

Telma Morais Madeira

## O Problema Isoperimétrico Clássico



Departamento de Matemática

Universidade de Coimbra

2005

Telma Morais Madeira

# O Problema Isoperimétrico Clássico

Departamento de Matemática

Universidade de Coimbra

2005

Dissertação apresentada à Faculdade de Ciências e  
Tecnologia da Universidade de Coimbra, para obtenção do  
Grau de Mestre em Matemática para o Ensino.

Quero expressar o meu profundo e sincero agradecimento à Professora Doutora Maria Margarida Lopes da Silva Camarinha pela orientação e apoio valiosos ao longo da elaboração desta dissertação.

Um “Muito Obrigada” ao Sr. Luciano da biblioteca do Departamento de Matemática, pela simpatia que sempre me dedicou.

À minha família e amigos estou especialmente grata pelo entusiasmo e incentivo demonstrados. Um agradecimento especial aos meus pais, por todas as oportunidades, bem-estar e tranquilidade que me proporcionam.

Ao João agradeço a disponibilidade e o apoio à hora certa.

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>i</b>
<b>1 Abordagem geométrica do problema isoperimétrico</b>	<b>1</b>
1.1 Preliminares . . . . .	2
1.2 O problema de Herão . . . . .	33
1.3 Teorema Isoperimétrico segundo Zenodoro . . . . .	36
1.4 Teorema Isoperimétrico segundo Steiner . . . . .	46
1.5 Teorema da Selecção de Blaschke . . . . .	52
1.6 Aplicação do Teorema Isoperimétrico à resolução do problema de Dido . . . . .	58
<b>2 Abordagem variacional do problema isoperimétrico</b>	<b>60</b>
2.1 Optimização de funções definidas em espaços normados . . . . .	61
2.2 Equação de Euler-Lagrange de um problema variacional de primeira ordem . . . . .	68
2.3 O problema de Dido . . . . .	74

2.4	O problema isoperimétrico clássico . . . . .	78
	<b>Bibliografia</b>	<b>87</b>

# Introdução

O **Problema Isoperimétrico** teve a sua origem na Grécia Antiga, cerca do século IX a.C., baseada numa lenda, a **Lenda de Dido**. Esta lenda conta um episódio das migrações fenícias para o Ocidente mediterrânico, mas ficou especialmente conhecida devido ao romance entre Dido e Eneias, reproduzido na **Eneida** de Virgílio.

Diz a lenda, na sua forma mais antiga, que Muto, o rei de Tiro, quando morreu, legou o reino aos seus dois filhos, Pigmalião e Elissa (o nome tírio de Dido). Embora Pigmalião fosse ainda uma criança, foi ele quem o povo escolheu para rei. Elissa casou com o seu tio Sicarbas, sacerdote de Hércules e segunda figura do Estado depois do rei. Na tentativa de roubar a enorme fortuna do seu cunhado, Pigmalião mandou matar Sicarbas, e Dido, horrorizada com o crime, decidiu fugir. Em segredo, carregou os barcos com os tesouros de Sicarbas e fugiu acompanhada por nobres tírios descontentes. Para iludir o irmão durante a fuga, conta a lenda que Dido, durante a viagem, atirou ostensivamente ao mar sacos cheios de areia, que dizia estarem cheios de ouro e que oferecia à alma do marido. Seguiram rumo a África, onde os indígenas os receberam de forma amistosa. Dido pediu um pouco

de terra para se estabelecer, tendo-lhe sido concedido que tomasse tanta quanta pudesse conter numa pele de boi. O que aparentemente parecia ser uma oferta ridícula provou ser um golpe de génio: Dido mandou cortar uma pele de boi em tiras muito finas que depois de atadas formaram um longo fio com que delimitou um território bastante vasto. Os indígenas, obrigados a respeitar a promessa feita, concederam-lhe a terra assim delimitada, onde Dido ergueu a cidade de Cartago.



Figura 1: Fio obtido para delimitar o terreno

Sob o reinado de Dido, a cidade de Cartago prosperou e adquiriu tal prestígio que Iarbas, rei indígena, quis casar com Dido, ameaçando declarar guerra à cidade caso ela recusasse. A rainha Dido, que não podia rejeitar a proposta mas abominava essa nova união, pediu um prazo de três meses sob pretexto de acalmar a sombra do primeiro marido com sacrifícios. Quando o prazo terminou, subiu para uma pira fúnebre e suicidou-se.

Foi sobre este tema que Virgílio, sem se preocupar com a cronologia segundo

a qual haveria pelo menos trezentos anos entre a tomada de Tróia e a fundação de Cartago, fantaseou uma outra versão da história fazendo intervir Eneias na lenda de Dido, na sua obra **Eneida**.

Virgílio conta que o herói Eneias é empurrado por uma tempestade para a costa de África e recolhido pelos habitantes de Cartago. Enquanto os companheiros reparavam os navios, Eneias usufruiu da hospitalidade da rainha, que pouco a pouco se apaixonou por ele e se tornou sua amante. Rapidamente o rei Iarbas soube do acontecido e indignado por se ver preterido em favor de um estrangeiro, conseguiu afastar Eneias com a ajuda de Júpiter. Eneias partiu sem tornar a ver a rainha e esta, quando soube que fora abandonada, ergueu uma enorme pira e suicidou-se entre as chamas.

Na Eneida de Virgílio, a lenda de Dido é descrita com ligeiras alterações sendo, no entanto, semelhante a forma como Dido obteve um território tão vasto.

Na verdade, a rainha Dido deparou-se com o seguinte problema:

*“Dado um fio com um determinado comprimento, qual é a maior porção de terra que se consegue delimitar com esse fio? E de que forma se obtém a quantidade máxima?”*

Segundo alguns autores, Dido escolheu um local com acesso ao mar, pelo que a sua ideia foi utilizar não só o fio mas também o mar para delimitar a maior porção de terra possível. Por esta razão, o Problema 0.0.1 (Figura 2) é designado por **problema de Dido**.

**Problema 0.0.1** *De entre as curvas planas de comprimento  $L$  com pontos inicial*

e final fixos numa recta<sup>1</sup> dada, qual é a que juntamente com essa recta delimita a maior área possível?

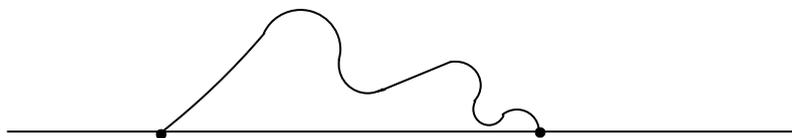


Figura 2: Problema de Dido

O problema matemático que teve por motivação esta lenda designa-se por **problema isoperimétrico clássico** e pode ser formulado da seguinte forma:

**Problema 0.0.2** *De entre as curvas simples fechadas do plano, com um dado comprimento, qual é a que delimita a maior área possível?*

É notável observar que problemas de enunciado tão simples como estes possam ser tão complexos e tenham sido colocados e resolvidos naqueles tempos míticos. Apesar de terem sido resolvidos naquela altura (com base em intuições geométricas, evidentemente), só muitos séculos depois puderam ser justificados. O estudo do problema isoperimétrico clássico permite estabelecer uma propriedade da circunferência usualmente designada por propriedade isoperimétrica da circunferência. A primeira demonstração desta propriedade aparece num comentário de Teão (335-405) à obra *Almagesto* de Ptolemeu (85-165) e nos trabalhos de Pappo (290-350), mas o seu autor é Zenodoro (200a.C.-140a.C.)<sup>2</sup>. Apesar de, nessa época, os gregos

<sup>1</sup>No modelo matemático, a margem do mar é considerada uma linha recta.

<sup>2</sup>Zenodoro viveu entre as épocas de Arquimedes (287a.C.-212a.C.) e de Pappo, pois Zenodoro refere Arquimedes e é citado por Pappo.

terem conhecimento de que a circunferência era a solução do problema isoperimétrico, só a partir de 1880 foi conhecida uma demonstração completa e rigorosa da propriedade isoperimétrica da circunferência, apresentada por Weierstrass (1815-1897) nos seus seminários na Universidade de Berlim.

As primeiras abordagens ao estudo do problema isoperimétrico foram obtidas no contexto da geometria. Zenodoro foi um dos grandes impulsionadores do desenvolvimento do problema, mostrando que, de entre os  $n$ -gonos de comprimento fixo, o  $n$ -gono regular é o que tem a maior área (assumindo que o  $n$ -gono existe, isto é, supondo que o  $n$ -gono podia ser construído com régua e compasso). Só muitos séculos depois surgiram trabalhos de igual impacto. Clara e inegável é também a importância dos trabalhos de Steiner (1796-1863). Steiner apresentou várias demonstrações da propriedade isoperimétrica para a circunferência e para as bolas em espaços euclidianos de dimensão superior, usando, entre outros métodos, a chamada simetrização de Steiner. Tal como Zenodoro, Steiner e os seus anteriores ignoraram o problema da existência de solução, facto que foi mais tarde apontado por Dirichlet (1805-1859). A solução do problema isoperimétrico foi apresentada por Weierstrass, Schwarz (1843-1921) (*“Beweis des Satzes, daß die Kugel kleinere Oberfläche besitzt als jeder andere Körper gleichen Volumens”* 1884) e Edler (*“Vervollständigung der Steinerschen elementargeometrischen Beweise für den Satz, daß der Kreis größeren Flächeninhalt besitzt als jede andere ebene Figur gleich großen Umfangs”* 1882). Mais tarde, Minkowski (1864-1909) deduziu e utilizou o Teorema de Brunn-Minkowski para demonstrar a desigualdade isoperimétrica, enquanto que Blaschke (1885-1962) complementou o método de simetrização de Steiner com o Teorema da Selecção.

Apesar de muitos problemas de otimização terem sido objecto de estudo ao longo dos séculos, só no século XVII deram lugar a uma nova área da matemática designada por cálculo de variações. A história moderna do cálculo de variações teve origem com o problema da Braquistócrona (1696). Foram dois dos irmãos Bernoulli, Jacob (1654-1705) e Johann (1667-1748) - pupilo de Euler -, que encontraram a solução deste problema, sendo, por isso, considerados os fundadores do cálculo de variações. Os métodos inicialmente conhecidos deste novo ramo da matemática foram, quase todos, complementados e descritos nos trabalhos de Euler (1707-1783) e de Lagrange (1736-1813). Nessa época o cálculo de variações limitava-se à dedução de condições necessárias de optimização, como a equação de Euler-Lagrange. Pensa-se que, nos seus estudos, Euler não suspeitou de que houvesse curvas estacionárias (soluções da equação de Euler-Lagrange) que não fossem maximizantes nem minimizantes. Só alguns anos mais tarde começaram a estudar-se condições suficientes de optimização, mais concretamente em 1788 num trabalho de Legendre (1752-1833).

É de realçar a importância do estudo do problema isoperimétrico no desenvolvimento do cálculo de variações. Na tentativa de resolver o problema, Euler deduziu o **Método dos Multiplicadores de Lagrange** (1756), que foi designado por **Método do Problema Isoperimétrico** até ao final do século XVIII. Os trabalhos de Euler fornecem uma demonstração completa da propriedade isoperimétrica da circunferência, no entanto tudo indica que Euler não se apercebeu da necessidade de esclarecer se o problema isoperimétrico tinha ou não solução. A questão fundamental da existência de solução de um problema variacional não lhe deve ter ocorrido. No século XIX, Weierstrass mostrou que os métodos do cálculo de va-

riações da época deixavam essa questão em aberto, apresentando alguns exemplos de problemas de otimização que não tinham solução.

Esta questão desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento do cálculo de variações e só foram estabelecidas condições de existência de solução de problemas variacionais muito mais tarde. Aliás, os métodos desenvolvidos para a demonstração do Teorema isoperimétrico foram posteriormente utilizados para caracterizar a existência de solução em problemas variacionais mais gerais.

Realce-se que o estudo do problema isoperimétrico ao longo dos tempos é ainda alvo da atenção de muitos matemáticos. Muitas generalizações de desigualdades isoperimétricas nos mais variados contextos matemáticos são ainda estudadas em diferentes áreas de investigação matemática.

A desigualdade isoperimétrica  $L^2 - 4\pi A \geq 0$ , onde  $A$  é a área delimitada pela curva  $\gamma$  de comprimento  $L$ , pode ser generalizada para espaços de dimensão superior. Das várias soluções alternativas para o problema isoperimétrico para dimensão superior a dois, mencionam-se a solução de Minkowski (*“Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen”* 1901) e de Blaschke (*“Kreis und Kugel”* 1916). A propriedade isoperimétrica tridimensional pode exprimir-se segundo a desigualdade

$$A^3 \geq 36\pi V^2,$$

sendo  $A$  a área de superfície e  $V$  o volume de um sólido, verificando-se a igualdade no caso da superfície esférica.

As contribuições mais modernas devem-se a Gross (1886-1918), Radó (1895-

1965), Federer (1920- ) e Fleming, Bonnesen (1873-1935), Bauchoff e Pohl, que estabeleceram desigualdades isoperimétricas mais fortes ([20], [16], [30]). Mais recentemente, têm sido desenvolvidas generalizações de desigualdades isoperimétricas no contexto das superfícies e das variedades Riemannianas ([20], [30]).

Tendo em conta que o desenvolvimento da Matemática ao longo dos séculos foi acompanhando os progressos obtidos na resolução do problema isoperimétrico, é objectivo da presente dissertação apresentar algumas formulações do problema e as respectivas soluções. Na tentativa de ser fiel ao desenvolvimento do estudo do problema, a dissertação está organizada do seguinte modo: o primeiro capítulo é dedicado à abordagem geométrica do problema, começando por se apresentar a primeira demonstração conhecida do Teorema Isoperimétrico para polígonos, devida a Zenodoro. Em seguida, apresenta-se a demonstração de Steiner para o Teorema Isoperimétrico que se baseia em conceitos de convexidade e simetria. As demonstrações de Zenodoro e de Steiner estão incompletas pois foram obtidas assumindo a existência de solução para o problema. Neste capítulo, estas demonstrações são complementadas com outros resultados que permitem resolver, de forma rigorosa, o problema isoperimétrico.

No segundo capítulo estuda-se o problema no contexto da teoria de cálculo de variações. Deduz-se a equação de Euler-Lagrange para o problema de Dido e para o problema isoperimétrico, utilizando o Método dos Multiplicadores de Lagrange. Em seguida, apresenta-se a desigualdade de Wirtinger e demonstra-se o Teorema Isoperimétrico.

## Capítulo 1

# Abordagem geométrica do problema isoperimétrico

Neste capítulo começa-se por apresentar as noções de comprimento de uma curva e de área de um conjunto. Em seguida, apresentam-se a primeira demonstração conhecida do Teorema Isoperimétrico para polígonos, devida a Zenodoro e a demonstração de Steiner para o Teorema Isoperimétrico, esta baseada em conceitos de convexidade e simetria. As demonstrações de Zenodoro e de Steiner estão incompletas pois foram obtidas assumindo a existência de solução para o problema. Neste capítulo, estas demonstrações são complementadas com outros resultados que permitem resolver, de forma rigorosa, o problema isoperimétrico.

As referências utilizadas são, essencialmente, [20], [35] e [21].

Ao longo do capítulo denota-se por  $AB$  a recta que contém os pontos  $A$  e  $B$  do plano, por  $\dot{A}B$  a semi-recta com origem em  $A$  e que contém o ponto  $B$ , por  $[AB]$  o segmento de recta de extremos  $A$  e  $B$ , e por  $\overline{AB}$  o comprimento de  $[AB]$ .

Denota-se por  $\angle ABC$  o ângulo e por  $\widehat{ABC}$  a sua amplitude.

Designa-se por  $[A_1, A_2, \dots, A_k]$  um polígono plano de  $k$  lados.

## 1.1 Preliminares

Considere-se o conjunto de pontos do plano,  $\mathbb{R}^2$ , munido da norma euclidiana  $|\cdot|$ . Seja  $\gamma$  uma função contínua de domínio  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  e conjunto de chegada  $\mathbb{R}^2$ . A  $\gamma$  chama-se **curva parametrizada**, ou simplesmente **curva**, e ao seu contra-domínio chama-se **traço da curva**  $\gamma$ . Sempre que não haja confusão, utiliza-se o termo curva para referir o traço da curva. Designe-se por  $C^s([a, b])$  o conjunto das funções reais de classe  $C^s$  definidas em  $[a, b]$ . A curva  $\gamma$  diz-se de classe  $C^s$  se  $\gamma$  é uma função de **classe**  $C^s$ ,  $s = 0, 1, \dots, n$ , ou seja, se  $\gamma \in \left(C^s([a, b])\right)^2$ . Se a função  $\gamma$  é bijectiva, excepto possivelmente nos seus pontos inicial e final, chama-se **curva simples**. Se  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , diz-se que  $\gamma$  é uma **curva fechada**.

Considerem-se os  $n+1$  pontos do plano  $P_0, P_1, \dots, P_n$ . Seja  $\tau$  a curva que verifica  $\tau(i) = P_i, i = 0, \dots, n$ , e  $\tau(t) = (1-t+i)P_i + (t-i)P_{i+1}$  se  $i \leq t \leq i+1$ . A  $\tau$  chama-se **curva poligonal** de vértices  $P_0, P_1, \dots, P_n$  e  $[P_i, P_{i+1}]$  designa-se por **lado** da curva poligonal  $\tau$ , para  $i = 0, \dots, n$ . Os vértices de uma curva poligonal devem ser referidos por uma ordem apropriada. Tal como se observa na Figura 1.1, as curvas

poligonais  $\tau_1$  e  $\tau_2$  têm o mesmo conjunto de vértices e são diferentes. A primeira deve ser referida como a curva poligonal  $\tau_{ABCD}$  e a segunda como  $\tau_{ACBD}$ . Em particular, uma curva poligonal simples fechada de  $n$  lados,  $\tau_{P_0P_1\dots P_{n-1}}$ , representa o  $n$ -gono ou **polígono** de  $n$  lados  $[P_0P_1\dots P_{n-1}]$ .

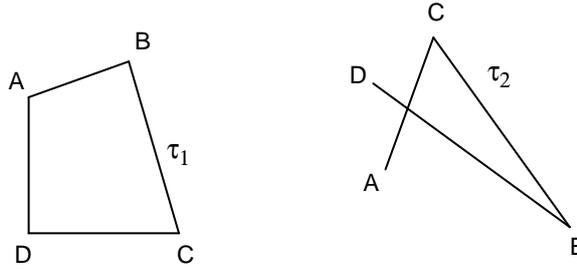


Figura 1.1: Curvas poligonais

O **comprimento da curva poligonal**  $\tau_{P_0,P_1,\dots,P_n}$  é definido por

$$L(\tau_{P_0,P_1,\dots,P_n}) = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{P_i P_{i+1}}.$$

Sejam  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva,

$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$$

uma partição de  $[a, b]$  e  $\tau_{\gamma(t_0),\gamma(t_1),\dots,\gamma(t_n)}$  a curva poligonal definida pelos pontos  $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)$  da curva  $\gamma$ . Considere-se o conjunto formado pelos números  $L(\tau_{\gamma(t_0),\gamma(t_1),\dots,\gamma(t_n)})$  (ou  $L(\gamma; \mathcal{P})$ ), obtidos para todas as partições de  $[a, b]$ . Quando não houver confusão escreve-se  $L(\mathcal{P})$  em vez de  $L(\gamma; \mathcal{P})$ .

Diz-se que  $\gamma$  é **rectificável** se esse conjunto é limitado e chama-se **comprimento de  $\gamma$** , que se denota por  $L(\gamma)$ , ao supremo desse conjunto, ou seja,

$$L(\gamma) = \sup_{\mathcal{P}} \{L(\gamma; \mathcal{P})\}.$$

Assim, o comprimento da curva rectificável  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  caracteriza-se por:

1.  $L(\gamma) \geq L(\gamma; \mathcal{P})$  para toda a partição  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$ ;
2. Dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma partição  $\mathcal{P}$  tal que  $L(\gamma; \mathcal{P}) > L(\gamma) - \varepsilon$ .

Note-se que a continuidade da curva não garante a sua rectificabilidade. De facto, como se verá a seguir, quando  $a > 0$  a curva  $\gamma : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\gamma(t) = \begin{cases} t \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right) & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

não é rectificável. Para todo  $t \in [-a, a]$ ,  $\gamma(t) \in [-a, a]$  e quando  $t$  se aproxima de zero,  $\gamma$  oscila infinitas vezes em torno de 0 e, nessas oscilações o comprimento da curva é infinito.

Veja-se agora que toda a curva rectificável  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é limitada. Com efeito, para todo  $t \in [a, b]$ , considere-se a partição  $\mathcal{P} = \{a, t, b\}$ . Então,

$$|\gamma(t) - \gamma(a)| \leq |\gamma(a) - \gamma(t)| + |\gamma(t) - \gamma(b)| = L(\mathcal{P}) \leq L(\gamma).$$

Assim, todos os pontos de  $\gamma$ , pertencentes à imagem de  $\gamma$ , estão contidos na bola  $\bar{V}(\gamma(a), L(\gamma))$ .

Seja  $\gamma$  uma curva rectificável definida em  $[a, b]$ . Diz-se que uma partição  $\mathcal{Q}$  do intervalo  $[a, b]$  é mais fina do que outra partição  $\mathcal{P}$  do mesmo intervalo, quando

$\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ . O teorema seguinte mostra que refinando uma partição o comprimento da curva poligonal inscrita correspondente não diminui.

**Teorema 1.1.1** *Se  $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$  então  $L(\mathcal{P}) \leq L(\mathcal{Q})$ .*

**Demonstração.** Suponha-se que  $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \{r\}$ , com  $t_{i-1} \leq r \leq t_i$ . Então

$$L(\mathcal{Q}) - L(\mathcal{P}) = |\gamma(t_i) - \gamma(r)| + |\gamma(r) - \gamma(t_{i-1})| - |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|.$$

Pela desigualdade triangular<sup>1</sup>, tem-se  $l(\mathcal{Q}) - l(\mathcal{P}) \geq 0$ . □

Fixe-se uma partição  $\mathcal{P}_0$  do intervalo  $[a, b]$ . Se, na definição de comprimento da curva  $\gamma$ , em vez de todas as partições de  $[a, b]$  se considerarem apenas as que são mais finas do que  $\mathcal{P}_0$ , obter-se-á o mesmo resultado.

**Lema 1.1.2**  $\sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}) = \sup_{\mathcal{Q} \supset \mathcal{P}_0} L(\mathcal{Q})$ .

**Demonstração.** Obviamente que  $\sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}) \geq \sup_{\mathcal{Q} \supset \mathcal{P}_0} L(\mathcal{Q})$ . Por outro lado, para uma partição  $\mathcal{P}$  qualquer, considerando  $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_0$  tem-se  $\mathcal{Q} \supset \mathcal{P}_0$  e  $\mathcal{Q} \supset \mathcal{P}$ . Logo, pelo Teorema 1.1.1,  $L(\mathcal{P}) \leq L(\mathcal{Q})$  e, portanto,  $\sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}) \leq \sup_{\mathcal{Q} \supset \mathcal{P}_0} L(\mathcal{Q})$ . □

**Teorema 1.1.3** *Dado  $c \in [a, b]$ , a curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é rectificável se e só se as restrições  $\gamma_1 = \gamma|_{[a, c]}$  e  $\gamma_2 = \gamma|_{[c, b]}$  são rectificáveis. Nesse caso,*

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2).$$

---

<sup>1</sup>**Desigualdade triangular** *Se  $A, B, e C$  são pontos distintos do plano, então  $\overline{AB} \leq \overline{AC} + \overline{CB}$ , em que  $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$  se e só se  $A, B$  e  $C$  são colineares.*

**Demonstração.** Uma partição  $\mathcal{P}$  do intervalo  $[a, b]$  contém o ponto  $c$  se e só se  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ , onde  $\mathcal{P}_1$  é uma partição de  $[a, c]$  e  $\mathcal{P}_2$  uma partição de  $[c, b]$ .

Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são rectificáveis, então  $L(\gamma; \mathcal{P}) = L(\gamma_1; \mathcal{P}_1) + L(\gamma_2; \mathcal{P}_2)$  e, pelo Lema 1.1.2 vem que

$$L(\gamma) = \sup_{c \in \mathcal{P}} L(\gamma; \mathcal{P}) = \sup_{\mathcal{P}_1} L(\gamma_1; \mathcal{P}_1) + \sup_{\mathcal{P}_2} L(\gamma_2; \mathcal{P}_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2). \quad \square$$

Se  $\gamma$  é uma curva poligonal, pelo Teorema 1.1.3, o seu comprimento é igual à soma dos comprimentos dos segmentos que a compõem.

Uma curva ser ou não rectificável não depende da norma usada em  $\mathbb{R}^2$ , já que duas normas quaisquer são equivalentes. De facto, se  $|x| \leq c\|x\|$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ , com  $c > 0$ , então para toda a partição  $\mathcal{P}$  tem-se

$$\sum |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leq c \sum \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|.$$

Assim, se  $\gamma$  é rectificável segundo a norma  $|\cdot|$  é também rectificável segundo a norma  $\|\cdot\|$ . O comprimento  $L(\gamma)$  depende da norma. O segmento de recta que une os pontos  $A = (0, 1)$  e  $B = (1, 0)$  no plano, tem comprimento 2 na norma da soma<sup>2</sup> e  $\sqrt{2}$  na norma euclidiana.

Ao longo da dissertação considera-se sempre a norma euclidiana  $|\cdot|$  em  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 1.1.4** *A curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é rectificável se e só se cada uma das funções coordenadas  $\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$  é rectificável.*

**Demonstração.** Como a rectificabilidade de  $\gamma$  não depende da norma, considere-se a norma da soma. Então, para toda a partição  $\mathcal{P}$  do intervalo  $[a, b]$ , tem-se

<sup>2</sup>Para  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $|x|_s = |x_1| + |x_2|$  designa-se norma da soma.

$L(\gamma; \mathcal{P}) = \sum_{1 \leq i \leq n} L(\gamma_i; \mathcal{P})$ . Portanto, quando  $\mathcal{P}$  varia, o conjunto dos números  $L(\gamma; \mathcal{P})$  é limitado se e só se é limitado cada um dos conjuntos de números  $L(\gamma_1; \mathcal{P}), \dots, L(\gamma_n; \mathcal{P})$ . □

Há curvas rectificáveis que não são contínuas. Em particular, o teorema seguinte é válido para uma classe de curvas mais vasta. Contudo, no que se segue, consideram-se apenas curvas contínuas.

A **norma de uma partição**  $\mathcal{P}$  designa-se por  $|\mathcal{P}|$  e é definida por

$$|\mathcal{P}| = \max_{1 \leq i \leq k} (t_i - t_{i-1}).$$

**Teorema 1.1.5** *Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva contínua. Então as afirmações seguintes são equivalentes.*

- (1)  $\gamma$  é rectificável, com  $L(\gamma) = L$ ;
- (2)  $\lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} L(\gamma; \mathcal{P})$  existe e é igual a  $L$ .

**Demonstração.** Suponha-se que se verifica (1). Dado  $\varepsilon > 0$ , considere-se a partição  $\mathcal{P}_0 = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$  tal que  $L - \frac{\varepsilon}{2} < L(\mathcal{P}_0) \leq L$ . Tome-se  $\delta > 0$  inferior à menor das amplitudes dos intervalos de  $\mathcal{P}_0$  e tal que

$$t_i - \delta < s < t_i < t < t_i + \delta \Rightarrow \left| |\gamma(t) - \gamma(t_i)| + |\gamma(t_i) - \gamma(s)| - |\gamma(t) - \gamma(s)| \right| < \frac{\varepsilon}{2k},$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, k - 1$ .

Prove-se que  $|\mathcal{P}| < \delta \Rightarrow |L(\mathcal{P}) - L| < \varepsilon$ . Dada a partição  $\mathcal{P}$ , com  $|\mathcal{P}| < \delta$ , tem-se  $L - \frac{\varepsilon}{2} < L(\mathcal{P} \cup \mathcal{P}_0) \leq L$  e  $0 \leq L(\mathcal{P} \cup \mathcal{P}_0) - L(\mathcal{P})$  igual à soma de, no máximo,  $k$  termos da forma  $|\gamma(t) - \gamma(t_i)| + |\gamma(t_i) - \gamma(s)| - |\gamma(t) - \gamma(s)|$ , onde  $[s, t]$  é um

intervalo de  $\mathcal{P}$  contendo algum  $t_i$ . (Como  $\mathcal{P} \subset \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_0$ , os outros intervalos de  $\mathcal{P}$  também são intervalos de  $\mathcal{P} \cup \mathcal{P}_0$ , logo anulam-se na diferença  $L(\mathcal{P} \cup \mathcal{P}_0) - L(\mathcal{P})$ .) Então  $|\mathcal{P}| < \delta$  implica que  $0 \leq L(\mathcal{P} \cup \mathcal{P}_0) - L(\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{2}$  e, por isso,  $L - \varepsilon < L(\mathcal{P}) \leq L$ .

Suponha-se agora que se verifica (2). Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$|\mathcal{P}| < \delta \Rightarrow L - \varepsilon < L(\mathcal{P}) < L + \varepsilon.$$

Considere-se uma partição  $\mathcal{P}_0$  tal que  $|\mathcal{P}_0| < \delta$ . Como  $\mathcal{P} \supset \mathcal{P}_0 \Rightarrow |\mathcal{P}| \leq |\mathcal{P}_0| < \delta$ , tem-se  $L - \varepsilon < L(\mathcal{P}) < L + \varepsilon$  sempre que  $\mathcal{P} \supset \mathcal{P}_0$ . Pelo Lema 1.1.2,  $\gamma$  é rectificável e  $L - \varepsilon \leq L(\gamma) \leq L + \varepsilon$ . Como  $\varepsilon > 0$  conclui-se que  $L(\gamma) = L$ . □

Toda a curva de classe  $C^1$  no plano é rectificável, como se demonstra em seguida.

**Teorema 1.1.6** *Se  $\gamma \in (C^1([a, b]))^2$ , então  $\gamma$  é uma curva rectificável e*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

*Ou seja, se  $\gamma \in (C^1([a, b]))^2$  é uma curva definida por  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , com  $t \in [a, b]$ , então  $\gamma$  é rectificável e  $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ .*

**Demonstração.** Mostre-se que  $\lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} L(\gamma; \mathcal{P}) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ . Seja  $\varepsilon > 0$ . Pela definição de integral, tomando  $\xi_i = t_{i-1} \in [t_{i-1}, t_i]$ , verifique-se que existe  $\delta_1 > 0$

tal que  $|\mathcal{P}| < \delta_1$  implica

$$\left| \int_a^b |\gamma'(t)| dt - \sum_{i=1}^k |\gamma'(t_{i-1})|(t_i - t_{i-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como  $\gamma$  é uniformemente diferenciável, existe  $\delta_2 > 0$  tal que  $|\mathcal{P}| < \delta_2$  implica  $\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = [\gamma'(t_{i-1}) + \rho_i](t_i - t_{i-1})$ , com  $|\rho_i| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ . Logo,

$$|\mathcal{P}| < \delta_2 \Rightarrow \left| L(\mathcal{P}) - \sum |\gamma'(t_{i-1})|(t_i - t_{i-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Então  $|\mathcal{P}| < \delta \Rightarrow \left| L(\mathcal{P}) - \int_a^b |\gamma'(t)| dt \right| < \varepsilon$ . □

**Exemplo 1.1.7** Considere-se a curva  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)),$$

cujos gráfico é a circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio 1. O comprimento de  $\gamma$  é igual a  $\int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = 2\pi$ .

Introduza-se agora o conceito de área de uma região do plano. Chama-se **região poligonal** à reunião de um  $n$ -gono com o seu interior. Seja  $\mathcal{R}$  o conjunto das regiões poligonais. A área de uma qualquer região poligonal é definida da seguinte forma:

- (i) A função área é uma função real  $A : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (ii) Para toda a região poligonal  $R \in \mathcal{R}$ ,  $A(R) > 0$ .

(iii) Se duas regiões triangulares são congruentes, então têm a mesma área.

(iv) Se duas regiões poligonais se intersectam apenas em arestas e vértices, ou não se intersectam, então a área da sua reunião é igual à soma das suas áreas.

(v) Se uma região quadrangular tem lado de comprimento  $a$ , então a sua área é igual a  $a^2$ .

**Teorema 1.1.8** *A área de um rectângulo<sup>3</sup> é igual ao produto do comprimento da sua base pelo comprimento da sua altura.*

**Demonstração.** Considere-se um rectângulo  $R$  de base  $b$  e altura  $h$  e construa-se um quadrado de lado  $b+h$ , que será decomposto em quadrados e rectângulos como na Figura 1.2.

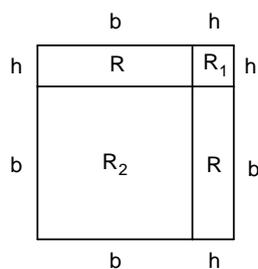


Figura 1.2:

Então, por (iv) e (v),

$$(b+h)^2 = 2A(R) + A(R_1) + A(R_2),$$

o que é equivalente a  $b^2 + 2bh + h^2 = 2A(R) + h^2 + b^2$ ,

---

<sup>3</sup>Designa-se por área do rectângulo a área da região rectangular e de modo análogo para qualquer polígono.

ou seja,

$$A(R) = bh.$$

□

**Teorema 1.1.9** *A área de um triângulo rectângulo é igual a metade do produto do comprimento dos seus catetos.*

**Demonstração.** Seja  $[DEF]$  um triângulo rectângulo em  $F$ . Considere-se um ponto  $G$  tal que  $[DFEG]$  é um rectângulo (Figura 1.3).

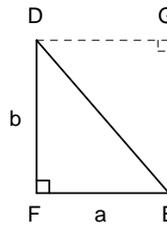


Figura 1.3:

Então, por (iv),

$$A([DFEG]) = A([DFE]) + A([DGE])$$

e, por (iii),

$$A([DFE]) = A([DGE]),$$

logo

$$A([DFEG]) = 2A([DFE]).$$

Pelo Teorema 1.1.8, tem-se

$$A([DFE]) = \frac{1}{2} \overline{DF} \times \overline{FE} = \frac{a \cdot b}{2}.$$

□

**Teorema 1.1.10** *A área de um triângulo é igual a metade do produto do comprimento de qualquer base pelo comprimento da altura correspondente.*

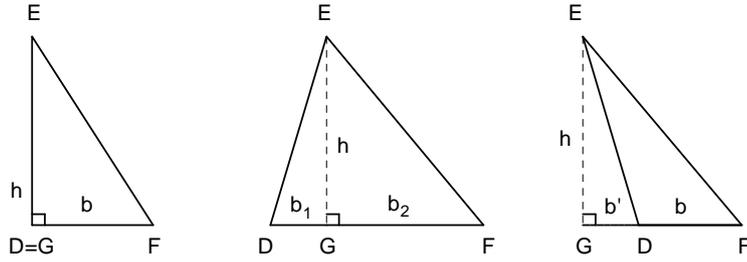


Figura 1.4:

**Demonstração.** Sejam  $[DEF]$  um triângulo e  $G$  o pé da perpendicular relativamente à recta que passa por  $D$  e  $F$ , traçada a partir de  $E$ . Considerem-se  $\overline{DF} = b$  e  $\overline{EG} = h$ , como na Figura 1.4. Existem três casos a considerar:

(i) Se  $D = G$ , então o triângulo  $[DEF]$  é rectângulo e, pelo Teorema 1.1.9,

$$A([DEF]) = \frac{1}{2}bh.$$

(ii) Se  $G \in [DF]$ , considerando  $\overline{DG} = b_1$  e  $\overline{GF} = b_2$ , pelo Teorema 1.1.9 obtém-se  $A([EGD]) = \frac{1}{2}b_1h$  e  $A([EGF]) = \frac{1}{2}b_2h$ .

Por (iv),  $A([DEF]) = A([EGD]) + A([EGF])$  e, portanto,

$$A([DEF]) = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h = \frac{1}{2}bh.$$

(iii) Se  $D \in [GF]$ , considerando  $\overline{DG} = b'$ , pelo Teorema 1.1.9 obtém-se  $A([EGF]) = \frac{1}{2}(b' + b)h$ . Também pelo Teorema 1.1.9,  $A([EGD]) = \frac{1}{2}b'h$ . Por (iv),  $A([EGF]) = A([EGD]) + A([DEF])$  e, portanto,

$$A([DEF]) = A([EGF]) - A([EGD]) = \frac{1}{2}bh.$$

□

**Teorema 1.1.11** *A área de um paralelogramo é igual ao produto do comprimento de qualquer base pelo comprimento da altura correspondente.*

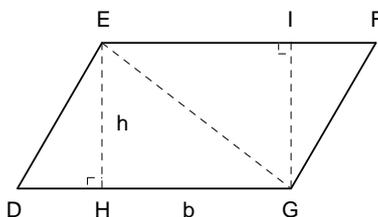


Figura 1.5:

**Demonstração.** Seja  $[DEFG]$  um paralelogramo de base de comprimento  $\overline{DG} = b$  e altura correspondente de comprimento  $\overline{EH} = h$ . Por (iv),  $A([DEFG]) = A([DEG]) + A([EGF])$  e aplicando o Teorema 1.1.10 obtém-se  $A([DEG]) = \frac{1}{2}bh$  e  $A([EGF]) = \frac{1}{2}bh$  logo,  $A([DEFG]) = bh$ . □

Em seguida, exprime-se a área de uma região poligonal em termos da sua decomposição em regiões triangulares.

Uma região poligonal  $\Gamma$  pode ser decomposta numa reunião de regiões triangulares tais que se duas dessas regiões se intersectam, a sua intersecção é uma aresta ou um vértice (Figura 1.6).

Esta afirmação pode ser demonstrada por indução completa sobre o número de lados de  $\Gamma$ . De facto, a afirmação é verdadeira para um triângulo; suponha-se que ainda é verdadeira para todas as regiões poligonais com menos de  $n$  lados.

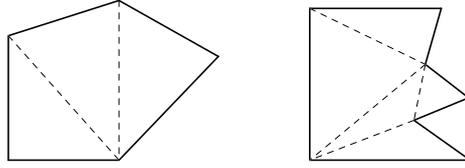


Figura 1.6: Regiões poligonais decompostas em regiões triangulares

Seja  $\Gamma = P_0P_1\dots P_{n-1}$  uma região poligonal com  $n$  lados e suponha-se que, de entre todos os vértices,  $P_1$  tem uma ordenada mínima (Figura 1.7).

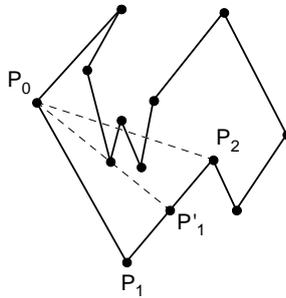


Figura 1.7: Região poligonal

Se nenhum vértice de  $\Gamma$  pertence ao interior do triângulo  $[P_0P_1P_2]$ , então

$$\Gamma = \Delta[P_0P_1P_2] \cup \Gamma',$$

onde  $\Gamma' = P_0P_2\dots P_{n-1}$ . Como  $\Gamma'$  tem  $n - 1$  lados, pela hipótese de indução tem-se que  $\Gamma'$  pode ser decomposta em regiões triangulares, pelo que também  $\Gamma$  o pode ser.

Suponha-se agora que  $[P_0P_1P_2]$  contém vértices de  $\Gamma$  no seu interior e seja  $P_j$

o vértice tal que  $\angle P_j P_0 P_2$  é um ângulo de maior amplitude de entre os vértices do interior de  $[P_0 P_1 P_2]$ . Se  $P'_1 = \dot{P}_0 P_j \cap [P_1 P_2] \setminus \{P_1, P_2\}$ , então

$$\Gamma = \Delta[P_0 P_1 P'_1] \cup \Gamma' \cup \Gamma'',$$

onde  $\Gamma' = P_j P'_1 P_2 \dots P_{j-1}$  e  $\Gamma'' = P_0 P_j P_{j+1} \dots P_{n-1}$ . Tanto  $\Gamma'$  como  $\Gamma''$  têm menos de  $n$  lados logo, pela hipótese de indução,  $\Gamma'$  e  $\Gamma''$  podem ser decompostas em regiões triangulares e, portanto,  $\Gamma$  também o pode ser.

Decompondo em regiões triangulares uma região poligonal  $\Gamma$  de dois modos diferentes e somando as áreas dos triângulos na primeira decomposição, obter-se-á o mesmo resultado que somando as áreas dos triângulos na segunda decomposição?

**Teorema 1.1.12** *Considere-se o triângulo  $[A_1 A_2 A_3]$ . Sejam  $O$  e  $U_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , pontos do plano tais que  $\overrightarrow{OU_i}$  é um vector normal exterior unitário relativamente a  $[A_j A_k]$ ,  $i \neq j, k$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$ . Então, para qualquer ponto  $Z$  e qualquer ponto  $X_i \in [A_j A_k]$ ,  $i \neq j, k$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$ , tem-se*

$$2A(\Delta A_1 A_2 A_3) = \overline{A_1 A_2} \overrightarrow{OU_3} \cdot \overrightarrow{ZX_3} + \overline{A_2 A_3} \overrightarrow{OU_1} \cdot \overrightarrow{ZX_1} + \overline{A_3 A_1} \overrightarrow{OU_2} \cdot \overrightarrow{ZX_2}$$

em que o produto assinalado é o produto interno.

**Demonstração.** Suponha-se que  $Z$  pertence à recta que passa nos pontos  $A_1$  e  $A_2$  e seja

$$K = \overline{A_1 A_2} \overrightarrow{OU_3} \cdot \overrightarrow{ZX_3} + \overline{A_2 A_3} \overrightarrow{OU_1} \cdot \overrightarrow{ZX_1} + \overline{A_3 A_1} \overrightarrow{OU_2} \cdot \overrightarrow{ZX_2}.$$

Como  $\overrightarrow{OU_3} \cdot \overrightarrow{ZX_3} = 0$ , tem-se

$$K = \overline{A_2 A_3} \overrightarrow{OU_1} \cdot \overrightarrow{ZX_1} + \overline{A_3 A_1} \overrightarrow{OU_2} \cdot \overrightarrow{ZX_2}.$$

Se  $A_2 \in [A_1Z]$ , então

$$K = 2A(\Delta A_1ZA_3) - 2A(\Delta A_2ZA_3) = 2A(\Delta A_1A_2A_3)$$

e se  $Z \in [A_1A_2]$  tem-se

$$K = 2A(\Delta A_1ZA_3) + 2A(\Delta A_2ZA_3) = 2A(\Delta A_1A_2A_3).$$

Analogamente, se  $A_1 \in [ZA_2]$ ,

$$K = 2A(\Delta A_1A_2A_3).$$

A mesma técnica mostra que o teorema se mantém sempre que  $Z$  é um ponto colinear com quaisquer dois vértices de  $\Delta A_1A_2A_3$ . Seja  $\alpha$  o ângulo verticalmente oposto ao ângulo formado por  $\dot{A}_1A_2$  e  $\dot{A}_1A_3$ .

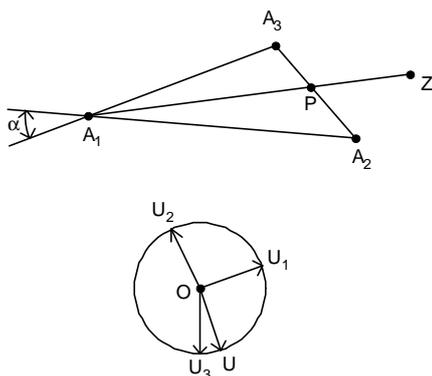


Figura 1.8:

Suponha-se que  $Z$  pertence ao interior de  $\alpha$  ou ao interior de  $\angle A_2A_1A_3$  (Figura 1.8).

Considere-se  $P$  o ponto de intersecção de  $[A_1Z]$  com  $[A_2A_3]$  e aplique-se a técnica anterior aos triângulos  $[PA_3A_1]$  e  $[PA_2A_1]$  para obter

$$2A(\Delta PA_3A_1) = \overline{A_1P} \overrightarrow{OU} \cdot \overrightarrow{ZP} + \overline{PA_3} \overrightarrow{OU_1} \cdot \overrightarrow{ZX_1} + \overline{A_3A_1} \overrightarrow{OU_2} \cdot \overrightarrow{ZX_2}$$

e  $2A(\Delta PA_2A_1) = \overline{A_1P} \overrightarrow{UO} \cdot \overrightarrow{ZP} + \overline{PA_2} \overrightarrow{OU_1} \cdot \overrightarrow{ZX_1} + \overline{A_2A_1} \overrightarrow{OU_3} \cdot \overrightarrow{ZX_3}$ ,  
onde  $\overrightarrow{OU}$  é o vector normal unitário relativamente a  $[A_1P]$ , exterior a  $\Delta A_1PA_3$ .

Portanto,

$$2A(\Delta A_1A_2A_3) = \overline{A_2A_3} \overrightarrow{OU_1} \cdot \overrightarrow{ZX_1} + \overline{A_3A_1} \overrightarrow{OU_2} \cdot \overrightarrow{ZX_2} + \overline{A_1A_2} \overrightarrow{OU_3} \cdot \overrightarrow{ZX_3}.$$

Como este processo não depende do ângulo cujo interior contém  $Z$ , a demonstração está concluída. □

**Teorema 1.1.13** *Se  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$  é uma decomposição triangular da região poligonal  $\Gamma = P_0P_1\dots P_n$ , então, para qualquer ponto  $Z$ ,*

$$2 \sum_{i=1}^k A(\Delta_i) = \overline{P_0P_1} \overrightarrow{OU_{01}} \cdot \overrightarrow{ZX_{01}} + \overline{P_1P_2} \overrightarrow{OU_{12}} \cdot \overrightarrow{ZX_{12}} + \dots + \overline{P_nP_0} \overrightarrow{OU_{n0}} \cdot \overrightarrow{ZX_{n0}}$$

onde  $\overrightarrow{OU_{ij}}$  é um vector normal exterior unitário relativamente a  $[P_iP_j]$ , e  $X_{ij} \in [P_iP_j]$ , com  $i, j = 1, \dots, k$ .

**Demonstração.** Suponha-se que quaisquer dois triângulos da decomposição se intersectam num vértice ou numa aresta. Na verdade, se  $\Delta_i = \Delta ABC$  e um vértice  $D \in \Delta_j$  pertence a  $[AB]$ , então substituindo  $\Delta ABC$  por  $\Delta ADC$  e  $\Delta BDC$ , a soma da área dos triângulos não se altera.

Considere-se um lado  $[AB]$  de qualquer triângulo da decomposição. Se  $A$  ou  $B$  é um ponto interior de  $\Gamma$ , então  $[AB]$  tem de ser comum a dois triângulos da decomposição, digamos  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$ . Pelo Teorema 1.1.12, somando a área de todos os triângulos, as duas parcelas devidas a  $[AB]$  somam zero, pois a normal unitária a  $[AB]$  exterior a  $\Delta_1$  é simétrica da normal unitária a  $[AB]$  exterior a  $\Delta_2$ . As restantes parcelas são relativas aos lados da região poligonal, pelo que o teorema fica provado. □

De acordo com o Teorema 1.1.13, o valor de  $2 \sum_{i=1}^k A(\Delta_i)$  não depende da decomposição considerada pelo que se exprime a **área da região poligonal**  $\Gamma$  por  $A(\Gamma) = \sum_{i=1}^k A(\Delta_i)$ , para qualquer decomposição triangular  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ .

**Teorema 1.1.14** *Se  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são regiões poligonais tais que  $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ , então  $A(\Gamma_1) \leq A(\Gamma_2)$ .*

**Demonstração.** Considere-se a região  $\Gamma_2 - \Gamma_1$ . Sejam  $P$  e  $Q$  pontos das regiões  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , como se indica na Figura 1.9. Note-se que  $[PQ]$  decompõe  $\Gamma_2 - \Gamma_1$  na reunião de duas regiões poligonais e, portanto, a área de  $\Gamma_2$  é maior do que a de  $\Gamma_1$ . □

Seja  $R$  um conjunto de pontos do plano. Se não existir uma região poligonal  $\Gamma$  tal que  $\Gamma \subset R$ , considere-se  $m_i(R) = 0$ . Caso contrário, considere-se

$$m_i(R) = \sup_{\Gamma \subset R} A(\Gamma).$$

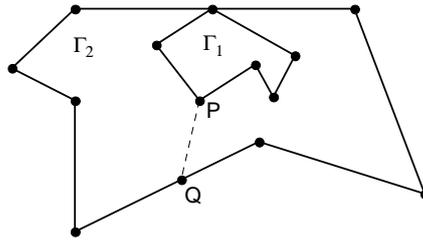


Figura 1.9:

A  $m_i(R)$  chama-se **medida interior** de  $R$ . Da definição conclui-se que a medida interior de um ponto ou de um segmento é zero. Se não existir uma região poligonal  $\Gamma$  tal que  $R \subset \Gamma$ , então a **medida exterior** de  $R$ , representada por  $m_e(R)$ , não está definida. Caso contrário, considera-se

$$m_e(R) = \inf_{R \subset \Gamma} A(\Gamma).$$

Quando  $m_e(R) = m_i(R)$ , denota-se o valor comum por  $m(R)$  ou  $A(R)$ , ao qual se chama **medida de Jordan** ou **área de R**. Nestas condições diz-se que o conjunto  $R$  é **mensurável**.

O Teorema seguinte afirma que o conceito de área segundo Jordan de uma região poligonal coincide com o conceito de área definido anteriormente.

**Teorema 1.1.15** *Toda a região poligonal tem medida de Jordan igual à sua área.*

**Demonstração.** Para uma dada região poligonal  $\Gamma$ , sejam  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  o conjunto das regiões poligonais contidas em  $\Gamma$  e contendo  $\Gamma$ , respectivamente. Claro que  $\Gamma \in \mathcal{P}$

e  $\Gamma \in \mathcal{Q}$ . Pelo Teorema 1.1.14, vem que  $A(\Gamma_1) \leq A(\Gamma)$  para todo  $\Gamma_1 \in \mathcal{P}$ . Assim,  $m_i(\Gamma) = A(\Gamma)$  e, analogamente,  $A(\Gamma) = m_e(\Gamma)$ .

Tem-se então  $m(\Gamma) = m_e(\Gamma) = m_i(\Gamma) = A(\Gamma)$ . □

**Teorema 1.1.16** *Para qualquer conjunto  $R$  com medida exterior, tem-se*

$$m_i(R) \leq m_e(R).$$

**Demonstração.** Sejam  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  o conjunto das regiões poligonais contidas em  $R$  e contendo  $R$ , respectivamente. Se  $\Gamma \in \mathcal{P}$  e  $\Phi \in \mathcal{Q}$ , então  $A(\Gamma) \leq A(\Phi)$ . Portanto,

$$\forall \Phi \in \mathcal{Q}, m_i(R) \leq A(\Phi)$$

e, conseqüentemente,  $m_i(R) \leq m_e(R)$ . □

**Lema 1.1.17** *Seja  $R$  um conjunto mensurável no plano. Então, para todo  $\varepsilon > 0$ , existem regiões poligonais  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  tais que  $\Gamma \subset R \subset \Gamma'$  e  $A(\Gamma') - A(\Gamma) < \varepsilon$ .*

**Demonstração.** Seja  $R$  um conjunto mensurável, isto é,  $m_e(R) = m_i(R)$ . Considere-se uma região poligonal  $\Gamma$  tal que  $\Gamma \subset R$  e  $A(\Gamma) > m_i(R) - \frac{\varepsilon}{2}$  ou seja,  $-A(\Gamma) < -m_i(R) + \frac{\varepsilon}{2}$ . Tome-se ainda uma região poligonal  $\Gamma'$  tal que  $R \subset \Gamma'$  e  $A(\Gamma') < m_e(R) + \frac{\varepsilon}{2}$ . Das desigualdades anteriores obtém-se imediatamente  $A(\Gamma') - A(\Gamma) < \varepsilon$ . □

O recíproco deste resultado também é verdadeiro.

**Lema 1.1.18** *Seja  $R$  um conjunto de pontos do plano. Se para todo  $\varepsilon > 0$  existem regiões poligonais  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  tais que  $\Gamma \subset R \subset \Gamma'$  e  $A(\Gamma') - A(\Gamma) < \varepsilon$ , então  $R$  é um conjunto mensurável.*

**Demonstração.** Sejam  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  duas regiões poligonais nas condições do enunciado. Então  $m_e(R) \leq A(\Gamma')$  e  $A(\Gamma) \leq m_i(R)$ . Assim,  $-m_i(R) \leq -A(\Gamma)$  e, portanto,

$$m_e(R) - m_i(R) \leq A(\Gamma') - A(\Gamma) < \varepsilon.$$

Como

$$m_e(R) - m_i(R) \leq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \text{e} \quad m_e(R) - m_i(R) \geq 0,$$

vem que

$$m_e(R) - m_i(R) = 0,$$

ou seja,  $R$  é mensurável. □

**Teorema 1.1.19** *Se  $R_1$  e  $R_2$  são conjuntos mensuráveis do plano, então  $R_1 \cup R_2$  ainda é um conjunto mensurável.*

**Demonstração.** Sejam  $R_1$  e  $R_2$  conjuntos mensuráveis do plano e  $\varepsilon$  um número real positivo. Tomem-se  $\Gamma_i$  e  $\Gamma'_i$  para  $R_i$ , com  $i = 1, 2$ , como no Lema 1.1.17, tais que  $\Gamma_i \subset R_i \subset \Gamma'_i$  e  $A(\Gamma'_i) - A(\Gamma_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ , para  $i = 1, 2$ .

Sejam  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  e  $\Gamma' = \Gamma'_1 \cup \Gamma'_2$ . Então

$$A(\Gamma') - A(\Gamma) \leq (A(\Gamma'_1) - A(\Gamma_1)) + (A(\Gamma'_2) - A(\Gamma_2)).$$

Na verdade, observando a Figura 1.10,  $A(\Gamma') - A(\Gamma)$  é a área da tira fina na figura da direita, inferior ou igual à soma de  $A(\Gamma'_1) - A(\Gamma_1)$  com  $A(\Gamma'_2) - A(\Gamma_2)$ . Ao

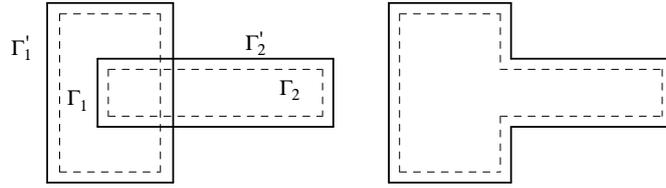


Figura 1.10:

caso geral aplica-se o mesmo princípio. Formando uma decomposição triangular adequada de  $\Gamma'_1 \cup \Gamma'_2$ , cada uma das diferenças  $A(\Gamma') - A(\Gamma)$ ,  $A(\Gamma'_1) - A(\Gamma_1)$  e  $A(\Gamma'_2) - A(\Gamma_2)$  é a soma das áreas de uma colecção de regiões triangulares, e todo o triângulo que contribui para a diferença  $A(\Gamma) - A(\Gamma')$  tem de contribuir pelo menos uma vez para a soma  $A(\Gamma'_1) - A(\Gamma_1) + A(\Gamma'_2) - A(\Gamma_2)$ . Portanto,

$$A(\Gamma') - A(\Gamma) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

donde  $R_1 \cup R_2$  é mensurável.

□

O teorema seguinte obtém-se por indução matemática sobre o número de conjuntos mensuráveis.

**Teorema 1.1.20** *Se  $R_1, R_2, \dots, R_n$  são  $n$  conjuntos mensuráveis do plano, então  $R = \bigcup_{i=1}^n R_i$  ainda é um conjunto mensurável.*

**Teorema 1.1.21** *Se  $R_1$  e  $R_2$  são conjuntos mensuráveis do plano, então  $R_1 - R_2$  ainda é um conjunto mensurável.*

**Demonstração.** Observe-se novamente a Figura 1.10. Para provar que  $R_1 - R_2$  é mensurável, decomponha-se  $\Gamma'_1 \cup \Gamma'_2$  em triângulos por forma que cada região  $\Gamma_1, \Gamma'_1, \Gamma_2$  e  $\Gamma'_2$  seja a reunião de regiões triangulares, intersectando-se apenas em arestas e vértices. Sejam, agora,  $\Gamma'$  e  $\Gamma$ , respectivamente, a reunião das regiões triangulares que permanecem em  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma_1$ , respectivamente, mas não em  $\Gamma_2$  e  $\Gamma'_2$ , respectivamente.

Recorde-se que  $\varepsilon$  é um número real positivo qualquer,  $A(\Gamma'_1) - A(\Gamma_1) < \frac{\varepsilon}{2}$  e  $A(\Gamma'_2) - A(\Gamma_2) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Assim,

$$A(\Gamma') - A(\Gamma) \leq (A(\Gamma'_1) - A(\Gamma_1)) + (A(\Gamma'_2) - A(\Gamma_2))$$

e, portanto,  $A(\Gamma') - A(\Gamma) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . Logo  $R_1 - R_2$  é mensurável.  $\square$

**Teorema 1.1.22** *Se  $R_1$  e  $R_2$  são conjuntos mensuráveis do plano, então  $R_1 \cap R_2$  ainda é um conjunto mensurável.*

**Demonstração.** Sejam  $R_1$  e  $R_2$  dois conjuntos mensuráveis do plano. Pelo Teorema 1.1.19,  $R_1 \cup R_2$  é mensurável e, pelo Teorema 1.1.21,  $R_2 - R_1$  e  $R_1 - R_2$  são mensuráveis. Portanto, pelo Teorema 1.1.19,  $(R_2 - R_1) \cup (R_1 - R_2)$  é mensurável e, pelo Teorema 1.1.21,  $(R_1 \cup R_2) - [(R_1 - R_2) \cup (R_2 - R_1)]$  é mensurável, ou seja,  $R_1 \cap R_2$  é mensurável.  $\square$

**Teorema 1.1.23** *Se  $R_1$  e  $R_2$  são conjuntos mensuráveis do plano e  $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ , então  $A(R_1 \cup R_2) = A(R_1) + A(R_2)$ .*

**Demonstração.** Sejam  $R_1$  e  $R_2$  conjuntos mensuráveis do plano. Note-se que se  $\Gamma$  é uma região poligonal em  $R_1 \cup R_2$ , então  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , onde  $\Gamma_1 \subset R_1$  e  $\Gamma_2 \subset R_2$ . Portanto,

$$A(\Gamma) = A(\Gamma_1) + A(\Gamma_2) \leq m_i(R_1) + m_i(R_2)$$

e

$$m_i(R_1 \cup R_2) \leq m_i(R_1) + m_i(R_2),$$

pois  $m_i(R_1 \cup R_2)$  é o supremo do conjunto das áreas.

Por outro lado, para  $\varepsilon > 0$ , existem  $\Gamma_1 \subset R_1$  e  $\Gamma_2 \subset R_2$  tais que

$$A(\Gamma_1) > m_i(R_1) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad A(\Gamma_2) > m_i(R_2) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tem-se então

$$A(\Gamma) > m_i(R_1) + m_i(R_2) - \varepsilon$$

e, portanto,

$$m_i(R_1 \cup R_2) \geq m_i(R_1) + m_i(R_2) - \varepsilon,$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Assim,  $m_i(R_1 \cup R_2) \geq m_i(R_1) + m_i(R_2)$ . Como a desigualdade contrária já foi provada, a igualdade decorre imediatamente. Mas cada um dos três conjuntos é mensurável logo  $A(R_1 \cup R_2) = A(R_1) + A(R_2)$ . □

**Teorema 1.1.24** *Se  $R_1$  e  $R_2$  são conjuntos mensuráveis do plano e  $R_1 \subset R_2$ , então  $A(R_2 - R_1) = A(R_2) - A(R_1)$ .*

**Demonstração.** Sejam  $R_1$  e  $R_2$  conjuntos mensuráveis do plano e  $R_1 \subset R_2$ . Tem-se  $R_2 = (R_2 - R_1) \cup R_1$ , em que a intersecção dos dois conjuntos do segundo

membro da igualdade é igual ao vazio. Portanto, pelo Teorema 1.1.23,

$$A(R_2) = A(R_2 - R_1) + A(R_1),$$

isto é,

$$A(R_2 - R_1) = A(R_2) - A(R_1).$$

□

**Teorema 1.1.25** *Se  $R_1$  e  $R_2$  são conjuntos mensuráveis do plano e  $A(R_1 \cap R_2) = 0$ , então  $A(R_1 \cup R_2) = A(R_1) + A(R_2)$ .*

**Demonstração.** Sejam  $R_1$  e  $R_2$  conjuntos mensuráveis do plano e  $A(R_1 \cap R_2) = 0$ .

Note-se que  $R_1 - R_2 = R_1 - (R_1 \cap R_2)$  e  $R_2 - R_1 = R_2 - (R_1 \cap R_2)$ , logo

$$A(R_1 - R_2) = A(R_1) \quad \text{e} \quad A(R_2 - R_1) = A(R_2).$$

Como  $R_1 \cup R_2 = (R_1 - R_2) \cup (R_1 \cap R_2) \cup (R_2 - R_1)$  tem-se

$$A(R_1 \cup R_2) = A(R_1) + A(R_2) + 0,$$

o que demonstra o teorema.

□

Em seguida, apresenta-se uma fórmula para o cálculo da área de uma região definida por uma função real de variável real, utilizando o conceito de integral.

**Teorema 1.1.26** <sup>4</sup> *Seja  $f \in C([a, b])$  tal que  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ . Então*

*$\int_a^b f(x) dx$  é igual à medida de Jordan da região*

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

---

<sup>4</sup>Este resultado pode ser estendido a uma região  $R$  limitada pelo gráfico de duas funções contínuas.

**Demonstração.** Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$ . Considere-se a região

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\},$$

como na Figura 1.11. Tome-se a partição  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$ ,

$$\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

e seja  $\Delta x_i$  a amplitude do  $i$ -ésimo subintervalo de  $\mathcal{P}$ . Sejam ainda  $f(u_i)$  e  $f(v_i)$  o valor mínimo e máximo, respectivamente, de  $f$  no  $i$ -ésimo subintervalo. Então

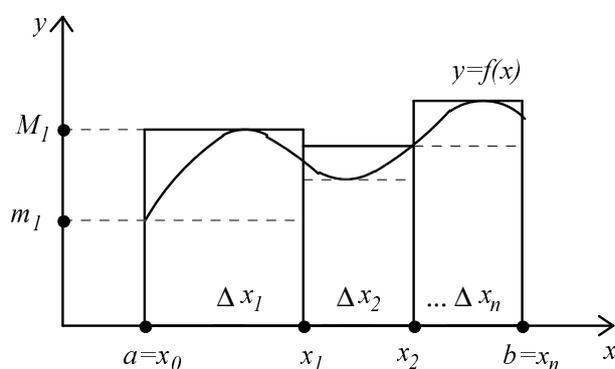


Figura 1.11:

$\sum_{i=1}^n f(u_i)\Delta x_i$  é a soma das áreas dos rectângulos inscritos (com base superior a tracejado na Figura 1.11) e  $\sum_{i=1}^n f(v_i)\Delta x_i$  é a soma das áreas dos rectângulos circunscritos (desenhados a cheio na Figura 1.11). Logo

$$\sum_{i=1}^n f(u_i)\Delta x_i \leq \int_a^b f(x)dx \leq \sum_{i=1}^n f(v_i)\Delta x_i.$$

Para uma função contínua  $f$ , pode estabelecer-se a diferença

$$\sum_{i=1}^n f(v_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^n f(u_i)\Delta x_i$$

tão pequena quanto se desejar, tomando  $\Delta x_i$  suficientemente pequeno. Assim, para  $\varepsilon > 0$ , existe uma partição  $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  para a qual  $\sum_{i=1}^n f(v_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^n f(u_i)\Delta x_i < \varepsilon$ . O segundo somatório é a área  $A(\Gamma)$  de uma região poligonal contida em  $R$  e o primeiro é a área de uma região poligonal  $\Gamma'$  contendo  $R$ ,  $A(\Gamma')$ . Pelo Lema 1.1.18,  $R$  é mensurável, isto é,  $m_i(R) = m_e(R)$ .

Como o integral é um limite superior dos valores  $A(\Gamma)$ , tem-se

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq m_i(R),$$

e, analogamente, sendo o integral um limite inferior dos valores  $A(\Gamma')$ ,

$$m_e(R) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Como  $m_i(R) = m_e(R) = A(R)$ , vem que  $A(R) = \int_a^b f(x)dx$ . □

Um resultado análogo pode ser obtido para regiões delimitadas por curvas simples fechadas.

**Teorema 1.1.27** *Sejam  $\gamma \in (C^1([a, b]))^2$  uma curva simples fechada definida por  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$  e  $R$  a região delimitada por  $\gamma$ <sup>5</sup>. Então  $R$  é*

---

<sup>5</sup>É intuitivo que a curva  $\gamma$  separa o plano em duas regiões, o seu interior e o seu exterior, que têm  $\gamma$  como fronteira. Este resultado, aparentemente óbvio, chama-se Teorema da curva de Jordan e foi demonstrado, pela primeira vez, por Camille Jordan (1838-1922) no final do século XIX ([28]).

mensurável e  $A(R) = \int_a^b x(t)y'(t)dt = - \int_a^b y(t)x'(t)dt$ .

**Demonstração.** Seja  $R$  a região delimitada pela curva simples fechada de classe  $C^1$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$ . Considere-se a região  $I = [c_1, d_1] \times [c_2, d_2]$  que contém  $R$ .

Como  $\gamma \in (C^1([a, b]))^2$ , pelo Teorema de Green no plano<sup>6</sup>, a função característica

$$\chi_R(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \in I \setminus R \\ 1 & \text{se } z \in R \end{cases}$$

é integrável à Riemann em  $I$  e

$$\int_I \chi_R = \int \int_R dx dy = \int_{\gamma} x dy = \int_a^b x(t)y'(t) dt = - \int_a^b y(t)x'(t) dt.$$

Tome-se uma partição

$$\mathcal{P} = \{c_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = d_1\} \times \{c_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = d_2\}$$

de  $I$ . Denotem-se por  $I_i$  os conjuntos  $[x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$  que estão contidos em  $R$  e por  $I'_i$  os que intersectam  $R$  e  $I \setminus R$ . Então

$$\sum_i A(I_i) \leq \int_I \chi_R \leq \sum_i A(I_i) + \sum_i A(I'_i).$$

Por um lado,  $\sum_i A(I_i)$  é a área de uma região poligonal contida em  $R$  e  $\sum_i A(I_i) + \sum_i A(I'_i)$  é a área de uma região contendo  $R$ .

---

<sup>6</sup>**Teorema de Green no plano** Sejam  $f$  e  $g$  funções de classe  $C^1$  num conjunto aberto  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma$  uma curva simples fechada contida em  $D$  e  $R$  a região delimitada por  $\gamma$ . Então  $\int \int_R \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma} f dx + g dy$ , onde o integral ao longo de  $\gamma$  é tomado no sentido positivo.

Por outro lado,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \mathcal{P}$  tal que  $\sum_i A(I'_i) < \varepsilon$ . Logo, pelo Lema 1.1.18,  $R$  é mensurável, isto é,  $m_i(R) = m_e(R) = m(R)$ . Como

$$\int_I \chi_R = \sup_{\mathcal{P}} \sum_i A(I_i) \leq m_i(R)$$

e

$$\overline{\int}_I \chi_R = \inf_{\mathcal{P}} \left( \sum_i A(I_i) + \sum_i A(I'_i) \right) \geq m_e(R),$$

tem-se

$$\int_I \chi_R = m(R)$$

e

$$m(R) = \int_I \chi_R. \quad \square$$

Seja  $P$  um ponto do plano e  $r$  um número real positivo. Chama-se **bola aberta** ou **vizinhança aberta** (ou simplesmente **vizinhança**) de centro  $P$  e raio  $r$  ao conjunto de pontos  $\mathcal{V}(P, r) = \{Q \in \mathbb{R}^2 : \overline{PQ} < r\}$ . A  $\overline{\mathcal{V}}(P, r) = \{Q \in \mathbb{R}^2 : \overline{PQ} \leq r\}$  chama-se **bola fechada** ou **círculo**.

Um subconjunto  $S$  do plano diz-se **limitado** se existe uma bola aberta que contém  $S$ . Diz-se que  $S$  é **convexo** se, para quaisquer dois pontos  $A$  e  $B$  de  $S$ , o segmento que os une,  $[AB]$ , está contido em  $S$ . Caso contrário, o subconjunto diz-se **não convexo**. Algebricamente,  $S$  é convexo se  $\lambda A + \mu B \in S$ , para  $A, B \in S$ ,  $\lambda, \mu \geq 0$  com  $\lambda + \mu = 1$ .

**Exemplo 1.1.28** *Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos distintos da bola fechada de centro  $a$  e raio  $r$ ,  $\overline{\mathcal{V}}(a, r)$ .*

*Considerem-se  $\lambda, \mu \geq 0$  com  $\lambda + \mu = 1$ . Então*

$$\|A - a\| \leq r, \|B - a\| \leq r$$

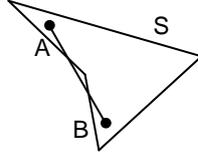


Figura 1.12: Subconjunto não convexo

e, portanto,

$$\begin{aligned} \|\lambda A + \mu B - a\| &= \|\lambda(A - a) + \mu(B - a)\| \\ &\leq \lambda\|A - a\| + \mu\|B - a\| \leq \lambda r + \mu r = r. \end{aligned}$$

Assim,  $\lambda A + \mu B \in \bar{\mathcal{V}}(a, r)$  pelo que  $\bar{\mathcal{V}}(a, r)$  é um convexo. Demonstra-se de modo análogo que a bola aberta de centro  $a$  e raio  $r$ ,  $\mathcal{V}(a, r)$ , também é um convexo.

A intersecção de uma família de conjuntos convexos ainda é um conjunto convexo. De facto, considerando  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  a família de conjuntos convexos, se  $A, B \in \bigcap (\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  e  $\lambda, \mu \geq 0$  com  $\lambda + \mu = 1$ , então  $A, B \in \mathcal{A}_i, \forall i$ . Como  $\mathcal{A}_i$  é um convexo,  $\lambda A + \mu B \in \mathcal{A}_i$  e, assim,  $\lambda A + \mu B \in \bigcap (\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ , ou seja,  $\bigcap (\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  é um convexo.

Chama-se **corpo convexo** no plano a um conjunto do plano, não vazio, convexo e compacto (fechado e limitado). Um segmento de recta, uma região poligonal convexa e um círculo são exemplos de corpos convexos.

Ao comprimento da fronteira de um corpo convexo  $S$  chama-se **perímetro** de  $S$  e denota-se por  $L(S)$  ou  $L(frS)$ .

**Teorema 1.1.29** *Seja  $S$  um conjunto convexo no plano. Se  $P \in \text{int } S$ <sup>7</sup> e  $Q \in S$ , então  $\text{int } [PQ] \subset \text{int } S$ .*

**Demonstração.** Seja  $\mathcal{V}$  uma vizinhança de  $P$  contida em  $S$ . Seja ainda  $C$  a reunião dos segmentos  $[QX], \forall X \in \mathcal{V}$ . Se  $Y \in \text{int } [PQ]$ , então existe uma vizinhança de  $Y$ ,  $\mathcal{V}'$ , contida em  $C$ . Como  $S$  é convexo,  $C \subset S$  e, portanto,  $\mathcal{V}' \subseteq S$  e  $Y \in \text{int } S$ . □

**Teorema 1.1.30** *Uma curva simples fechada  $\gamma$  delimita um corpo convexo  $S$  se e só se toda a recta que passa num ponto interior a  $S$  intersecta  $\gamma$  em exactamente dois pontos.*

**Demonstração.** Suponha-se que  $\gamma$  delimita um corpo convexo  $S$  e seja  $P \in \text{int } S$ . Qualquer semi-recta com início em  $P$  tem de intersectar  $S$  num segmento  $[PQ]$ .

Tem-se  $Q \in \text{fr } S$  pois caso contrário ter-se-ia um segmento da semi-recta contido em  $S$  em sentido próprio. Pelo Teorema 1.1.29,  $\text{int } [PQ] \subset \text{int } S$  e, portanto, toda a recta que passa em  $P$  intersecta  $\gamma$  em exactamente dois pontos.

Reciprocamente, suponha-se que toda a recta que passa num ponto interior de  $S$ , intersecta  $\gamma$  em exactamente dois pontos e suponha-se ainda que  $\gamma$  delimita um corpo não convexo  $S$ . Mostre-se que é possível encontrar uma recta que intersecta  $\gamma$  em mais de dois pontos. Como, por hipótese,  $S$  não é convexo, existem pontos  $P, Q \in S$  e  $R \in (\text{int } [PQ] \cap \text{ext } S)$ . Logo, existe uma vizinhança  $\mathcal{V}$  de  $R$  que não está contida em  $S$ .

---

<sup>7</sup>Representa-se por  $\text{int } S$  o interior de  $S$ . O exterior de  $S$  representa-se por  $\text{ext } S$ .

$Q \in \text{int}S$  pois caso contrário considerar-se-ia um ponto interior  $Q'$ , próximo de  $Q$ , tal que  $\text{int} [PQ']$  intersecta  $\mathcal{V}$  em pontos exteriores de  $S$ . Sejam  $P_1, Q_1 \in \gamma$  tais que  $P_1 \in [PR]$  e  $Q_1 \in [RQ]$ , respectivamente. A semi-recta que passa em  $Q$  e é oposta a  $\dot{Q}R$  intersecta  $\gamma$  num ponto  $B$  distinto de  $P$  e de  $Q$ . Portanto,  $PQ$  intersecta  $\gamma$  em pelo menos três pontos,  $P_1, Q_1$  e  $B$ . □

Seja  $r > 0$ . Chama-se **vizinhança esférica de um conjunto**  $S$  com raio  $r$ , ao conjunto  $\mathcal{V}(S, r) = \bigcup_{P \in S} \mathcal{V}(P, r)$ .

**Teorema 1.1.31** *Se  $\Gamma$  é um  $n$ -gono convexo de comprimento  $L$  e área  $A$  e  $S$  o conjunto convexo definido por  $\Gamma$ , então  $\mathcal{V}(S, r)$  é um corpo convexo de perímetro  $L' = L + 2\pi r$  e área  $A' = A + Lr + \pi r^2$ .*

**Demonstração.** Seja  $\Gamma$  um  $n$ -gono convexo de comprimento  $L$  e área  $A$ .

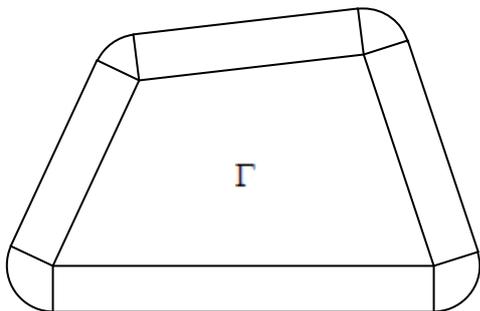


Figura 1.13:

Tal como na Figura 1.13,  $\mathcal{V}(S, r) - S$  pode ser decomposto em retângulos e

sectores circulares.

A soma das amplitudes dos  $n$  sectores circulares é  $360^\circ$ , logo a soma das suas áreas é igual a  $\pi r^2$ . Os  $n$  rectângulos têm a mesma altura,  $r$ , e a soma das suas bases é  $L$ , logo a soma das suas áreas é  $Lr$ . Assim,  $A' = A + Lr + \pi r^2$ . Analogamente,  $L' = L + 2\pi r$ , e o teorema fica provado para polígonos convexos.  $\square$

O teorema anterior generaliza-se para corpos convexos. A sua demonstração pode ser encontrada em [3].

## 1.2 O problema de Herão

Sejam  $l$  uma recta no plano e  $A, B$  dois pontos pertencentes a um dos semiplanos definidos por  $l$ . O problema de Herão consiste em encontrar um ponto  $S$  da recta  $l$  que minimiza  $\overline{AS} + \overline{SB}$ .

**Observação 1.2.1** *O problema de optimização de Herão foi apresentado pela primeira vez pelo matemático Herão de Alexandria (10d.C.-75d.C.) na Catoptrica de Euclides em On Mirrors.*

Seja  $B'$  o ponto obtido por reflexão ortogonal de  $B$  relativamente a  $l$ . A solução do problema é o ponto  $S$  que resulta da intersecção de  $[AB']$  com  $l$  (Figura 1.14).

De facto, para qualquer ponto  $S' \in l$ , tem-se

$$\overline{AS'} + \overline{S'B} = \overline{AS'} + \overline{S'B'}$$

e

$$\overline{AB'} = \overline{AS} + \overline{SB}$$

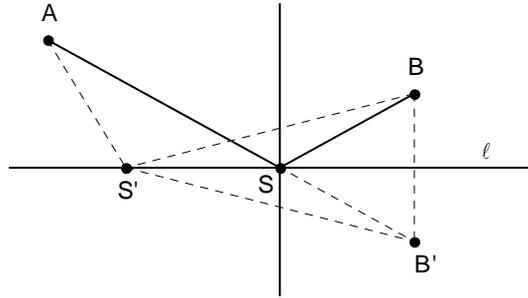


Figura 1.14: Problema de Herão

e, pela desigualdade triangular,

$$\overline{AS'} + \overline{S'B} \geq \overline{AS} + \overline{SB},$$

com igualdade se e só se  $S' = S$ .

**Proposição 1.2.2 (Herão)** *Sejam  $l$  uma recta no plano e  $A, B$  dois pontos pertencentes a um dos semiplanos definidos por  $l$ . Se  $S$  é o ponto de intersecção de  $[AB']$  com  $l$ , onde  $B'$  é obtido por reflexão ortogonal de  $B$  relativamente a  $l$ , então  $S$  é o ponto da recta  $l$  que minimiza a soma das distâncias de um ponto de  $l$  aos pontos  $A$  e  $B$ .*

**Observação 1.2.3** *Herão pensou em  $l$  como um espelho e considerou que a menor distância entre  $A$  e  $B$  coincide com o caminho atravessado por um raio de luz emitido de  $A$  e observado em  $B$ , deduzindo que quando a luz é reflectida num espelho, a amplitude do ângulo de incidência  $\phi_1$  é igual à amplitude do ângulo de reflexão  $\phi_2$ , sendo os ângulos formados por  $[AS]$  e  $[SB]$  com a perpendicular a  $l$*

em  $S$  (Figura 1.15). Estes estudos permitiram investigar as leis da reflexão da luz e obter propriedades dos espelhos.

O resultado seguinte traduz precisamente essa igualdade entre os ângulos e a demonstração aqui apresentada deve-se a Herão. Arquimedes demonstrou o mesmo resultado por redução ao absurdo ([19]).

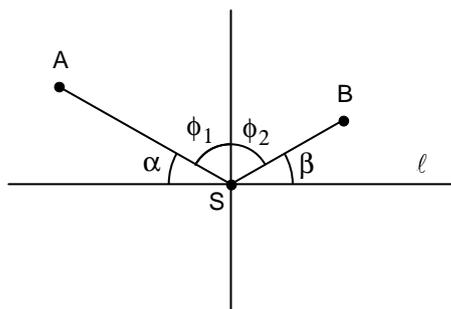


Figura 1.15: Ângulo de incidência igual ao ângulo de reflexão

**Proposição 1.2.4** *Se  $S$  é o ponto da recta  $l$  nas condições da Proposição 1.2.2 e  $\alpha$  e  $\beta$  são as amplitudes dos ângulos definidos pela recta  $l$  e  $[AS]$  e  $[SB]$ , respectivamente, então  $\alpha = \beta$ .*

**Demonstração.** Seja  $I$  o ponto de intersecção de  $[BB']$  com  $l$ . Por um lado, os ângulos  $\angle BSI$  e  $\angle B'SI$  são congruentes. Por outro lado, como os ângulos  $\angle S'SA$  e  $\angle B'SI$  são verticalmente opostos (Figura 1.14), são congruentes, pelo que  $B'\widehat{SI} = \alpha$  e, conseqüentemente,  $B\widehat{SI} = \alpha$ , ou seja,  $\alpha = \beta$ . □

### 1.3 Teorema Isoperimétrico segundo Zenodoro

Os trabalhos de Zenodoro para o estudo do problema isoperimétrico basearam-se no estudo do problema para polígonos, consistindo na determinação do polígono plano de  $n$  lados com a maior área possível, de entre os de igual comprimento  $L$ . A solução deste problema designa-se por *n-gono máximo de comprimento  $L$* .

**Lema 1.3.1** *Um polígono de  $n$  lados é convexo se e só se a amplitude de cada um dos seus ângulos internos é inferior a  $180^\circ$ .*

**Demonstração.** Considere-se um polígono de  $n$  lados, convexo, e suponha-se que existe um ângulo interno desse polígono cuja amplitude não é inferior a  $180^\circ$ .

Se a amplitude for igual a  $180^\circ$ , então o polígono tem  $n - 1$  lados, o que contradiz a hipótese.

Se a amplitude for superior a  $180^\circ$  (Figura 1.16), então o polígono não é convexo, o que também contradiz a hipótese.

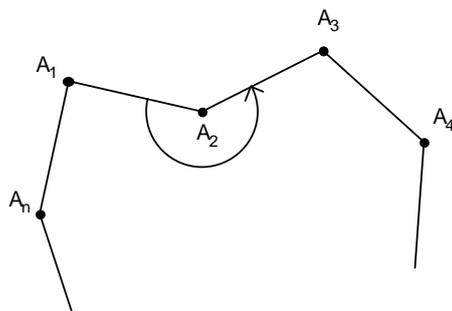


Figura 1.16:

□

**Lema 1.3.2** *Um  $n$ -gono máximo de comprimento  $L$  é convexo.*

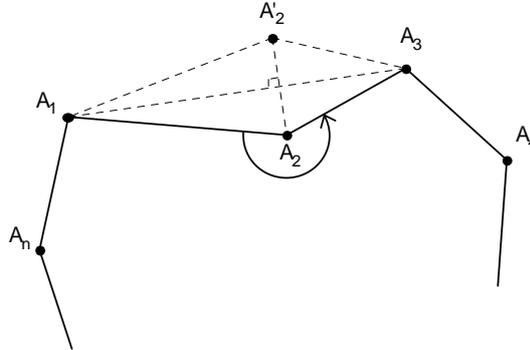


Figura 1.17:  $n$ -gono não convexo

**Demonstração.** Seja  $[A_1A_2\dots A_n]$  um  $n$ -gono máximo de comprimento  $L$ . Suponha-se que  $[A_1A_2\dots A_n]$  não é convexo. Então existe um ângulo, digamos  $\angle A_1A_2A_3$ , cuja amplitude é superior a  $180^\circ$ . Considerando  $A'_2$  o ponto obtido por reflexão ortogonal do vértice  $A_2$  relativamente a  $[A_1A_3]$ , obtém-se um polígono  $[A_1A'_2A_3\dots A_n]$  com maior área e o mesmo comprimento,  $L$ , que o polígono  $[A_1A_2A_3\dots A_n]$ , o que é um absurdo pois  $[A_1A_2\dots A_n]$  é um  $n$ -gono máximo de comprimento  $L$ .  $\square$

**Observação 1.3.3** *O Lema 1.3.2 não foi mencionado por Zenodoro mas é aqui referido por ser fundamental para a demonstração dos resultados seguintes.*

**Lema 1.3.4** *Os lados de um  $n$ -gono máximo de comprimento  $L$  têm todos o mesmo comprimento.*

**Demonstração.** Seja  $[A_1A_2\dots A_n]$  um  $n$ -gono máximo de comprimento  $L$  cujos lados não têm todos o mesmo comprimento. Considerem-se  $[A_1A_2]$  e  $[A_2A_3]$  dois lados adjacentes do  $n$ -gono com comprimentos diferentes e  $l$  a recta que passa em  $A_2$  e é paralela a  $[A_1A_3]$  (Figura 1.18).

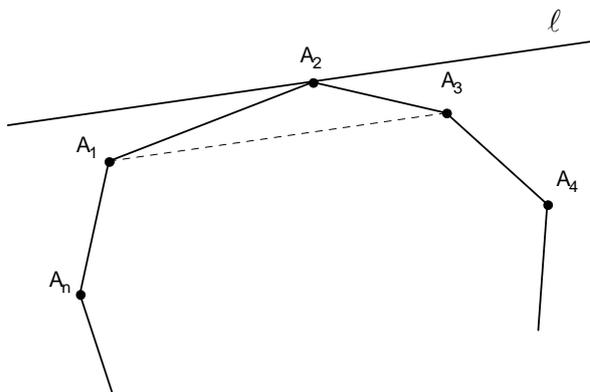


Figura 1.18:

Seja  $S$  o ponto que se obtém aplicando a Proposição 1.2.2 à recta  $l$  e aos pontos  $A_1$  e  $A_3$ . Então

$$\overline{A_1S} + \overline{SA_3} < \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3}. \quad (1.1)$$

Pela Proposição 1.2.4, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão logo os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , formados por  $[A_1S]$  e  $l$  e  $[A_3S]$  e  $l$ , respectivamente, têm a mesma amplitude. Como ângulos alternos internos têm a mesma amplitude conclui-se que a amplitude do ângulo  $\angle SA_1A_3$  é  $\alpha$  e a de  $\angle SA_3A_1$  é  $\beta$ . Logo o triângulo  $[A_1SA_3]$  é isósceles de base  $[A_1A_3]$  e, portanto,  $S$  e  $A_2$  são pontos distintos. Além disso, os triângulos  $[A_1SA_3]$  e  $[A_1A_2A_3]$  têm a mesma base e a mesma altura logo têm a

mesma área. Construa-se um triângulo isósceles  $[A_1A'_2A_3]$  tal que

$$\overline{A_1A'_2} + \overline{A'_2A_3} = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3}.$$

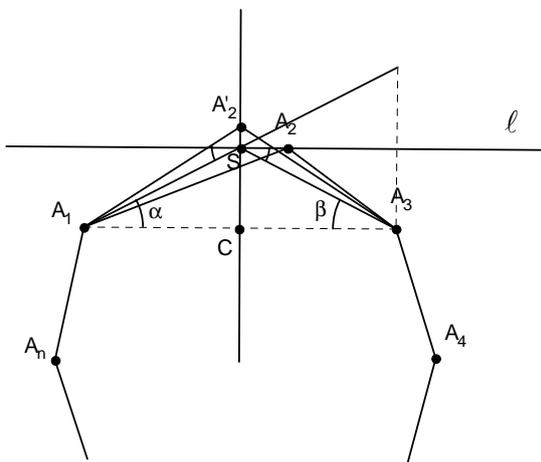


Figura 1.19:

Como se indica na Figura 1.19,  $A'_2$  pertence à mediatriz de  $[A_1A_3]$  e, pela desigualdade (1.1), tem-se

$$\overline{A_1A'_2} + \overline{A'_2A_3} > \overline{A_1S} + \overline{SA_3}$$

pelo que  $A'_2$  pertence à semi-recta oposta a  $\hat{S}C$ . Assim, a altura de  $\Delta[A_1A'_2A_3]$  é maior do que a altura de  $\Delta[A_1A_2A_3]$  e, portanto, a área de  $\Delta[A_1A'_2A_3]$  é maior do que a área de  $\Delta[A_1A_2A_3]$ . Conclui-se então que a área do polígono  $[A_1A'_2\dots A_n]$  é maior do que a do polígono  $[A_1A_2\dots A_n]$  e ambos têm comprimento  $L$ , o que é um absurdo pois  $[A_1A_2\dots A_n]$  é um n-gono máximo de comprimento  $L$ .

□

**Corolário 1.3.5** *Um triângulo máximo é equilátero e um quadrilátero máximo é um quadrado.*

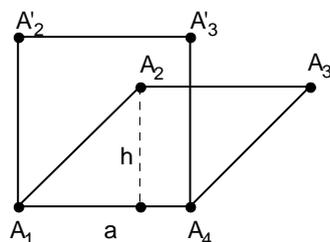


Figura 1.20:

**Demonstração.** É imediato, pelo Lema 1.3.4, que um triângulo máximo é equilátero e que um quadrilátero máximo é um losango. Como se indica na Figura 1.20, o quadrado  $[A_1A_2A_3A_4]$  tem área  $a^2$  superior à área de qualquer outro losango. Portanto, um quadrilátero máximo é, de facto, um quadrado.  $\square$

**Lema 1.3.6** *Os ângulos de um  $n$ -gono máximo de comprimento  $L$  têm todos a mesma amplitude.*

**Demonstração.** Seja  $[A_1A_2\dots A_n]$  um  $n$ -gono máximo de comprimento  $L$  cujos ângulos não têm todos a mesma amplitude.

Considerem-se dois ângulos adjacentes do polígono com amplitudes  $\alpha$  e  $\beta$ , distintas, e prove-se que existem dois ângulos não adjacentes com amplitudes também distintas.

Sejam  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots$  as amplitudes de ângulos sucessivos do  $n$ -gono<sup>8</sup>. Se  $\gamma \neq \alpha$  ou  $\delta \neq \beta$ , fica provado o pretendido pois  $\alpha$  e  $\gamma$  (ou  $\beta$  e  $\delta$ ) são amplitudes de ângulos não adjacentes. Se  $\alpha = \gamma, \beta = \delta$  e  $\alpha \neq \beta$ , então a sucessão de ângulos é  $\alpha, \beta, \alpha, \beta, \epsilon, \dots$  em que o primeiro e o quarto ângulos não são adjacentes e as suas amplitudes são diferentes, pelo que novamente fica provado o pretendido. Então existem

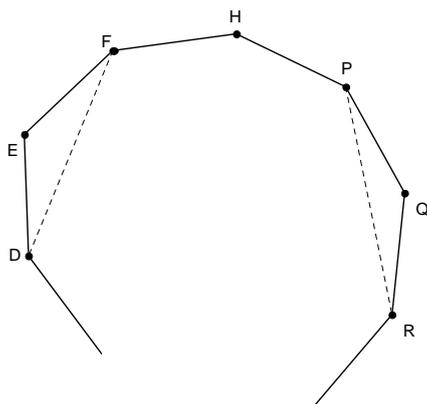


Figura 1.21:  $n$ -gono com dois ângulos adjacentes de amplitudes diferentes.

triângulos  $[DEF]$  e  $[PQR]$ , com interiores disjuntos (Figura 1.21), formados pelos vértices sucessivos do  $n$ -gono, tais que a amplitude do ângulo em  $E$  é menor do que a amplitude do ângulo em  $Q$ . Pelo Lema 1.3.4 tem-se  $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{PQ} = \overline{QR}$ , logo os triângulos são isósceles e como a amplitude do ângulo em  $E$  é menor do que a do ângulo em  $Q$ , então  $\overline{DF} < \overline{PR}$ .

Tracem-se as rectas  $EG$  e  $QT$ , perpendiculares a  $DF$  e  $PR$ , respectivamente. Marque-se  $T'$  sobre  $EG$  de modo que os triângulos  $[ET'P']$  e  $[QTP]$  sejam con-

<sup>8</sup>Supõe-se  $n \geq 5$  pois os casos  $n = 3$  (triângulo) e  $n = 4$  (quadrilátero) já foram considerados.

gruentes.

Seja  $S$  o ponto que se obtém aplicando a Proposição 1.2.2 à recta  $T'G$  e aos pontos  $P'$  e  $F$ . Então

$$\overline{P'S} + \overline{SF} < \overline{P'E} + \overline{EF}. \quad (1.2)$$

Como o ângulo  $\angle P'ET'$  (igual a metade do ângulo em  $Q$ ) tem amplitude maior do que a do ângulo  $\angle FEG$  (igual a metade do ângulo em  $E$ ), os pontos  $S$  e  $E$  são distintos (pois  $P'\widehat{S}T' = F\widehat{S}G$ ) e  $S$  pertence a  $[EG]$ .

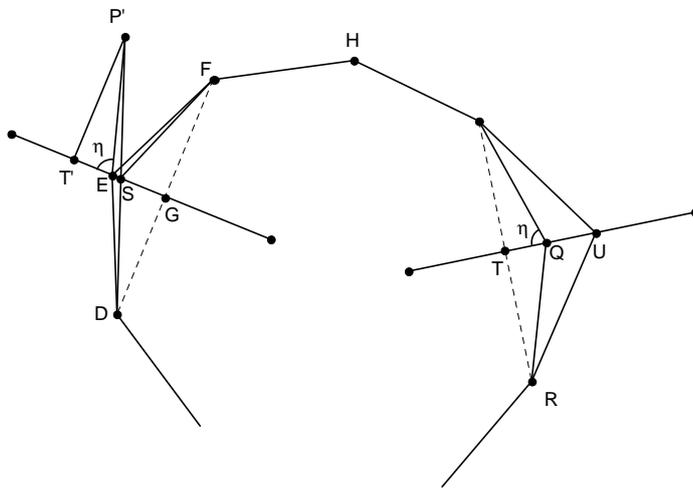


Figura 1.22:

Marque-se  $U$  no prolongamento de  $[TQ]$  por forma a  $\overline{TU} = \overline{T'S}$  e considerem-se os triângulos  $[DSF]$  e  $[PUR]$ . Tem-se então

$$\overline{DS} + \overline{SF} + \overline{PU} + \overline{UR} = 2\overline{SF} + 2\overline{PU} = 2(\overline{SF} + \overline{SP'})$$

e, por (1.2) vem

$$\overline{DS} + \overline{SF} + \overline{PU} + \overline{UR} < 2(\overline{EF} + \overline{EP'}) = \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{PQ} + \overline{QR}$$

ou seja, a soma dos lados laterais dos triângulos  $[DSF]$  e  $[PUR]$  é menor do que a soma dos lados laterais dos triângulos originais,  $\triangle DEF$  e  $\triangle PQR$ .

Por outro lado, a área de  $\triangle P'ES$  é maior do que a de  $\triangle ESF$  uma vez que  $\overline{P'T'} = \frac{1}{2} \overline{PR}$ ,  $\overline{FG} = \frac{1}{2} \overline{DF}$  e  $\overline{DF} < \overline{PR}$ . Então a soma da área de  $\triangle DSF$  com a área de  $\triangle PUR$  é maior do que a soma das áreas dos triângulos originais,  $\triangle DEF$  e  $\triangle PQR$ . De facto,

$$\begin{aligned} A(\triangle DSF) + A(\triangle PUR) &= A(\triangle DEF) - 2A(\triangle ESF) + A(\triangle PQR) + 2A(\triangle P'ES) \\ &= A(\triangle DEF) + A(\triangle PQR) + 2(A(\triangle P'ES) - A(\triangle ESF)) \\ &> A(\triangle DEF) + A(\triangle PQR) \end{aligned}$$

pelo que o polígono  $[DSF...PUR...]$  tem menor comprimento e maior área do que o polígono original  $[DEF...PQR...]$ .

Substituindo o ponto  $S$  por um ponto  $S'$  na recta  $EG$  por forma que o comprimento de  $[DS'F...PUR...]$  seja igual ao comprimento do polígono  $[DEF...PQR...]$ , obtém-se um polígono com o mesmo comprimento  $L$  que  $[DEF...PQR...]$  e como a área desse novo polígono é maior do que a do polígono  $[DSF...PUR...]$ , esta será certamente maior do que a área de  $[DEF...PQR...]$ , o que é um absurdo pois este é um  $n$ -gono máximo de comprimento  $L$ .

□

**Teorema 1.3.7 (Zenodoro)** *Um  $n$ -gono máximo de comprimento  $L$  é regular.*

**Demonstração.** Decorre imediatamente dos Lemas 1.3.4 e 1.3.6. □

**Observação 1.3.8** *Verificou-se que se um  $n$ -gono máximo de comprimento  $L$  existe, então tem de ser regular. Mas será que existe um  $n$ -gono máximo? Esta questão parece não ter interessado a Zenodoro nem aos seus contemporâneos, pelo que se acredita que Zenodoro não se apercebeu da importância da existência de solução para o problema (ver Observação 1.4.7). Esta questão foi estudada posteriormente por Weierstrass, que obteve uma demonstração para a existência de um  $n$ -gono máximo de comprimento  $L$ . Na verdade, o conjunto dos  $2n$ -uplos definidos pelos  $n$  vértices que representam um  $n$ -gono de comprimento  $L$  constitui um conjunto compacto em  $\mathbb{R}^{2n}$  e a função que representa a área de cada polígono está definida e é contínua nesse conjunto, pelo que o Teorema de Weierstrass garante a existência de um máximo para esta função.*

Considere-se um  $n$ -gono regular de comprimento  $L$ , delimitando uma área  $A$ . Facilmente se conclui que  $L = 2nR\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$  e  $A = \frac{r}{2}L$ , onde  $R$  e  $r$  são os raios das circunferências circunscrita e inscrita no  $n$ -gono, respectivamente. Tem-se também  $r = R\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$  e obtém-se a seguinte relação entre a área e o comprimento de um  $n$ -gono regular:

$$L^2 - 4n \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)A = 0.$$

Pelo Teorema 1.3.7, se  $L$  é o comprimento de um  $n$ -gono de área  $A$ , então

$$L^2 - 4n \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)A \geq 0. \tag{1.3}$$

As desigualdades  $\operatorname{tg}\alpha \geq \alpha$ , válida para  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , e (1.3), implicam que

$$L^2 - 4\pi A \geq 0, \quad (1.4)$$

para um  $n$ -gono arbitrário e  $n \geq 3$ . A (1.3) chama-se **desigualdade isoperimétrica para polígonos**. Para um dado  $n$ -gono, (1.4) é também uma desigualdade isoperimétrica, mas mais fraca.

Note-se que para uma circunferência tem-se a igualdade

$$L^2 - 4\pi A = 0, \quad (1.5)$$

onde  $L$  e  $A$  são o seu comprimento e a sua área, respectivamente.

O lema seguinte é consequência imediata das definições de comprimento e área de um conjunto de pontos.

**Lema 1.3.9** *Para toda a curva simples fechada rectificável de comprimento  $L'$  que delimita uma área  $A'$  e para  $\varepsilon > 0$ , existe um  $n$ -gono de comprimento  $L$  e área  $A$  tal que  $|L - L'| \leq \varepsilon$  e  $|A - A'| \leq \varepsilon$ .*

Considere-se uma curva simples fechada rectificável de comprimento  $L'$  que delimita uma área  $A'$ . Pelo Lema 1.3.9 e pela desigualdade (1.4) conclui-se que para  $\varepsilon > 0$  existe um polígono de comprimento  $L$  e área  $A$  tal que

$$4\pi A' \leq 4\pi A + 4\pi\varepsilon \leq L^2 + 4\pi\varepsilon \leq (L' + \varepsilon)^2 + 4\pi\varepsilon = (L')^2 + \varepsilon(2L' + 4\pi + \varepsilon)$$

ou seja,  $(L')^2 + \varepsilon(2L' + 4\pi + \varepsilon) \geq 4\pi A'$ . Como  $\varepsilon$  é arbitrário tem-se  $(L')^2 \geq 4\pi A'$  e, de acordo com (1.5), a desigualdade transforma-se numa igualdade no caso de uma circunferência.

Demonstrou-se o teorema seguinte.

**Teorema 1.3.10** *A área delimitada por uma curva simples fechada rectificável com um dado comprimento  $L$  não excede a área delimitada por uma circunferência com o mesmo comprimento  $L$ .*

**Observação 1.3.11** *O teorema anterior apresenta uma solução para o problema isoperimétrico. A demonstração deste teorema foi obtida combinando os dois lemas geométricos de Zenodoro (Lema 1.3.4 e Lema 1.3.6) com resultados mais modernos e essencialmente técnicos. Esta abordagem baseou-se essencialmente em [35].*

## 1.4 Teorema Isoperimétrico segundo Steiner

Cerca de 1841 o geômetra suíço Jacob Steiner publicou várias demonstrações do Teorema Isoperimétrico baseadas apenas em argumentos geométricos. Weierstrass encontrou erros nas provas de Steiner. Também Dirichlet tentou alertar Steiner para o facto da sua prova estar incompleta uma vez que a existência de uma solução para o problema não estava garantida.

Suponha-se que existe uma curva simples e fechada, rectificável, com um dado comprimento  $L$ , que delimita uma área maior do que qualquer outra curva nas mesmas condições. A curva nas condições anteriores define um conjunto (formado pela curva e pelo seu interior) chamado **conjunto máximo de perímetro  $L$** . Este conjunto é, obviamente, compacto (fechado e limitado). Mostre-se que esse conjunto é um corpo convexo.

**Lema 1.4.1** *O conjunto máximo é convexo.*

**Demonstração.** Suponha-se que o conjunto máximo não é convexo. Então existem dois pontos, digamos  $A$  e  $B$ , tais que o segmento e a curva intersectam-se nos pontos  $C$  e  $D$ . Efectuando uma reflexão ortogonal do arco  $CD$  relativamente a  $[AB]$  obtém-se um novo conjunto com igual perímetro e cuja área é maior do

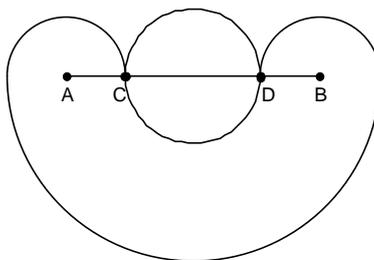


Figura 1.23: Figura não convexa

que a área do conjunto inicial, o que é um absurdo pelo facto deste ser o conjunto máximo (Figura 1.23). □

Pelo Teorema 1.1.30, dado um conjunto convexo  $S$  definido por uma curva  $\gamma$  simples fechada rectificável, toda a recta que passa num ponto interior de  $S$  intersecta  $\gamma$  em exactamente dois pontos  $A$  e  $B$ . Diz-se que  $[AB]$  é o **diâmetro** do conjunto convexo  $S$  se  $[AB]$  divide o comprimento de  $\gamma$  em duas partes com a mesma área.

**Lema 1.4.2** *Qualquer diâmetro do conjunto máximo divide a sua área em duas partes iguais.*

**Demonstração.** Considere-se um conjunto máximo delimitado por uma curva  $\gamma$  e tome-se um ponto  $A$  sobre ela. Marque-se um ponto  $B$  de modo que  $[AB]$  seja o diâmetro do conjunto (Figura 1.24). Designem-se por  $S_1$  e  $S_2$  as regiões

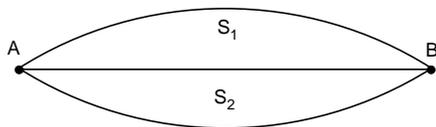


Figura 1.24: Figura convexa de diâmetro  $[AB]$ .

delimitadas por  $\gamma$  e  $[AB]$  e suponha-se que as áreas de  $S_1$  e  $S_2$  não são iguais. Assim, sem perda de generalidade, suponha-se que a área de  $S_1$  é maior do que a área de  $S_2$ . Efectuando uma reflexão ortogonal de  $S_1$  relativamente a  $[AB]$  obtém-se uma nova região,  $S_3$ , simétrica<sup>9</sup> em relação a  $[AB]$ , com perímetro  $L$ . Como a área de  $S_3$  é o dobro da área de  $S_1$ , esta será maior do que a área do conjunto dado, o que é um absurdo.

□

**Lema 1.4.3** *A área de um triângulo  $[ABC]$  tal que  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  são fixos é máxima quando o ângulo  $\angle ACB$  é recto.*

**Demonstração.** Sejam  $\Delta[ABC]$  um triângulo e  $H \in [AB]$  um ponto tal que  $[CH]$  é a altura do triângulo relativamente à base  $[AB]$  (Figura 1.25). Designando

<sup>9</sup>Seja  $S$  um conjunto de pontos do plano delimitado por uma curva fechada  $\gamma$ . Considerem-se  $A$  e  $B$  dois pontos distintos de  $\gamma$  tais que  $[AB]$  divide  $S$  em dois subconjuntos  $S_1$  e  $S_2$ .  $S$  diz-se **simétrico relativamente a  $[AB]$**  se  $S_2$  é obtido de  $S_1$  por reflexão ortogonal relativamente a  $[AB]$ .

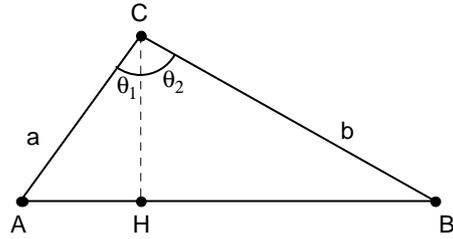


Figura 1.25: Triângulo máximo

por  $\theta$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  a amplitude dos ângulos  $\angle ACB$ ,  $\angle ACH$  e  $\angle BCH$ , respectivamente, e por  $a$  e  $b$  o comprimento de  $[AC]$  e  $[CB]$ , respectivamente, tem-se que

$$\overline{AB} = a \operatorname{sen} \theta_1 + b \operatorname{sen} \theta_2$$

e

$$\overline{CH} = a \cos \theta_1 = b \cos \theta_2.$$

Assim, a área de  $\Delta[ABC]$  é dada por

$$\begin{aligned} A &= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} \\ &= \frac{a b \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + a b \cos \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2}{2} \\ &= \frac{ab}{2} \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2) \\ &= \frac{a b}{2} \operatorname{sen} \theta. \end{aligned}$$

O lema resulta do facto da função seno atingir o seu valor máximo, 1, quando  $\theta = 90^\circ$ .

□

**Lema 1.4.4** *Seja  $[AB]$  um diâmetro do conjunto máximo  $S$  e  $\gamma$  a sua fronteira. Se  $C \in \gamma$  então o ângulo  $\angle ACB$  é recto.*

**Demonstração.** Pelos Lemas 1.4.1 e 1.4.2,  $S$  é um conjunto convexo e  $[AB]$  divide a área de  $S$  em duas partes iguais. Suponha-se que o ângulo  $\angle ACB$  não é recto. Pelo Lema 1.4.3, considere-se o ponto  $B'$  tal que  $\overline{B'C} = \overline{BC}$  e a área de  $\Delta[ACB']$  é maior do que a área de  $\Delta[ACB]$ . Construa-se um novo conjunto do seguinte modo: considere-se o triângulo  $[ACB']$  e a região limitada pelo arco  $AC$  e por  $[AC]$ . Em seguida, desloque-se a região limitada por  $BC$  e  $[BC]$  por forma a ficar adjacente ao lado  $[B'C]$  do triângulo. Finalmente, por reflexão ortogonal do conjunto construído relativamente a  $[AB']$ , obtém-se o conjunto pretendido. A sua área é maior do que a área do conjunto máximo  $S$ , o que é um absurdo.  $\square$

O Teorema Isoperimétrico obtido por Steiner enuncia-se da seguinte forma:

**Teorema 1.4.5** *O conjunto máximo  $S$  é um círculo.*

**Demonstração.** Considere-se um triângulo  $[ABC]$  tal que  $[AB]$  é um diâmetro do conjunto  $S$  e  $C$  pertence à fronteira de  $S$ ,  $\gamma$ . Pelo Lema 1.4.4 o triângulo é rectângulo em  $C$ . Seja  $O$  o ponto médio de  $[AB]$ . Denote-se por  $\phi$  o ângulo em  $B$  (Figura 1.26).

Tem-se 
$$\overline{BC} = \overline{AB} \cos \phi = 2\overline{AO} \cos \phi.$$

Aplicando o Teorema dos co-senos<sup>10</sup> ao triângulo  $[BOC]$  vem que

---

<sup>10</sup>**Teorema dos co-senos** *Num triângulo cujos lados medem  $a$ ,  $b$  e  $c$  e  $\theta$  é a amplitude do ângulo oposto ao lado de comprimento  $c$ , tem-se  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$ .*

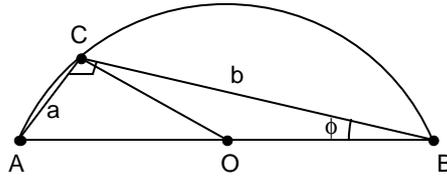


Figura 1.26:

$$\begin{aligned} \overline{OC}^2 &= \overline{OB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{OB} \cdot \overline{BC} \cos\phi \\ &= \overline{AO}^2 + (2\overline{AO} \cos\phi)^2 - 4\overline{AO}^2 (\cos^2\phi) = \overline{AO}^2, \end{aligned}$$

logo  $\overline{OC} = \overline{AO}$ . Assim, todo o ponto  $C$  de  $\gamma$  é equidistante de  $O$  pelo que a fronteira  $\gamma$  do conjunto máximo  $S$  é a circunferência de centro  $O$  e raio  $\overline{AO}$ .  $\square$

**Observação 1.4.6** *O Teorema Isoperimétrico para polígonos, enunciado por Zenodorus, é uma consequência do Teorema 1.4.5 ([3], T. 17.4 e 17.5, pp. 128-130).*

**Observação 1.4.7** *Esta demonstração do Teorema Isoperimétrico está incompleta uma vez que parte do princípio que o conjunto máximo existe. A demonstração da existência é essencial. O exemplo seguinte mostra como o facto de se assumir a existência de solução para um dado problema pode conduzir a uma conclusão errada. Demonstre-se, por exemplo, a seguinte afirmação “o maior número natural é 1”, assumindo que o maior número natural existe. De facto, considerando  $a \in \mathbb{N}$  o maior número natural, como  $x \leq x^2, \forall x \in \mathbb{N}$ , a única hipótese é ter  $a = a^2$ , ou seja,  $a = 1$ .*

## 1.5 Teorema da Selecção de Blaschke

Para apresentar o Teorema da Selecção de Blaschke, que, como se verá, permite garantir a existência de solução para o problema isoperimétrico, define-se distância entre conjuntos compactos no plano e convergência de uma sucessão de conjuntos compactos.

**Teorema 1.5.1** *Toda a sucessão limitada de números reais  $(u_n)$  possui uma sub-sucessão convergente.*

O resultado anterior pode ser generalizado para uma sucessão de pontos do plano.

**Teorema 1.5.2** *Toda a sucessão limitada de pontos de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(P_n)$ , possui uma sub-sucessão convergente.*

**Demonstração.** Seja  $(P_n)$  uma sucessão limitada em  $\mathbb{R}^2$ . Então as coordenadas dos seus termos,  $P_{n,1}, P_{n,2}$ , formam duas sucessões de números reais limitadas. Assim, pelo Teorema 1.5.1,  $P_{n,1}$  possui uma subsucessão convergente, isto é, existem um subconjunto infinito  $N_1 \subset \mathbb{N}$  e  $a_1 \in \mathbb{R}$  tais que  $\lim_{n \in N_1} P_{n,1} = a_1$ . De igual modo, a sucessão limitada  $P_{n,2}$  possui uma subsucessão convergente, obtendo-se um subconjunto infinito  $N_2 \subset N_1$  e  $a_2 \in \mathbb{R}$  tais que  $\lim_{n \in N_2} P_{n,2} = a_2$ . Assim, a subsucessão  $(P_n)_{n \in N_2}$  converge para  $a = (a_1, a_2)$ , visto que para cada  $i = 1, 2$ , se tem  $\lim_{n \in N_i} P_{n,i} = a_i$ . □

Sejam  $K_1$  e  $K_2$  dois conjuntos fechados e limitados do plano. Chama-se **distância entre  $K_1$  e  $K_2$**  e denota-se por  $d(K_1, K_2)$  a

$$\inf\{\varepsilon \geq 0 : K_1 \subset \mathcal{V}(K_2, \varepsilon) \wedge K_2 \subset \mathcal{V}(K_1, \varepsilon)\}.$$

A distância  $d$  é usualmente conhecida por **distância de Hausdorff** em  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 1.5.3** *Sejam  $K_1, K_2$  e  $K_3$  conjuntos fechados e limitados do plano.*

*Então*

- .  $d(K_1, K_2) \geq 0$  e  $d(K_1, K_2) = 0 \Leftrightarrow K_1 = K_2$ ;
- .  $d(K_1, K_2) = d(K_2, K_1)$ ;
- .  $d(K_1, K_2) \leq d(K_1, K_3) + d(K_3, K_2)$ .

**Demonstração.** Como  $K_1$  e  $K_2$  são limitados, existe  $r > 0$  tal que

$$K_1 \cup K_2 \subset \mathcal{V}(P, r),$$

logo  $K_1 \subset \mathcal{V}(K_2, 2r)$  e  $K_2 \subset \mathcal{V}(K_1, 2r)$ . Assim,  $d(K_1, K_2)$  está bem definida e  $0 \leq d(K_1, K_2) \leq 2r$ .

Se  $K_1 = K_2$ , então  $d(K_1, K_2) = 0$ . Suponha-se agora que  $d(K_1, K_2) = 0$ . Como  $K_1$  e  $K_2$  são fechados,

$$K_1 \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{V}(K_2, \varepsilon) = K_2$$

e  $K_2 \subset K_1$  pelo que  $K_1 = K_2$ .

A segunda afirmação resulta directamente da definição. Resta então provar que  $d(K_1, K_2) \leq d(K_1, K_3) + d(K_3, K_2)$ .

Considerando  $d(K_1, K_3) = \varepsilon$  e  $d(K_3, K_2) = \eta$ , obtém-se  $K_1 \subset \mathcal{V}(K_3, \varepsilon)$ ,  $K_3 \subset \mathcal{V}(K_1, \varepsilon)$ ,  $K_3 \subset \mathcal{V}(K_2, \eta)$  e  $K_2 \subset \mathcal{V}(K_3, \eta)$ . Como  $K_3 \subset \mathcal{V}(K_2, \eta)$  tem-se também  $\mathcal{V}(K_3, \varepsilon) \subset \mathcal{V}(K_2, \varepsilon + \eta)$ . Portanto,  $K_1 \subset \mathcal{V}(K_3, \varepsilon) \subset \mathcal{V}(K_2, \varepsilon + \eta)$ .

Analogamente,  $K_2 \subset \mathcal{V}(K_3, \eta) \subset \mathcal{V}(K_1, \eta + \varepsilon)$  e, portanto,

$$d(K_1, K_2) \leq \varepsilon + \eta = d(K_1, K_3) + d(K_3, K_2).$$

□

**Definição 1.5.4** *Seja  $(K_n)$  uma sucessão de conjuntos compactos de pontos do plano. Se existe um conjunto  $K$  tal que, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe um inteiro positivo  $N(\varepsilon)$  tal que  $d(K, K_i) \leq \varepsilon$ ,  $\forall i \geq N(\varepsilon)$ , diz-se que a sucessão  $(K_n)$  converge para o conjunto  $K$ .*

**Teorema 1.5.5 (Teorema da Selecção de Blaschke)** *Se  $(K_n)$  é uma sucessão de corpos convexos contidos num círculo, então existe uma subsucessão de  $(K_n)$  que converge para um corpo convexo  $K$ .*

**Demonstração.** Considere-se  $C$  um quadrado circunscrito no círculo dado. Denote-se por  $x$  o comprimento do lado de  $C$ . Seja  $C_1$  o conjunto dos quatro quadrados congruentes, cujos lados têm comprimento  $\frac{x}{2}$ , obtidos traçando as rectas que passam no centro de  $C$  e são paralelas a cada lado de  $C$ . Repetindo o processo para cada quadrado de  $C_1$ , particiona-se  $C$  em  $4^2$  quadrados congruentes cujo lado tem comprimento  $\frac{x}{2^2}$ . Continuando este procedimento obtém-se uma partição  $C_i$  de  $C$  constituída por  $4^i$  quadrados congruentes, cada um com lado de comprimento  $\frac{x}{2^i}$ .

Para cada  $i$  e para cada elemento  $K$  da sucessão  $(K_n)$ , existe exactamente um conjunto máximo de quadrados de  $C_i$  tais que cada quadrado contém pelo menos um ponto de  $K$ . Como o número de combinações de quadrados de  $C_i$  é finito

para cada  $i$  e o número de elementos da sucessão  $(K_n)$  é infinito, tem-se que, pelo menos uma combinação de quadrados de  $C_i$  corresponde a um número infinito de elementos de  $(K_n)$ . Seja  $(K_{1\rho})$  uma subsucessão de  $(K_n)$  tal que todos os elementos de  $(K_{1\rho})$  correspondem à mesma combinação de quadrados em  $C_1$ . Seja  $(K_{2\rho})$  uma subsucessão de  $(K_{1\rho})$  tal que todos os elementos de  $(K_{2\rho})$  correspondem à mesma combinação de quadrados em  $C_2$ . Em geral, seja  $(K_{i\rho})$  uma subsucessão de  $(K_{(i-1)\rho})$  tal que  $(K_{i\rho})$  corresponde toda à mesma combinação de quadrados em  $C_i$ . Assim, para cada  $i$ , tem-se

$$d(K_{i\rho}, K_{i\sigma}) \leq x \frac{\sqrt{2}}{2^i},$$

pois  $K_{i\rho}$  e  $K_{i\sigma}$  correspondem à mesma combinação de quadrados em  $C_i$ .

Para  $j \geq i$ ,  $(K_{j\rho})$  é uma subsucessão de  $(K_{i\rho})$  logo,

$$d(K_{j\rho}, K_{i\sigma}) \leq x \frac{\sqrt{2}}{2^i}, \quad \forall j \geq i.$$

Considere-se agora a sucessão diagonal  $(K_n = K_{nn})$ . Tem-se

$$d(K_m, K_n) \leq x \frac{\sqrt{2}}{2^n}, \quad \forall m \geq n.$$

Isto significa que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N(\varepsilon)$  tal que  $d(K_m, K_n) \leq \varepsilon$ , com  $m, n \geq N(\varepsilon)$ . Considere-se uma sucessão de pontos  $(P_i)$  tal que  $P_i \in K_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . De acordo com o Teorema 1.5.2, existe uma subsucessão  $(P_{i_j})$  que converge para um ponto  $P$ . O conjunto  $K$  constituído pelos pontos assim definidos é um corpo convexo e  $\lim_n K_n = K$ , como se demonstra a seguir.

Comece-se por demonstrar que  $K$  é fechado. Sejam  $P \in frK$  e  $\mathcal{V}$  uma vizinhança de  $P$ . Como  $\mathcal{V}$  contém um ponto  $Q \in K$ , existe uma vizinhança de  $Q$  contida em  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{V}$  contém pontos de um número infinito de conjuntos  $K_i$ . Escolhendo um desses

pontos de  $\mathcal{V}$ , para cada vizinhança  $\mathcal{V}$  de  $P$  é possível construir uma subsucessão de pontos que converge para  $P$  e, por definição de  $K$ ,  $P \in K$ . Assim, conclui-se que  $K$  é fechado. Demonstre-se agora que  $K$  é convexo. Sejam  $P, Q \in K$  e  $(P_{i_j}), (Q_{i_j})$  sucessões tais que  $P_{i_j}, Q_{i_j} \in K_{i_j}$ ,  $\lim_{i_j} P_{i_j} = P$  e  $\lim_{i_j} Q_{i_j} = Q$ . Suponha-se que existe um ponto  $R \in [PQ]$  tal que  $R \notin K$ , e seja  $\mathcal{V}(R, \delta)$  uma vizinhança de  $R$  que não intersecta  $K$ . Escolha-se  $\varepsilon$  tão pequeno que todo o segmento que une um ponto de  $\mathcal{V}(P, \varepsilon)$  a um ponto de  $\mathcal{V}(Q, \varepsilon)$  intersecta  $\mathcal{V}(R, \frac{\delta}{2})$ . Então  $[P_{i_j}, Q_{i_j}]$  intersecta  $\mathcal{V}(R, \frac{\delta}{2})$  para  $i_j$  suficientemente grande. Mas então  $\mathcal{V}(R, \delta)$  contém pelo menos um ponto de  $K$ , o que é absurdo. Portanto,  $[PQ] \subset K$  e  $K$  é convexo.

Resta demonstrar que  $\lim_n K_n = K$ . Considere-se  $\varepsilon > 0$  e verifique-se que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $K_n \subset \mathcal{V}(K, \varepsilon)$ ,  $\forall n \geq N$ . Para isso suponha-se o contrário. Então um número infinito de conjuntos  $K_i$  contém, cada um, um ponto  $P_i \notin \mathcal{V}(K, \varepsilon)$  e, portanto, existe uma subsucessão  $(P_{i_j})$  que converge para um ponto que não pertence a  $K$ , o que é absurdo por definição de  $K$ . Assim,  $K_n \subset \mathcal{V}(K, \varepsilon)$ ,  $\forall n \geq N$ . Por outro lado, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $K_m \subset \mathcal{V}(K_n, \frac{\varepsilon}{2})$ ,  $\forall m \geq n$ . Se  $P \in K$ , então  $P \in \overline{\mathcal{V}(K_n, \frac{\varepsilon}{2})} \subset \mathcal{V}(K_n, \varepsilon)$ , logo  $K \subset \mathcal{V}(K_n, \varepsilon)$   $\forall n$ . Conclui-se então que existe  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que  $d(K, K_n) \leq \varepsilon$ ,  $\forall n \geq N(\varepsilon)$ , ou seja,  $\lim_n K_n = K$ . □

**Teorema 1.5.6** *Sejam  $K_1$  e  $K_2$  corpos convexos tais que  $d(K_1, K_2) \leq \varepsilon$ , com  $\varepsilon > 0$ . Se  $L_i$  e  $A_i$  denotarem o perímetro e a área, respectivamente, de  $K_i$ ,  $i = 1, 2$ , então  $|L_2 - L_1| \leq 2\pi\varepsilon$  e  $|A_2 - A_1| \leq \varepsilon \max\{L_1, L_2\} + \pi\varepsilon^2$ . Consequentemente, se  $(K_i)$  é uma sucessão de corpos convexos convergente para  $K$ , então  $(L_i)$  converge para  $L$  e  $(A_i)$  converge para  $A$ , onde  $L$  e  $A$  são o perímetro e a área, respectivamente, de  $K$ .*

**Demonstração.** Como  $d(K_1, K_2) \leq \varepsilon$ , tem-se  $K_1 \subset \mathcal{V}(K_2, \varepsilon)$ . Pelo Teorema 1.1.31 para corpos convexos,

$$L(\mathcal{V}(K_2, \varepsilon)) = L_2 + 2\pi\varepsilon, \quad A(\mathcal{V}(K_2, \varepsilon)) = A_2 + L_2\varepsilon + \pi\varepsilon^2,$$

logo

$$L_1 \leq L_2 + 2\pi\varepsilon, \quad A_1 \leq A_2 + L_2\varepsilon + \pi\varepsilon^2.$$

Analogamente, como  $K_2 \subset \mathcal{V}(K_1, \varepsilon)$ , tem-se

$$L_2 \leq L_1 + 2\pi\varepsilon, \quad A_2 \leq A_1 + L_1\varepsilon + \pi\varepsilon^2.$$

Portanto  $|L_1 - L_2| \leq 2\pi\varepsilon$  e  $|A_1 - A_2| \leq \varepsilon \max\{L_1, L_2\} + \pi\varepsilon^2$ . □

**Teorema 1.5.7** *De entre todos os corpos convexos com o mesmo perímetro  $L$ , existe pelo menos um com área máxima, ou seja, o conjunto máximo existe.*

**Demonstração.** Sem perda de generalidade, considere-se a classe  $\mathcal{C}$  dos corpos convexos  $K$  de perímetro  $L$ , área  $A(K)$  e diâmetro  $[PQ]$ , contidos no círculo  $C$  de centro  $P$  e raio  $L$ . Todo o elemento  $K$  de  $\mathcal{C}$  está contido no círculo  $C$  logo,  $A(K) \leq A(C)$ . Considerem-se  $A = \sup_{K \in \mathcal{C}} A(K)$  e  $(K_i)$  uma sucessão de elementos de  $\mathcal{C}$  tal que  $(A(K_i))$  é convergente para  $A$ . Pelo Teorema 1.5.5, existe uma subsucessão  $(K_{i_j})$  que converge para  $K$  e  $(A(K_{i_j}))$  converge para  $A$ . Assim, pelo Teorema 1.5.6,

$$A(K) = A \quad \text{e} \quad L(K) = L$$

□

Conjugando os Teoremas 1.5.7 e 1.4.5, obtém-se o Teorema Isoperimétrico.

**Teorema 1.5.8** *De entre todos os corpos convexos com o mesmo perímetro, o círculo é o que tem maior área.*

Este teorema apresenta a propriedade isoperimétrica do círculo, que é traduzida pela desigualdade isoperimétrica  $L^2 - 4\pi A \geq 0$ , havendo igualdade se e só se o conjunto é um círculo.

Na verdade, a propriedade isoperimétrica também poderia ter sido enunciada da seguinte forma:

*“De entre todos os corpos convexos com a mesma área, o círculo é o que tem o menor perímetro.”*

## 1.6 Aplicação do Teorema Isoperimétrico à resolução do problema de Dido

O Teorema Isoperimétrico permite obter a solução para o Problema de Dido (Problema 1.0.1).

**Teorema 1.6.1** *De todas as curvas fechadas simples do plano, constituídas por um segmento de recta contíguo a um arco de comprimento  $L$ , a semicircunferência de raio  $\frac{L}{\pi}$  é a que delimita a maior área.*

**Demonstração.** Seja  $\gamma$  a semicircunferência de raio  $\frac{L}{\pi}$ , e seja  $\delta$  uma curva nas condições do enunciado. Efectuando uma reflexão ortogonal de  $\gamma$  relativamente ao seu diâmetro, obtém-se uma circunferência  $\gamma'$ , e efectuando uma reflexão ortogonal de  $\delta$  relativamente ao segmento de recta, obtém-se uma curva simples fechada  $\delta'$ .

Assim,  $\gamma'$  e  $\delta'$  têm o mesmo comprimento e delimitam o dobro das áreas delimitadas por  $\gamma$  e  $\delta$ , respectivamente. Pelo Teorema 1.3.10 a área delimitada por  $\delta'$  não excede a área delimitada por  $\gamma'$ , sendo igual se e só se  $\delta' = \gamma'$ . Assim, a área delimitada por  $\delta$  não excede a área delimitada por  $\gamma$  e é igual se e só se  $\delta = \gamma$ . □

## Capítulo 2

# Abordagem variacional do problema isoperimétrico

Neste capítulo formula-se o problema isoperimétrico como um problema de Lagrange num espaço normado. Começa-se por definir conceitos básicos de optimização de funções em espaços normados e apresenta-se uma condição necessária de optimização. Em seguida, deduz-se a equação de Euler-Lagrange para os problemas de Dido e isoperimétrico clássico. Finalmente, estabelece-se a Desigualdade de Wirtinger, através da qual se demonstra a desigualdade isoperimétrica (1.4).

## 2.1 Optimização de funções definidas em espaços normados

Sejam  $\mathcal{E}$  um espaço vectorial real normado e  $J : \mathcal{D} \subseteq \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função real definida num subconjunto  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{E}$ . Denote-se por  $\|\cdot\|$  a norma definida em  $\mathcal{E}$ .

**Definição 2.1.1** Diz-se que a função  $J$  atinge um **máximo** no ponto  $y_0 \in \mathcal{D}$  se  $J(y) \leq J(y_0)$ ,  $\forall y \in \mathcal{D}$ . No caso da desigualdade ser estrita, diz-se que  $J$  atinge um **máximo estrito** no ponto  $y_0$ . Analogamente se definem **mínimo** e **mínimo estrito**. A  $y_0$  nas condições indicadas chama-se **maximizante** ou **minimizante** de  $J$ .

**Exemplo 2.1.2** Considere-se a função  $J$  definida por

$$J(y) = \int_0^1 (y(x))^2 dx$$

em  $C([0, 1])$ .

Como  $(y(x))^2 \geq 0, \forall x \in [0, 1]$ , se  $y_0 = 0$ , então  $J(y_0) = 0 \leq J(y), \forall y \in C([0, 1])$ . Além disso,  $J(y) = 0$  se e só se  $y = 0$ . Portanto,  $J$  atinge um mínimo estrito em  $y_0 = 0$ .

**Lema 2.1.3** A função  $J$  atinge um máximo no ponto  $y_0 \in \mathcal{D}$  se e só se

$$J(y_0 + v) - J(y_0) \leq 0, \quad \forall y_0 + v \in \mathcal{D}.$$

O máximo   estrito se e só se  $J(y_0 + v) - J(y_0) < 0, \forall v \neq 0$ .

**Demonstração.** Seja  $y_0 \in \mathcal{D}$ . Para cada  $y \in \mathcal{D}$ , designe-se  $y - y_0$  por  $v$ . Então  $y = y_0 + v$ .  $J$  atinge um máximo em  $y_0$  se e só se  $J(y) \leq J(y_0)$ ,  $\forall y \in \mathcal{D}$ , ou seja,

$$J(y_0 + v) - J(y_0) \leq 0, \quad \forall y_0 + v \in \mathcal{D}.$$

O máximo é estrito se e só se  $J(y_0 + v) < J(y_0) \quad \forall y_0 + v \neq y_0$ , isto é, se e só se  $J(y_0 + v) - J(y_0) < 0$ ,  $\forall v \neq 0$ .

□

**Exemplo 2.1.4** Considere-se a função  $J$  definida por

$$J(y) = \int_a^b (y'(x))^2 dx$$

em  $\mathcal{D} = \{y \in C^1([a, b]) : y(a) = 0, y(b) = 1\}$ .

Como  $(y'(x))^2 \geq 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , se  $y'_1 = 0$ , então  $J(y_1) = 0 \leq J(y)$ ,  $\forall y \in \mathcal{D}$ .

Mas  $y_1$  é constante, logo  $y_1 \notin \mathcal{D}$ .

Seja  $y_0$  a função real definida por  $y_0(x) = \frac{x-a}{b-a}$ , para  $x \in [a, b]$ . Seja ainda  $y_0 + v \in \mathcal{D}$ . Tem-se  $v(a) = v(b) = 0$ , logo

$$\begin{aligned} J(y_0 + v) - J(y_0) &= \int_a^b [(y'_0(x) + v'(x))^2 - (y'_0(x))^2] dx \\ &= \int_a^b (v'(x))^2 dx + 2 \int_a^b y'_0(x)v'(x) dx \\ &\geq 2 \int_a^b y'_0(x)v'(x) dx = 0 \end{aligned}$$

e, pelo Lema 2.1.3,  $J$  atinge um mínimo em  $y_0 \in \mathcal{D}$ . Tem-se igualdade quando  $\int_a^b (v'(x))^2 dx = 0$ , ou seja,  $v'(x) = 0$  e, portanto,  $v(x) = k$ , com  $k \in \mathbb{R}$ . Assim,  $v(x) = v(a) = 0$  ou seja,  $v = 0$ , pelo que  $J$  atinge um mínimo estrito em  $y_0 \in \mathcal{D}$ .

**Definição 2.1.5** Diz-se que  $y_0 \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$  é um **maximizante local** de  $J$  em  $\mathcal{D}$  se, para algum  $r > 0$ ,  $y_0$  é maximizante de  $J$  em  $\mathcal{V}(y_0, r)$ , sendo  $\mathcal{V}(y_0, r) = \{y \in \mathcal{D} : \|y - y_0\| < r\}$ , ou seja, se  $J(y) \leq J(y_0), \forall y \in \mathcal{V}(y_0, r)$ . A definição de **minimizante local** é análoga.

**Observação 2.1.6** Todo o maximizante é um maximizante local, qualquer que seja a norma usada. No entanto, pode acontecer que  $y_0$  seja maximizante local relativamente a uma norma e que não o seja em relação a outra.

Para cada  $y, v \in \mathcal{D}$  designe-se por  $\delta J(y, v)$  a **variação à Gâteaux**<sup>1</sup> de  $J$  em  $y$  na direcção  $v$  (ou **primeira variação** de  $J$ ), definida por

$$\delta J(y, v) = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(y + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0},$$

caso exista esta derivada com respeito à variável  $\varepsilon$ , em  $\varepsilon = 0$ .

**Observação 2.1.7** Considerem-se para cada  $y \in \mathcal{D}$ , as direcções  $v \in \mathcal{E}$  tais que  $y + \varepsilon v \in \mathcal{D}$  (para todo  $\varepsilon$  suficientemente pequeno) e a variação à Gâteaux  $\delta J(y, v)$  existe. Estas direcções dizem-se **admissíveis** relativamente a  $\mathcal{D}$  e a  $y$ . Note-se que se  $v$  é admissível, então  $cv$ , com  $c \in \mathbb{R}$ , também o é e  $v = 0$  é sempre admissível.

Se, para cada direcção admissível  $v$ , a variação à Gâteaux,  $\delta J(y, v)$ , é contínua em  $y$ , diz-se que a variação à Gâteaux é **contínua fraca** em  $y$ .

---

<sup>1</sup>A teoria da diferenciação de funções em espaços normados teve origem com Volterra (1860-1940) e, mais abstractamente, com Fréchet (1878-1973) e Gâteaux (1889-1914). A noção de primeira variação de uma função definida por um integral num espaço de funções deve-se, essencialmente, a Euler (1771). O símbolo  $\delta J$  foi introduzido por Lagrange (1775).

**Proposição 2.1.8** *Se  $y_0 \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$  é um maximizante local para uma função real  $J$  definida em  $\mathcal{D}$ , então  $\delta J(y_0, v) = 0$ , para toda a direcção admissível  $v$ .*

**Demonstração.** Para cada direcção admissível  $v$ , a função definida por  $\phi(\varepsilon) = J(y_0 + \varepsilon v)$  atinge um extremo (máximo ou mínimo) em  $\varepsilon = 0$ , pelo Lema 2.1.3. Assim,  $\phi'(0) = 0$ , ou seja,  $\delta J(y_0, v) = 0$ . □

**Observação 2.1.9** *A condição  $\delta J(y_0, v) = 0, \forall v$  permite determinar  $y_0$  mas, ela só, não permite distinguir entre maximizante local e minimizante local ou entre maximizante e maximizante local. Além disso, podem existir elementos de  $\mathcal{E}$  que satisfazem esta condição e não são maximizantes nem minimizantes locais. Na verdade, esta condição em  $y_0$  é apenas uma condição necessária para que  $y_0$  seja extremante, mas a sua análise desempenha um papel fundamental na teoria do cálculo de variações.*

Considere-se  $G$  uma função real definida em  $\mathcal{D}$ . Caracterize-se um maximizante local  $y_0$  de uma função real  $J$ , quando sujeita à condição  $G(y) = G(y_0)$ .

**Proposição 2.1.10** *Se a função  $\tilde{J} = J + \lambda G$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}$ , atinge um máximo (estrito) em  $y_0 \in \mathcal{D}$  e  $G_{y_0} = \{y \in \mathcal{D} : G(y) = G(y_0)\}$ , então a função  $J$  também atinge um máximo (estrito) em  $y_0$  quando restringida ao conjunto  $G_{y_0}$ .*

**Demonstração.** Por hipótese, para cada  $y \in \mathcal{D}$ ,

$$J(y) + \lambda G(y) = \tilde{J}(y) \leq \tilde{J}(y_0) = J(y_0) + \lambda G(y_0).$$

Para cada  $y \in G_{y_0}$  tem-se então  $J(y) \leq J(y_0)$ , pelo que  $J$  atinge um máximo em  $y_0$  quando restringida a  $G_{y_0}$ . □

**Proposição 2.1.11** *Se as funções  $J$  e  $G$  estão definidas numa vizinhança de  $y_0$  e, para quaisquer direcções admissíveis  $v$  e  $w$ , têm, nessa vizinhança, variações à Gâteaux contínuas que satisfazem a condição Jacobiana*

$$\begin{vmatrix} \delta J(y_0, v) & \delta J(y_0, w) \\ \delta G(y_0, v) & \delta G(y_0, w) \end{vmatrix} \neq 0$$

então  $J|_{G_{y_0}}$  não admite um extremo local em  $y_0$ .

**Demonstração.** Considere-se a função  $F$  definida de uma vizinhança de  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  para uma vizinhança de  $(J(y_0), G(y_0)) \in \mathbb{R}^2$  por

$$F(r, s) = (J(y_0 + rv + sw), G(y_0 + rv + sw)).$$

Uma vez que o determinante não nulo referido é o determinante Jacobiano  $\frac{\partial F}{\partial(r, s)}$  calculado em  $r = s = 0$ , pode aplicar-se o Teorema da função inversa<sup>2</sup> à função  $F$ , desde que esta tenha derivadas parciais contínuas numa vizinhança de  $(0, 0)$ . Para isso basta estabelecer a continuidade de  $\frac{\partial}{\partial r} J(y_0 + rv + sw, v)$ , para  $v$  e  $w$  fixos, numa vizinhança de  $(0, 0)$ .

Sejam  $r_1$  e  $s_1$  tais que  $y_1 = y_0 + r_1v + s_1w \in \mathcal{V}(y_0, \tau)$ . Se  $r$  e  $s$  verificam  $|r - r_1| < \frac{\tau_1}{\|v\| + \|w\|}$  e  $|s - s_1| < \frac{\tau_1}{\|v\| + \|w\|}$ , então

$$y = y_0 + rv + sw \in \mathcal{V}(y_1, \tau_1),$$

---

<sup>2</sup>**Teorema da função inversa** Para  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  e  $r > 0$ , se  $J : \mathcal{V}(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}^d$  é uma função de classe  $C^1$  com determinante Jacobiano (em  $x_0$ ) não nulo, então  $J$  é invertível e a sua inversa é uma função contínua, de uma vizinhança de  $J(x_0)$  para uma vizinhança de  $x_0$ .

pois  $\|y - y_1\| \leq |r - r_1| \cdot \|v\| + |s - s_1| \cdot \|w\|$ . Pela continuidade de  $\delta J(y, v)$  em  $y_1$ , tem-se que dado  $\varepsilon_1 > 0 \exists \tau_1 > 0 : |\delta J(y, v) - \delta J(y_1, v)| < \varepsilon_1$  quando  $\|y - y_1\| < \tau_1$ . Assim,

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \tau_2 > 0 : |r - r_1| < \tau_2 \wedge |s - s_1| < \tau_2 \Rightarrow \left| \frac{\partial J}{\partial r}(r, s) - \frac{\partial J}{\partial r}(r_1, s_1) \right| < \varepsilon_1,$$

ou seja,  $\frac{\partial J}{\partial r}$  é contínua em  $(r_1, s_1)$ .

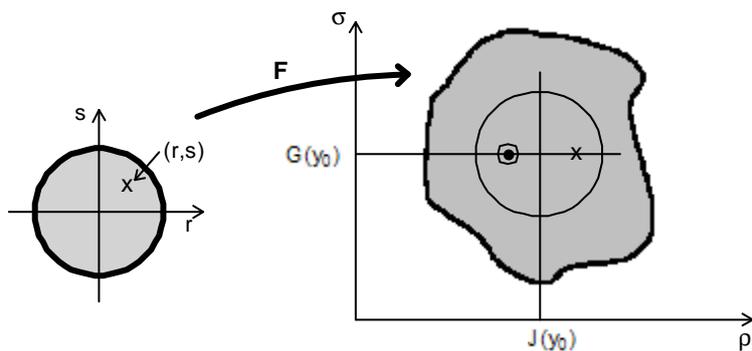


Figura 2.1:

Por aplicação do teorema da função inversa conclui-se que  $F$  é invertível e a sua inversa é contínua numa vizinhança de  $F(0, 0)$ . Assim,  $J(y_0)$  não é um extremo local de  $J|_{G(y_0)}$ , pois para qualquer  $(z, G(y_0))$  na vizinhança de  $(J(y_0), G(y_0))$ , existe  $(r, s) \in \mathcal{V}_{(0,0)}$  tal que  $y = y_0 + rv + sw$  e  $J(y) = z$  e  $G(y) = G(y_0)$  (Figura 2.1).

□

**Teorema 2.1.12 (Lagrange)** *Sejam  $J$  e  $G$  funções definidas numa vizinhança de  $y_0$ , com variações à Gâteaux contínuas fracas. Se  $y_0$  é maximizante local*

de  $J|_{G_{y_0}}$  nessa vizinhança, então  $\delta G(y_0, w) = 0, \forall w$  ou existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\delta J(y_0, v) = \lambda \delta G(y_0, v), \forall v$ .

**Demonstração.** Se a condição  $\delta G(y_0, w) = 0, \forall w$ , não se verificar, então existe  $w$  tal que  $\delta G(y_0, w) \neq 0$  para qualquer  $v$ , e pela Proposição 2.1.11,

$$\begin{vmatrix} \delta J(y_0, v) & \delta J(y_0, w) \\ \delta G(y_0, v) & \delta G(y_0, w) \end{vmatrix} = 0.$$

Assim, considerando  $\lambda = \frac{\delta J(y_0, w)}{\delta G(y_0, w)}$  tem-se  $\delta J(y_0, v) = \lambda \delta G(y_0, v), \forall v$ . □

**Observação 2.1.13** *O Teorema de Lagrange é habitualmente designado por **Método dos Multiplicadores de Lagrange** e o parâmetro  $\lambda$  designado por **Multiplicador de Lagrange**.*

*Tendo em conta a linearidade da variação à Gâteaux e substituindo  $\lambda$  por  $-\lambda$  tem-se também  $\delta(J + \lambda G)(y_0, \cdot) = 0$ , o que sugere a função auxiliar  $J + \lambda G$  sem restrições.*

*Apesar do nome do método sugerir que este se deve a Lagrange, foi Euler quem primeiro o deduziu. Na tentativa de resolver o problema isoperimétrico, Euler formulou um problema variacional mais geral, também designado problema isoperimétrico, e deduziu o método dos multiplicadores de Lagrange, ao qual começou por chamar método isoperimétrico. Mas as suas publicações sobre este tema, datadas de 1732 e 1736, continham erros e mostravam que Euler ainda não tinha dominado essas questões. Lagrange acabou por ficar associado ao método*

dos multiplicadores pelas aplicações à mecânica que estudou e que apresentou no seu livro *Méchanique Analytique*, em 1788.

## 2.2 Equação de Euler-Lagrange de um problema variacional de primeira ordem

Considere-se o espaço vectorial real  $C^1([a, b])$  munido da norma do máximo definida em  $C([a, b])$  por

$$\|y\| = \max_{x \in [a, b]} |y(x)|, \quad (2.1)$$

ou, em alternativa, munido da norma

$$\|y\| = \max_{x \in [a, b]} (|y(x)| + |y'(x)|). \quad (2.2)$$

**Observação 2.2.1** Como  $C^1([a, b]) \subseteq C([a, b])$ , cada norma em  $C([a, b])$  é também uma norma em  $C^1([a, b])$ .

Seja  $f \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^2)$ . Considere-se a função real  $J$  definida por

$$J(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$$

em  $C^1([a, b])$ . Sejam  $p, q \in \mathbb{R}$ . Considere-se o problema variacional  $\mathcal{P}$  que consiste em maximizar a função  $J$  em  $\mathcal{D} = \{y \in C^1([a, b]) : y(a) = p, y(b) = q\}$ . Diz-se que um maximizante local de  $J$  é **fraco** ou **forte** consoante se escolhe a norma (2.1) ou (2.2), respectivamente. Note-se que um maximizante local forte é também um maximizante local fraco.

Os lemas seguintes desempenham um papel fundamental na dedução de uma condição necessária de otimização para o problema variacional  $\mathcal{P}$ .

**Lema 2.2.2 (DuBois-Reymond)** *Se  $h \in C([a, b])$  satisfaz*

$$\int_a^b h(x)v'(x)dx = 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}_0,$$

com  $\mathcal{D}_0 = \{v \in C^1([a, b]) : v(a) = v(b) = 0\}$ , então  $h$  é uma função constante em  $[a, b]$ .

**Demonstração.** A função  $v$  definida por  $v(x) = \int_a^x (h(t) - c)dt$ , com  $c \in \mathbb{R}$ , é contínua em  $[a, b]$ , tem derivada  $v'(x) = h(x) - c$  contínua em  $]a, b[$  e satisfaz a condição  $v(a) = 0$ . Se, além disso,  $v(b) = 0$ , então  $h \in \mathcal{D}_0$ , isto é,

$$\int_a^b (h(t) - c)dt = 0$$

ou seja,

$$c = \frac{1}{b-a} \int_a^b h(t)dt.$$

Assim, para o valor  $c$  e a função  $v$  indicados, tem-se

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b (h(x) - c)^2 dx = \int_a^b (h(x) - c)v'(x)dx \\ &= \int_a^b h(x)v'(x)dx - cv(x)dx \Big|_a^b = 0, \end{aligned}$$

pelo que a função integranda é identicamente nula em  $[a, b]$ , ou seja,  $h$  é uma função constante em  $[a, b]$ . □

**Proposição 2.2.3** *Sejam  $g, h \in C([a, b])$ . Se*

$$\int_a^b [g(x)v(x) + h(x)v'(x)] dx = 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}_0, \quad (2.3)$$

com  $\mathcal{D}_0 = \{v \in C^1([a, b]): v(a) = v(b) = 0\}$ , então  $h \in C^1([a, b])$  e  $h' = g$ .

**Demonstração.** Seja  $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ , com  $x \in [a, b]$ . Então  $G \in C^1([a, b])$  e  $G' = g$ . Assim, integrando por partes a primeira parcela de (2.3), obtém-se

$$\int_a^b [g(x)v(x) + h(x)v'(x)] dx = \int_a^b [h(x) - G(x)]v'(x)dx + G(x)v(x) \Big|_a^b,$$

logo

$$\int_a^b [h(x) - G(x)]v'(x)dx = 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}_0.$$

Pelo Lema 2.2.2 vem então que

$$h(x) - G(x) = c$$

com  $c \in [a, b]$  e, nesse caso,  $h = G + c \in C^1([a, b])$ , donde  $h' = G' = g$ . □

Sejam  $f \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^2)$  e  $J$  a função definida no início da secção. Denote-se  $f(x, y(x), y'(x))$  por  $f[y(x)]$ , para  $y \in C^1([a, b])$  e  $x \in [a, b]$ .

Como  $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (f[(y + \varepsilon v)(x)]) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (f(x, y(x) + \varepsilon v(x), y'(x) + \varepsilon v'(x))) =$   
 $= f_y(x, y(x) + \varepsilon v(x), y'(x) + \varepsilon v'(x))v(x) + f_{y'}(x, y(x) + \varepsilon v(x), y'(x) + \varepsilon v'(x))v'(x),$   
então  $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (J(y + \varepsilon v)) = \int_a^b f_y[(y + \varepsilon v)(x)]v(x) + f_{y'}[(y + \varepsilon v)(x)]v'(x)dx$ . Tomando  $\varepsilon = 0$  conclui-se que a variação à Gâteaux de  $J$  é dada por

$$\delta J(y, v) = \int_a^b (f_y[y(x)]v(x) + f_{y'}[y(x)]v'(x))dx, \quad (2.4)$$

para cada  $y, v \in C^1([a, b])$ .

Pela igualdade anterior, a variação à Gâteaux  $\delta J(y, v)$  é linear em  $v$  e contínua em cada  $y_0 \in C^1([a, b])$ , logo  $J$  tem variações contínuas fracas em  $C^1([a, b])$ , relativamente à norma do máximo.

**Proposição 2.2.4** *Seja  $y \in C^1([a, b])$ . Se  $\delta J(y, v) = 0, \forall v \in \mathcal{D}_0$ , com  $\mathcal{D}_0 = \{v \in C^1([a, b]) : v(a) = v(b) = 0\}$ , então  $f_{y'}$  é de classe  $C^1$  e*

$$\frac{d}{dx} f_{y'} = f_y \quad (2.5)$$

em  $]a, b[$ . Tem-se então

$$\delta J(y, v) = f_{y'}(x, y(x), y'(x)) \cdot v(x) \Big|_a^b, \quad \forall v \in \mathcal{D}_0. \quad (2.6)$$

**Demonstração.** Aplicando a Proposição 2.2.3 às funções contínuas  $g = f_y$  e  $h = f_{y'}$  vem imediatamente que  $f_{y'}$  é de classe  $C^1$  e (2.5). Então, por (2.5), a função integranda de (2.4) é  $\frac{d}{dx} \left[ f_{y'}(x, y(x), y'(x)) v(x) \right]$ , que depois de integrada permite obter (2.6). □

**Observação 2.2.5** *A equação diferencial (2.5) designa-se por **Primeira Equação de Euler-Lagrange** e foi obtida por Euler, em 1736. Também Lagrange a obteve (incorrectamente) em 1755 ([36], p. 148).*

**Definição 2.2.6** *Seja  $y_0 \in C^1([a, b])$ . Diz-se que  $y_0$  é uma **curva estacionária** para o problema variacional  $\mathcal{P}$  se  $y_0$  satisfaz a equação diferencial (2.5) em  $]a, b[$ .*

**Observação 2.2.7** *Uma curva estacionária pode não ser maximizante nem minimizante local para o problema (ver Observação 2.1.9). Pensa-se que Euler não se terá apercebido desta questão. Só alguns anos mais tarde, com o desenvolvimento da teoria do cálculo de variações surgiram condições suficientes de optimização e começou a haver uma preocupação em fundamentar as questões relativas à existência de solução.*

Considere-se o espaço vectorial real  $(C^1([a, b]))^d$  munido da norma definida em  $(C([a, b]))^d$  por

$$\|y\| = \max_{x \in [a, b]} (|y(x)|)$$

ou, em alternativa, munido da norma

$$\|y\| = \max_{x \in [a, b]} (|y(x)| + |y'(x)|),$$

onde  $|\cdot|$  denota agora a norma euclidiana em  $\mathbb{R}^d$ .

Seja  $f \in C^1([a, b] \times D)$ , com  $D \subset \mathbb{R}^{2d}$ . Considere-se a função real  $J$  definida por

$$J(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx = \int_a^b f[y(x)] dx$$

em  $\mathcal{D}^* = \{y \in (C^1([a, b]))^d : (y(x), y'(x)) \in \mathcal{D}, \forall x \in [a, b]\}$ , com  $d \in \mathbb{N}$ . Sejam  $p, q \in \mathcal{D}$ . Considere-se o problema variacional  $\mathcal{P}'$  que consiste em maximizar a função  $J$  em  $\mathcal{D}^d = \{y \in \mathcal{D}^* : y(a) = p, y(b) = q\}$ . A variação à Gâteaux é definida por

$$\delta J(y, v) = \int_a^b (f_y[y(x)] \cdot v(x) + f_{y'}[y(x)] \cdot v'(x)) dx,$$

para cada  $y \in \mathcal{D}$  e  $v \in \mathcal{D}_0^d$ , com  $\mathcal{D}_0^d = \{v \in (C^1([a, b]))^d : v(a) = v(b) = 0\}$ . Note-se que  $f_y[y(x)]$  e  $f_{y'}[y(x)]$  são funções vectoriais com componentes  $f_{y_j}[y(x)] = f_{y_j}(x, y(x), y'(x))$ ,  $j = 1, 2, \dots, d$  e  $f_{y'_j}[y(x)] = f_{y'_j}(x, y(x), y'(x))$ ,  $j = 1, 2, \dots, d$ , respectivamente, e o produto indicado representa o produto interno em  $\mathbb{R}^d$ .

**Proposição 2.2.8** *Sejam  $g, h \in (C([a, b]))^d$ .*

*Se  $\int_a^b [g(x) \cdot v(x) + h(x)v'(x)] dx = 0 \forall v \in \mathcal{D}_0^d$ , então  $h \in (C^1([a, b]))^d$  e  $h' = g$ .*

**Demonstração.** Para  $(v, 0, 0, \dots, 0) \in \mathcal{D}_0^d$ , a condição integral reduz-se a

$$\int_a^b [g_1(x)v(x) + h_1(x)v'(x)] dx = 0, \forall v \in \mathcal{D}_0.$$

Assim, da Proposição 2.2.3, tem-se  $h_1 \in C^1([a, b])$  e  $h'_1 = g_1$ , e de modo análogo para as outras componentes. Assim, conclui-se que  $h' = g$ . □

**Corolário 2.2.9** *Se  $h \in (C([a, b]))^d$  e  $\int_a^b h(x)v'(x) dx = 0, \forall v \in \mathcal{D}_0^d$ , então  $h(x) = c \in \mathbb{R}^d$ .*

**Demonstração.** Basta considerar  $g = 0$  na Proposição 2.2.8. □

**Teorema 2.2.10** *Seja  $y_0 \in \mathcal{D}^d$ . Se  $\delta J(y_0, v) = 0, \forall v \in \mathcal{D}_0^d$ , então  $f_{y'_0}$  é de classe  $C^1$  e  $y_0$  satisfaz*

$$\frac{d}{dx} f_{y'} = f_y \quad (\text{ou} \quad \frac{d}{dx} f_{y'_j} = f_{y_j}, \quad j = 1, \dots, d) \quad (2.7)$$

em  $]a, b[$ .

Tem-se então

$$\delta J(y, v) = f_{y'}(x, y(x), y'(x)) \cdot v(x) \Big|_a^b, \quad \forall v \in \mathcal{D}_0^d. \quad (2.8)$$

**Demonstração.** Se  $D = \mathbb{R}^2$ , tem-se uma consequência imediata dos resultados anteriores. Se  $D \subset \mathbb{R}^2$ , basta verificar que todas as direcções  $v \in \mathcal{D}_0^d$  são admissíveis. Para cada  $x \in [a, b]$ , considere-se uma vizinhança esférica contida em  $D$ , de centro  $(y_0(x), y'_0(x))$  e raio  $0 < r(x) \leq 1$ . A continuidade de  $y_0$  e  $y'_0$ , em  $[a, b]$ , garante que  $r \in C([a, b])$ , logo, pelo Teorema de Weierstrass,  $r$  atinge um mínimo em  $x_0$  tal que  $r(x) \geq r(x_0) = r_0 > 0$ . Assim, para  $\varepsilon < r_0$  e  $v \in \mathcal{D}_0^d$ , com  $\|v\| \leq 1$ , tem-se  $y_0 + \varepsilon v \in \mathcal{D}^d$ , concluindo-se que todas as direcções  $v$  (e os seus múltiplos escalares) são admissíveis. □

## 2.3 O problema de Dido

O problema de Dido (Problema 0.0.1), estudado por Gelfand e Fomin, pode ser formulado da seguinte forma:

**Problema 2.3.1** *Das curvas de comprimento  $L$  no semi-plano superior que unem os pontos  $P = (-a, 0)$  e  $Q = (a, 0)$ , encontre-se aquela que juntamente com  $[PQ]$  delimita a área máxima.*

Considerem-se a função real  $J$  definida <sup>3</sup> por

$$J(y) = \int_{-a}^a y(x) dx$$

---

<sup>3</sup>Pelo Teorema 1.1.26,  $J(y)$  representa a área da região delimitada pelo gráfico de  $y$  e por  $[PQ]$ .

em  $\mathcal{D} = \{y \in C^1([-a, a]) : y(-a) = y(a) = 0\}$  e a condição isoperimétrica <sup>4</sup>

$$L(y) = \int_{-a}^a \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = L. \quad (2.9)$$

O problema de Dido, numa formulação variacional, consiste em maximizar  $J$  em  $\mathcal{D}$  sujeito à condição isoperimétrica indicada. Pelo Teorema 2.1.12, se a função  $J$  atinge um máximo local em  $y_0 \in \mathcal{D}$  quando sujeita à condição  $L(y) = L$ , então  $\delta L(y_0, v) = 0, \forall v \in \mathcal{D}$  ou  $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \delta J(y_0, v) = \lambda \delta L(y_0, v), \forall v \in \mathcal{D}$ . Mas, se existir  $y \in \mathcal{D}$  tal que  $\delta L(y, v) = 0, \forall v \in \mathcal{D}$ , ou seja,

$$\int_{-a}^a \left( \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} v' \right) dx = 0, \forall v \in \mathcal{D},$$

então, pelo Lema 2.2.2, a função  $\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$  é constante. Assim,  $y'$  é constante e a função  $y$  é identicamente nula. Portanto, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\delta J(y_0, v) = \lambda \delta L(y_0, v), \forall v \in \mathcal{D}$  e  $y_0$  é uma curva estacionária para a função  $J + \lambda L$ .

Pelo Teorema 2.2.10 a função  $y_0$  satisfaz a equação de Euler-Lagrange (2.7):

$$\lambda \frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) = 1. \quad (2.10)$$

Integrando (2.10), conclui-se que  $y_0$  satisfaz a igualdade

$$\lambda \frac{y'_0}{\sqrt{1 + (y'_0)^2}} = x - c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

ou seja<sup>5</sup>,

$$\lambda y'_0 = \frac{x - c_1}{\sqrt{1 - \frac{(x - c_1)^2}{\lambda^2}}}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

---

<sup>4</sup>Pelo Teorema 1.1.6,  $L(y)$  representa o comprimento de  $y$ .

<sup>5</sup>O sinal de  $y'_0$  é o sinal de  $\frac{1}{\lambda}(x - c_1)$ .

Integrando novamente conclui-se que  $y_0$  verifica

$$y_0 - c_2 = -\sqrt{\lambda^2 - (x - c_1)^2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

ou ainda,

$$(x - c_1)^2 + (y_0 - c_2)^2 = \lambda^2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

A curva estacionária é então a circunferência definida por (2.12), em que  $c_1, c_2$  e  $\lambda$  são determinadas pelas condições  $y(-a) = y(a) = 0$  e  $L(y) = L$ .

Como  $y_0(-a) = y_0(a)$ , tem-se  $ac_1 = 0$ ,  $c_1 \in \mathbb{R}$ , e como  $a \neq 0$  vem que  $c_1 = 0$ , logo o centro da circunferência está sobre o eixo dos  $yy$ . Além disso,  $y_0(a) = 0$  implica que  $a^2 + c_2^2 = \lambda^2$ . A condição isoperimétrica estabelece a relação  $a = \lambda \operatorname{sen}\left(\frac{L}{2\lambda}\right)$ .

Se  $L = \pi a$ , tem-se  $c_2 = 0$  e a curva estacionária é a semicircunferência de centro  $(0, 0)$  e raio  $a$ .

**Teorema 2.3.2** *Seja  $y \in \mathcal{D}$ . Se  $L = L(y)$  e  $A = J(y)$  são o comprimento e a área de  $y$ , respectivamente, então*

$$L^2 \geq 2\pi A$$

e  $L^2 = 2\pi A$  se e só se  $y$  é uma semicircunferência, isto é,

$$y(x) = \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (2.13)$$

**Demonstração.** Tendo em conta que  $y \in \mathcal{D}$ , basta mostrar que

$$\frac{1}{a} \int_{-a}^a \left( \sqrt{1 + (y')^2} + \frac{x}{a} y' \right) dx \geq \frac{1}{2} \pi, \quad (2.14)$$

com igualdade se e só se  $y$  satisfaz (2.13). Na verdade, integrando por partes o integral que define a área e aplicando as condições  $y(-a) = y(a) = 0$ , tem-se  $A = \int_{-a}^a x(-y')dx$ . Assim, (2.14) é equivalente a  $-Aa^{-2} + La^{-1} \geq \frac{1}{2}\pi$ , ou ainda,  $L^2 - 2\pi A \geq (L - \pi a)^2$  e a desigualdade (1.4) decorre imediatamente. Mais, da igualdade em (1.4) tem-se  $L^2 - 2\pi A = (L - \pi a)^2$  e, por isso, (2.14) transforma-se numa igualdade, obtendo-se (2.13).

O problema em questão é um problema simples de cálculo de variações. Na verdade, para  $f$  definida por

$$f(x, y') = \sqrt{1 + (y')^2} + \frac{x}{a}y',$$

tem-se  $\frac{\partial^2 f}{\partial (y')^2}(x, y') > 0$  e, portanto,  $y' \rightarrow f(x, y')$  é estritamente convexa. Neste caso, tem-se  $f(x, y'_1) > f(x, y') + (y'_1 - y')\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y')$ , excepto se  $y'_1 = y'$ . Escolhendo  $y$  de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y') = c, \tag{2.15}$$

para algum  $c \in \mathbb{R}$  e  $y(-a) = y(a) = 0$ , tem-se  $\int_{-a}^a f(x, y'_1)dx > \int_{-a}^a f(x, y')dx$ , excepto se  $y_1 = y$ . Assim, (2.15) implica (2.13), que por sua vez implica

$$\int_{-a}^a f(x, y')dx = \frac{1}{2}\pi.$$

□

## 2.4 O problema isoperimétrico clássico

Considerem-se a função real  $J$  definida <sup>6</sup> por

$$J(x, y) = \int_a^b x(t)y'(t)dt$$

em  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in (C^1([a, b]))^2 : (x(a), y(a)) = (x(b), y(b))\}$  e a condição isoperimétrica <sup>7</sup>

$$L(x, y) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = L.$$

O problema isoperimétrico clássico, numa formulação variacional, consiste em maximizar  $J$  em  $\mathcal{D}$  sujeita à condição isoperimétrica acima indicada. Para  $(u, v) \in (C^1([a, b]))^2$ ,

$$\delta J((x, y), (u, v)) = \int_a^b [y'(t)u(t) + x(t)v'(t)] dt.$$

Sem perda de generalidade, suponha-se que  $(x(a), y(a)) = (x(b), y(b)) = (0, 0)$ . Pelo Teorema 2.1.12, se a função  $J$  atinge um máximo local em  $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$  quando sujeita à condição  $L((x, y)) = L$ , então  $\delta L((x_0, y_0), (u, v)) = 0, \forall (u, v) \in \mathcal{D}$  ou  $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \delta J((x_0, y_0), (u, v)) = \lambda \delta L((x_0, y_0), (u, v)), \forall (u, v) \in \mathcal{D}$ .

Se existir  $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}^* = \{(x, y) \in \mathcal{D} : (x')^2 + (y')^2 \neq 0\}$  tal que

$$\delta L((x_0, y_0), (u, v)) = 0, \forall (u, v) \in \mathcal{D},$$

ou seja,

$$\int_a^b \frac{x'_0 u' + y'_0 v'}{\sqrt{(x'_0)^2 + (y'_0)^2}} dt = 0, \forall (u, v) \in \mathcal{D},$$

---

<sup>6</sup>Pelo Teorema 1.1.27,  $J(x, y)$  representa a área da região delimitada pela curva  $(x, y)$ .

<sup>7</sup>Pelo Teorema 1.1.6,  $L(x, y)$  representa o comprimento de  $(x, y)$ .

então, pelo Corolário 2.2.9, o vector unitário  $\frac{(x'_0, y'_0)}{\sqrt{(x'_0)^2 + (y'_0)^2}}$  é constante, ou seja,  $(x'_0, y'_0)$  tem direcção constante, o que é um absurdo. Assim, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\delta J((x_0, y_0), (u, v)) = \lambda \delta L((x_0, y_0), (u, v)), \quad \forall (u, v) \in \mathcal{D}$$

e  $(x_0, y_0)$  é uma curva estacionária para a função  $J + \lambda L$ .

Pelo Teorema 2.2.10 a função  $(x_0, y_0)$  satisfaz as equações de Euler-Lagrange (2.7):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\lambda x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right) = y'$$

e

$$\frac{d}{dt} \left( x + \frac{\lambda y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right) = 0.$$

Integrando as equações anteriores, conclui-se que  $y_0$  satisfaz a igualdade

$$y = \frac{\lambda x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

e

$$x + \frac{\lambda y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} = c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

pelo que  $c_1 x' - x x' = y y' - c_2 y'$ . Integrando novamente, obtém-se

$$2c_1 x - x^2 = y^2 - 2c_2 y + c, \quad c_1, c_2, c \in \mathbb{R}.$$

Como para  $t = a$ ,  $((x(a), y(a)) = (0, 0)$ , tem-se  $c = 0$  e conclui-se que  $(x_0, y_0)$  verifica a equação

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = c_1^2 + c_2^2$$

ou seja, é uma circunferência de centro  $(c_1, c_2)$  e raio  $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ . O raio da circunferência é determinado pela condição isoperimétrica.

O resultado seguinte estabelece a desigualdade de Wirtinger.

**Lema 2.4.1** (*Desigualdade de Wirtinger*) *Se  $y$  é uma função de classe  $C^1$ , periódica de período  $2\pi$ , tal que  $\int_0^{2\pi} y(t)dt = 0$ , então*

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{dy}{dt}(t)\right)^2 dt \geq \int_0^{2\pi} (y(t))^2 dt \quad (2.16)$$

com igualdade se e só se  $y(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$ .

**Demonstração.** Considere-se a função contínua  $f(t + \pi) - f(t)$  definida em  $[0, \pi]$ . Em  $t = 0$  a função assume o valor  $f(\pi) - f(0)$  e em  $t = \pi$  o valor  $f(0) - f(\pi) = -(f(\pi) - f(0))$  logo, pelo Teorema de Bolzano, existe  $\xi \in [0, \pi[ \subset \mathbb{R}$  tal que  $f(\xi + \pi) - f(\xi) = 0$ .

Seja  $g$  a função definida por

$$g(t) = (f(t) - f(\xi))^2 \cotg(t - \xi)$$

em  $[0, 2\pi] \setminus \{\xi, \xi + \pi\}$ . Esta função tem limite zero em  $\xi$  e em  $\xi + \pi$ . De facto, usando a regra de L'Hôpital, conclui-se que

$$\lim_{t \rightarrow \xi^-} g(t) = \lim_{t \rightarrow \xi^-} \left[ (f(t) - f(\xi))^2 \frac{\cos(t - \xi)}{\sen(t - \xi)} \right] = 0.$$

De modo análogo, obtém-se  $\lim_{t \rightarrow \xi^+} g(t) = 0$  e, por isso,

$$\lim_{t \rightarrow \xi} g(t) = 0.$$

Obtém-se também  $\lim_{t \rightarrow (\xi + \pi)^-} g(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow (\xi + \pi)^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow \xi + \pi} g(t) = 0$ .

Para demonstrar a desigualdade (2.16), calcule-se a derivada da função  $g$  em todo  $t \in [0, 2\pi] \setminus \{\xi, \xi + \pi\}$ :

$$\begin{aligned} g'(t) &= 2(f(t) - f(\xi))f'(t)\cotg(t - \xi) + (f(t) - f(\xi))^2(-\operatorname{cosec}^2(t - \xi)) \\ &= (f'(t))^2 - (f(t) - f(\xi))^2 - (f'(t) - (f(t) - f(\xi))\cotg(t - \xi))^2 \\ &\leq (f'(t))^2 - (f(t) - f(\xi))^2 \end{aligned}$$

tendo-se igualdade se e só se  $f'(t) = (f(t) - f(\xi))\cotg(t - \xi)$ .

Seja  $\xi \in ]0, \pi[$  e tome-se  $\varepsilon > 0$ . Então

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi - \varepsilon} g'(t)dt + \int_{\xi + \varepsilon}^{\xi + \pi - \varepsilon} g'(t)dt + \int_{\xi + \pi + \varepsilon}^{2\pi} g'(t)dt &\leq \int_0^{\xi - \varepsilon} [(f'(t))^2 - (f(t) - f(\xi))^2] dt + \\ + \int_{\xi + \varepsilon}^{\xi + \pi - \varepsilon} [(f'(t))^2 - (f(t) - f(\xi))^2] dt &+ \int_{\xi + \pi + \varepsilon}^{2\pi} [(f'(t))^2 - (f(t) - f(\xi))^2] dt, \end{aligned}$$

ou seja, pelo Lema Fundamental do Cálculo Integral,

$$\begin{aligned} g(\xi - \varepsilon) - g(0) + g(\xi + \pi - \varepsilon) - g(\xi + \varepsilon) + g(2\pi) - g(\xi + \pi + \varepsilon) \\ \leq \int_0^{2\pi} [(f'(t))^2 - (f(t) - f(\xi))^2] dt, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [g(\xi - \varepsilon)] - g(0) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [g(\xi + \pi - \varepsilon)] - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [g(\xi + \varepsilon)] + g(2\pi) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [g(\xi + \pi + \varepsilon)] \\ \leq \int_0^{2\pi} [(f'(t))^2 - (f(t) - f(\xi))^2] dt. \end{aligned}$$

Mas  $f(0) = f(2\pi)$ , logo  $g(0) = g(2\pi)$  e da desigualdade anterior vem

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \xi^-} g(t) + \lim_{t \rightarrow (\xi+\pi)^-} g(t) - \lim_{t \rightarrow \xi^+} g(t) - \lim_{t \rightarrow (\xi+\pi)^+} g(t) \\ & \leq \int_0^{2\pi} [(f'(t))^2 - (f(t) - f(\xi))^2] dt. \end{aligned}$$

Como todos estes limites são nulos obtém-se

$$0 \leq \int_0^{2\pi} [(f'(t))^2 - (f(t) - f(\xi))^2] dt$$

ou seja,

$$0 \leq \int_0^{2\pi} [(f'(t))^2 - (f(t))^2] dt + 2f(\xi) \int_0^{2\pi} f(t) dt - \int_0^{2\pi} (f(\xi))^2 dt.$$

Além disso,  $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ , logo

$$0 \leq \int_0^{2\pi} [(f'(t))^2 - (f(t))^2] dt - \int_0^{2\pi} (f(\xi))^2 dt$$

e, portanto,

$$0 \leq \int_0^{2\pi} [(f'(t))^2 - (f(t))^2] dt,$$

que é precisamente a desigualdade (2.16).

Assim, há igualdade em (2.16) se e só se  $f'(t) = (f(t) - f(\xi)) \cotg(t - \xi)$  e  $f(\xi) = 0$ , isto é,

$$f'(t) = f(t) \cotg(t - \xi)$$

ou ainda,

$$f'(t) \sen(t - \xi) - f(t) \cos(t - \xi) = 0,$$

que é equivalente a

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{f(t)}{\text{sen}(t - \xi)} \right] = 0$$

em cada intervalo  $0 < t < \xi$ ,  $\xi < t < \xi + \pi$  e  $\xi + \pi < t < 2\pi$ . Então

$$\frac{f(t)}{\text{sen}(t - \xi)} = B,$$

com  $B$  constante em cada intervalo. Assim,

$$f(t) = \begin{cases} B_1 \text{sen}(t - \xi) & \text{se } 0 < t < \xi \\ B_2 \text{sen}(t - \xi) & \text{se } \xi < t < \xi + \pi \\ B_3 \text{sen}(t - \xi) & \text{se } \xi + \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

e como  $f(0) = f(2\pi)$  e  $f$  é contínua, tem-se  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2\pi} f(t)$  e, portanto,  $B_1 = B_3$ .

Por outro lado, de  $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$   
vem  $\int_0^\xi B_1 \text{sen}(t - \xi) dt + \int_\xi^{\xi+\pi} B_2 \text{sen}(t - \xi) dt + \int_{\xi+\pi}^{2\pi} B_1 \text{sen}(t - \xi) dt = 0$ ,  
ou seja,

$$-B_1(\cos(0) - \cos(-\xi) + \cos(2\pi - \xi) - \cos(\pi)) - B_2(\cos(\pi) - \cos(0)) = 0.$$

Assim,  $B_2 = B_1 = B_3$  e, portanto,  $f(t) = B \text{sen}(t - \xi)$ ,  $\forall t \in [0, 2\pi]$ .

Analogamente se prova a igualdade em (2.16) para  $\xi = 0$ .

□

**Teorema 2.4.2 (Teorema Isoperimétrico)** *Se  $\gamma \in (C^1([a, b]))^2$  é uma curva simples fechada de comprimento  $L$  que delimita uma área  $A$ , então*

$$L^2 - 4\pi A \geq 0. \tag{2.17}$$

*Tem-se  $L^2 - 4\pi A = 0$  se e só se  $\gamma$  é uma circunferência.*

**Demonstração.** Seja  $\gamma = (x, y) \in (C^1([a, b]))^2$ . Relaciona-se o comprimento de  $\gamma$ ,  $L$ , dado por

$$L(x, y) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt,$$

com a área  $A$ , delimitada por  $\gamma$ , dada por

$$J(x, y) = \int_a^b x(t)y'(t)dt = - \int_a^b y(t)x'(t)dt.$$

Considere-se o parâmetro  $t = \frac{2\pi}{L}s$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ , e  $s$  o parâmetro do comprimento de arco. Então

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= \left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right] \\ &= \left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right] \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi^2} \end{aligned}$$

e

$$\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] dt = \int_0^{2\pi} \frac{L^2}{4\pi^2} dt = \frac{L^2}{2\pi}.$$

Por outro lado, como  $A = - \int_0^{2\pi} y \frac{dx}{dt} dt$  vem que

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi A &= 2\pi \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] dt + 4\pi \int_0^{2\pi} y \frac{dx}{dt} dt \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 2y \frac{dx}{dt}\right] dt \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2y \frac{dx}{dt} + y^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - y^2\right] dt \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{dx}{dt} + y\right)^2 dt + \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - y^2\right] dt. \end{aligned}$$

A primeira parcela do segundo membro é, obviamente, não negativa pelo que basta provar a desigualdade

$$\int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 - y^2 \right] dt \geq 0 \quad (2.18)$$

ou seja,

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 dt \geq \int_0^{2\pi} y^2 dt.$$

Para aplicar a desigualdade de Wirtinger basta observar que a hipótese  $\int_0^{2\pi} y(t)dt = 0$  pode ser sempre satisfeita por escolha adequada de coordenadas. Suponha-se, sem perda de generalidade, que o eixo das abcissas passa no centro de massa da curva  $\gamma$ . Tem-se então  $\int_0^{2\pi} y(t)dt = 0$  e, aplicando o Lema 2.4.1, obtém-se (2.18) pelo que (2.17) decorre imediatamente.

Resta provar que há igualdade em (2.17) se e só se  $\gamma$  é uma circunferência. Tem-se  $L^2 - 4\pi A = 0$  se e só se  $\int_0^{2\pi} \left( \frac{dx}{dt} + y \right)^2 dt = 0 = \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 - y^2 \right] dt$  e a segunda igualdade verifica-se se e só se

$$y = a \cos(t) + b \sin(t),$$

enquanto que se verifica a primeira igualdade se e só se

$$\frac{dx}{dt} + y = 0.$$

Assim,  $x = - \int y dt = - \int (a \cos(t) + b \sin(t)) dt = -a \sin(t) + b \cos(t) + c$ , logo

$$x - c = -a \sin(t) + b \cos(t). \quad (2.19)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade (2.19), tem-se

$$(x - c)^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

que é uma circunferência de centro  $(c, 0)$  e raio  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

□

# Bibliografia

- [1] Agudo F. R. D., *Lições de Análise Infinitesimal I. Cálculo Diferencial em  $\mathbb{R}^n$* , Lisboa, 1972.
- [2] Alekseev V. M., Tikhomirov V. M., Fomin S. V., *Optimal Control*, New York: Consultants Bureau, 1987.
- [3] Benson Russel V., *Euclidean Geometry and Convexity*, McGraw-Hill, 1966.
- [4] Berkovitz L. D., *Optimal Control Theory*, New York: Springer, 1974.
- [5] Boyer C. B., *História da Matemática*, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1974.
- [6] Buttazzo G., Giaquinta M., Hildebrandt, *One-dimensional Variational Problems: An Introduction*, Oxford Univ. Press, 1999.
- [7] Callandreau É., *Célebres Problèmes Mathématiques*, Paris: Albin Michel, 1949.
- [8] Carathéodory C., *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order*, Chelsea Publishing Company, 1982.

- [9] Courant R., Robbins H., *Che Cos'è la matematica?*, Bollati Boringhieri, Brossura, 2000.
- [10] Courant R., *Calculus of Variations*, Courant Institute of Math. Sciences, New York University, 1946.
- [11] Dubrovin B. A., Fomenko A.T., Novikov S.P., *Modern Geometry - Methods and Applications*, 2nd ed, Part I, New York: Springer, 1992.
- [12] Elsgolc L. E., *Calculus of Variations*, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, Pergamon Press, New York, 1961.
- [13] Giaquinta M., Hildebrandt S., *Calculus of Variations I*, 2nd printing, Berlin: Springer, 2004.
- [14] Giaquinta M., Hildebrandt S., *Calculus of Variations II*, 2nd printing, Berlin: Springer, 2004.
- [15] Grimal Pierre, *Dicionário da Mitologia Grega e Romana*, 4 ed, Difel, Maio 2004.
- [16] Gruber P. M., Wills, J. M., *Handbook of Convex Geometry*, volume A, N. H., 1993.
- [17] Hamilton Edith, *A Mitologia*, 3 ed, Publicações DomQuixote, Lisboa, Outubro 1983.
- [18] Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G., *Inequalities*, 2nd ed, Cambridge: Cambridge University Press, 1934.

- [19] Heath T. L., *A History of Greek Mathematics*, vol.II, Oxford University Press, 1921.
- [20] Howards H., Hutchings M., Morgan F., *The Isoperimetric problems on surfaces*, American Math. Monthly, 106, 1999.
- [21] Kazarinoff, Nicholas D., *Geometric Inequalities*, New Mathematical Library, 1961.
- [22] Lauwerier H. A., *Calculus of Variations in Mathematical Physics*, Mathematical Centre Tracts 14, 3rd Printing, Amsterdam, 1980.
- [23] Lima, Elon L. *Curso de Análise*, volume 2, 3 ed, Editora Lua Nova, 1989.
- [24] Marsden J. E., Tromba A. J., *Vector Calculus*, 3rd ed, New York: Freeman, 1988.
- [25] Melzak Z. A., *Invitation to Geometry*, John Wiley & Sons, Inc, 1983.
- [26] Mitrinović D. S., Pecarić J. E., *Recent and Advances in Geometric Inequalities*, Dordrecht: Kluwer, 1989.
- [27] Mitrinovic D. S., Pecarić J. E., Fink A. M. *Classical and New Inequalities in Analysis*, Dordrecht: Kluwer, 1993.
- [28] Moise Edwin E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, 3rd ed, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [29] Niven I., *Maxima and Minima Without Calculus*, Dolciani Mathematical Expositions, 6, 1981.

- [30] Osserman R., *The isoperimetric inequality*, Bull Amer. Math. Soc., Vol 84, 6, 1978.
- [31] Reid William T., *The Isoperimetric Inequality and Associated Boundary Problems*, Journal of Mathematics and Mechanics. vol. 8, 6, 1959.
- [32] Roe John., *Elementary Geometry*, 1st ed, Oxford University Press, 1993.
- [33] Sagan Hans, *Introduction to the Calculus of Variations*, McGraw-Hill, 1969.
- [34] Shisha Oved, *Inequalities Proceedings of a Symposium held at Wright - Patterson Air Base, Ohio, 1965*, ed Oved, Sisha, New York: Academic Press, 1967.
- [35] Tikhomirov V. M., *Stories about maxima and minima*, Vol I, American Mathematical Society, 1986.
- [36] Troutman J. L., *Variational Calculus with Elementary Convexity*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [37] Webster Roger, *Convexity*, Oxford University Press, 1994.
- [38] Weinstock R., *Calculus of Variations: with applications to physics and engineering*, New York: McGraw-Hill, 1952, (International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics).