



Obtenção de Materiais com Propriedades Térmicas Extremas

Optimização Topológica

Fábio Emanuel Garcia Andrade

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Engenharia Mecânica

Júri

Orientador: Professora Maria Augusta Neto

Co Orientador: Professor Nuno Ferreira Rilo

Vogais: Professor Rogério Augusto da Costa Pereira Leal

Janeiro de 2010



Obtenção de Materiais com Propriedades Térmicas Extremas

Optimização Topológica

Fábio Emanuel Garcia Andrade

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Engenharia Mecânica

Júri

Orientador: Professora Maria Augusta Neto

Co Orientador: Professor Nuno Ferreira Rilo

Vogais: Professor Rogério Augusto da Costa Pereira Leal

Janeiro de 2010

AGRADECIMENTOS

Ao professor Nuno Rilo pelo apoio e condições para a realização desta tese.

Não posso deixar de agradecer á professora Augusta Neto pela simpatia, disponibilidade, apoio e exemplo de dedicação.

A todos os meus colegas, que sempre me apoiaram

A toda a família, em particular, aos meus pais á minha irmã ao Paulo e á Laëtítia, que me são tudo.

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma metodologia de optimização topológica que permite obter microestruturas com comportamento elástico e/ou térmico pré-definido. Neste desenvolvimento os formalismos da teoria da homogenização e os aspectos relevantes dos métodos numéricos utilizados na análise de sensibilidades e na optimização são discutidos.

A formulação da teoria da homogenização é baseada no método variacional assintótico. A implementação numérica deste método está disponível no programa VAMUCH, o qual pode ser utilizado para calcular as propriedades elásticas e/ou térmicas efectivas de uma qualquer microestrutura complexa construída com base em um ou mais materiais anisotrópicos. A sua implementação numérica obriga á discretização da célula unitária em elementos finitos e á atribuição de propriedades elásticas e/ou térmicas a cada um dos elementos do domínio em análise.

É desenvolvido um procedimento de análise de sensibilidades para o programa VAMUCH, utilizando o método da variável adjunta. O desenvolvimento das equações associadas ao cálculo das sensibilidades é apresentado para as propriedades elásticas e as propriedades térmicas efectivas da microestrutura. A implementação computacional dos cálculos associados á análise de sensibilidades é introduzida na versão modificada do programa VAMUCH.

Na solução do problema de projecto óptimo, os algoritmos de análise micromecânica e de sensibilidades são interligados com o algoritmo de optimização das assintotas móveis (MMA). São apresentadas técnicas e métodos de optimização que permitem obter microestruturas óptimas para determinadas condições de projecto.

Palavras-chave: Optimização topológica, teoria da homogenização, Célula Unitária, VAMUCH.

ABSTRACT

In this work a methodology to topologic optimization is presented, which allows to obtain microstructures with pre-defined thermal and/or elastic behavior. In this development the formulation of the homogenization theory and the relevant aspects of the numeric methods used in the analysis of sensibilities and in the optimization procedure are discussed.

The formulation of the homogenization theory is based on the asymptotic variational method. The numeric implementation of this method is available in the program VAMUCH, which can be used to evaluate the thermal/elastic properties of any complex microstructure made with one or more anisotropic materials. This implementation implies the finite element discretization of the unit cell and the attribution of elastic and/or thermal properties to each one of elements of the domain in analysis.

A procedure to sensibility analysis is developed for the program VAMUCH, which is based on the variable adjoint method. The development of the equations associated with the sensibilities is presented for the elastic and thermal properties of microstructures. The computational implementation of sensibilities is introduced in the modified version of VAMUCH program.

In the optimization procedure, the micromechanic and sensibility analysis are linked with the optimization algorithm (MMA). Optimization techniques and analysis methods are applied in order to obtain microstructures that meet some specified requirements.

Keywords: Topologic optimization; Homogenization method; Unit cell, VAMUCH.

ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS	I
RESUMO	II
ABSTRACT	III
ÍNDICE GERAL	IV
ÍNDICE DE FIGURAS	VII
ÍNDICE DE TABELAS	IX
NOMENCLATURA	X

CAPÍTULO UM - INTRODUÇÃO 1

1.1	Motivação	1
1.2	Pesquisa Bibliográfica	2
1.3	Objectivos e Organização	4

CAPÍTULO DOIS - RELAÇÕES CONSTITUTIVAS 6

2.1	Introdução	6
2.2	Equações constitutivas das lâminas	7
2.3	Constantes elásticas de uma lâmina unidireccional	9
2.4	Constantes térmicas de uma lâmina unidireccional	11
2.4.1	Coeficiente de expansão térmica α_i	11
2.4.2	Coeficiente de tensão térmico β_i	11

CAPÍTULO TRÊS - OPTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA..... 13

3.1 Introdução 13

3.2 Formulação do problema 17

 3.2.1 Função objectivo 19

 3.2.2 Variáveis de projecto..... 20

 3.2.3 Constrangimentos de projecto..... 21

CAPÍTULO QUATRO - PROBLEMAS NUMÉRICOS EM OPTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA 22

4.1 Introdução 22

4.2 Fenómeno *checkerboards*..... 22

4.3 Dependência de malha..... 27

4.4 Mínimos locais..... 28

CAPÍTULO CINCO - TEORIA DA HOMOGENIZAÇÃO 29

5.1 Introdução 29

5.2 Homogenização standard das propriedades elásticas..... 29

5.3 Homogenização variacional assintótica das propriedades elásticas... 32

5.4 Homogenização variacional assintótica das propriedades elásticas e térmicas 35

5.5 Análise de sensibilidades..... 38

 5.5.1 Método das diferenças finitas..... 38

 5.5.2 Sensibilidades analíticas das propriedades homogeneizadas.... 40

5.6 Validação das sensibilidades 44

CAPÍTULO SEIS - OPTIMIZAÇÃO DE MICROESTRUTURAS.....	46
6.1 Introdução	46
6.2 Influência de projectos iniciais diferentes	47
6.3 Coeficientes de tensão térmica, β	49
6.3.1 Função objectivo directamente dependente de $\beta_{11}^*, \beta_{22}^*$	49
6.3.2 Função objectivo directamente dependente do volume de material	50
6.4 Tensão térmica, β e constante ao corte Q_{12}	54
CAPÍTULO SETE - CONCLUSÕES.....	58
CAPÍTULO OITO – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	59
CAPÍTULO NOVE – ANEXO A.....	62
CAPÍTULO DEZ – ANEXO B	64

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1	Lâminas reforçadas com fibras.....	7
Figura 3.1	Discretização de um Domínio utilizando barras ou vigas.....	14
Figura 3.2	Possível solução para um projecto de optimização do tipo “ <i>ground structure</i> ”	15
Figura 3.3	Evolução de um projecto de optimização topológica.....	15
Figura 3.4	Solução para um problema de optimização macroscópica.....	16
Figura 3.5	Fluxograma geral de optimização topológica da microestrutura	17
Figura 3.6	Relação entre o Modulo de Young e a fracção de volume da mistura de dois materiais no modelo SIMP	19
Figura 4.1	Fenómeno de “ <i>checkerboards</i> ”	23
Figura 4.2	Ilustração da vizinhança de um elemento k , para o filtro por restrições de gradiente local.....	24
Figura 4.3	Valores da função de controlo de perímetros para padrões típicos, considerando misturas com dois materiais.....	25
Figura 4.4	Valores da função de controlo de gravidade para padrões típicos, considerando misturas com dois materiais.....	26
Figura 4.5	Problema de optimização, exemplo de checkerboard, soluções para discretização com 600 e 5400 elementos	27
Figura 4.6	Conceito de mínimo global e local	28

Figura 5.1	Material heterogéneo, célula unitária, material efectivo	30
Figura 5.2	Sistemas de coordenadas 2D para materiais heterogéneos	30
Figura 5.3	Comparação das sensibilidades obtidas por métodos analíticos e o método das diferenças finitas	45
Figura 6.1	Evolução d projecto <i>A</i>	48
Figura 6.2	Evolução d projecto <i>B</i>	48
Figura 6.3	Aspecto da configuração para uma estrutura obtida por minimização da tensão térmica, com constrangimentos de volume e tensão térmica.....	50
Figura 6.4	Aspecto da configuração para uma estrutura obtida por minimização de volume para obtenção de $\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$	51
Figura 6.5	Solução obtida para minimização de volume para obtenção de $\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$, para valores de fracção de volume não superior a 0.5	53
Figura 6.6	Solução obtida para minimização de volume para obtenção de $\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$, para valores de fracção de volume não superior a 0.6	53
Figura 6.7	Solução obtida para minimização de volume para obtenção de $\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$, para valores de fracção de volume não superior a 0.6 e constrangimento ao corte de 0.025.....	55
Figura 6.8	Modificação da solução obtida para minimização de volume para obtenção de $\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$, para valores de fracção de volume não superior a 0.6 e constrangimento ao corte de 0.025	55
Figura 6.9	Aspecto da configuração de uma estrutura obtida por minimização de volume, com constrangimentos de volume e da constante ao corte	56

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 6.1 Propriedades térmicas dos materiais escolhidos para o projecto	47
Tabela 6.2 Comparação dos parâmetros do projecto A e B, para projectos iniciais diferentes	49
Tabela 6.3 Parâmetros para as soluções, original e modificada para obtenção de $\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$ com constrangimentos ao corte	51
Tabela 6.4 Valores obtidos para os parâmetros de interesse para as configurações original e modificada.....	53
Tabela 6.5 Parâmetros para as soluções para obtenção de $\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$ com restrições de volume de 0.5 e 0.6	54
Tabela 6.6 Parâmetros para as soluções, original e modificada para obtenção de $\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$ com restrições de $V \leq 0.6$ e corte $Q \leq 0.025$	56
Tabela 6.7 Parâmetros para as soluções, original e modificada para obtenção de $\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$ com restrições de volume de $V \leq 0.6$ e corte $Q \leq 0.05$	57

NOMENCLATURA

Capítulo 2

S_{ij}	Coeficientes de complacência material
C_{ij}	Matriz rigidez simplificada
C_{ijkl}	Matriz rigidez
α_i	Coeficiente de expansão térmica
β_i	Coeficiente de tensão térmica
γ_{ij}	Distorções
ε_{kl}	Componentes do tensor de deformações
σ_{ij}	Componentes do tensor das tensões
E	Módulo de Young
G	Módulo de elasticidade transversal
T	Variação de temperatura num ponto
ν	Coeficiente de Poisson

Capítulo 3

$X_i^{(e)}$	Propriedade de um material i num elemento e
\emptyset_i	Fracção de um material i
V^*	Valor limite de volume
$X^{(e)}$	Propriedade parametrizada de um elemento e
k_N	Variável de projecto genérica
v_i	Função volume de um elemento i
Ω_s	Domínio de um elemento
ρ_i	Função densidade de um elemento i
f	Função objectivo
p	Factor de penalização
Ω	Domínio Global de uma malha
ρ	Função de densidade

Capítulo 4

H_i	Factor de peso para o filtro de restrição de gradiente local
P^*	Soma dos perímetros de todas as fronteiras internas e externas
R_{ij}	Distância do centro de um elemento i ao centro de um elemento j
R_{max}	Raio máximo
W_i	Peso individual
l_k	Dimensão de um elemento k

m_i Número de lados comuns de um elemento i com um elemento na sua vizinhança

p_i Função de controlo de perímetro

r_{min} Distância actuante do filtro de restrição de gradiente local

ρ_k Função densidade para um elemento k

G Função de controlo da gravidade

$TV(\rho)$ Variação total da função densidade

$dist(k, i)$ Distância do centro de um elemento k ao centro de um elemento i

nv Número de elementos vizinhos

Capítulo 5

\bar{c}_v Capacidade calorífica homogenizada

Γ_h Operador diferencial

C_{ijkl} Componentes do tensor de quarta ordem

\bar{D} Matriz constitutiva homogenizada

D^H Matriz constitutiva para as propriedades homogenizadas

$F_{\varepsilon_i^0}$ Vector de forças nodais equivalente ao campo de deformações teste

H_Ω Energia de Helmutz para a célula unitária

Q_{ij}^e Variação de energia associada a um elemento e

T_0 Temperatura de referência

c_v Capacidade calorífica por unidade de volume

d_i Medida das arestas do elemento “*cubo*”

n_i Coordenadas auxiliares do tipo inteiro

u_i	Função de controlo da gravidade
x_i	Coordenadas relativas às posições globais na estrutura
y_i	Coordenadas relativas às posições locais na estrutura
Ω^e	Área de um elemento e
$\bar{\alpha}$	Expansão térmica homogenizada
$\bar{\beta}$	Matriz condensada do tensor de segunda ordem, homogenizado
β_{ij}	Coefficientes térmicos de tensão
$\bar{\varepsilon}$	Campo de deformações global
ε_i	Campo de deformações de um elemento i
ε^0	Campo de deformações teste
D	Matriz constitutiva dos vários pontos da célula unitária
K	Rigidez global da microestrutura
S	Matriz das funções de forma globais reduzidas
X	Matriz do valor nodal das forças de variação
Ω	Área da célula unitária
β	Matriz condensada do tensor de segunda ordem, β_{ij}
ε	Campo de deformações
θ	Diferença entre uma temperatura actual e a de referência
χ	Função de variação da deformação

Capítulo 6

Q_{12}	Constante ao corte
V^H	Fracção de material sólido para a estrutura homogenizada
α_{ij}	Coefficiente de expansão térmica

β_{ij}	Coeficiente de tensão térmica
β_{ij}^*	Coeficiente de tensão térmica efectiva
β_{ij}^H	Coeficiente de tensão térmica homogenizada
ν	Coeficiente de Poisson

CAPÍTULO UM

1 Introdução

1.1 Motivação

Na indústria de concepção de componentes cada vez mais exigente e em constante evolução torna-se prioridade o reforço da aposta na fase de projecto em processos que permitam concretizar os objectivos da forma mais rápida sem, contudo, negligenciar os requisitos definidos previamente, complacentes com o desempenho pretendido. Os projectos na indústria eram, no passado, desenvolvidos com base em cálculos estruturais simplistas baseados, essencialmente, em experiências anteriores.

O aperfeiçoamento de componentes com base na experiência de utilização e comportamento ao longo do tempo está ultrapassado visto que é lento, dispendioso e não se justifica para a concepção de componentes únicos. Em alternativa, as empresas apostam no método de tentativa erro em protótipos feita por simulação computacional, que é rápida e económica. A possibilidade de obter um projecto eficiente para um determinado fim, conjugado com a dificuldade de selecção dos valores de um conjunto de parâmetros de projecto, faz com que os métodos de optimização estrutural sejam uma ferramenta ideal no projecto de sistemas técnicos.

Por outro lado, na última década, a excelente relação entre a rigidez e massa específica dos materiais modernos, bem como a melhoria das propriedades das estruturas compósitas conseguida pelo desenvolvimento da tecnologia usada no seu fabrico, conduziu a um crescente interesse e a um correspondente aumento na sua utilização e desenvolvimento. A identificação de materiais compósitos com propriedades extremas é especialmente relevante na ciência dos materiais e na optimização estrutural. Microestruturas óptimas podem ser utilizadas para explicar fenómenos físicos ou para melhorar e/ou otimizar os materiais

existentes na natureza ou os materiais produzidos pelo homem. Podem, ainda, ser utilizadas no projecto de estruturas em que são necessárias propriedades extremas.

1.2 Pesquisa bibliográfica

Existem dois tipos de abordagem essenciais no estudo de modelos que permitam melhorar a performance de um qualquer tipo de componente. O primeiro é a abordagem da análise em que, geralmente, se constrói um modelo de elementos finitos e, posteriormente, escolhem-se os parâmetros cuja influência se pretenda analisar. Por exemplo, parâmetros associados as dimensões geométricas de um componente por forma a obter uma rigidez pretendida. Deste modo, a variação dos parâmetros origina múltiplas combinações que resultam numa dada rigidez. No entanto, este método tem uma grave limitação uma vez que poderá haver um grande número de parâmetros a analisar o que torna o procedimento de análise moroso, tanto mais quanto o número de parâmetros a analisar.

Neste contexto, os procedimentos de optimização representam a segunda alternativa de abordagem do projecto industrial. A optimização tem por base um processo de escolha da solução de projecto que, entre todas as soluções possíveis, maximiza a qualidade do projecto e cumpre um determinado conjunto de limitações técnicas ou outras [Neto, 2005]. Neste processo de escolha utilizam-se algoritmos numéricos que permitem obter resultados mais imediatos para problemas mais complexos. Contudo, nesta nova metodologia de projecto os resultados e os métodos das várias disciplinas devem ser considerados de forma integrada.

O primeiro passo num projecto de optimização integrado consiste na obtenção de um modelo matemático que represente o sistema técnico a analisar. Neste processo é necessário conceber formulações eficientes e versáteis, de modo a assegurar a solução do problema com precisão e eficiência. Por exemplo, as formulações da análise micromecânica de materiais heterogéneos conduzem a um conjunto de equações cuja solução deve ser eficientemente obtida. Nas últimas décadas, várias formulações matemáticas para a análise micromecânica têm sido apresentadas [Hashin, 1983; Murat and Tartar, 1985; Eriksen et al., 1986; Guedes and Kikuchi, 1991]. Na presente tese, o modelo micromecânico apresentado por Yu e Tang designado por método variacional assintótico para a homogenização duma célula unitária é o utilizado [Yu e Tang, 2007]. Yu e Tang salientaram que, ainda que, na literatura diferentes abordagens admitam pressupostos diferentes, existem dois pressupostos básicos associados à

análise micromecânica de materiais heterogêneos com base em células unitária: 1) as soluções exactas das variáveis têm valores médios no volume da célula unitária (UC), 2) as propriedades efectivas dos materiais obtidos a partir da análise micromecânica da célula unitária são independentes da geometria, das condições de fronteira e das condições de carregamento da estrutura macroscópica, o que significa que as propriedades da célula composta por dois ou mais materiais podem ser consideradas propriedades intrínsecas do material composto, quando visto macroscopicamente. Invocando estes dois pressupostos e usando o método variacional assintótico de Berdichevsky [1977], Yu e Tang [2007] desenvolveram uma nova técnica de homogeneização que é uma extensão do trabalho de Berdichevsky [1979].

O segundo passo a ter em conta num projecto de optimização integrado conduz ao conhecimento minucioso de todas as funções objectivo e de todas as possíveis variáveis de projecto, bem como de todos os constrangimentos mecânicos ou físicos e de projecto. O objectivo a atingir pela optimização é representado pela função custo que deve ser minimizada enquanto que todos os constrangimentos impostos ao modelo devem ser satisfeitos. Atendendo á natureza iterativa do processo de optimização e ao maior ou menor número de variáveis de projecto, bem como, á maior ou menor facilidade de obter de forma eficiente os valores das funções de projecto, é fundamental a utilização de algoritmos de optimização eficientes, geralmente, suportados pelo cálculo de sensibilidades. Por conseguinte, o cálculo de sensibilidades desempenha um papel importante na eficiência do processo de optimização.

A técnica mais simples para o cálculo de sensibilidades baseia-se na aproximação por diferenças finitas. Esta técnica é muito popular, dada a simplicidade de implementação, mas é computacionalmente cara uma vez que exige uma ou duas análises adicionais por cada variável de projecto, conforme se utilize o método das diferenças finitas progressivo ou o central [Haftka e Gürdal, 1992]. A formulação analítica das sensibilidades constitui um procedimento alternativo mas implica um esforço computacional bastante grande. Os métodos analíticos, que compreendem os métodos da variável adjunta e os de diferenciação directa, são mais precisos e eficientes do ponto de vista computacional, e são caracterizados pela existência das equações analíticas das sensibilidades. Neste trabalho o método da variável adjunta é utilizado para obter as sensibilidades das propriedades efectivas do volume representativo da célula unitária, relativamente às variáveis de projecto.

Geralmente, o problema de encontrar a microestrutura mais simples possível com propriedades mecânicas e térmicas prescritas, pode ser designado de problema de homogeneização inverso, e pode ser formulado como um problema de otimização em que se procura uma microestrutura com o menor peso possível que satisfaça as exigências especificadas [Sigmund, 1994, 1995, 2000]. A microestrutura do material tem sido otimizada para muitos objectivos, incluindo térmicos, condução, piezoelétricos e propriedades de fluxo [por exemplo, Torquato e Donev, 2004; Clientes e Prévost, 2006, 2007; Challis et al., 2008]. O investigador interessado é endereçado par a secção 2.10 do trabalho de Bendsøe e Sigmund [2004] para uma visão geral dos trabalhos nesta área. O método da homogeneização inversa é baseado no método de otimização topológica [Bendsøe e Kikuchi, 1988], e consiste em resolver uma sequência de problemas de elementos finitos, seguida de alterações das variáveis de projecto. A microestrutura do material é considerada periódica e é totalmente descrita por uma célula unitária repetitiva. O domínio da célula-base é discretizado em vários milhares de elementos finitos, e as propriedades efectivas são obtidas pela teoria da homogeneização.

No trabalho apresentado por Bourgat (1977), Guedes e Kikuchi (1991) e posteriormente utilizada por um grande número de investigadores, o processo de homogeneização considera a análise de elemento finito com as condições de fronteira adequadas de modo a avaliar as propriedades efectivas da célula unitária. Este procedimento numérico envolve uma sequência de soluções de elementos finitos que, pelo menos, é igual ao número de casos de pré-carga independente definidos pela dimensão do problema. Nesta tese, os problemas de otimização do material são resolvidos através do método variacional assintótica para homogeneização da célula unitária, VAMUCH, que é capaz de prever as propriedades tridimensionais do material da célula unitária através de uma análise e sem aplicação de qualquer carga externa. Os Problemas de otimização são resolvidos utilizando o algoritmo de otimização das assíntotas móveis (MMA) [Svanberg, 1987].

1.3 Objectivos e organização

O objectivo deste trabalho é abordar os vários aspectos a ter em conta na otimização de estruturas e em particular na otimização topológica de microestruturas para comportamentos térmicos e/ou elásticos pré-definidos. É apresentada a metodologia de

análise micromecânica baseada na teoria da homogenização e discutem-se aspectos relevantes para a análise de sensibilidades e optimização de microestruturas. Este trabalho é descrito nos seguintes capítulos:

O segundo capítulo apresenta os conceitos relativos às relações constitutivas. A inclusão de estes conceitos é importante na compreensão dos parâmetros materiais e/ou térmicos que permitem caracterizar o comportamento elástico e/ou térmico da generalidade dos materiais.

O terceiro capítulo apresenta uma breve introdução dos vários tipos de optimização mais comuns e aborda de um modo genérico o projecto de optimização.

No quarto capítulo são analisados alguns dos problemas numéricos associados á optimização topológica, discutem-se exemplos de instabilidade numérica e apresentam-se soluções.

A formulação da teoria da homogenização baseada na análise assintótica de uma célula unitária é apresentada no capítulo 5. As equações das sensibilidades das propriedades efectivas da microestrutura são obtidas considerando como parâmetros de estudo as propriedades elásticas e/ou térmicas da microestrutura. Finalmente, é apresentado um exemplo numérico que demonstra a validade da formulação apresentada e permite verificar alguns comportamentos associado ao cálculo de sensibilidades.

No capítulo seis são apresentados alguns dos resultados obtidos com o programa VAMUCH na obtenção de determinadas propriedades térmicas e elásticas. O problema de optimização de microestruturas é formulado tendo em conta parâmetros de projecto que podem alterar as propriedades efectivas da microestrutura, tais como as quantidades de material envolvido, os constrangimentos definidos e a natureza da função objectivo.

No capítulo sete de um modo genérico é discutido o interesse da tese para projectos futuros e de que modo os objectivos foram satisfeitos. O capítulo oito apresenta as bibliografias de maior interesse para a realização desta tese.

Em anexos são apresentadas algumas tabelas que dizem respeito á comparação da análise de sensibilidades utilizando o método das diferenças finitas e a análise analítica, no anexo B estão as matrizes rigidez resultantes de cada uma das optimizações apresentadas no capítulo seis.

CAPÍTULO DOIS

2 Relações Constitutivas

2.1 Introdução

Entende-se por material compósito o material composto por dois ou mais materiais diferentes, estes surgem com a necessidade de obter propriedades que os materiais por si só não conseguem apresentar. Assim, podem-se obter melhorias de propriedades tais como a rigidez, a resistência mecânica, a resistência á fadiga e mesmo ao desgaste, dependendo da combinação de materiais utilizados. Da constituição básica de um compósito faz parte o material de base e o material de reforço. O material de base é designado por matriz e tem como função assegurar a continuidade do conjunto, desempenhando um papel de uniformização do carregamento.

Nos compósitos reforçados com fibras, as fibras actuam como um suporte principal de carga realçando as propriedades mecânicas, electromagnéticas ou químicas do conjunto. No material compósito pode, também, acontecer que o conjunto adquira propriedades que não existiam nos materiais originais.

As fibras são usualmente fabricadas sob a forma de filamentos, com deformações ao longo do comprimento ou ganchos na extremidade de modo a melhorar a interacção com a matriz dificultando o deslizamento entre os materiais. Muitas vezes as fibras estão dispostas na matriz sob a forma de filamentos finos que se podem dispersar de modo aleatório ou sob a forma de um tecido entrelaçado

As combinações mais comuns dizem respeito aos materiais compósitos de metais com polímeros e/ou cerâmicos, sob a forma de lâminas reforçadas com fibras sobrepostas formando deste modo um compósito laminado. A forma como as fibras podem ser distribuídas na matriz é variada, como se pode ver na figura 1.1, estas podem ser contínuas ou

descontínuas, unidireccionais, bidireccionais ou distribuídas aleatoriamente. Cada uma destas configurações influencia as propriedades do laminado de forma diferente.

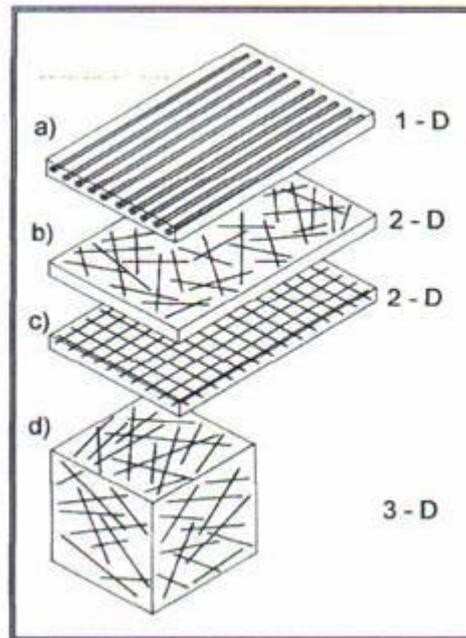


Figura 1.1 – Lâminas reforçadas com fibras: a) fibras unidireccionais, b) fibras aleatórias, c) fibras bidireccionais. Fonte: Bentur & Mindess-1990

As fibras descontínuas apresentam normalmente uma resistência mecânica e módulo de elasticidade mais baixo que as fibras contínuas, as fibras unidireccionais favorecem a resistência mecânica e o módulo de elasticidade na direção das fibras. Na direção perpendicular à direção das fibras prevalecem as propriedades da matriz o que conduz a uma resistência mecânica e módulo de elasticidade mais baixos. Contudo, os compostos laminados têm as suas desvantagens como sejam as delaminações originadas por tensões interlaminares que ocorrem devido às diferentes propriedades de lâminas adjacentes.

2.2 Equações constitutivas das lâminas

Contrariamente ao ponto de vista macroscópico que considera o compósito como um material homogêneo, o ponto de vista microscópico vê o compósito como um material heterogêneo. Assim, no estudo macroscópico procede-se a uma estimativa média das propriedades dos materiais constituintes para que se possam considerar as lâminas como materiais homogêneos.

Neste contexto, a tensão relaciona-se com a deformação segundo a lei generalizada de Hooke para cada uma das suas componentes pela seguinte expressão, [Rogério Leal, 2009]

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.1)$$

Onde σ_{ij} representa os nove componentes do tensor das tensões, C_{ijkl} e representa os 81 componentes da matriz que contém os coeficientes elásticos do material e ε_{kl} representa os nove componentes do tensor de deformações infinitesimais. No entanto, os 81 coeficientes elásticos do material reduzem-se a 36 devido á simetria de σ_{ij} e ε_{kl} .

A equação (1.1) pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{16} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{26} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{36} & C_{34} & C_{35} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{66} & C_{64} & C_{65} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{46} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{56} & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Esta matriz resulta da simplificação de índices de C_{ijkl} para C_{ij} da seguinte forma:

$$11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 13 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6$$

A matriz C_{ij} pode, ainda, ser simplificada uma vez que existem 21 coeficientes elásticos independentes, destacados a azul na expressão (2.2). Quando o material apresenta planos de simetria os coeficientes elásticos podem ainda ser reduzidos, no caso de lâminas ortotrópicas em que existem três eixos ortogonais de simetria a expressão (2.2) pode rescrever-se na forma

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

A equação (2.3) pode ser expressa usando as relações inversas, da seguinte forma [Rogério Leal, 2009]

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

Os termos S_{ij} representam os coeficientes de flexibilidade material. Note-se que estes coeficientes satisfazem a igualdade $S = C^{-1}$.

As equações (1.3) e (1.4) são usualmente escritas na forma matricial do seguinte modo,

$$\sigma = C \varepsilon \quad (2.5)$$

$$\varepsilon = S \sigma \quad (2.6)$$

Onde σ representa o pseudo-vector das tensões e ε o pseudo-vector das deformações.

2.3 Constantes elásticas de uma lâmina unidireccional

As equações constitutivas para os materiais compósitos considerados ortotrópicos são definidas pelas equações (2.3) e (2.4) relativamente aos eixos principais da lâmina, x_1, x_2, x_3 , em que o eixo x_1 é paralelo à direcção das fibras. Os coeficientes elásticos do material, C_{ij} , são função das constantes elásticas do material, tais como: módulos de Young, E , coeficientes de Poisson, ν , e módulos de elasticidade transversal, G .

Cada uma das tensões normais contribui para as extensões $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ da seguinte forma, [Correia, 2001]

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\sigma_{22}\nu_{21}}{E_2} - \frac{\sigma_{33}\nu_{31}}{E_3} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\sigma_{11}\nu_{12}}{E_2} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\sigma_{33}\nu_{32}}{E_3} \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\sigma_{11}\nu_{13}}{E_1} - \frac{\sigma_{22}\nu_{23}}{E_2} + \frac{\sigma_{33}}{E_3} \quad (2.9)$$

As distorções γ_{ij} exprimem a variação do ângulo entre duas linhas paralelas aos eixos i e j , podendo escrever-se em função dos módulos de elasticidade transversal e tensões de corte.

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G_{12}} \quad (2.10)$$

$$\gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{G_{13}} \quad (2.11)$$

$$\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{G_{23}} \quad (2.12)$$

Na forma matricial pode então escrever-se,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

A matriz de flexibilidade S representada na equação (2.13) é simétrica, tendo em conta as igualdades a seguir representadas

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{11}}{E_1}, \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}, \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2} \quad (2.14)$$

2.4 Constantes térmicas de uma lâmina unidireccional

2.4.1 Coeficiente de expansão térmica α_i

Uma vez que o presente trabalho vai incidir, especialmente, na optimização de microestruturas considerando objectivos sobre algumas propriedades térmicas é importante perceber o efeito que estas têm nos materiais.

Uma das propriedades a ter em conta é o coeficiente de expansão térmica α_i , que permite avaliar a capacidade que o material tem para expandir ou comprimir quando absorve ou perde energia térmica. Apresenta unidades de inverso de temperatura, $^{\circ}C^{-1}$, e pode ser incluído na relação constitutiva, equação (2.4), da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_1 \Delta T \\ \alpha_2 \Delta T \\ \alpha_3 \Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Em que α_i ($i = 1,2,3$) é o coeficiente de expansão térmica segundo cada um dos eixos e ΔT é a variação de temperatura.

2.4.2 Coeficiente de tensão térmica β_i

O coeficiente de tensão térmica, β_i , exprime a proporcionalidade entre as contracções ou dilatações de um material e o incremento térmico no campo de temperaturas. Este fenómeno apenas acontece quando o aumento de temperatura num corpo homogéneo não é uniforme, desta forma regiões distintas do material não se dilatam da mesma forma, dando lugar às tensões térmicas, também ocorrem tensões térmicas quando existe um aumento de temperatura uniforme mas existem limitações externas à dilatação [Johns, 1967].

O coeficiente de tensão térmica pode ser expresso em função do módulo de Young e coeficiente de Poisson e variação de temperatura, T , num determinado ponto, [Correia, 2001]

$$\beta = -\frac{\alpha ET}{1 - \nu} \quad (2.16)$$

Note-se que esta relação só é válida no caso de estarmos perante um material isotrópico.

CAPÍTULO TRÊS

3 Optimização Topológica

3.1 Introdução

A optimização Topológica permite resolver problemas relativos á distribuição de material num domínio, para uma solução óptima. O método de homogeneização é um método muitas vezes utilizado para obter a forma ou topologia óptimas em estruturas contínuas, assumindo para isso que o material é composto por porosidades. Com o passar do tempo multiplicam-se os trabalhos com o objectivo de obter estruturas de modo a otimizar constantes elásticas e/ou térmicas. A optimização topológica integra um dos grupos da optimização estrutural.

Assim, podem ser distinguidos três principais géneros de optimização estrutural:

- Optimização dimensional: Neste tipo de optimização as variáveis de projecto são parâmetros geométricos do tipo área de secção transversal, espessura de uma viga, ou, por exemplo, para projecto óptimo de estruturas de compostos laminados em que as variáveis de projecto são a espessura de laminado ou mesmo o ângulo de inclinação das fibras (Gürdal, 1999).
- Optimização de forma: Este tipo de optimização permite que a forma geométrica da fronteira e a localização de vazios possa ser alterada no decurso da optimização. A selecção das variáveis de projecto são uma das dificuldades deste tipo de optimização, as coordenadas dos nós da malha dos elementos finitos são uma hipótese para a parametrização das formas no espaço de projecto.

-
- **Optimização topológica:** A otimização topológica visa a otimização por exemplo de propriedades elásticas e/ou térmicas para uma distribuição espacial de um conjunto de elementos, condicionada por uma ou mais restrições, nestes casos as variáveis de projecto são muitas vezes a densidade de material em cada um dos elementos finitos.

A otimização topológica a partir de um meio discreto pode ser subdividida em otimização de estruturas discretas, *ground structure*, e otimização topológica de estruturas de malha contínua, *gridlike continua*. Estas duas categorias consideram como variáveis de projecto as dimensões das secções transversais de vigas.

Na otimização de estruturas a partir de um meio discreto considera-se no domínio de projecto um conjunto de pontos que podem ser juntas de treliças, neste método a resolução do sistema é feito com base em métodos numéricos como a programação linear, ver figura 3.1 e 3.2.

Na otimização topológica de estruturas de malha contínua trabalha-se com um número infinito de barras rígidas separadas por um espaço infinitesimal, cuja solução é obtida analiticamente.

Esta metodologia foi estudada pela primeira vez por Michell em 1904, em que este considerava as linhas de isotensão obtidas pela teoria de elasticidade como um conjunto de barras rígidas, deste modo esperava obter a melhor solução para uma quantidade mínima de material que corresponderia ao utilizado nas barras/vigas.

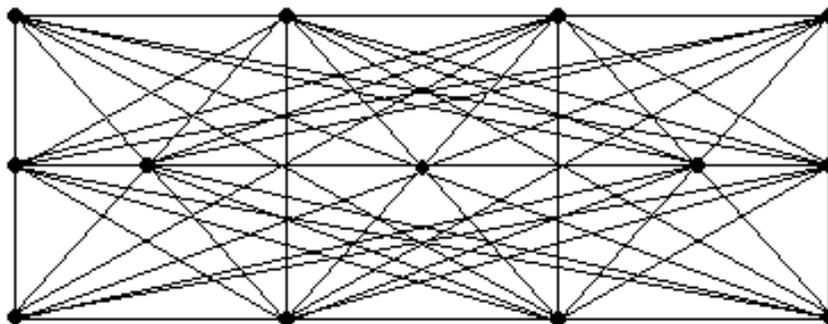


Figura 3.1 – Discretização do domínio utilizando barras ou vigas, *ground structure*.

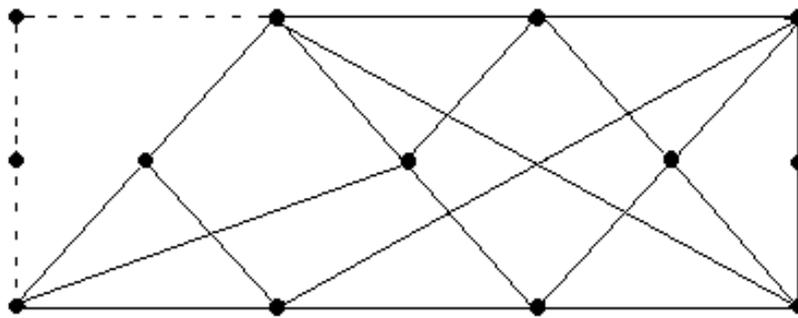


Figura 3.2 – Possível solução para um projecto de otimização do tipo, *ground structure*.

A otimização topológica a partir de um meio contínuo procura obter uma distribuição de material num conjunto de elementos finitos que permita minimizar ou maximizar um funcional, este tipo de estudo engloba dois tipos de optimização que acabam por se relacionar.

Nos exemplos anteriores fala-se de optimização a um nível macroscópico, muitas vezes surge a necessidade de estudar a influência que a distribuição de um determinado material tem nas propriedades mecânicas e/ou térmicas em microestruturas. Contudo, a formulação de problemas de optimização topológica em meios considerados contínuos a nível macro e microscópico é semelhante.

Na análise micro estrutural procura-se usualmente minimizar uma função objectivo, que se poderá relacionar, a título de exemplo, directamente com o volume de material, com vista a obter parâmetros elásticos e/ou térmicos que de outra forma não se conseguiríamos ter. Deste modo, consegue-se obter um material final que pode ser uma mistura de dois ou, somente, um material e vazio, um exemplo do aspecto que pode ter o domínio para uma deste tipo é ilustrado na figura 3.3.

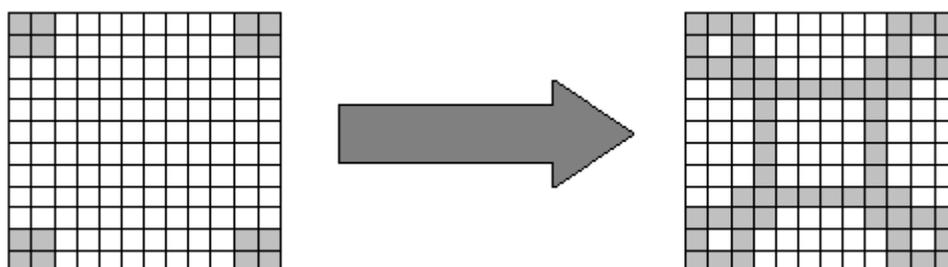


Figura 3.3 – Ilustração da evolução da distribuição de material num projecto de optimização topológica a partir de um meio contínuo, os elementos pintados a cinza representam a presença de material e os brancos representam ausência do mesmo.

Para efeitos de estudo de elementos macroscópicos a função objectivo poderá ser por exemplo a minimização de volume de material de modo a obter a rigidez global pretendida, neste caso, procura-se encontrar a distribuição de material no domínio em estudo para alcançar esse fim.

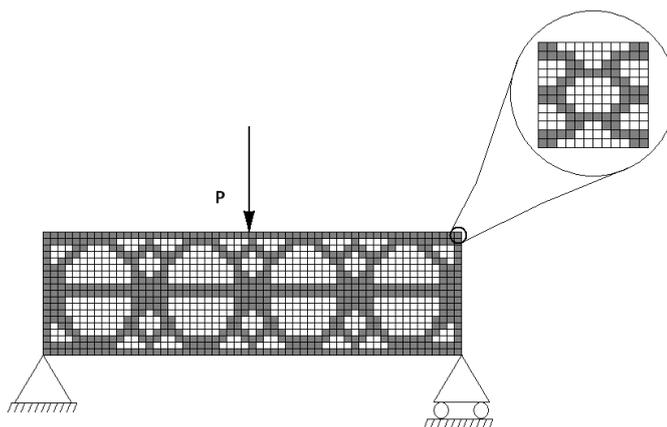


Figura 3.4- Aspecto de uma possível solução para um problema de optimização macroscópica a partir de um meio considerado contínuo e sob acção de uma força P

Na figura 3.4 está representada a solução de um problema de optimização macroscópica, em pormenor pode observar-se o aspecto de um elemento micro estrutural obtido também por optimização topológica.

A figura 3.5 mostra o fluxograma do procedimento utilizado na optimização topológica. No instante inicial, gera-se um projecto de partida que resulta da atribuição de uma quantidade de material A a cada um dos elementos finitos que compõe o domínio, célula unitária. De seguida, utiliza-se a teoria da homogenização, incluída no programa VAMUCH, para obter as propriedades efectivas da microestrutura do material definido na célula unitária. Atendendo a que, neste trabalho, são utilizados algoritmos de optimização que requerem o conhecimento do valor das derivadas das funções de projecto, relativamente às variáveis de projecto, a terceira etapa inclui o cálculo das sensibilidades. De seguida, inicia-se a processo de optimização pela utilização de um algoritmo de optimização, ao qual é fornecida toda a informação do projecto actual. Na última fase, é verificada a convergência da solução utilizando um critério de paragem, se existir convergência o procedimento é finalizado. Caso contrário, o processo é reiniciado com a actualização das variáveis de projecto.

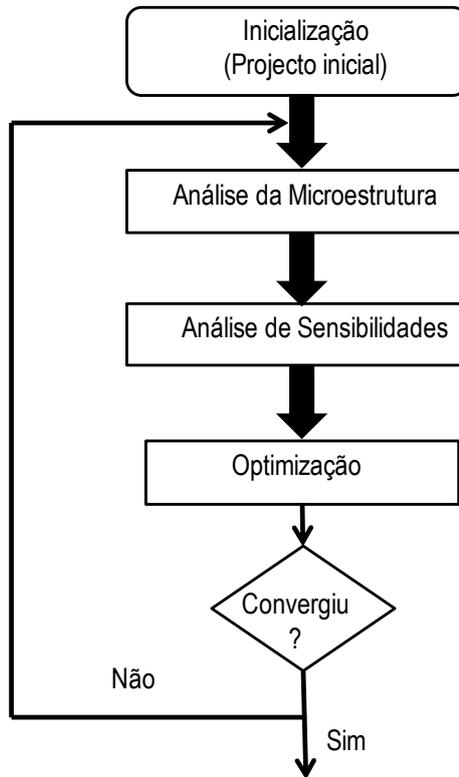


Figura 3.5- Fluxograma geral de optimização topológica da microestrutura.

3.2 Formulação do problema

O problema de optimização consiste usualmente em encontrar um domínio Ω_s com uma limitação de volume V^* , e que por sua vez se encontra num domínio Ω , em que se optimiza uma dada função objectivo f . Considerando-se ρ a função de densidade que toma os valores 1 ou 0 no domínio Ω_s segundo Sigmund e Petersson, [1998] é possível definir o problema genérico do seguinte modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\rho} f(\rho), \\ \text{Subject to: } V = \sum_{i=1}^N \rho_i v_i \leq V^* \\ \rho_i = 0 \text{ or } 1, i = 1, \dots, N \end{array} \right. \quad (3.1)$$

em que N é o número de elementos finitos em que o domínio é dividido e V^* é o limite de volume total estabelecido de material, ρ_i e v_i são as densidades e volume de cada elemento finito, respectivamente.

A implementação desta metodologia de optimização em que as variáveis de projecto assumem valores binários, 0-1 (vazio/material) conduz á utilização de algoritmos de optimização discretos. Contudo, segundo Bendsøe, tal abordagem pode ser instável e comprometer a existência de solução. Um modo de transformar o problema discreto num problema contínuo consiste em definir um modelo material que permita substituir a natureza das variáveis de projecto [Bendsøe, 1989]. De modo a parametrizar as propriedades locais, i.e. em cada elemento finito, os materiais são *misturados* artificialmente, utilizando para isso uma expressão que relaciona as propriedades de cada material constituinte e vem escrita de forma genérica do seguinte modo:

$$X^{(e)}(\emptyset_1, \emptyset_2) = \emptyset_1 X_1^{(e)} + \emptyset_2 X_2^{(e)} \quad (3.2)$$

O parâmetro $X^{(e)}$ é a propriedade a parametrizar para um elemento (e), \emptyset_1 e \emptyset_2 dizem respeito ás fracções de material 1 e 2 no elemento, $X_1^{(e)}$ e $X_2^{(e)}$ são as propriedades de cada material, podendo então escrever-se que :

$$\emptyset_2 = 1 - \emptyset_1 \quad (3.3)$$

Substituindo a equação (3.3) na equação (3.2) obtemos

$$X^{(e)}(\emptyset_1, \emptyset_2) = \emptyset_1 X_1^{(e)} + (1 - \emptyset_1) X_2^{(e)} \quad (3.4)$$

Deste modo quando $\emptyset_1 = 0$ a propriedade do elemento em causa assume-se igual á do material 2, quando $\emptyset_1 = 1$ a propriedade do elemento é igual á do material 1, esta era a solução ideal. Contudo, o valor da fracção de volume encontra-se muitas vezes entre os valores 1 e 0, na solução de topologia ao nível da célula procura-se ter uma quantidade de material bem distinta, i.e. definida por zonas de material e ausência do mesmo tanto quanto possível. Então, para evitar propriedades intermédias adiciona-se um factor p de penalização, e finalmente vem:

$$X^{(e)}(\varnothing_1, \varnothing_2) = \varnothing_1^p X_1^{(e)} + (1 - \varnothing_1^p) X_2^{(e)} \quad (3.5)$$

Esta abordagem tem por base o modelo SIMP (Solid isotropic material with penalization), que consiste em considerar um material artificial intermédio com comportamento constitutivo que depende directamente da quantidade de material \varnothing_1 e consequentemente \varnothing_2 . Contudo, as propriedades intermédias são penalizadas no sentido em que a rigidez resultante (para $p > 1$) é pequena se comparada com o custo (volume) de material, tornando anti-económica a sua presença no projecto final.

No gráfico representado na figura 3.6 é possível ver a influência do factor de penalização p no valor do Módulo de Young obtido com base na expressão (3.5), considerando uma mistura de dois materiais com propriedades distintas.

Utilizando esta metodologia é possível relaxar o problema de optimização definido na equação (3.1), podendo a densidade em cada elemento finito assumir valores, no domínio dos reais, entre 0 e 1.

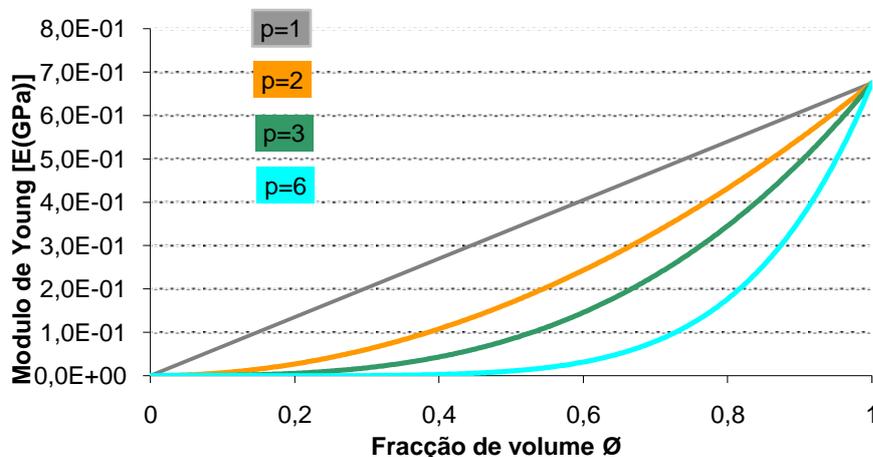


Figura 3.6- Relação entre o Módulo de Young e a fracção de volume de material 1 na mistura de dois materiais para o modelo SIMP.

3.2.1 Função objectivo

A função objectivo deve quantificar o que se pretende optimizar em função das variáveis de projecto escolhidas, esta pode ser definida de várias maneiras, da forma simples

com um único objectivo, como é o caso de projecto deste trabalho, ou multi-objectivo com vários objectivos diferentes.

A formulação da função objectivo é muito importante, desta pode depender o sucesso da optimização, a expressão matemática deve quantificar a eficiência do projecto de forma adequada. No caso das optimizações multi-objectivo a expressão matemática deve englobar todos os objectivos, penalizando cada um deles da forma que o projectista achar mais adequada.

Usualmente, em optimização as formas mais simples de quantificar matematicamente a função objectivo são:

- Maximizar uma função f :
 - Minimizando $1/f$ (para f diferente de 0)
 - Minimizando $-f$
 - Maximizar $c \times f$ (sendo c uma constante)
 - Maximizar a função objectivo elevada ao quadrado para evitar singularidades na derivada da função

3.2.2 Variáveis de projecto

O conceito de melhorar ou de optimizar um sistema técnico pressupõe, implicitamente, alguma liberdade para alterar o projecto inicial. Os parâmetros do sistema inicial que podem ter o valor alterado de forma independente durante o processo de optimização, são designados por variáveis de projecto. A formulação matemática do problema de optimização deverá assegurar que as funções objectivo e os constrangimentos são função das variáveis de projecto. As variáveis de projecto podem ser discretas assumindo vários valores dentro de um conjunto (3.6), ou do tipo contínuo (3.7), assumindo valores dentro de um intervalo

$$\{x \in X | x = (k_1, k_2, k_3, \dots, k_N)\} \quad (3.6)$$

$$\{x \in X | k_N < x < k_{máx}\} \quad (3.7)$$

O problema de optimização que tem em vista a alteração de variáveis de projecto contínuas é, geralmente, designado como problema de optimização contínua [Muc, 1998; Mateus et al., 1991]. Quando os componentes a optimizar devem possuir características

normalizadas, o resultado obtido com a optimização contínua é insuficiente e não traduz a realidades aceitáveis. Assim, este tipo de optimização em que as variáveis de projecto apenas podem assumir valores discretos num intervalo, utiliza procedimentos associados com a optimização discreta [Schmit e Frashi, 1980; Ringertz, 1988; Arora, 2002].

3.2.3 Constrangimentos de projecto

Os constrangimentos de projecto podem ser de igualdade ou desigualdade e determinam a região viável que se pode definir como a parte do espaço de busca em que se encontram as soluções possíveis. Assim, para um conjunto de n variáveis de projecto, $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n\}$, podem distinguir-se 3 tipos fundamentais de constrangimentos:

Igualdade:

$$g_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p \quad (3.8)$$

Desigualdade:

$$g_j(x) \geq 0, \quad j = p + 1, \dots, m \quad (3.9)$$

Laterais:

$$x_{min} \leq x_i \leq x_{max} \quad (3.10)$$

onde os parâmetros x_{min} e x_{max} denotam os limites inferiores e superior das variáveis de projecto. Frequentemente, em alguns algoritmos de optimização as restrições de igualdade são difíceis de implementar, como é o caso em estudo, então as restrições podem ser formuladas da seguinte forma:

$$g_j(x) \leq 0 \quad e \quad g_j(x) \geq 0 \quad (3.11)$$

CAPÍTULO QUATRO

4 Problemas Numéricos em Optimização Topológica

4.1 Introdução

Apesar da considerável maturação conseguida pela maior parte dos métodos de optimização existentes, o optimizador depara-se, ainda, com diversos problemas sob a forma de instabilidades numéricas tais como, o fenómeno de checkerboards e de dependência de malha. As instabilidades numéricas são um assunto muito discutido na comunidade científica ligada á optimização topológica e existem diversos artigos que explicam estes fenómenos e procuram dar soluções para os ultrapassar [Sigmund e Petersson, 1998].

4.2 Fenómeno *checkerboards*

O fenómeno de *checkerboard* ou também conhecido por instabilidade de tabuleiro consiste na formação de regiões em que os elementos vazios alternam com os cheios o que dá um aspecto que faz lembrar um tabuleiro de xadrez, ver figura 4.1. Inicialmente, julgava-se que a estrutura *checkerboard* era a ideal porque originava de facto uma rigidez *artificial* mais elevada [Díaz e Sigmund, 1995] sobretudo relativamente às constantes de corte, mas tal acontecia porque a rigidez era sobrestimada por modelos numéricos mal formulados.

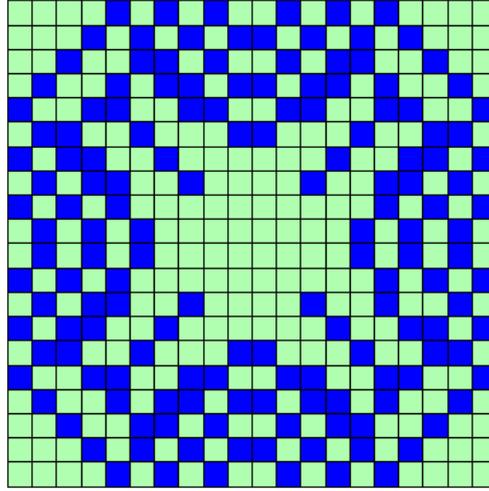


Figura 4.1- Fenómeno de *checkerboard*, o verde indica presença de material e o azul a ausência do mesmo

Uma forma de evitar este problema seria aumentar o número de elementos finitos em que o domínio é discretizado. Contudo, esta solução é dispendiosa em termos de custo computacional. Uma solução mais simples consiste na utilização de outros filtros [Sigmund e Petersson, 1998]. Os filtros utilizados neste trabalho são o das restrições de gradiente local e o filtro de gravidade [Fujii et al., 2001].

O filtro de restrições de gradiente local age modificando as sensibilidades dos elementos finitos da seguinte forma:

$$\frac{\widehat{\partial f}}{\partial \rho_k} = (\rho_k)^{-1} \frac{1}{\sum_{i=1}^N \widehat{H}_i} \sum_{i=1}^N \widehat{H}_i \rho_i \frac{\partial f}{\partial \rho_i} \quad (4.1)$$

O factor de peso H_i é calculado do seguinte modo

$$H_i = r_{min} - dist(k, i), \{i \in N \mid dist(k, i) \leq r_{min}\}, \quad k = 1, \dots, N \quad (4.2)$$

Onde $dist(k, i)$ é a distância do centro do elemento k ao centro do elemento i , o factor de peso cai linearmente com a distância ao elemento k , a sensibilidade do elemento usualmente escrita como, $\frac{\partial f}{\partial \rho_k}$ é substituída pelo filtro (4.1). Na figura 4.2 é ilustrado o conjunto de elementos finitos que se situa a uma distancia r_{min} do elemento k .

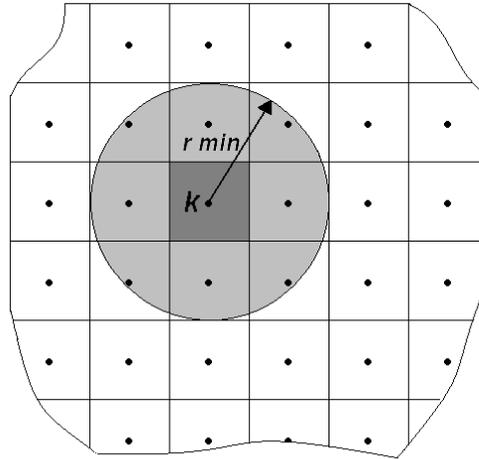


Figura 4.2- Ilustração da vizinhança de um elemento k , para o filtro por restrições de gradiente local

Outro filtro muito utilizado em otimização é o controlo de perímetro, o qual tem como objectivo limitar o número de furos que podem aparecer no domínio. O princípio de funcionamento é muito simples e baseia-se em restringir um perímetro total que compreende a soma dos perímetros de todas as fronteiras internas em que se verifica uma diferença de quantidade de material entre os elementos adjacentes. Na aproximação do controlo de perímetro proposta por Becker [1997], a função de controlo do perímetro é definido por

$$P = \sum_{i=1}^N p_i, \quad p_i = \sum_{j=1}^{m_i} l_{ij} (|\rho_i^A - \rho_j^A| + |\rho_i^B - \rho_j^B|) \quad (4.3)$$

onde ρ_i^A representa o volume de material A contido no elemento i e m_i representa o número de elementos com um lado comum ao elemento j , ($m_i = 4$ para um elemento no interior da célula unitária, $m_i = 3$ para um elemento nas arestas da célula unitária e $m_i = 2$ para um elemento nos vértices da célula unitária). Na figura 4.3 é apresentado o valor da função de controlo de perímetro, p_i , para alguns padrões típicos.

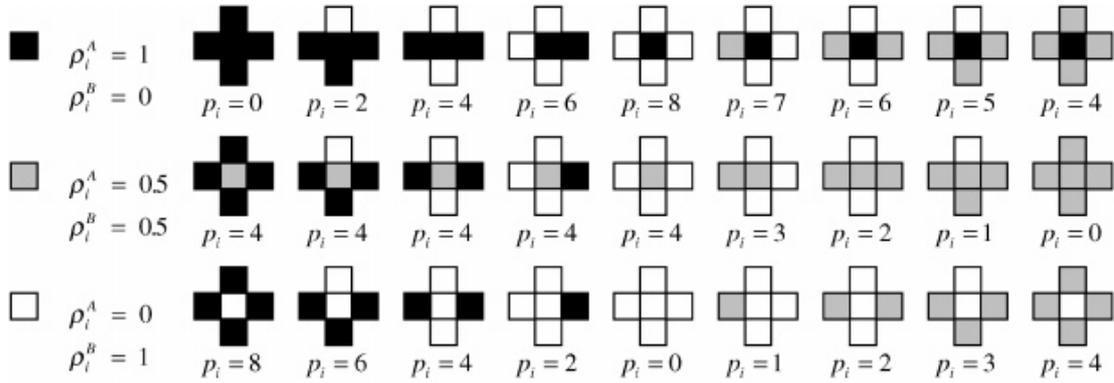


Figura 4.3- Valores da função de controlo de perímetros para padrões típicos, considerando misturas com dois materiais. Fonte: Fujii et al., 2001

O esquema introduz valores de densidade intermédias com penalização de modo a permitir a utilização de algoritmos tradicionais com cálculo de gradiente, define-se um limite superior na variação total $TV(\rho) \leq P^*$.

No caso da função ρ ser suave, [Bahia, 2005]

$$TV(\rho) = \int_{\Omega} |\rho| \, dx \quad (4.4)$$

Para a densidade na forma discreta, a variação total poderá ser escrita da seguinte forma,

$$P = \sum_{k=1}^K l_k \left(\sqrt{(\rho)_k^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon \right) \quad (4.5)$$

onde $(\rho)_k$ é o salto da densidade do material através da interface k do elemento, de medida l_k , $k \approx 2N$ é o número de elementos na interface. O parâmetro ε é um número positivo pequeno que garante a diferenciabilidade do perímetro. Esta expressão é exactamente a variação total da densidade do elemento quando $\varepsilon = 0$.

Conforme salientado por Fujii et al. [2001], o método de controlo do perímetro apresenta alguns problemas. O primeiro inconveniente na sua utilização reside na dificuldade

em definir o valor P^* , se o seu valor for muito pequeno podemos obter uma solução não convergente e se, por outro lado, o seu valor for muito alto podem surgir soluções tipo checkboard. A segunda dificuldade associada a este método reside no facto de a mistura de materiais não ser correctamente penalizada. De facto, da figura 4.3 ressalta que p_i assume o valor 4 não só para padrões em que apenas está presente o preto e o branco mas, também, para padrões em que está presente o cinzento.

Na tentativa de evitar os problemas associados ao método de controlo do perímetro, Fujii et al. [2001] apresentou um novo filtro designado de controlo da gravidade. Neste método, a função de controlo do perímetro é substituída pela função de controlo da gravidade definida por

$$G = \sum_{i=1}^N g_i, \quad g_i = \sum_{j=1}^{m_i} (\rho_i^A \rho_j^A + \rho_i^B \rho_j^B) \quad (4.6)$$

Atendendo a que a força da gravidade entre duas partículas próximas uma da outra é definida por $\rho_i \rho_j / r_{ij}^2$, onde ρ_i , ρ_j representam a massa das duas partículas e r_{ij} representa a distância entre as partículas, a função definida na equação (4.6) é, claramente, baseada no conceito de gravidade. Quando a dimensão dos elementos finitos na célula unitária é constante, a distância entre o elemento i e os elementos que têm um lado comum, também, é constante. Pelo que, na equação (4.6) a quantidade r_{ij}^2 não é incluída. Na figura 4.4 é apresentado o valor da função de controlo de gravidade, g_i , para alguns padrões típicos.

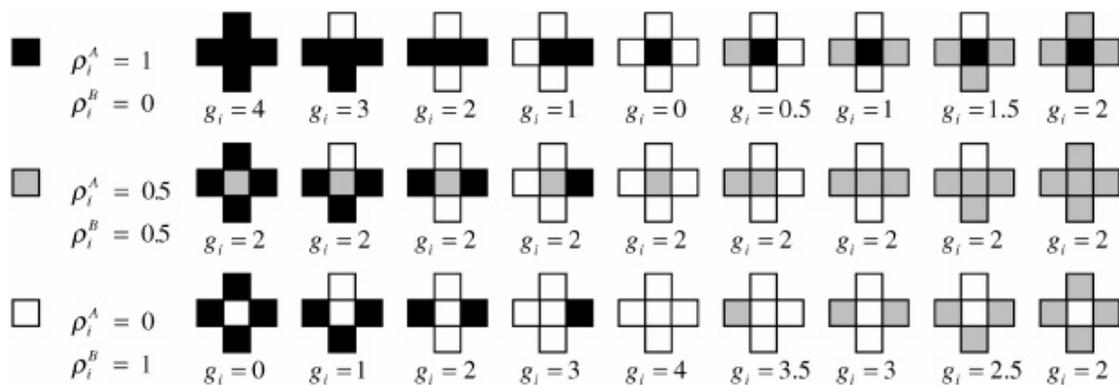


Figura 4.4- Valores da função de controlo de gravidade para padrões típicos, considerando misturas com dois materiais. Fonte: Fujii et al., 2001

Da figura 4.4 é possível concluir que a função de gravidade penaliza os padrões em que existe a cor cinzenta e os padrões tipo checkboard de modo semelhante.

4.3 Dependência de malha

Uma vez que a célula unitária é discretizada num número finito de elementos finitos passa a existir um fenómeno designado de dependência de malha em que a solução depende da discretização do domínio. O que acontece é que para malhas de elementos finitos com diferentes discretizações obtêm-se soluções diferentes. Contudo, seria de esperar que numa malha mais refinada o resultado fosse o mesmo mas com uma melhor definição dos contornos entre materiais.

Com o refinamento das malhas existe tendência para o aparecimento de mais furos e aumento da complexidade da estrutura, isto ocorre porque a incrementação de furos para o mesmo volume gera de um modo geral o aumento da eficiência da estrutura. Este fenómeno leva ao aparecimento de estruturas complexas que causam dificuldades ao nível da manufactura, um exemplo pode ser visto na figura 4.5.

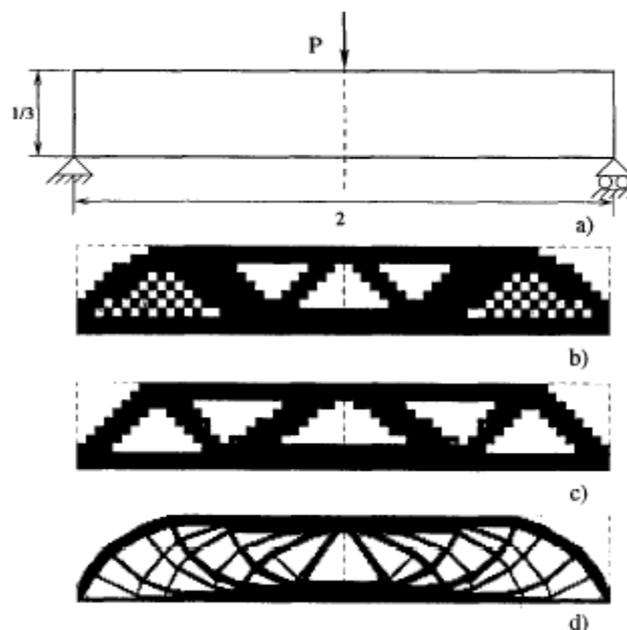


Figura 4.5- (a) problema de otimização, (b) exemplo do checkerboard, (c) solução para uma discretização de 600 elementos, (d) solução para uma discretização de 5400 elementos. Fonte: O.Sigmund & J.Peterssen-1998

O fenómeno de dependência de malha pode ser atenuado empregando filtros como os apresentados para evitar o aparecimento do checkerboard.

4.4 Mínimos locais

Um dos principais problemas na otimização topológica está na região de localização da solução. Existe um domínio em que os constrangimentos são respeitados que pode ser designado por domínio viável e o resto designa-se por domínio inviável. Este conceito é ilustrado na figura 4.6 para um espaço bidimensional.

A natureza não convexa da generalidade dos problemas de otimização topológica conduz á existência de muitos mínimos locais (pontos a e b, na figura 4.6). A não convexidade do problema de otimização e a utilização de algoritmos determinísticos na sua resolução, possibilita o aparecimento de diferentes soluções para o mesmo problema quando são utilizados diferentes projectos iniciais no procedimento de otimização.

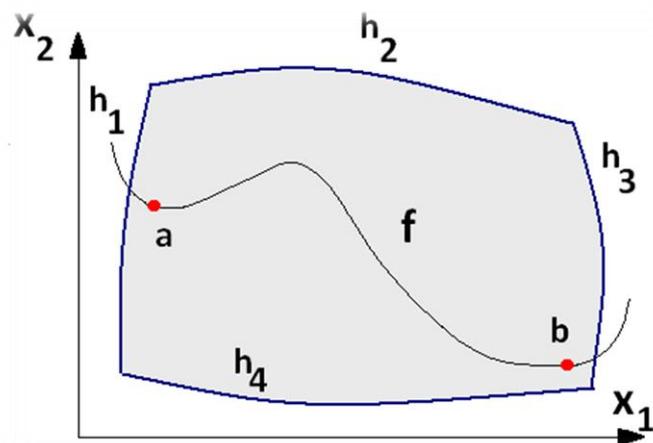


Figura 4.6- Conceito de mínimo global e local (a) e (b) respectivamente, (h1), (h2), (h3), e (h4) representam os constrangimentos que delimitam a zona a cinzento designada como zona de domínio viável, (f) é a função que se pretende minimizar

O que pode acontecer é o algoritmo estacionar num mínimo local (ponto a, na figura 4.6), minimizando a função para valores ficticiamente mais baixos dentro do domínio viável. á excepção dos problemas denominados convexos, é muito difícil, em geral, provar matematicamente se o mínimo é local ou global (ponto b, na figura 4.6).

CAPÍTULO CINCO

5 Teoria de Homogenização

5.1 Introdução

A análise estrutural de componentes construídos em materiais cujo comportamento micro-estrutural é complexo representa uma dificuldade de projecto. A utilização de métodos que avaliem as propriedades médias do seu comportamento macro-estrutural permite simplificar a complexidade da análise estrutural.

Neste contexto, as formulações da análise micromecânica têm como principal objectivo substituir o comportamento micro-estrutural complexo dos materiais por relações macroscópicas do comportamento material definidas com base na matriz constitutiva homogenizada. Nas últimas décadas, várias formulações matemáticas para a análise micromecânica têm sido apresentadas [Hashin, 1983; Murat and Tartar, 1985; Eriksen et al., 1986; Guedes and Kikuchi, 1991]. Na presente tese, o modelo micromecânico apresentado por Yu e Tang designado por método variacional assintótico para a homogenização numa célula unitária é o utilizado [Yu e Tang, 2007].

5.2 Homogenização standard das propriedades elásticas

A teoria de homogenização apresentada por Bourgat [Bourgat, 1977], Guedes e Kikuchi [1991] é frequentemente designada por teoria de homogenização standard. Ainda que este trabalho não seja baseado nesta teoria, as fórmulas a ela associadas são apresentadas nesta secção. Deste modo, será mais fácil interpretar as diferenças entre esta teoria e a teoria de homogenização variacional assintótica.

O conceito de célula unitária é frequentemente utilizado para obter um pseudo material com propriedades homogêneas, material efectivo, a partir de um material heterogêneo utilizando, para tal, os modelos micromecânicos. A figura 5.1 ilustra os conceitos associados á utilização da teoria de homogenização.

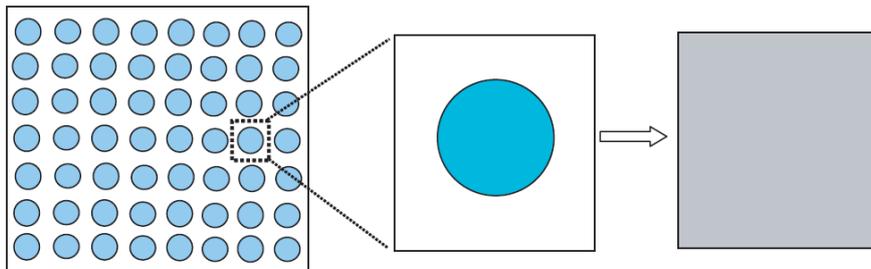


Figura 5.1- Material heterogêneo, célula unitária, material efectivo.

Atendendo á natureza macro e micro da formulação do problema, é necessário definir dois sistemas de coordenadas, (x_1, x_2, x_3) , e (y_1, y_2, y_3) , as coordenadas x_i dizem respeito às posições globais na estrutura, y_i são coordenadas locais para definir a célula unitária, confrontar figura 5.2. As coordenadas y_i são escolhidas de forma a que $y_i \in [-d_i/2, d_i/2]$, sendo d_i a medida das arestas do cubo correspondente às dimensões da célula unitária. Uma vez que o material heterogêneo pode ser constituído por várias células unitárias, é conveniente introduzir coordenadas inteiras auxiliares, n_1 para se poder localizar as células unitárias individualmente. Estas coordenadas relacionam-se com as coordenadas globais da seguinte forma, $n_i = x_i/d_i$.

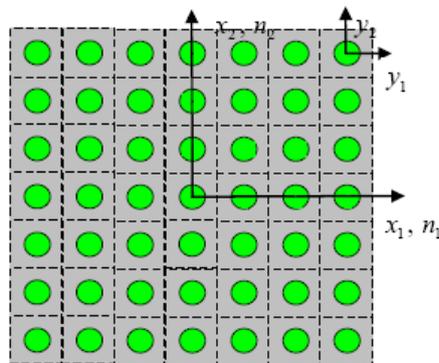


Figura 5.2- Sistemas de coordenadas 2D para materiais heterogêneos

A teoria da homogenização considera que a matriz constitutiva homogenizada, \mathbf{D}^H , deve verificar a seguinte condição: a energia de deformação elástica da célula unitária homogenizada que é submetida a um campo de deformações teste, $\boldsymbol{\varepsilon}^0$, deve ser exactamente igual á energia de deformação elástica da microestrutura contida na célula unitária para o mesmo campo de deformações de teste. Esta condição pode ser representada matematicamente por:

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}^0)^T \mathbf{D}^H \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}^0 - \boldsymbol{\varepsilon})^T \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}^0 - \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega \quad (5.1)$$

Onde \mathbf{D} representa a matriz constitutiva dos vários pontos da microestrutura na célula unitária, o campo de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$, o qual é periódico, representa o campo de deformações na microestrutura real, o qual é induzido pela natureza heterogenia da célula unitária. Se a microestrutura for homogénea, o campo de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$ é nulo e a relação constitutiva homogenizada será, evidentemente, coincidente com \mathbf{D} .

Para encontrar as seis (análise 2D) ou as 21 (3D) propriedades materiais homogenizadas que originam \mathbf{D}^H , é necessário analisar a resposta da célula unitária sujeita a três (2D) ou seis (3D) deformações teste independentes, respectivamente. A selecção do campo de deformações teste no caso 2D é a seguinte: $\boldsymbol{\varepsilon}_1^0 = [1 \ 0 \ 0]^T$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2^0 = [0 \ 1 \ 0]^T$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_3^0 = [0 \ 0 \ 1]^T$. Então, considerando o campo de deformações teste, é possível obter expressões para os componentes individuais da matriz \mathbf{D}^H na forma [Sigmund, 1995]

$$D_{ij}^H = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^0 - \boldsymbol{\varepsilon}_i)^T \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}_j^0 - \boldsymbol{\varepsilon}_j)^T d\Omega, \quad i, j = \begin{cases} 1, 2, 3 & (2D) \\ 1, \dots, 6 & (3D) \end{cases} \quad (5.2)$$

O campo de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ ($i = 1, \dots, 6$) é obtido pela aplicação do método dos elementos finitos á célula unitária, considerando condições de fronteira periódicas e carregamentos equivalentes aos vários campos de deformação teste. O problema de elementos finitos é representado por

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_i = \mathbf{F}_{\boldsymbol{\varepsilon}_i^0} \quad i, j = \begin{cases} 1, 2, 3 & (2D) \\ 1, \dots, 6 & (3D) \end{cases} \quad (5.3)$$

onde \mathbf{K} é a rigidez global da microestrutura representada na célula unitária e $\mathbf{F}_{\boldsymbol{\varepsilon}_i^0}$ é o vector das forças nodais equivalente ao campo de deformação teste $\boldsymbol{\varepsilon}_i^0$. A solução da equação (5.3) é representada pelo vector de deslocamentos nodais global \mathbf{u}_i . O campo de deformações induzido na célula unitária $\boldsymbol{\varepsilon}_i$, é obtido a partir de \mathbf{u}_i utilizando, para tal, as relações da elasticidade linear entre deformações-deslocamentos.

Admitindo que o domínio da célula unitária é decomposto em n elementos finitos, os coeficientes homogenizados representados na equação (5.2) são definidos como

$$D_{ij}^H = \sum_{e=1}^n Q_{ij}^e, \quad i, j = \begin{cases} 1, 2, 3 & (2D) \\ 1, \dots, 6 & (3D) \end{cases} \quad (5.4)$$

onde Q_{ij}^e é utilizado para representar a variação de energia associada ao elemento e , definida por

$$Q_{ij}^e = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega^e} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}_i^0 - \boldsymbol{\varepsilon}_i)^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon}_j^0 - \boldsymbol{\varepsilon}_j)^T d\Omega^e, \quad i, j = \begin{cases} 1, 2, 3 & (2D) \\ 1, \dots, 6 & (3D) \end{cases}, \quad e = 1, \dots, n \quad (5.5)$$

e Ω^e representa a área do elemento e . A equação (5.5) pode ser definida ao nível de cada elemento finito por

$$Q_{ij}^e = \frac{1}{\Omega} (\mathbf{u}_i^{0e} - \mathbf{u}_i^e)^T \mathbf{K}^e (\mathbf{u}_j^{0e} - \mathbf{u}_j^e), \quad i, j = \begin{cases} 1, 2, 3 & (2D) \\ 1, \dots, 6 & (3D) \end{cases}, \quad e = 1, \dots, n \quad (5.6)$$

o vector \mathbf{u}_i^e contém os componentes do vector de deslocamentos global, \mathbf{u}_i , associados ao elemento e .

5.3 Homogenização variacional assintótica das propriedades elásticas

A formulação matemática apresentada neste trabalho tem por base o trabalho de Yu e Tang [2007]. A declaração da formulação variacional para uma célula unitária pode ser formulada como a procura das funções que minimizam o seguinte funcional

$$\Pi_{\Omega} = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega} C_{ijkl} (\bar{\varepsilon}_{ij} + \chi_{(i,j)}) (\bar{\varepsilon}_{kl} + \chi_{(k,l)}) d\Omega \quad (5.7)$$

e, simultaneamente, verifica as seguintes condições

$$\chi_i(\mathbf{x}; d_1/2, y_2, y_3) = \chi_i(\mathbf{x}; -d_1/2, y_2, y_3) \quad (5.8)$$

$$\chi_i(\mathbf{x}; y_1, d_2/2, y_3) = \chi_i(\mathbf{x}; y_1, -d_2/2, y_3) \quad (5.9)$$

$$\chi_i(\mathbf{x}; y_1, y_2, d_2/2) = \chi_i(\mathbf{x}; y_1, y_2, -d_2/2) \quad (5.10)$$

$$C_{ijkl} (\bar{\varepsilon}_{ij} + \chi_{(i||j)}) \Big|_{y_1=d_1/2} = C_{ijkl} (\bar{\varepsilon}_{ij} + \chi_{(i||j)}) \Big|_{y_1=-d_1/2} \quad (5.11)$$

$$C_{ijkl} (\bar{\varepsilon}_{ij} + \chi_{(i||j)}) \Big|_{y_2=d_2/2} = C_{ijkl} (\bar{\varepsilon}_{ij} + \chi_{(i||j)}) \Big|_{y_2=-d_2/2} \quad (5.12)$$

$$C_{ijkl} (\bar{\varepsilon}_{ij} + \chi_{(i||j)}) \Big|_{y_3=d_3/2} = C_{ijkl} (\bar{\varepsilon}_{ij} + \chi_{(i||j)}) \Big|_{y_3=-d_3/2} \quad (5.13)$$

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \chi_i d\Omega = 0 \quad (5.14)$$

onde χ_i representa as funções variação que verificam a relação $\chi_{(i||j)} = 1/2(\partial\chi_i/\partial y_j + \partial\chi_j/\partial y_i)$, $\bar{\varepsilon}_{ij}$ são os componentes do tensor das deformações para a estrutura que considera as propriedades homogenizadas e, C_{ijkl} representa os componentes do tensor de quarta ordem. As equações (5.8)-(5.13) são constrangimentos que permitem garantir que as funções variação das deformações, χ_i , são perfeitamente periódicas na fronteira da célula unitária. O constrangimento representado na equação (5.14), não afecta o valor mínimo da equação (5.7) mas, permite definir a unicidade das funções variação.

Note-se que, na implementação numérica do método, os constrangimentos (5.8)-(5.10) são automaticamente garantidos, pois os nós posicionados na fronteira com coordenadas positivas são nós escravos dos nós posicionados na fronteira com coordenadas negativas que lhe é oposta, isto é fronteira em que se verifica $y_i = -d_i/2$.

Por simplicidade de notação, vamos considerar a seguinte notação matricial

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\bar{\varepsilon}_{11} \quad 2\bar{\varepsilon}_{12} \quad \bar{\varepsilon}_{22} \quad 2\bar{\varepsilon}_{13} \quad 2\bar{\varepsilon}_{23} \quad \bar{\varepsilon}_{33}]^T \quad (5.15)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial y_2} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial y_3} + \frac{\partial \chi_3}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial y_3} + \frac{\partial \chi_3}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial y_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y_2} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial y_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y_3} & \frac{\partial}{\partial y_2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix} \equiv \Gamma_h \boldsymbol{\chi} \quad (5.16)$$

onde Γ_h é um operador diferencial e $\boldsymbol{\chi}$ é uma matriz linha que contém os três componentes das funções variação. Utilizando o método dos elementos finitos podemos aproximar as funções variação da seguinte forma

$$\boldsymbol{\chi}(x_i, y_i) = \mathbf{S}(y_i) \mathbf{X}(x_i) \quad (5.17)$$

Na equação (5.17), a matriz \mathbf{S} contém as funções de forma globais reduzidas e \mathbf{X} é uma matriz coluna que contém o valor nodal das funções variação. Substituindo as equações (5.16)-(5.18) na equação (5.7), obtemos a versão discretizada do funcional

$$\Pi_\Omega = \frac{1}{2\Omega} \left(\mathbf{X}^T \mathbf{E} \mathbf{X} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{D}_{h\epsilon} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T \mathbf{D}_{\epsilon\epsilon} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \right) \quad (5.18)$$

com

$$\mathbf{E} = \int_{\Omega} (\Gamma_h \mathbf{S})^T \mathbf{D} (\Gamma_h \mathbf{S}) d\Omega; \quad \mathbf{D}_{h\epsilon} = \int_{\Omega} (\Gamma_h \mathbf{S})^T \mathbf{D} d\Omega; \quad \mathbf{D}_{\epsilon\epsilon} = \int_{\Omega} \mathbf{D} d\Omega \quad (5.19)$$

em que a matriz \mathbf{D} tem dimensão 6×6 e resulta da condensação do tensor de quarta ordem C_{ijkl} . Como os constrangimentos são incluídos na formulação durante o processo de montagem da equação (5.17), o problema pode ser formulado como a minimização da

equação (5.18). O resultado da aplicação dos conceitos variacionais á equação (5.18) vai conduzir ao sistema de equações lineares definido por

$$\mathbf{E} \mathbf{X} = -\mathbf{D}_{h\varepsilon} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.20)$$

A solução da equação (5.20), vector \mathbf{X} , é linearmente dependente do campo de deformações, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Então, é possível obter uma solução geral sem atribuir valores específicos ao campo de deformações global $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$, representando essa solução na forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.21)$$

e substituindo a equação (5.21) na equação (5.18) obtemos a energia de deformação contida na célula unitária, a qual é representada por

$$\Pi_{\Omega} = \frac{1}{2\Omega} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \left(\mathbf{X}_0^T \mathbf{D}_{h\varepsilon} + \mathbf{D}_{\varepsilon\varepsilon} \right) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv \frac{1}{2\Omega} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \bar{\mathbf{D}} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.22)$$

A matriz $\bar{\mathbf{D}}$ definida na equação (5.22) é designada de matriz constitutiva (rigidez) homogenizada. Esta matriz pode ser utilizada na análise estrutural macroscópica de um componente estrutural construído com o material representado na célula unitária.

5.4 Homogenização variacional assintótica das propriedades elásticas e térmicas

A declaração da formulação variacional para uma célula unitária, constituída por um material que possui propriedades de condutividade térmica, pode ser formulada como a procura das funções que minimizam o funcional

$$H_{\Omega} = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega} \left[C_{ijkl} \left(\bar{\varepsilon}_{ij} + \chi_{(ij)} \right) \left(\bar{\varepsilon}_{kl} + \chi_{(kl)} \right) + 2\beta_{ij} \left(\bar{\varepsilon}_{kl} + \chi_{(kl)} \right) \theta + c_v \frac{\theta^2}{T_0} \right] d\Omega \quad (5.23)$$

verificando, simultaneamente, os constrangimentos apresentados nas equações (5.8) a (5.14). Na equação (5.23), β_{ij} representa os componentes do tensor de segunda ordem que contém os coeficientes térmicos de tensão, c_v é a capacidade calorífica por unidade de volume do material para uma temperatura constante, T_0 é a temperatura de referência isto é, temperatura para a qual o material constituinte não está sob tensão térmica e θ representa a diferença entre a temperatura actual e a temperatura de referência.

Substituindo as equações (5.16)-(5.18) na equação (5.23), obtemos a versão discretizada do funcional dada como

$$H_{\Omega} = \frac{1}{2\Omega} \left(\mathbf{X}^T \mathbf{E} \mathbf{X} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{D}_{h\epsilon} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T \mathbf{D}_{\epsilon\epsilon} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{D}_{h\theta} \theta + 2\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T \mathbf{D}_{\epsilon\theta} \theta + \mathbf{D}_{\theta\theta} \theta \right) \quad (5.24)$$

Com

$$\mathbf{D}_{h\theta} = \int_{\Omega} (\Gamma_h \mathbf{S})^T \boldsymbol{\beta} d\Omega; \quad \mathbf{D}_{\epsilon\theta} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\beta} d\Omega; \quad \mathbf{D}_{\theta\theta} = \int_{\Omega} c_v d\Omega; \quad (5.25)$$

em que o vector $\boldsymbol{\beta}$ tem dimensão 6×1 e resulta da condensação do tensor de segunda ordem β_{ij} . Como os constrangimentos são incluídos na formulação durante o processo de montagem da equação (5.17), o problema pode ser reformulado como a minimização da equação (5.24), conduzindo ao sistema de equações lineares definido por

$$\mathbf{E} \mathbf{X} = -\mathbf{D}_{h\epsilon} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{D}_{h\theta} \theta \quad (5.26)$$

A solução da equação (5.26), vector \mathbf{X} , é linearmente dependente do campo de deformações, $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$, e de θ . Então, é possível obter uma solução geral sem atribuir valores específicos ao campo de deformações global $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ e a θ , representando essa solução na forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{X}_{\theta} \theta \quad (5.27)$$

e substituindo a equação (5.27) na equação (5.24) obtemos a energia de Helmotz contida na célula unitária, que é representada por

$$H_{\Omega} = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \bar{\mathbf{D}} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \bar{\boldsymbol{\beta}} \theta + \frac{1}{2} \bar{c}_v \frac{\theta^2}{T_0} \quad (5.28)$$

admitindo as seguintes igualdades

$$\bar{\mathbf{D}} = \frac{1}{\Omega} (\mathbf{X}_0^T \mathbf{D}_{h\varepsilon} + \mathbf{D}_{\varepsilon\varepsilon}) \quad (5.29)$$

$$\bar{\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{\Omega} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{D}_{h\varepsilon}^T \mathbf{X}_{\theta} + \mathbf{X}_0^T \mathbf{D}_{h\theta}) + \mathbf{D}_{\varepsilon\theta} \right] \quad (5.30)$$

$$\bar{c}_v = \frac{1}{\Omega} [\mathbf{X}_{\theta}^T \mathbf{D}_{h\theta} T_0 + \mathbf{D}_{\theta\theta}] \quad (5.31)$$

Claramente que a matriz $\bar{\mathbf{D}}$ definida na equação (5.29) é igual à matriz $\bar{\mathbf{D}}$ apresentada na equação (5.28), $\bar{\boldsymbol{\beta}}$ é a matriz coluna que contem os coeficientes da tensão térmica homogenizados e \bar{c}_v é a capacidade calorífica homogeneizada.

Os coeficientes de expansão térmica homogenizados são obtidos utilizando a matriz $\bar{\mathbf{D}}$, da seguinte forma

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \bar{\mathbf{D}}^{-1} \bar{\boldsymbol{\beta}} \quad (5.32)$$

Utilizando as equações (5.29) a (5.32) é possível proceder á análise macroscópica de um componente estrutural sujeito a diferentes condições de carga e temperatura.

5.5 Análise de sensibilidades

O principal objectivo da análise de sensibilidades é o de fornecer ao projectista informação quantitativa do modo como a alteração das variáveis de projecto afecta o desempenho dos sistemas. Para tal, deve ser especificada uma avaliação do desempenho do sistema e dos constrangimentos de projecto.

As sensibilidades podem ser obtidas por um método numérico ou por um método analítico. No método numérico a aproximação baseada na técnica das diferenças finitas pode ser utilizada na obtenção das sensibilidades numéricas. Este método é relativamente simples de formular e de implementar num programa, mas produz valores de sensibilidades com baixa precisão. Os métodos analíticos permitem obter valores de sensibilidades exactos mas, geralmente, exigem um grande esforço no seu desenvolvimento e respectiva implementação em programa.

5.5.1 Método das diferenças finitas

O método das diferenças finitas é, frequentemente, utilizado como uma técnica para aproximar as sensibilidades (Hafka e Adelman, 1989; Tortorelli e Michaleris, 1994). Este método baseia-se na expansão em séries de Taylor de primeira ordem de uma função f , a qual perante uma perturbação $\Delta \mathbf{b}$ do vector de parâmetros de projecto \mathbf{b} , é representada por

$$f(\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}) = f(\mathbf{b}) + \nabla f(\mathbf{b}) \cdot \Delta \mathbf{b} + O(|\Delta \mathbf{b}|) \quad (5.33)$$

Na equação (5.33), desprezando os termos de ordem superior $O(|\Delta \mathbf{b}|)$, pode obter-se uma expressão dos gradientes como

$$\nabla f(\mathbf{b}) = \frac{f(\mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}) - f(\mathbf{b})}{\Delta \mathbf{b}} \quad (5.34)$$

A equação (5.34) é conhecida como a expressão das diferenças finitas progressivas. Para melhorar a precisão dos resultados podem ser utilizadas as diferenças finitas centrais, que são obtidas pela expressão

$$\nabla f(\mathbf{b}) = \frac{f(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}) - f(\mathbf{b} - \Delta\mathbf{b})}{2\Delta\mathbf{b}} \quad (5.35)$$

A utilização da equação (5.35) requer a determinação dos valores da função f para duas perturbações da variável de projecto, o que é uma clara desvantagem.

A utilização do método das diferenças finitas progressivas, equação (5.35), conduz a um erro de truncatura definido por (Haftka e Gürdal, 1992)

$$e_T(\Delta\mathbf{b}) = \frac{\Delta\mathbf{b}}{2} \frac{d^2 f}{d\mathbf{b}^2}(\mathbf{b} + \xi\Delta\mathbf{b}) \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (5.36)$$

enquanto que o método das diferenças finitas centrais apresenta um erro definido por

$$e_T(\Delta\mathbf{b}) = \frac{(\Delta\mathbf{b})^2}{6} \frac{d^3 f}{d\mathbf{b}^3}(\mathbf{b} + \xi\Delta\mathbf{b}) \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (5.37)$$

Nas aplicações numéricas a utilização das diferenças finitas é uma aproximação atractiva devido à sua simplicidade e facilidade de implementação. Contudo, a maior desvantagem deste método reside no elevado número de análises necessárias. Como vimos, a utilização da equação (5.34) exige, para cada variável de projecto, uma nova análise dinâmica para determinar a resposta perturbada. Se a equação (5.35) for utilizada, para cada variável de projecto, a determinação das sensibilidades implica o cálculo de duas novas análises por variável de projecto. Então, para problemas complexos isto é um procedimento a evitar devido aos elevados custos computacionais.

Além disso a aplicação das equações (5.34) e (5.35) exige a selecção cuidadosa do incremento das variáveis de projecto $\Delta\mathbf{b}$. A escolha de um incremento grande conduz a erros nas derivadas devido aos erros de truncatura, conforme pode ser observado nas equações (5.36) e (5.37). Contudo, a selecção de um incremento pequeno pode conduzir aos chamados erros de condição, que são consequência da limitada precisão dos computadores ou da falta de precisão dos algoritmos utilizados para calcular a função f em pontos especiais. O erro de condição pode ser definido como a diferença entre o valor da função avaliada numericamente e o seu valor exacto.

5.5.2 Sensibilidades analíticas das propriedades homogenizadas

A descrição matemática do cálculo das derivadas das propriedades efectivas do meio homogenizado relativamente ao vector das variáveis de projecto \mathbf{b} que é apresentada nesta secção, é feita separando a sensibilidade das propriedades elásticas das sensibilidades das propriedades térmicas. Assim, começamos por apresentar as sensibilidades das propriedades elásticas e, posteriormente, apresentamos as sensibilidades das propriedades térmicas. O método utilizado é o método da variável adjunta.

Sensibilidades das propriedades elásticas

O objectivo é encontrar uma expressão matemática para a variação da função $\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{b}, \mathbf{X}_0)$ com a variação das variáveis de projecto. A função $\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{b}, \mathbf{X}_0)$ é definida da seguinte forma

$$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{b}, \mathbf{X}_0) = \bar{\mathbf{D}}^T(\mathbf{b}, \mathbf{X}_0) = \mathbf{D}_{h\varepsilon}^T \mathbf{X}_0 + \mathbf{D}_{\varepsilon\varepsilon} \quad (5.38)$$

A primeira variação desta função em ordem à componente b_i do vector de variáveis de projecto \mathbf{b} , pode ser escrito como

$$\delta\bar{\mathbf{D}} = \frac{\partial\bar{\mathbf{D}}}{\partial b_i} \delta b_i + \frac{\partial\bar{\mathbf{D}}}{\partial \mathbf{X}_0} \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial b_i} \delta b_i \quad (5.39)$$

Para obtermos a derivada $\partial \mathbf{X}_0 / \partial b_i$, a equação (5.26) pode ser derivada relativamente a b_i resultando na seguinte igualdade

$$\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial b_i} = -\frac{\partial \mathbf{D}_{h\varepsilon}}{\partial b_i} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial b_i} \mathbf{X}_0 \quad (5.40)$$

A inversão da matriz \mathbf{E} na equação anterior permite-nos escrever a igualdade

$$\frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial b_i} = -\mathbf{E}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{h\varepsilon}}{\partial b_i} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial b_i} \mathbf{X}_0 \right) \quad (5.41)$$

Substituindo (5.41) em (5.39) podemos relacionar a variação da função $\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{b}, \mathbf{X}_0)$ de forma directa com a variação das variáveis de projecto,

$$\delta \bar{\mathbf{D}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial b_i} \delta b_i - \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial \mathbf{X}_0} \mathbf{E}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{h\varepsilon}}{\partial b_i} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial b_i} \mathbf{X}_0 \right) \delta b_i \quad (5.42)$$

Considerando a vector das forças adjuntas, \mathbf{z} , definido como

$$\mathbf{z} = - \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial \mathbf{X}_0} \right)^T = -\mathbf{D}_{h\varepsilon} \quad (5.43)$$

podemos obter o vector das variáveis adjuntas como sendo a solução do sistema de equações adjunto definido por

$$\mathbf{E} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{z} \quad (5.44)$$

Atendendo a que a equação (5.44) tem a forma da equação (5.26), podemos afirmar que o vector das variáveis adjuntas é o vector \mathbf{X}_0 . Então, considerando a propriedade de simetria da matriz \mathbf{E} , obtemos a relação

$$\lambda^T = -\frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial \mathbf{X}_0} \mathbf{E}^{-1} \quad (5.45)$$

cuja substituição na equação (5.42) conduz á expressão

$$\delta \bar{\mathbf{D}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial b_i} \delta b_i + \mathbf{X}_0^T \left(\frac{d\mathbf{D}_{h\varepsilon}}{db_i} + \frac{d\mathbf{E}}{db_i} \mathbf{X}_0 \right) \delta b_i \quad (5.46)$$

Substituindo o valor de $\partial \bar{\mathbf{D}}/\partial b_i$ na equação (5.46) e reagrupando parcelas, a primeira variação da função $\bar{\mathbf{D}}$ assume a forma

$$\delta \bar{\mathbf{D}} = \left[\frac{\partial \mathbf{D}_{\varepsilon\varepsilon}}{\partial b_i} + \mathbf{X}_0^T \left(2 \frac{\partial \mathbf{D}_{h\varepsilon}}{\partial b_i} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial b_i} \mathbf{X}_0 \right) \right] \delta b_i \quad (5.47)$$

Então, a derivada da função $\bar{\mathbf{D}}$ é representada por

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{D}}_i}{\partial b_i} = \frac{\partial \mathbf{D}_{\varepsilon\varepsilon}}{\partial b_i} + 2\mathbf{X}_0^T \frac{\partial \mathbf{D}_{h\varepsilon}}{\partial b_i} + \mathbf{X}_0^T \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial b_i} \mathbf{X}_0 \quad (5.48)$$

A equação (5.48) pode ser escrita incluindo todas as variáveis de projecto do seguinte modo

$$\bar{\mathbf{D}}' = \mathbf{D}'_{\varepsilon\varepsilon} + 2\mathbf{X}_0^T \mathbf{D}'_{h\varepsilon} + \mathbf{X}_0^T \mathbf{E}' \mathbf{X}_0 \quad (5.49)$$

Sensibilidades das propriedades térmicas

O objectivo é procurar pela variação da função $\bar{\beta}(\mathbf{b}, \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_\rho)$. A função $\bar{\beta}(\mathbf{b}, \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_\rho)$ é definida na equação (5.30). A primeira variação desta função em ordem à componente b_i pode ser escrita na forma

$$\delta\bar{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\beta}}}{\partial b_i} \delta b_i + \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\beta}}}{\partial \mathbf{X}_0} \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial b_i} \delta b_i + \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\beta}}}{\partial \mathbf{X}_\theta} \frac{\partial \mathbf{X}_\theta}{\partial b_i} \delta b_i \quad (5.50)$$

Na avaliação da equação (5.50) é necessário determinar uma expressão para a segunda e a terceira parcela, pois $\frac{\partial\bar{\boldsymbol{\beta}}}{\partial b_i}$ pode ser obtido directamente da equação (5.30), $(\partial\bar{\boldsymbol{\beta}}/\partial b_i = \partial\mathbf{D}_{\varepsilon\theta}/\partial b_i)$.

Para obtermos a quantidade $((\partial\bar{\boldsymbol{\beta}}/\partial \mathbf{X}_0)(\partial \mathbf{X}_0/\partial b_i))$, denotamos que a derivada $(\partial \mathbf{X}_0/\partial b_i)$ é definida na equação (5.30) e que a derivada $(\partial\bar{\boldsymbol{\beta}}/\partial \mathbf{X}_0)$ é obtida a partir da equação (5.30) como

$$\frac{\partial\bar{\boldsymbol{\beta}}}{\partial \mathbf{X}_0} = \frac{1}{2} \mathbf{I}^T \mathbf{D}_{h\theta} \quad (5.51)$$

Pelo que obtemos

$$\frac{\partial\bar{\boldsymbol{\beta}}}{\partial \mathbf{X}_0} \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial b_i} = \frac{1}{2} \mathbf{I}^T \mathbf{D}_{h\theta} \left(-\mathbf{E}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{h\varepsilon}}{\partial b_i} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial b_i} \mathbf{X}_0 \right) \right) \quad (5.52)$$

e utilizando as equações (5.35) e (5.38), podemos simplificar a equação (5.52) obtendo

$$\frac{\partial\bar{\boldsymbol{\beta}}}{\partial \mathbf{X}_0} \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial b_i} = \frac{1}{2} \mathbf{X}_\theta^T \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{h\varepsilon}}{\partial b_i} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial b_i} \mathbf{X}_0 \right) \quad (5.53)$$

A quantidade $((\partial\bar{\boldsymbol{\beta}}/\partial \mathbf{X}_\theta)(\partial \mathbf{X}_\theta/\partial b_i))$ é definida considerando que $(\partial\bar{\boldsymbol{\beta}}/\partial \mathbf{X}_\theta)$ é obtida a partir do cálculo da derivada da equação (5.40), como

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\beta}}}{\partial \mathbf{X}_\theta} = \frac{1}{2} \mathbf{D}_{h\varepsilon}^T \quad (5.54)$$

e que $(\partial \mathbf{X}_\theta / \partial b_i)$ é definida, com base nas equações (5.26) e (5.27), por

$$\frac{\partial \mathbf{X}_\theta}{\partial b_i} = -\mathbf{E}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{h\theta}}{\partial b_i} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial b_i} \mathbf{X}_\theta \right) \quad (5.55)$$

Então, a expressão da quantidade $\left((\partial \bar{\boldsymbol{\beta}} / \partial \mathbf{X}_\theta) (\partial \mathbf{X}_\theta / \partial b_i) \right)$ é definida por

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\beta}}}{\partial \mathbf{X}_\theta} \frac{\partial \mathbf{X}_\theta}{\partial b_i} = \frac{1}{2} \mathbf{D}_{h\varepsilon}^T \left(-\mathbf{E}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{h\theta}}{\partial b_i} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial b_i} \mathbf{X}_\theta \right) \right) \quad (5.56)$$

e utilizando a equação (5.31) podemos simplificar a equação (5.56), obtendo

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\beta}}}{\partial \mathbf{X}_\theta} \frac{\partial \mathbf{X}_\theta}{\partial b_i} = \frac{1}{2} \mathbf{X}_0^T \left(\frac{\partial \mathbf{D}_{h\theta}}{\partial b_i} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial b_i} \mathbf{X}_\theta \right) \quad (5.57)$$

Substituindo as equações (5.53), (5.57) e $(\partial \bar{\boldsymbol{\beta}} / \partial b_i = \partial \mathbf{D}_{\varepsilon\theta} / \partial b_i)$ na equação (5.45) e reagrupando parcelas, podemos escrever

$$\delta \bar{\boldsymbol{\beta}} = \left[\frac{\partial \mathbf{D}_{h\varepsilon}^T}{\partial b_i} \mathbf{X}_\theta + \mathbf{X}_0^T \frac{\partial \mathbf{D}_{h\theta}}{\partial b_i} + \mathbf{X}_0^T \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial b_i} \mathbf{X}_\theta + \frac{\partial \mathbf{D}_{\varepsilon\theta}}{\partial b_i} \right] \delta b_i \quad (5.58)$$

Então, a derivada da função $\bar{\boldsymbol{\beta}}$ é representada por

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\beta}}}{\partial b_i} = \frac{\partial \mathbf{D}_{h\varepsilon}^T}{\partial b_i} \mathbf{X}_\theta + \mathbf{X}_0^T \frac{\partial \mathbf{D}_{h\theta}}{\partial b_i} + \mathbf{X}_0^T \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial b_i} \mathbf{X}_\theta + \frac{\partial \mathbf{D}_{\varepsilon\theta}}{\partial b_i} \quad (5.59)$$

A equação (5.59) pode ser escrita incluindo todas as variáveis de projecto do seguinte modo

$$\bar{\beta}' = \mathbf{D}'_{h\varepsilon}{}^T \mathbf{X}_\theta + \mathbf{X}_0^T \mathbf{D}'_{h\theta} + \mathbf{X}_0^T \mathbf{E}' \mathbf{X}_\theta + \mathbf{D}'_{\varepsilon\theta} \quad (5.60)$$

5.6 Validação das sensibilidades

De modo a validar a formulação apresentada e a verificar alguns comportamentos associados ao cálculo das sensibilidades é obtida a solução de um exemplo numérico.

Para uma determinada microestrutura composta por 400 elementos finitos, variou-se a densidade de material num elemento finito e registou-se a alteração do coeficiente de expansão térmica homogenizado, (α_1) para toda a microestrutura. O incremento da variável de projecto utilizado no método das diferenças finitas foi progressivamente alterado, inicialmente aumentou-se 0.2% do volume inicial de material 1, sucessivamente foram feitas alterações para 2% da densidade de material 1, 2.2%, 2.4% e, finalmente, fez-se o aumento em 4%. A comparação da análise de sensibilidades pelo método das diferenças finitas e o método analítico, é apresentada sob a forma gráfica na figura 5.1. Nesta figura, o valor do erro expressa a diferença dos valores das sensibilidades obtidas pelo método das diferenças finitas e o método analítico.

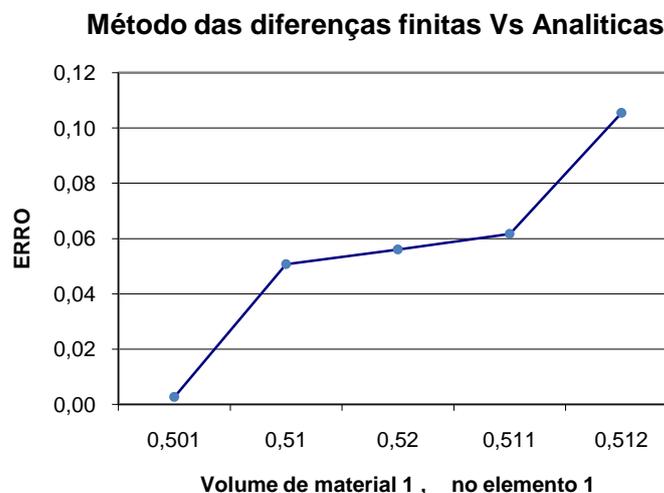


Figura 5.3- Comparação das sensibilidades obtidas com o método analítico e o método das diferenças finitas

Por observação da figura 5.11 podemos concluir que os valores das sensibilidades obtidas pelo método das diferenças finitas utilizando incrementos das variáveis projecto maiores, conduz a sensibilidades cada vez mais dispares relativamente ao método analítico. Este comportamento é justificado pela elevada sensibilidade do método das diferenças finitas às variações do incremento utilizado.

Note-se que o cálculo foi feito apenas para um elemento, para obtermos as sensibilidades para mais n elementos teria que se repetir o processo de derivação n vezes, e como usualmente em optimização topológica trabalham-se com centenas e por vezes com milhares de variáveis de projecto e, evidentemente elementos finitos, a utilização deste método na optimização topológica é inviável.

Em anexo na tabela A1e A2 é possível ver todos os valores das propriedades térmicas para as densidades de material respectivas, e as sensibilidades correspondentes.

CAPÍTULO SEIS

6 Optimização de Microestruturas

6.1 Introdução

Este trabalho tem como objectivo a obtenção de microestruturas compostas por um material imaginário e vazio, com propriedades elásticas e térmicas predefinidas.

Os materiais escolhidos para este trabalho têm as propriedades apresentadas na tabela 6.1. Seguidamente o material sólido considerar-se-á o material 1 e o material denominado 2 simulará o vazio, como seria de esperar o material 2 é mais *fraco* elasticamente. Consideram-se propriedades isotrópicas para o material 1, $\alpha_{11}^{(1)} = \alpha_{22}^{(1)} = \alpha_{33}^{(1)}$ e $\nu_{12}^{(1)} = \nu_{13}^{(1)} = \nu_{23}^{(1)}$, e para o material 2.

Tabela 6.1- Propriedades térmicas dos materiais escolhidos para o projecto

	Módulo de Young $E[GPa]$	Coefficiente de Poisson ν	Coefficiente de expansão térmica, $\alpha[\mu m/K]$
<i>Material 1</i>	0.675	0.3	10
<i>Material2</i>	$1 \cdot 10^{-7}$	0.3	$10 \cdot 10^{-7}$

A célula unitária é discretizada considerando uma malha de elementos finitos de 400 elementos rectangulares com 8 nós por elemento (elementos quadráticos) e foi criada utilizando o programa GID [I.C.N.M.E].

Neste trabalho, as microestruturas que se obtêm com o software VAMUCH são compostas por elementos finitos nos quais é permitida a mistura de dois materiais (sólido/vazio). O cálculo das propriedades elásticas e/ou térmicas da mistura é feita

recorrendo à lei da potência, equação (3.5). Na prática, interessa que a solução óptima tenha chegado a uma quantidade de material 1 em cada elemento finito com valores binários, 0-1. Contudo, atendendo á natureza contínua do problema de optimização, essas soluções são extremamente difíceis de alcançar. Assim, em cada exemplo, optou-se por modificar a quantidade de material atribuída na solução óptima igualando a 1 as densidades de material nos elementos em que predomina o material 1 e a 0.001 nos elementos que praticamente não têm material 1 atribuído. Então, é necessário calcular as propriedades da microestrutura óptima ligeiramente modificada e só depois podemos tirar conclusões relativas aos resultados alcançados.

6.2 Influência de projectos iniciais diferentes

Uma das condicionantes do projecto de optimização de microestruturas são os projectos iniciais. Nesta secção tenta-se perceber como evolui uma microestrutura em que se pretende minimizar o volume de material do conjunto global dos elementos da célula unitária considerando como constrangimento de projecto a rigidez ao corte da microestrutura, utilizando dois projectos iniciais diferentes.

Deste modo procura-se perceber a influência que projectos iniciais diferentes têm nas propriedades alcançadas e rapidez de convergência do método.

- Função objectivo: *minimizar* V^H
- Restrições: $Q_{12} > 0.05$
 $0.5 \leq V^H \leq 0.6$
- Projecto inicial A: material 1 nos vértices da célula unitária
- Projecto inicial B: material 1 nas arestas da célula unitária

O projecto inicial A consiste numa malha com material nos elementos que fazem os cantos da célula unitária, ver figura 6.1.

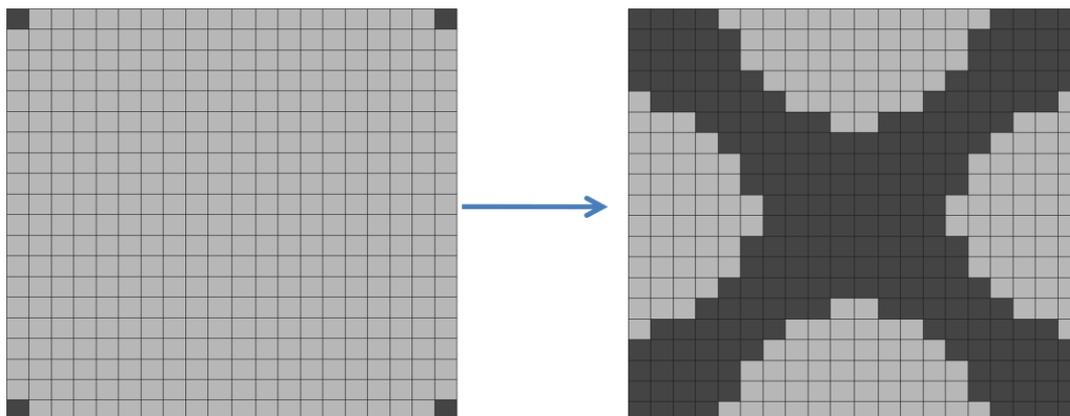


Figura 6.1 -Evolução do projecto A

O projecto inicial B consiste numa malha inicial com material nos elementos que fazem os lados da célula, ver figura 6.2.

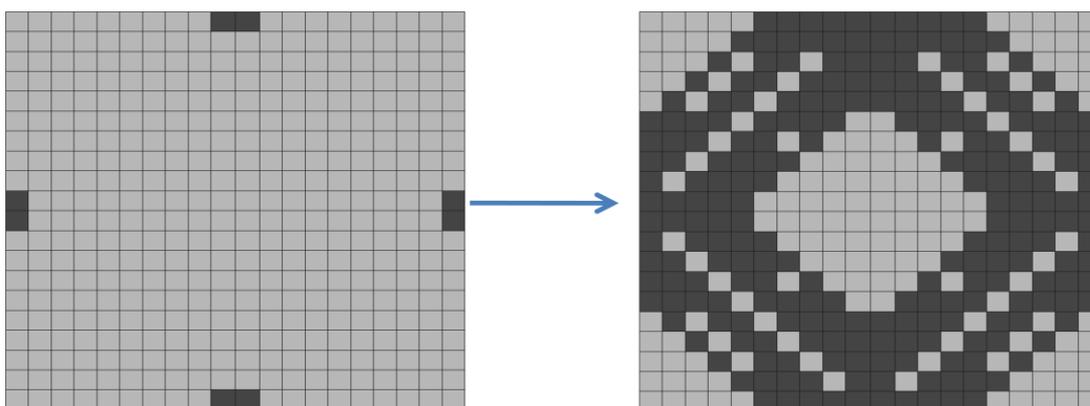


Figura 6.2 -Evolução do projecto B

A fracção de volume de material 1 e a rigidez ao corte das microestruturas óptimas representada nas figuras 6.1 e 6.2 são apresentadas na tabela 6.2.

Tabela 6.2- Comparação dos parâmetros do projecto A e B, para projectos iniciais diferentes

Projecto inicial	Fracção de Volume de material sólido	Constante ao corte Q_{12}	Número de iterações
A	0.52706493	0.049999958	77
B	0.55735105	0.049999994	128

Os dois projectos conduzem a uma solução que permite ter a constante de corte pretendida, valor superior ou igual a 0.05, contudo verifica-se que para o projecto inicial B a solução converge quase duas vezes mais rápido.

Quando se definem valores limite das constantes de corte é aconselhável partir de projectos iniciais que se assemelhem ao projecto designado A, essencialmente, porque o processo de optimização converge mais rapidamente. Note-se que a microestrutura tipo A tem uma rigidez idêntica à da microestrutura tipo B com uma menor quantidade de material.

6.3 Coeficientes de tensão térmica, β

A optimização apresentada neste ponto considera a obtenção de microestruturas cujos coeficientes de tensão térmica tenham o valor -1, $\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$ (KPa/°C). Nesse sentido, fizeram-se duas abordagens distintas: na primeira, o valor dos coeficientes da tensão térmica é utilizado na definição da função objectivo; na segunda, a função objectivo é definida como a minimização da quantidade de material utilizada e os coeficientes de tensão térmica são utilizados para definir constrangimentos de projecto.

Nesta optimização não foram considerados constrangimentos às propriedades elásticas.

6.3.1 Função objectivo directamente dependente de $\beta_{11}^*, \beta_{22}^*$

No presente capítulo formula-se o problema de optimização do seguinte modo:

- Função objectivo: $(\beta_{11}^H - \beta_{11}^*)^2 + (\beta_{22}^H - \beta_{22}^*)^2$
- Restrições:

$$0.4 \leq V \leq 0.5$$

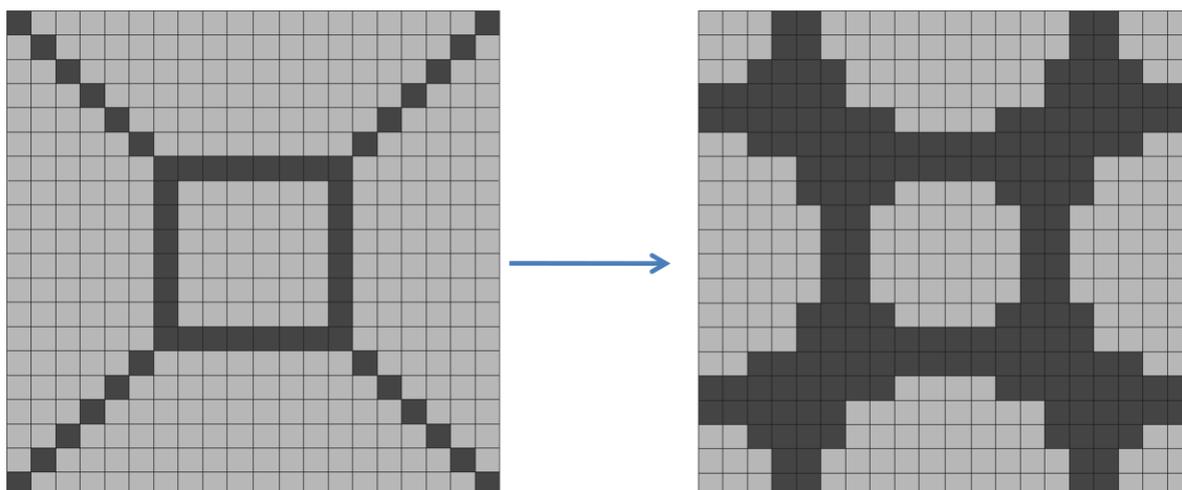


Figura 6.3- Aspecto da configuração para uma estrutura obtida por minimização da tensão térmica, com constrangimentos de volume e tensão térmica

Tabela 6.3- Parâmetros para as soluções, original e modificada para obtenção de $\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$ com constrangimentos de volume

Configuração	Tensão térmica β_{11}^*	Tensão térmica β_{22}^*	Fracção de volume do material sólido	Constante ao corte Q_{12}
Original	-1.00006	-1.00006	0.499935	0.689312E-02
Modificado	-1.19845	-1.19845	0.440560	0.704752E-02
Diferença	-0,19839	-0,19839	-0.059375	0.0001544

A modificação da solução final leva a um decréscimo das tensões térmicas e a um ligeiro aumento da constante ao corte.

6.3.2 Função objectivo directamente dependente do volume de material

Nesta abordagem a função objectivo está directamente relacionada com a quantidade de material sólido utilizado na construção da estrutura. Assim, pretende-se minimizar o custo de material associado á microestrutura.

Os constrangimentos de volume vão limitar o valor do volume de material máximo que se considerará 0,4 e os constrangimentos dos coeficientes de tensão térmica é feito de modo a que estes assumam o valor -1.

O projecto inicial foi pensado com o objectivo de contrariar a tendência do programa em gerar microestruturas com simetria vertical e horizontal, assim o projecto inicial consiste em considerar os elementos de canto da célula unitária com quantidades de material diferentes logo á partida, i.e. garantir apenas a simetria vertical da microestrutura. Assim, os elementos de canto do mesmo lado da célula unitária têm de um lado uma quantidade de material 0.8 e do outro 1.

A microestrutura que se obtém está representada na figura 6.4 e os valores das tensões térmicas correspondentes estão representados na tabela 6.4, onde se podem comparar os valores das propriedades da estrutura inicial e a estrutura simplificada representada na figura 6.5 com quantidades de material efectivas em cada elemento igual a 1 ou 0.001.

De um modo simples o projecto pode definir-se:

- Função objectivo: *minimizar* V^H
- Restrições:

$$V \leq 0.4$$

$$\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$$

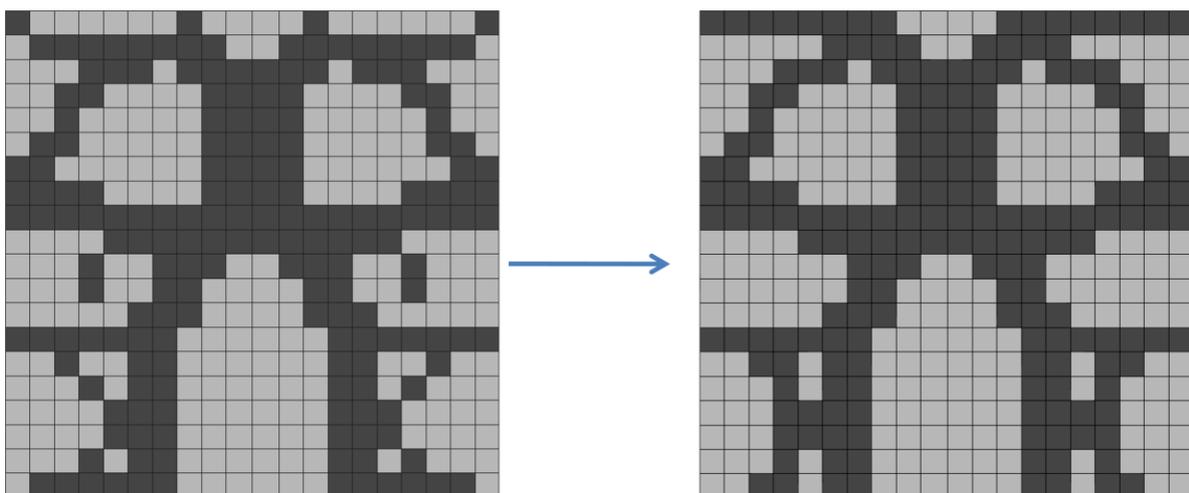


Figura 6.4- Aspecto da configuração para uma estrutura obtida por minimização de volume para obtenção de $\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$, á esquerda a configuração original á direita a modificada

Tabela 6.4- Valores obtidos para os parâmetros de interesse para as configurações original e modificada

Configuração	Tensão térmica β_{11}^*	Tensão térmica β_{22}^*	Fracção de volume do material sólido	Constante ao corte Q_{12}
Original	-1.0996775	-1.0285454	0.46054	0.78599244E-02
Modificado	-1.0984078	-0.99707693	0.46054	0.79879795E-02
Diferença	0,0012697	0.0314685	0	-0.0001281

Pode verificar-se que os valores de tensão térmica pouco são afectados com a simplificação, a constante ao corte foi tida em conta para que pudesse haver uma referência elástica num problema que visa a tensão térmica.

Para o tipo de problemas em que se querem obter tensões térmicas negativas, verifica-se que os valores da constante ao corte são normalmente muito baixos.

O objectivo de se obter uma solução com uma configuração geométrica sem simetria horizontal foi conseguido, o facto de se ter alterado a quantidade de material nos cantos superiores relativamente aos cantos inferiores parece ter influenciado a análise de sensibilidades, o que faz sentido visto que estas dependem directamente deste parâmetro, fazendo com que o projecto ao contrário dos anteriores tivesse uma evolução distinta a partir dos elementos de canto com quantidades de material diferentes.

O problema foi também formulado para valores de volume superiores, de modo a verificar a influência deste sobre a estrutura e propriedades finais. Primeiro com estrangimento de volume com limite superior de 0.5 e depois de 0.6, as estruturas resultantes respectivas podem ser vistas nas figuras 6.6 e 6.7, as propriedades associadas a cada uma das situações está apresentada na tabela 6.5.

- Função objectivo: *minimizar* V^H
- Restrições:

$$V \leq 0.5 \text{ e para } V \leq 0.6$$

$$\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$$

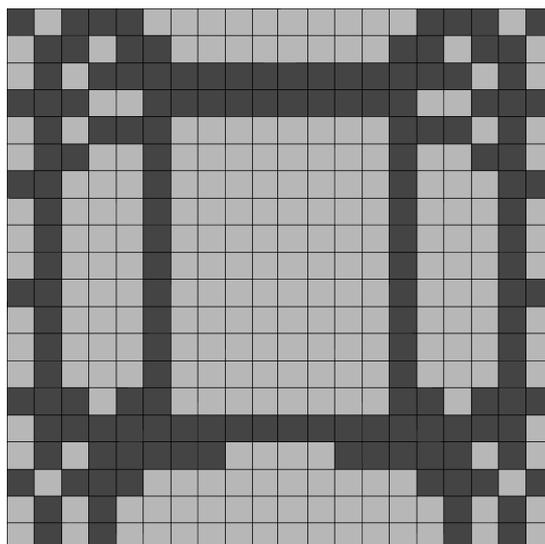


Figura 6.5- solução obtida para minimização de volume para obtenção de $\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$ para valores de volume não superiores a 0.5

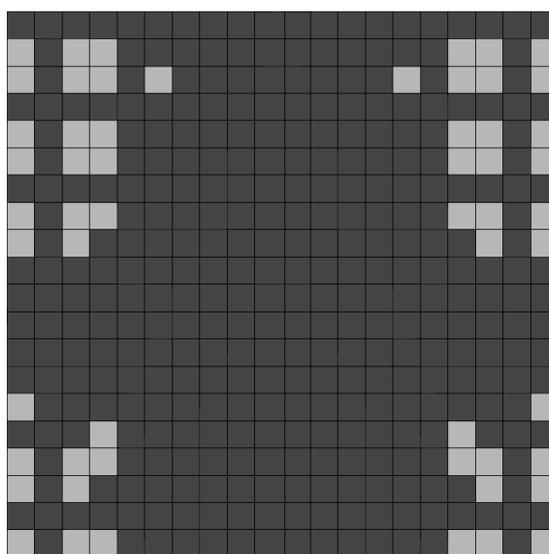


Figura 6.6- solução obtida para minimização de volume para obtenção de $\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$ para valores de fracção de volume não superiores a 0.6

Tabela 6.5- parâmetros para as soluções para obtenção de $\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$ com restrições de volume de 0.5 e 0.6

Constrangimento de Volume	Tensão térmica β_{11}^*	Tensão térmica β_{22}^*	Fracção de volume do material sólido	Constante ao corte Q_{12}
$V \leq 0.5$	-1.0000031	-1.0000030	0.49328511	0.0092750666
$V \leq 0.6$	-1.0000312	-1.0000306	0.59293771	0.025368697

Por observação das figuras 6.6 e 6.7 percebe-se que para maiores quantidades de material adicionado o desenho fica mais indefinido, a estrutura tende a formar um conjunto uniforme de “cinzento”, i.e. zonas onde o material sólido e vazio têm quantidades idênticas em cada elemento.

As propriedades obtidas são as desejáveis e pode observar-se um razoável aumento do valor da constante ao corte Q_{12} , que aumenta proporcionalmente com o volume de material sólido adicionado, o que seria de esperar.

Estas estruturas são no entanto impraticáveis, devido á complexidade de produzir materiais com estes tipos de distribuições.

O limite de volume de material sólido deve ser então limitado a 0.4 do volume total.

6.4 Tensão térmica, β e constante ao corte Q_{12}

Neste capítulo a abordagem passa a ser um pouco mais completa, e o problema de optimização define-se restringindo propriedades térmicas e propriedades elásticas, como função objectivo define-se o volume de material.

Simplificadamente o problema de optimização define-se assim:

- Função objectivo: *minimizar* V^H
- Restrições:

$$V \leq 0.6$$

$$\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1; Q_{12} = 0.025$$

O projecto inicial foi a solução para uma tensão térmica de valor -1 a que se chegou no capítulo anterior, vd. figura6.4, assim espera-se encontrar mais rapidamente a solução final.

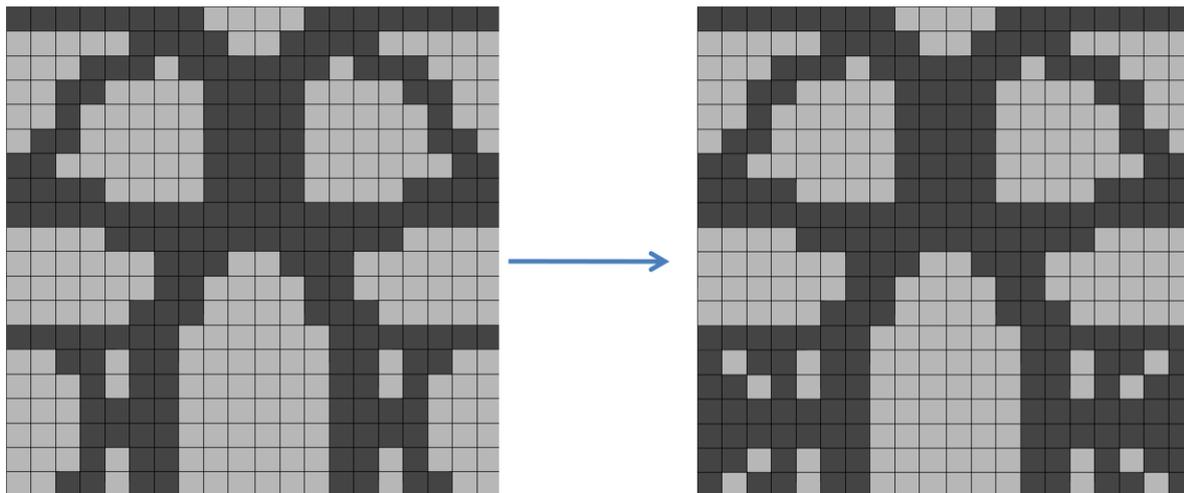


Figura 6.7- solução obtida para minimização de volume para obtenção de $\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$ para valores de fracção de volume não superior a 0.6 e constrangimento ao corte de 0.025.

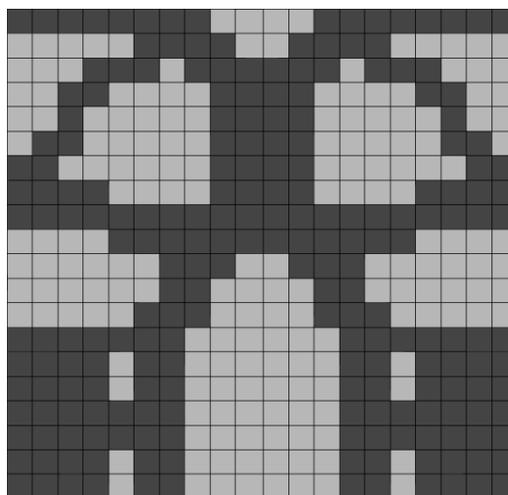


Figura 6.8- modificação da solução obtida para minimização de volume para obtenção de $\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$ para valores de fracção de volume não superior a 0.6 e constrangimento ao corte de 0.025.

Tabela 6.6- parâmetros para as soluções, original e modificada para obtenção de $\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$ com restrições de volume de $V \leq 0.6$ e corte $Q \leq 0.025$

Configuração	Tensão térmica β_{11}^*	Tensão térmica β_{22}^*	Fracção de volume do material sólido	Constante ao corte Q_{12}
Original	-1.0000031	-1.0000016	0.55676386	0.025000008
Modificado	-1.3855559	-1.5189649	0.54795250	0.026003252
Diferença	0.3855559	0.5189633	0.00881136	0.001003244

Com a modificação verifica-se que a ligeira diminuição de volume sólido leva a um decréscimo das tensões térmicas e a um aumento da constante ao corte.

O projecto é novamente repetido de modo a obter-se agora um valor da constante ao corte de 0.05 ao invés do anteriormente definido para 0.025.

O problema vem então definido do mesmo modo que o problema inicial deste subcapítulo, com a diferença de que o constrangimento de corte passa a ser definido para valores iguais a 0.05.

‣ Função objectivo: *minimizar* V^H

‣ Restrições:

$$V \leq 0.6$$

$$\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1; Q_{12} = 0.05$$

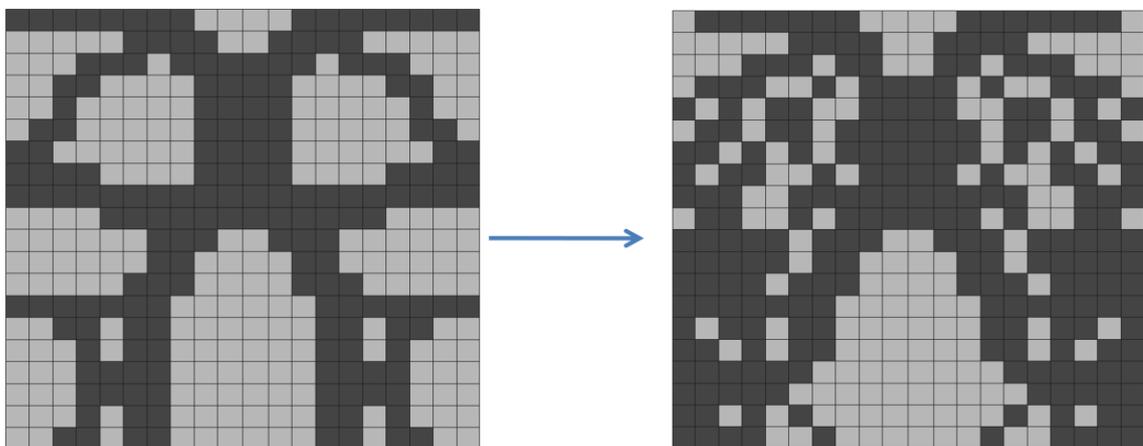


Figura 6.9- Aspecto da configuração para uma estrutura obtida por minimização de volume, com constrangimentos de volume e constante ao corte.

Tabela 6.7- parâmetros para as soluções, original e modificada para obtenção de $\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$ com restrições de volume de $V \leq 0.6$ e corte $Q \leq 0.05$

Configuração	Tensão térmica β_{11}^*	Tensão térmica β_{22}^*	Fracção de volume do material sólido	Constante ao corte Q_{12}
Original	-1.0000546	-1.0001197	0.60000009	0.043749629
Modificado	-1.1062278	-1.0670992	0.60539500	0.044948881
Diferença	-0.1061732	-0.06708723	0.00539491	0.001199252

Para a quantidade de material definida, a tensão térmica tem o valor desejado já a constante ao corte parece difícil de alcançar, isto acontece pela combinação de duas razões, primeiro a quantidade de material definida que parece insuficiente para alcançar o valor de

constante ao corte de 0.05, e segundo a exigência de se ter uma tensão térmica com valores muito baixos não permite que a configuração geométrica ganhe uma forma que favoreça o aumento das propriedades elásticas.

Relativamente às simetrias, verifica-se que quando se define a função objectivo envolvendo tensões térmicas, a simetria da solução final é independente da do projecto inicial, e a solução é sempre simétrica vertical e horizontalmente. Este fenómeno demonstra que quando se define como função objectivo as tensões térmicas o optimizador tem em conta a sensibilidade da função objectivo relativamente à quantidade de material que é atribuída a cada elemento finito simetricamente colocado e tende a igualar a quantidade de material nesses elementos de modo a obter sensibilidades da função objectivo idênticas.

Quando se define como função objectivo a minimização de volume, a sensibilidade da função objectivo relativamente á simetria de distribuição de material não é determinante e, consequentemente, as microestruturas óptimas tendem a apresentar uma simetria final coincidente com a simetria inicial.

CAPÍTULO SETE

7 Conclusões

A aplicação da optimização topológica para o projecto de componentes com características térmicas pré-definidas parece, depois deste trabalho, viável. Percebe-se que é possível manipular propriedades térmicas conjuntamente com propriedades elásticas para uma microestrutura composta de material sólido e vazio.

Apesar dos inúmeros parâmetros de que este tipo de optimização depende, um conjunto alargado de experiências pode dar um conhecimento relativamente vasto de como as propriedades variam entre elas em função de diferentes configurações geométricas.

A determinação da tensão térmica negativa é bem sucedida, contudo viu-se que as propriedades elásticas para este tipo de configuração é especialmente reduzido.

Verifica-se também que as simetrias da microestrutura das soluções deste trabalho dependem das condições dos projectos iniciais e também do modo como se define a função objectivo.

A análise das experiências presentes neste trabalho pode ser aproveitada para estudo de projectos futuros a nível macroscópico realçando assim o interesse prático deste tipo de abordagem.

CAPÍTULO OITO

8 Referências Bibliográficas

Arora J. S., 2002. *Methods for discrete variable structural optimization*, Advanced Technology in Structural Engineering: Structures Congress 2000, Amer Society of Civil Engineers.

Bahia Miguel, 2005 *Optimização topológica aplicada ao projecto de mecanismos flexíveis*, Tese de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil

Becker M., 1997. *Optimisation de structures en variables discretas*, These de Doctorat, universite de Liege, ingenieur civil electricien-mecanicien (aerospaciale), 108-135.

Bendsøe M. P. e Sigmund O., 2004. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*, second ed. Springer, Berlin.

Bendsøe M. P., 1989. Optimization shape design as a material distribution problem, *structural optimization*, 1, 193-202.

Berdichevsky V. L., 1977. On Averaging of Periodic Systems, *PMM* **41** (6), 993-1006.

Berdichevsky V. L., 1979. Variational-asymptotic method of constructing a theory of shells, *PMM* **43**(4), 664-686.

Cardoso E. L., 2000. Controlo de Complexidade na Optimização Topológica de Estruturas Contínuas, Dissertação de Mestrado, UFRGS, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, Brasil

Challis V. J., Roberts A. P. e Wilkins A. H., 2008. Design of three dimensional isotropic microstructures for maximized stiffness and conductivity, *international Journal of Solids and Structures*, 45, 4130-4146.

Correia V.M.R.F, 2001. Modelos de elementos finites na optimização de estruturas adaptativas em materiais compostos. Tese de douroramento, Universidade Técnica de Lisboa, Instituto superior Técnico, Lisboa, Portugal.

Díaz A.R. e Sigmund O.,1995. Checkerboard patterns in layout optimization, *Structural Optimimization*, 10, 40-45.

Eriksen J. L., Kinderlehrer D. e Lions J-L, 1986. *Homogenization and effective moduli of materials and media*, The IMA volumes in mathematics and its applications 1, Springer Verlag, Berlin.

Fujii D., Chen B. C. e Kikuchi N., 2001. Composite material design of two-dimensional structures using the homogeneization design method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, 2031-2051.

Guedes J.M. e Kikuchi N, 1991. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanical Engineering*; 83, 143-198.

Guest J. e Prévost J. H., 2006. Optimizing multifunctional materials: design microstructures for maximized stiffness and fluid permeability, *International Journal of Solids and Structures*, 43, 7028-7047.

Guest J. e Prévost J. H., 2007. Design of maximum permeability material structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196, 1006-1017.

Gürdal Z., Haftka R. T. e Hajela P., 1999. Design and Optimization of Laminate Composite Materials, John Wiley & Sons, New York, USA.

Haftka R. e Adelman H., 1989. Recent Developments in Structural Sensitivity Analysis, *Structural Optimization*, 1, 137-151.

Haftka R. e Gürdal,Z., 1992. *Elements of Structural Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Hashin Z, 1983. Analysis of composite materials-a survey, *Applied Mechanics Review*, 50, 481-505.

International Center for Numerical Methods in Engineering, 2009. <http://gid.cimne.upc.es/>, Espanha

Leal Rogério, 2009. *Apontamentos de Mecânica dos Sólidos*, , Faculdade de Ciências e Tecnologia, Departamento de Engenharia Mecânica Universidade de Coimbra, Portugal

Lima C. R., 2002. *Projecto de Mecanismos Flexíveis usando O Método de Optimização Topológica*, Dissertação de Mestrado, USP, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil

Mateus H. C., Mota Soares C. M. e Mota Soares, C. A., 1991. Sensitivity analysis and Optimal Design of Thin Laminated Composite Structures, *Computers and Structures*, 41, 501-508.

Muc A., 1988. Optimal fibre orientation for simple-supported, angle-ply plates under biaxial compression, *Computers and Structures*, 9, 161-172.

Murat F. e Tartar L., 1985. Calcul des variations et homogeneisation, in: les methods de l'homogeneisation: theorie et applications en physique. *Coll. Des la Dir. Des Etudes Recherches de Electricite de France*, Eyorelles, Paris.

Neto M. A., 2005. Optimization of flexible multibody systems with composite materials, Ph. D. Thesis, Faculty of science of the University of Coimbra, Mechanical Department, Coimbra, Portugal.

Ringertz U. T., 1988. On methods for discrete structural optimization, *Engineering Optimization*, 13, 43-64.

Schmit L. A. e Farshi B., 1980. Discrete-continuous variable structural synthesis, *AIAA Journal*, 12, 692-699.

Sigmund O. e Peterssen J., 1998. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima, *Structural optimization*, 16, 4-7.

Sigmund O., 1994. Material with prescribed constitutive parameters: an inverse homogenization problem, *International Journal of Solids and Structures*, 31(17), 2313-2329.

Sigmund O., 1995. Tailoring materials with prescribed elastic properties, *Mechanics of Materials*, 20, 351-368.

Sigmund O., 2000. A new class of extremal composites, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 48, 397-428.

Svanberg K., 1987. The method of moving asymptotes – A new mwthod for structural optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24, 359-373.

Torquato S. e Donev A., 2004. Minimal surfaces and multifunctionality, *Proceedings Royal Society. Mathematical, physical and engineering science*, 460, 1849-1856.

Tortorelli D. e Michaleris P., 1994. Design Sensitivity Analysis: Overview and Review, *Inverse Problems in Engineering*, 1, 71-105.

Yu W. e Tang T., 2007. Variational asymptotic method for unit cell homogenization of periodically heterogeneous materials, *International journal of Solids and structures*, 44(11-12), 3738-3755.

9 ANEXO A

TabelaA1- sensibilidade dos coeficientes de expansão térmica, Método Analítico e das diferenças finitas

	Propriedades efectivas	0,2 Propriedades efectivas	2 Propriedades efectivas	Sensibilidades método Analítico	0,2% Sensibilidade Diferenças Finitas	2% Sensibilidade Diferenças Finitas
	$\rho=0.5$	$\rho=0.501$	$\rho=0.51$			
α_{11}	-3,8683E+00	-3,8683E+00	-3,8684E+00	-7,1191E-03	-7,1000E-03	-7,4800E-03
α_{12}	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
α_{22}	-3,8683E+00	-3,8683E+00	-3,8684E+00	-7,1191E-03	-7,1000E-03	-7,4800E-03
α_{13}	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
α_{23}	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
α_{33}	-3,8683E+00	-3,8683E+00	-3,8684E+00	-7,1191E-03	-7,1000E-03	-7,4800E-03

	Propriedades efectivas	4% Sensibilidade Diferenças Finitas	Propriedades efectivas	2,2% Sensibilidade Diferenças Finitas	Propriedades efectivas	2,4% Sensibilidade Diferenças Finitas
	$\rho=0.52$		$\rho=0.511$		$\rho=0,512$	
α_{11}	-3,8685E+00	-7,8700E-03	-3,86841E+00	-7,5182E-03	3,868421E+00	-7,5583E-03
α_{12}	0,0000E+00	0,0000E+00	0,00000E+00	0,0000E+00	0,000000E+00	0,0000E+00
α_{22}	-3,8685E+00	-7,8700E-03	-3,86841E+00	-7,5182E-03	3,868421E+00	-7,5583E-03
α_{13}	0,0000E+00	0,0000E+00	0,00000E+00	0,0000E+00	0,000000E+00	0,0000E+00
α_{23}	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00	0,0000E+00
α_{33}	-3,8685E+00	-7,8700E-03	-3,86841E+00	-7,5182E-03	3,868421E+00	-7,5583E-03

Tabela A2- Tabela de Erro, comparação feita para as sensibilidades

Intervalo de derivação [$\Delta\rho$] M.D.F	0.001	0.01	0.011	0.012	0.52
$\alpha 11$	2,68861E-03	5,06886E-02	5,60519E-02	6,16918E-02	1,05471E-01
$\alpha 12$	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000E+00
$\alpha 22$	2,68861E-03	5,06886E-02	5,60519E-02	6,16918E-02	1,05471E-01
$\alpha 13$	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000E+00
$\alpha 23$	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000E+00
$\alpha 33$	2,68861E-03	5,06886E-02	5,60519E-02	6,16918E-02	1,05471E-01

10 ANEXO B

Tabela B1- Matriz rigidez para um projecto de minimização de volume e constrangimentos ao corte e volume para o projecto inicial definido A.

Matriz Rigidez [11 12 22 13 23 33]

0.21114647	0	0.43150619E-01	0	0	0.43150619E-01
0	0.44769483E-01	0	0	0	0
0.43150619E-01	0	0.83381553E-01	0	0	0.60453845E-01
0	0	0	0.44769483E-01	0	0
0	0	0	0	0.49999958E-01	0
0.43150619E-01	0	0.60453845E-01	0	0	0.83381553E-01

Tabela B2- Matriz rigidez para um projecto de minimização de volume e constrangimentos ao corte e volume para o projecto inicial definido B.

Matriz Rigidez [11 12 22 13 23 33]

0.22636799	0	0.44211058E-01	0	0	0.44211058E-01
0	0.46359339E-01	0	0	0	0
0.44211058E-01	0	0.88959516E-01	0	0	0.58410677E-01
0	0	0	0.46359339E-01	0	0
0	0	0	0	0.49999994E-01	0
0.44211058E-01	0	0.58410677E-01	0	0	0.88959516E-01

Tabela B3- Matriz rigidez para um projecto de minimização da tensão térmica, com
constrangimentos de volume e tensão térmica

Matriz Rigidez [11 12 22 13 23 33]

0.14744028	0	0.27656565E-01	0	0	0.27656565E-01
0	0.29657758E-01	0	0	0	0
0.27656565E-01	0	0.58874281E-01	0	0	0.33314268E-01
0	0	0	0.29657758E-01	0	0
0	0	0	0	0.70475237E-02	0
0.27656565E-01	0	0.33314268E-01	0	0	0.58874281E-01

Tabela B4- Matriz rigidez para um projecto de minimização de volume, para obtenção das
tensões térmicas negativas, -1

Matriz Rigidez [11 12 22 13 23 33]

0.15750491	0	0.25347896E-01	0	0	0.23009491E-01
0	0.29826291E-01	0	0	0	0
0.25347896E-01	0	0.57225109E-01	0	0	0.27267878E-01
0	0	0	0.30340442E-01	0	0
0	0	0	0	0.79879795E-02	0
0.23009491E-01	0	0.27267878E-01	0	0	0.49430425E-01

Tabela B5- Matriz rigidez para um projecto de minimização de volume, para obtenção das tensões térmicas negativas $\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$ para valores de volume não superior a 0.5

Matriz Rigidez [11 12 22 13 23 33]

0.13667032	0	0.28212282E-01	0.00000000E+00	0	0.27303470E-01
0	0.28514433E-01	0	0	0	0
0.28212282E-01	0	0.72259430E-01	0	0	0.21781510E-01
0	0	0	0.27657527E-01	0	0
0	0	0	0	0.92750666E-02	0
0.27303470E-01	0	0.21781510E-01	0	0	0.69230059E-01

Tabela B6- Matriz rigidez para um projecto de minimização de volume, para obtenção das tensões térmicas negativas $\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$ para valores de volume não superior a 0.6

Matriz Rigidez [11 12 22 13 23 33]

0.15580340	0	0.48830884E-01	0	0	0.48102944E-01
0	0.38586017E-01	0	0	0	0
0.48830884E-01	0	0.12268262	0	0	0.40086994E-01
0	0	0	0.37698496E-01	0	0
0	0	0	0	0.25368697E-01	0
0.48102944E-01	0	0.40086994E-01	0	0	0.12025615

Tabela B7- Matriz rigidez para um projecto de minimização de volume, para obtenção das tensões térmicas negativas $\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$ com constrangimento ao corte de 0.025.

Matriz Rigidez [11 12 22 13 23 33]

0.22261096E+00	0	0.31974394E-01	0	-0.14013463E-03	0.35053063E-01
0	0.37472312E-01	0	-0.23174923E-03	0	0
0.31974394E-01	0	0.66849641E-01	0	-0.96080539E-04	0.39731672E-01
0	-0.23174923E-03	0	0.43044212E-01	0	0
-0.14013463E-03	0	-0.96080539E-04	0	0.26003252E-01	-0.37103491E-03
0.35053063E-01	0	0.39731672E-01	0	-0.37103491E-03	0.77111871E-01

Tabela B8- Matriz rigidez para um projecto de minimização de volume, para obtenção das tensões térmicas negativas $\beta_{11}^* = \beta_{22}^* = -1$ com constrangimento ao corte de 0.05.

Matriz Rigidez [11 12 22 13 23 33]

2.62E-01	0	2.55E-02	0	0	2.46E-02
0	4.53E-02	0	0	0	0
2.55E-02	0	5.80E-02	0	0	2.71E-02
0	0	0	4.82E-02	0	0
0	0	0	0	0.00449	0
2.46E-02	0	2.71E-02	0	0	5.50E-02