas; (ii) o algoritmo de detecção de contacto; (iii) o método de regularização do problema de contacto com atrito; (iv) o modelo de atrito e (v) a validação experimental dos modelos e algoritmos desenvolvidos. Neste contexto: apresenta-se um estudo numérico de optimização da descrição das ferramentas por superfícies paramétricas de Bézier; procede-se à optimização do algoritmo de gestão das ferramentas a força imposta; implementa-se um algoritmo de detecção de contacto global mais robusto; estudam-se estratégias distintas para a optimização do valor do parâmetro de penalidade e associa-se à lei de Coulomb um modelo que estabelece a evolução do coeficiente de atrito em função da pressão de contacto. A comparação dos resultados numéricos e experimentais permitiu constatar que os desenvolvimentos introduzidos no programa DD3IMP conduziram a uma melhoria significativa na precisão da simulação.



### Palavras-chave:

Estampagem; Simulação Numérica; Grandes Transformações; Elastoplasticidade; Modelos Constitutivos; Contacto com Atrito; Elementos Finitos Sólidos.

Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Universidade de Coimbra

ISBN 972-99204-7-8

# Algorithms and Strategies for the Treatment of Large Deformation Frictional Contact Mechanics

*Application to Sheet Metal Forming*

## Abstract

The main objective of the work presented is the development of models, algorithms and numerical methods to be used in the simulation of the deep drawing process. The intention is to increase the robustness, precision and numerical efficiency of simulation codes. Developments are implemented and tested in a finite element code named DD3IMP.

The numerical simulation of the deep drawing process is reviewed focusing on the technological challenges and industrial relevance. The kinematic description of a continuous medium involving large elastoplastic strains and rotations is presented, adopting an updated lagrangian formulation. The corresponding elastoplastic behaviour law is formulated. The necessary bases for the continuum formulation of the contact with friction problem are presented and its variational formulation is thoroughly described. The adopted *Prediction-Correction* time-integration algorithm, which guarantees the structural equilibrium in each time step, is detailed. A full description of the used solid finite elements and integration methods is presented. A specific contact detection algorithm is developed based on a description of the tools using Bézier surfaces. A review of the methods implemented to impose the unilateral and frictional contact constraints is presented, focusing on the augmented lagrangian approach. The stiffness matrixes necessary to solve the mixed problem with the Newton Raphson method are developed. Some case studies that highlight the importance of the correct modelling of the real process conditions are also presented.

In order to accomplish the defined goals, five distinct areas were focused: (i) the description of the tools; (ii) the contact detection algorithm; (iii) the regularization method applied to obtain the solution of the contact with friction problem; (iv) the friction model and (v) the experimental validation of the developed models and algorithms. In this framework, a numerical study of the optimization of the description of tools using Bézier surfaces is presented. The algorithm that deals with the definition of tools with imposed force is optimized. A robust global contact detection algorithm is developed and implemented. Different strategies for the optimization of the penalty parameter value are studied. A model that describes the evolution of the friction coefficient with the contact pressure is combined with the Coulomb model. The comparison between numerical and experimental results corroborates that the developments implemented in DD3IMP lead to a significant improvement in the accuracy of the simulations.

## Key Words:

Deep Drawing; Numerical Simulation; Large Deformations;  
Elastoplasticity; Constitutive Models; Contact with Friction;  
Solid Finite Elements.