



FCTUC DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Modelo Numérico Misto: Superfície Livre / Pressão

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil
na Especialidade de Hidráulica, Recursos Hídricos e Ambiente

Autor

Pedro Miguel Borges Lopes

Orientadores

José Manuel de Eça Guimarães de Abreu

Jorge Eduardo Teixeira Leandro

Esta dissertação é da exclusiva responsabilidade do seu autor, não tendo sofrido correcções após a defesa em provas públicas. O Departamento de Engenharia Civil da FCTUC declina qualquer responsabilidade pelo uso da informação apresentada

Coimbra, Agosto, 2011

AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores, Prof. José Abreu e Prof. Jorge Leandro pela disponibilidade prestada no esclarecimento de dúvidas e pela amizade demonstrada. Obrigado por nunca terem duvidado das minhas capacidades de trabalho e por me fazerem sempre acreditar que conseguiria obter este resultado.

Aos meus pais, Paulo Lopes e Cristina Lopes, à minha irmã, Joana Lopes e aos meus avós, Telmo Lopes, Agostinho Borges e Dolores Simões pela compreensão, apoio, alegria, dedicação e confiança que tiveram em mim durante estes últimos 5 anos, sem os quais nada disto teria sido possível. É, por isto e por muito mais que este parágrafo se torna curto comparado com a gratidão que tenho para com vocês.

À minha namorada, Ana Gaudêncio pelo apoio e incentivo oferecidos nos momentos mais difíceis. Atenção, carinho, amor e humildade são atributos que a torna uma pessoa magnífica e digna de homenagem.

Aos colegas do Perfil de Hidráulica Recursos Hídricos e Ambiente, dos quais destaco o amigo Ricardo Martins pelo companheirismo demonstrado neste último ano.

Ao Prof. Mário Franca pelo incentivo na escolha do ramo de especialização de Hidráulica.

Em especial aos amigos, Alexandre Almeida, Ana Lúcia, Ana Rita Pardal, Cátia Maricato, Cátia Tavares, Gabriel Silva, Joana Dourado, Luís Neto, Maria Courela, Marco Fonseca, Mariana Pereira, Miriam Fonseca, Patrícia Machado, Sílvia Feiteirinha, Tânia Oliveira e Tiago Melo pela força nos momentos mais complicados deste curso. O meu muito obrigado!

A todos os demais que directamente ou indirectamente me auxiliaram tanto na vida afectiva como profissional.

Este trabalho foi desenvolvido no âmbito do Projecto de Investigação PTDC/AAC-AMB/101197/2008 financiado pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia.

RESUMO

Os sistemas de abastecimento ou de drenagem urbanas estão sujeitos durante a sua vida útil a fenómenos de rotura provocados por escoamentos mistos. Esses tipos de escoamentos são caracterizados pela ocorrência em simultâneo ou alternada de escoamentos em superfície livre e pressão, sendo estimulados quando algum fenómeno a jusante reduz a capacidade de vazão ou quando o caudal a escoar excede a capacidade de transporte do colector. A simulação completa destes casos é um processo bastante oneroso a nível computacional, provocado pela complexidade de compatibilização das equações matemáticas que regem estes escoamentos. Existem porém, várias formas de fazer frente à situação, sendo uma delas intensamente utilizada a partir dos anos 60: a denominada fenda de Preissmann. A ideia de criar uma fenda no topo da conduta permite que um escoamento seja somente regido pelas equações que modelam o funcionamento em superfície livre, ficando a cargo da fenda a simulação da altura de pressão a que a conduta está sujeita. Por outro lado, o modelo TPA (*Two-Componente Pressure Approach*) surgiu como solucionador de algumas limitações associadas aos modelos da fenda de Preissmann, como seja o facto de estes não permitirem a simulação de subpressões. A juntar aos modelos que utilizam o método das diferenças finitas, pode-se ainda reflectir sobre a utilização do método das características para o estudo destes escoamentos. Posto isto, será de enorme interesse saber ao certo qual o modelo que melhor se comporta em situações de regimes mistos e qual demonstra maior simplicidade na programação e adaptação à simulação de problemas práticos de engenharia, recorrendo-se para o efeito a uma comparação dos respectivos resultados através da utilização de vários exemplos.

Palavras-Chave: escoamentos mistos, fenda de Preissmann, modelo TPA, método das características.

ABSTRACT

Flow systems and urban drainage systems are subject during its useful life to a phenomenon of rupture caused by mixed flows. These types of flows are characterized by simultaneous or alternating occurrence of free surface flows and pressure flows, being stimulated when a downstream phenomenon reduces the flow capacity or when the flow exceeds the capacity of the pipeline. The full simulation of these cases is fairly expensive at computational level, caused by the complexity of compatibility of the mathematical equations that governing these flows. However, exist several ways to cope with the situation, one of which is heavily used from 60 years: the denominated Preissmann slot. The idea of creating a slot at the top of the pipelines leads to a flow that is only governed by equations in free surface, leaving it to the slot simulates pressure that the conduit is subject. On the other hand, TPA model (*Two-Componente Pressure Approach*) emerged as the solver of some limitations associated to the models with Preissmann slot, like is the failure to simulate sub-pressures. In addition to models that using the finite difference method can still reflect on the use of the method of characteristics to study these flows. Finally, will be of great interest to know which model is best one in situations of mixed flows and which demonstrates simplicity in programming, resorting to the effect a comparison of their results by using several examples.

Keywords: mixed flows, Preissmann slot, TPA model, method of characteristics.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. Contexto.....	1
1.2. Objectivos.....	3
1.3. Organização.....	4
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	5
2.1. Classificação dos tipos de escoamento.....	5
2.2. Teoria unificada do escoamento variável.....	6
2.2.1. Equações dos escoamentos sob pressão.....	8
2.2.2. Equações dos escoamentos com superfície livre (equações de Saint-Venant) ..	10
2.3. Métodos de resolução das equações.....	14
2.3.1. Método das Características.....	15
2.3.2. Método das Diferenças Finitas.....	16
2.4. Esquemas para resolução de escoamentos mistos.....	17
2.4.1. Esquema Implícito de Preissman.....	17
2.4.2. Modelo TPA.....	21
3. METODOLOGIA.....	24
3.1. Modelos utilizados.....	24
3.2. Aplicação do MDF Implícito de Preissmann.....	24
3.2.1. Discretização em ordem às variáveis (Y,Q).....	24
3.2.2. Discretização em ordem às variáveis (A,Q).....	28
3.2.3. Modelo matricial e condições de fronteira.....	32
3.3. Aplicação do MOC.....	33
3.3.1. Equações do método para o caso das equações de Saint-Venant nas variáveis (h,V).....	33

3.3.2.	Aplicação do MOC na modalidade dos intervalos de tempo fixos	36
4.	APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS	40
4.1.	Exemplos de superfície livre pura	40
4.1.1.	Descrição dos testes	40
4.1.2.	Discussão dos resultados.....	43
4.2.	Exemplos com escoamento misto (superfície livre e pressão).....	44
4.2.1.	Descrição dos testes 1 e 2	44
4.2.2.	Discussão dos resultados dos testes 1 e 2	46
4.2.3.	Descrição do teste 3	47
4.2.4.	Discussão dos resultados.....	52
4.3.	Teste de Wiggert.....	53
4.3.1.	Descrição do teste.....	53
4.3.2.	Discussão dos resultados do teste de Wiggert.....	58
4.4.	Teste de Vasconcelos	60
4.4.1.	Descrição do teste.....	60
4.4.2.	Discussão dos resultados do teste de Vasconcelos.....	63
5.	CONCLUSÕES	65
6.	BIBLIOGRAFIA	66

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 – Esquema ilustrativo da definição das variáveis utilizadas.	11
Figura 2.2 - Esquema de cálculo dos métodos explícitos e implícitos (Silva e Buiochi, 2011).	16
Figura 2.3 – Esquema dos quatro pontos (Neves <i>et al.</i> , 2001).....	18
Figura 2.4 – Esquemática do modelo da fenda de Preissmann (Kerger <i>et al.</i> , 2011).....	20
Figura 2.5 – Esquema das grandezas geométricas utilizadas para o cálculo de A , R_H e B numa secção circular.	21
Figura 2.6 – Comparação entre o método TPA e o método da Fenda de Preissmann (Vasconcelos, 2008).....	23
Figura 3.1 – Curvas características C^+ e C^- no plano $x-t$	36
Figura 3.2 – Malha regular e esquema de cálculo para o método dos intervalos de tempo fixos.	37
Figura 4.1 – Condições de fronteira de montante: (a) CFM1 , (b) CFM2 41	41
Figura 4.2 – Resultados dos testes com superfície livre nos quais o eixo das abcissas corresponde ao tempo (s) e o eixo das ordenadas à altura da água no colector (m).....	42
Figura 4.3 - Condições de fronteira de montante CFMp1 e CFMp2.....	44
Figura 4.4 – Resultados dos testes em escoamento misto em que o eixo das abcissas corresponde ao tempo (s) e o eixo das ordenadas à altura da água na conduta (m).	45
Figura 4.5 - Esquema do teste 3.	47
Figura 4.6 – Esquema das condições de fronteira do modelo.	49
Figura 4.7 – Resultados para a secção de montante.	51
Figura 4.8 – Resultados para a secção distanciada 10m de montante.	51
Figura 4.9 – Resultados para a secção de jusante.....	52
Figura 4.10 – Estrutura experimental (Bourdarias e Gerbi, 2007).	53

Figura 4.11 – Hidrograma de montante (a) e jusante (b) (Bourdarias e Gerbi, 2007).....	54
Figura 4.12 – Comparação com os resultados do teste de Bourdarias e Wiggert na secção distanciada 3.5m de montante (Bourdarias e Gerbi, 2007).	55
Figura 4.13a - Comparação com os resultados do teste de Kerger <i>et al.</i> (2011): secção i e ii. 55	
Figura 4.14 – Alturas de água a variarem no tempo e espaço para o teste de Wiggert.	56
Figura 4.15 – Caudais a variarem no tempo e espaço para o teste de Wiggert.	57
Figura 4.16 – Influência da largura da secção de Preissman nos resultados para valores desde 10^{-2} a 10^{-4} m.....	57
Figura 4.17 – Influência da largura da secção de Preissman nos resultados para valores na ordem dos 10^{-3} m.....	58
Figura 4.18 – Esquema da estrutura laboratorial (Vasconcelos <i>et al.</i> , 2006).....	60
Figura 4.19 – Resultado do modelo Mod1 sem condições de fronteira de reservatório.....	61
Figura 4.20 – Gráficos de pressão (a) e velocidade (b) na secção a 9.9m da extremidade de montante e considerando condições de fronteira reservatório com o modelo Mod1.	61
Figura 4.21 - Alturas de água a variarem no tempo e espaço para o teste de Vasconcelos com o modelo Mod1.....	62
Figura 4.22 - Caudais a variarem no tempo e espaço para o teste de Vasconcelos com o modelo Mod1.....	62
Figura 4.23 – Influência da largura da secção de Preissman nos resultados para valores desde 4×10^{-3} a 4×10^{-5} m com o modelo Mod1.....	63

SÍMBOLOGIA

a	Celeridade de propagação da onda elástica;
a_f	Velocidade Newtoniana de propagação do som no fluido;
a_t	Velocidade de propagação de Young-Weber;
A	Área de secção transversal do fluido;
$A_{conduta}$	Área de secção transversal da conduta;
A_D	Área de secção do reservatório;
A_{D1}	Área de secção do reservatório de montante;
A_{D2}	Área de secção do reservatório de jusante;
B	Largura do canal em superfície livre
B_{fenda}	Largura da fenda de Preissmann;
c	Velocidade de propagação da onda de superfície;
C	Constante;
C^*	Compressibilidade do fluido;
D	Diâmetro interior;
D^*	Distensibilidade da conduta ou canal;
f	Factor de Darcy-Weisbach;
$f(x,t)$	Função de domínio (x,t);
f_p	Força de pressão por unidade de comprimento;
F_{p1}	Componente 1 da força de pressão;
F_{p2}	Componente 2 da força de pressão;
g	Aceleração da gravidade;
h	Altura da lâmina líquida;
h_0	Altura inicial do escoamento;
h_c	Pressão hidrostática da água no CG da sua secção transversal;
h_G	Profundidade do centro geométrico da secção;
h_s	Altura de pressão;
h_u	Altura uniforme;
H	Altura da conduta de secção rectangular;
k	Rugosidade absoluta = $1/n$;
L	Comprimento da conduta;
M	Coefficiente de matriz;

N	Número de troços;
n	Valor da rugosidade de Manning;
p	Pressão;
Q	Caudal;
Q_0	Caudal inicial;
Q_{in}	Caudal de entrada;
Q_{out}	Caudal de saída;
R_H	Raio hidráulico;
S	Coluna de vector que contém os termos conhecidos das equações;
S_f	Termo de atrito;
S_o	Inclinação do fundo;
t	Tempo;
t_0	Tempo inicial;
V	Velocidade;
x	Espaço; Coluna de vector com as incógnitas das equações;
Y	Cota piezométrica;
Z	Cota de fundo do canal/conduto;
α	Ângulo que o fundo do canal faz com a horizontal;
β	Ângulo usado para a definição da geometria da secção transversal;
ΔA	Variação da Área;
Δt	Intervalo de tempo;
Δx	Intervalo de espaço;
θ	Coefficiente de ponderação das derivadas no tempo;
ρ	Massa específica ou massa volúmica;
τ_w	Tensões tangenciais;
Ψ	Coefficiente de ponderação das derivadas no espaço.

ABREVIATURAS

1D	Unidimensional
CF	Condição de Fronteira;
CFM1	Condição de Fronteira de Montante 1;
CFM2	Condição de Fronteira de Montante 2;
CFMp1	Condição de Fronteira de Montante 1 com pressão;
CFMp2	Condição de Fronteira de Montante 2 com pressão;
CG	Centro de Geométrico;
EC	Equação da Continuidade / Conservação da Massa;
ED	Equação da Dinâmica / Conservação da Quantidade de Movimento;
EDOs	Equações Diferenciais Ordinárias;
EDPs	Equações Diferenciais Parciais;
FCT	Fundação para a Ciência e Tecnologia;
IPCC	<i>Intergovernmental Panel on Climate Change;</i>
MDF	Método das Diferenças Finitas;
MOC	Método das Características;
Mod1	Modelo Preissmann + (Y,Q);
Mod2	Modelo Preissmann + (A,Q);
Mod3	Modelo TPA + (A,Q);
Mod4	Modelo com Método das Características
MEF	Método dos Elementos Finitos;
Q1D	<i>Quasi-One-Dimensional;</i>
SCL	<i>Song, Cardle and Leung model;</i>
SIPSON	<i>Simulation of Interaction between Pipe flow and Overland flow in Networks</i>
TPA	<i>Two-Componente Pressure Approach;</i>
TVD	<i>Total Variation Diminishing;</i>
UE	União Europeia.

1. INTRODUÇÃO

1.1. Contexto

Um crescimento exponencial e desordenado dos meios urbanos, iniciado após a revolução industrial, tem provocado inúmeros problemas ao controlo de cheias. O aumento de zonas impermeáveis e da construção em zonas de leito de cheias tem provocado impactos negativos na qualidade de vida da população.

A substituição de zonas vegetais por elementos impermeabilizantes, a ocupação de zonas ribeirinhas (normalmente consideradas zonas de cheia) e o fraco investimento em soluções compatíveis com as necessidades de escoamento, aumentam o volume de água superficial não infiltrada. Assim sendo, a drenagem pluvial urbana é uma das situações que requerem especial atenção por parte da Engenharia na maioria desses centros urbanos, reconhecendo-se que quando o caudal a escoar é superior à capacidade de transporte dos colectores originando frequentemente problemas de cheias e inundações.

As cheias em zonas urbanas têm sido ultimamente alvo de grandes preocupações, sendo uma das prioridades da UE (2007/60; Vasconcelos *et al.*, 2006) já que, segundo o IPCC (2007), se assistirá a uma maior frequência desses fenómenos como consequência das alterações climáticas. O risco que estas catástrofes provocam, leva a que várias entidades procurarem *softwares* específicos capazes de modelar os escoamentos nos colectores pluviais e à superfície.

Para fazer frente aos problemas de drenagem que hoje existem, há uma grande aposta na modelação. O projecto *Dual Drainage*, financiado pela FCT (PTDC/ECM/105446/2008) é exemplo de como a importância do estudo em simultâneo do escoamento em redes de condutas e do escoamento à superfície usando modelos Duais (escoamento superficial/colectores) e a respectiva interacção está bem patente nos dias de hoje. Este tipo de modelos tem como principal objectivo o auxílio na manutenção ou operação dos colectores de drenagem urbana de forma a antecipar problemas e mitigar possíveis acidentes. Segundo Marques e Sousa (2008) a simulação do comportamento hidráulico por intermédio de modelos computacionais de um sistema sob pressão designa o processo de imitar o comportamento

desse sistema recorrendo a um outro, regra geral, mais simples, ou a um conjunto de equações matemáticas.

Com alguma frequência ocorrem em galerias de barragens, adutoras de abastecimento de água ou em sistemas de drenagem urbana, escoamentos mistos, caracterizados pela ocorrência simultânea e alternada de regimes em superfície livre e sob pressão. No caso dos colectores pluviais, quando a chuvada excede a de projecto e a capacidade dos órgãos de entrada é superior à de transporte do colector, o sistema pode funcionar em pressão. Esta entrada em pressão pode também ocorrer como resultado de uma variação brusca das condições de fronteira do sistema de colectores (submersão da secção de saída, entupimentos ou redução de capacidade de transporte em secções intermédias do colector, falha numa estação de bombagem intermédia). O processo de transição do escoamento com superfície livre para o escoamento sob pressão pode originar importantes sobrepressões, colocando em risco a integridade do sistema ou causar outro tipo de problemas como levantamento de grelhas ou tampas de caixas de visita e abatimentos de pavimentos (“*basement flooding*”). Um outro resultado possível do enchimento rápido dos colectores são os *geysers* originados pela pressurização e expulsão de ar contido nos mesmos.

Até aos dias de hoje a modelação dos escoamentos mistos tem sido vastamente estudada pela comunidade científica (Wylie e Streeter (1978), Cunge *et al.* (1980), Chaudhry (1987), Dong (1990), Wylie e Streeter (1993) ou Toro (2001)). Os modelos mistos ou de transição de escoamento podem ser subdivididos em duas categorias (Vasconcelos *et al.*, 2006): modelos de isolamento da frente de onda (“*shock-fitting methods*”) e modelos de captura da frente de onda (“*shock-capturing methods*”). Os primeiros consistem em isolar a descontinuidade e tratá-la como uma condição de fronteira (condição de contorno interna), utilizando as equações de Rankine-Hugoniot para relacionar a solução em ambos os lados da fronteira (Song *et al.*, 1983). Para poder aplicar estes métodos é necessário determinar a priori a localização da descontinuidade. Já os modelos de captura da frente de onda utilizam apenas um tipo de equações, as quais são capazes de localizar, simular e propagar as soluções descontínuas sem necessidade de qualquer técnica especial, isto é, a frente de onda ou descontinuidade faz parte da solução (Capart *et al.*, 1997).

Cunge e Wegner (1964) foram os pioneiros nesta ideia da modelação numérica aplicada à hidráulica urbana, utilizando as equações de Saint Venant para a resolução simultânea do escoamento em superfície livre com o escoamento sob pressão, utilizando uma fenda hipotética no topo da conduta (modelo de captura da frente de onda). Esta fenda, idealizada por Preissmann (1961), permite ficticiamente que a lâmina líquida esteja sempre em contacto com a atmosfera sendo por isso válidas as equações de Saint-Venant (1871). Este modelo foi

criado para a simulação do escoamento após a abertura rápida das turbinas da central hidroeléctrica de Wettingen (Suíça).

Wiggert (1972) utilizou o Método das Características para simular o escoamento em superfície livre e o modelo da coluna rígida para simular o escoamento sobpressão.

Song, Cardlee e Leung (1983) criaram o modelo SCL (Song, Cardlee e Leung). Este modelo utiliza o Método das Características para a resolução do escoamento com superfície livre e do escoamento sob pressão, tratando-os de forma separada (modelo de isolamento da frente de onda), sendo a sua união dada pela posição da onda de choque. Desta forma Song conseguiu monitorizar em cada passo computacional a velocidade, a intensidade e a posição da onda de choque.

Hamam e McCorquodale (1982) propuseram uma abordagem da coluna rígida para modelar os transientes de pressão de fluxo misto, pressupondo a existência de processos de compressão e expansão utilizando uma bolha hipotética estacionária.

Vasconcelos *et al.* (2006) idealizaram o modelo TPA - *Two Component Pressure Approach*, como sendo um método de modelação mais simples e capaz de resolver os problemas relacionados com o escoamento misto em condutas de abastecimento de água. Este método surge como alternativa aos métodos baseados na fenda de Preissmann, assumindo que as paredes da conduta têm um comportamento elástico, estando a deformação das mesmas directamente relacionada com a sob-pressurização ou sub-pressurização da conduta.

Kerger *et al.* (2011) basearam-se no método de Godunov (1959) conjugado com o solver de Riemann para simular escoamentos mistos, com o propósito de eliminar oscilações na transição do colector para a secção de Preissmann.

1.2. Objectivos

Os objectivos específicos desta Tese são:

1. Criação de dois modelos computacionais de escoamentos mistos 1D baseados no MDF de Preissmann e que fazem uso da fenda de Preissmann para a simulação das pressões, validando-os com base em resultados publicados noutros artigos. A diferença entre os modelos encontra-se nas variáveis a discretizar.

2. Criação e validação de um modelo baseado no conceito do TPA de Vasconcelos, também com o intuito de simular escoamentos mistos 1D, utilizando também o MDF de Preissmann.
3. Criação e validação de um modelo que utiliza o Método das Características para resolver as EDPs de Saint-Venant e a inclusão da fenda de Preissman para simular a pressão nos escoamentos mistos 1D;
4. Comparação dos resultados obtidos através dos modelos anteriores.

A um nível mais abrangente e de médio prazo, a presente dissertação pretende constituir uma contribuição para o projecto *Dual Drainage*, financiado pela FCT, inserindo-se especificamente na 3ª tarefa: “Mixed Flows Numerical Model” e, igualmente, ser a “semente” de um processo de investigação de Doutoramento.

1.3. Organização

Esta tese está organizada em seis capítulos:

Capítulo 1: Primeira abordagem aos métodos numéricos, contexto da tese e objectivos a serem alcançados;

Capítulo 2: Os tipos de escoamentos hidráulicos e as bases necessárias para a modelação destes: equações básicas, métodos de resolução de equações e esquemas de resolução de escoamentos mistos;

Capítulo 3: A metodologia aplicada na criação dos modelos numéricos propostos: discretização das equações e aplicação computacional;

Capítulo 4: Apresentação dos resultados dos modelos numéricos quando submetidos a testes práticos da engenharia hidráulica;

Capítulo 5: Discussão dos resultados obtidos e demonstração da capacidade de cada um dos modelos na resolução dos testes propostos;

Capítulo 6: Conclusões do trabalho realizado nesta tese.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Classificação dos tipos de escoamento

Os escoamentos hidráulicos apresentam na sua completa simulação quatro dimensões, das quais três são espaciais e uma é temporal. No uso comum é normal que se recorram a algumas simplificações não só para diminuir a complexidade das soluções mas também porque a influência de certas dimensões pode ser desprezável para os problemas em questão.

Segundo a variação temporal, os escoamentos podem subdividir-se em: permanentes (ou estacionários), quando é admissível considerar como constantes, ao longo do tempo, as condições de pressão e velocidade em todo o domínio espacial (poderão variar de ponto para ponto, mas mantêm-se constante ao longo do tempo: $\partial p/\partial t=0$ e $\partial V/\partial t=0$); variáveis, quando as grandezas intervenientes (pressão e velocidade) são função do tempo (Quintela, 2007).

Em relação à variação espacial, um escoamento pode ser considerado uniforme quando o vector velocidade tem características iguais em módulo, direcção e sentido ao longo de toda a extensão da conduta, ou seja, $\partial V/\partial x=0$ ou variado numa situação contrária (Marques e Sousa, 2008; Porto, 1998).

Os escoamentos podem também ser classificados como escoamentos com superfície livre: quando o líquido estiver em contacto com um meio exterior gasoso, em geral a atmosfera, sendo válidas para estes casos as equações de Saint-Venant; e escoamentos sob pressão ou pressurizados quando não há contacto do líquido com um ambiente externo (Porto, 1998). Quando houver uma coexistência espacial e/ou alternância temporal destes dois tipos de escoamento está-se no âmbito dos escoamentos mistos.

Podem igualmente ocorrer dois modos ou regimes de escoamento: laminar e turbulento. No primeiro, as partículas do fluido seguem caminhos disciplinados e trajectórias regulares, não existindo cruzamento entre partículas vizinhas. No regime turbulento, a velocidade num determinado ponto varia constantemente em grandeza e direcção, sem existir regularidade no processo, resultando trajectórias bastante irregulares (Quintela, 2007).

2.2. Teoria unificada do escoamento variável

As equações da continuidade e da dinâmica que regem os escoamentos quase unidimensionais (Q1D), válidas tanto para escoamentos em pressão como para escoamentos com superfície livre, podem ser obtidas a partir das equações de Navier-Stokes (Abreu, 2004), integrando-as na secção transversal do escoamento, após introdução de algumas simplificações e hipóteses:

- Escoamento "interior" limitado total ou parcialmente por superfícies sólidas;
- Escoamento considerado uniaxial na direcção do eixo do tubo de fluxo (conduta ou canal), ou seja, o campo de velocidades varia predominantemente numa direcção;
- Distribuição de pressões na secção transversal admite-se hidrostática (ou uniforme) e a distribuição das velocidades em cada secção é considerada uniforme e caracterizada, em cada instante, pelo respectivo valor médio.
- Líquido pouco compressível e em condições isotérmicas;
- O fluido e a conduta/canal (meio sólido) não interaccionam entre si, não se considerando possíveis movimentações do eixo da conduta/canal;
- O meio fluido considera-se homogéneo e de densidade uniforme em qualquer secção;
- Não existe escoamento através da superfície sólida, o mesmo é dizer que não ocorrem trocas de caudal com o exterior.

A aplicação destas hipóteses simplificativas permite, como se referiu por integração das equações de Navier-Stokes, obter as seguintes equações básicas da continuidade ou conservação da massa (EC) e da dinâmica ou da conservação da quantidade de movimento (ED) (Q1D) sob a forma conservativa,

$$\text{EC:} \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho VA) = 0 \quad (1)$$

$$\text{ED:} \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho AV) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho AV^2) = -A \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g A \left(\sin \alpha + \frac{\tau_w}{\rho g R_H} \right) \quad (2)$$

Em alternativa, estas equações podem escrever-se sob a forma matricial:

$$\text{EC+ED:} \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho A \\ \rho AV \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho VA \\ \rho AV^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -A \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g A \left(\sin \alpha + \frac{\tau_w}{\rho g R_H} \right) \end{bmatrix} \quad (3)$$

As equações (1) e (2) são a base da teoria unificada para a análise de escoamento variáveis, que englobam os escoamentos em pressão e os escoamentos com superfície livre. Desenvolvendo a equação da continuidade (1), tendo em consideração a definição de derivada total em coordenadas eulerianas e após reordenação obtém-se a forma não conservativa da lei de conservação da massa:

$$\text{EC:} \quad \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{1}{A} \frac{DA}{Dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

que ilustra de forma inequívoca que para existir variação espacial de velocidade numa conduta ou canal de secção constante terá de ser considerada a compressibilidade do fluido (variação de ρ) e/ou a capacidade de armazenamento (variação de A).

Para prosseguir a análise terá que se relacionar as variáveis ρ e A com as duas variáveis fundamentais do problema p e V . Tal é conseguido à custa de duas equações adicionais: as equações constitutivas do fluido e do canal (Almeida e Koelle, 1992; Lighthill, 1978):

$$C^* = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (5)$$

$$D^* = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial p} \right)_x \quad (6)$$

em que C^* caracteriza a compressibilidade da água ou do fluido em escoamento e D^* caracteriza a distensibilidade transversal da conduta ou canal.

A partir de (5) e da combinação do conceito de derivada total ou substancial com (6), ou seja

$$\frac{1}{A} \frac{DA}{Dt} = D^* \frac{Dp}{Dt} + \frac{V}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_p \quad (7)$$

conclui-se que as duas primeiras parcelas da equação da continuidade (4) se podem escrever em função da pressão como:

$$\text{EC:} \quad \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{1}{A} \frac{DA}{Dt} = (C^* + D^*) \frac{Dp}{Dt} + \frac{V}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_p \quad (8)$$

Após a aplicação da equação anterior em (4) obtém-se uma nova forma da equação da continuidade:

$$\text{EC:} \quad \frac{\partial V}{\partial x} + (C^* + D^*) \left(\frac{\partial p}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{V}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_p = 0 \quad (9)$$

Quanto à equação da dinâmica (2) pode ser desenvolvida e simplificada utilizando a equação da continuidade (4), resultando:

$$\text{ED:} \quad \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -g \sin \alpha - \frac{\tau_w}{\rho R_H} \quad (10)$$

que constitui uma forma não conservativa da equação da dinâmica que, em conjunto com (9) e com as relações (5) e (6), constituem as equações unificadas do escoamento transitório Q1D numa conduta em pressão ou num canal com superfície livre.

2.2.1. Equações dos escoamentos sob pressão

As equações que regem os regimes variáveis em pressão (golpe de aríete) são equações diferenciais às derivadas parciais, não apresentando soluções analíticas excepto em casos particulares muito simples, sendo necessária a aplicação de métodos numéricos para se proceder à sua resolução.

A celeridade conjunta ou celeridade de propagação da onda elástica, a (Korteweg, 1878), que provem da combinação da velocidade Newtoniana (a_f) de propagação do som no fluido e a velocidade de propagação de Young-Weber (a_t), inclui na sua equação os efeitos de compressibilidade do fluido e de distensibilidade da conduta e é usada para o estudo do golpe de aríete:

$$a^2 = \frac{1}{\rho(C^* + D^*)} \quad (11)$$

Utilizando a equação (11) na equação da continuidade (9), obtém-se:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\rho V a^2}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_p = 0 \quad (12)$$

As hipóteses simplificativas que permitem a obtenção das clássicas equações do modelo simplificado do golpe de aríete são as seguintes:

- Secção transversal constante ao longo da conduta e portanto $\left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_p = 0$ (condutas prismáticas);
- As tensões tangenciais em regime transitório são aproximadas ao valor correspondente ao regime permanente utilizando a expressão de Darcy-Weisbach: $\tau_w = \rho \frac{f}{8} V|V|$;
- O valor da velocidade V é bastante inferior ao da celeridade a , podendo ser desprezados os termos convectivos;
- Supõe-se comportamento elástico linear do fluido e da conduta e desprezam-se as variações de a_f e a_t , o que equivale a considerar a celeridade, a , constante.

Aplicando estas premissas às equações (12) e (10) obtém-se directamente o sistema de equações que caracteriza o modelo simplificado do golpe de aríete, a saber:

$$\text{EC:} \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

$$\text{ED:} \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \alpha + \frac{f}{2D} V|V| \quad (14)$$

Como é mais habitual o uso destas equações em ordem a Y (cota piezométrica) e Q (caudal), deve-se usar as relações $p = \rho g(Y - Z)$ e $Q = VA$ para a obtenção das equações clássicas em pressão no interior de uma conduta simples, uniforme e 1D, resultando as equações:

$$\text{EC:} \quad \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

$$\text{ED:} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{fQ|Q|}{2DA} = 0 \quad (16)$$

em que, Y é a cota piezométrica relativa a um dado plano de referência, Q , o caudal escoado, A , a área de secção transversal, f , o factor de Darcy-Weisbach, D , o diâmetro interior da conduta, a , a celeridade e g , a aceleração da gravidade.

2.2.2. Equações dos escoamentos com superfície livre (equações de Saint-Venant)

As equações mais utilizadas para a simulação de um escoamento em superfície livre são as equações de Saint-Venant (1871), concebidas pelo matemático Francês com o mesmo nome na segunda metade do séc. XIX. Estas formam um sistema acoplado não-linear de equações diferenciais quasi-lineares de primeira ordem às derivadas parciais (EDPs), de tipo hiperbólico, que não podem, na maioria das situações práticas, ser resolvidas analiticamente. Estas equações são compostas por duas variáveis dependentes, altura da lâmina líquida (h) e velocidade (V) ou área (A) e caudal (Q) e duas variáveis independentes, distância longitudinal (x) e tempo (t). A utilização destas variáveis vai depender das características que se pretende atribuir ao modelo a utilizar (Almeida e Koelle, 1992; Cunge *et al.*, 1980) e a eliminação de alguns termos destas equações poderá permitir a redução do tempo de cálculo e o aumento da estabilidade do modelo. No caso de se recorrer à utilização das variáveis Q e A , as equações de Saint-Venant são escritas numa forma conservativa, resultando numa melhor conservação da massa e da quantidade de movimento, por comparação com as equações escritas sob a forma não-conservativa (Chaudhry, 1987). A simulação dos escoamentos com as equações de Saint-Venant apresenta muitas vezes dificuldades devido à sua forma não-linear e à presença dos termos convectivos. Em muitos problemas, os termos convectivos são uma fonte de dificuldades computacionais e oscilações não-físicas, podendo ser resolvidas com a redução da sua influência (Djordjević *et al.*, 2004).

A dedução das equações de Saint-Venant pode ser feita a partir das equações (9) e (10) (modelo unificado Q1D) sujeitando-as às seguintes simplificações:

- O fluido, dada a existência da superfície livre, é considerado como incompressível ($C^* = 0$);
- As paredes e o fundo do canal são rígidas e não móveis, não existindo por isso efeitos de sedimentação e/ou erosão;

- A inclinação do canal é pequena de forma a poder-se considerar $\cos\alpha \approx 1$ e $\sin\alpha \approx \text{tg}\alpha \approx \alpha = S_0$.

Apesar das paredes e o fundo do canal serem rígidas, parte do contorno do líquido está em contacto com a atmosfera, podendo assumir qualquer forma e por isso D^* não pode ser desprezado. Como estas variações ocorrem apenas na superfície livre pode-se escrever:

$$dA = B dh \quad (17)$$

em que A é a área de secção transversal do canal, B a largura superficial e h a profundidade (medida perpendicularmente ao fundo do canal) como se pode observar na Figura 2.1.

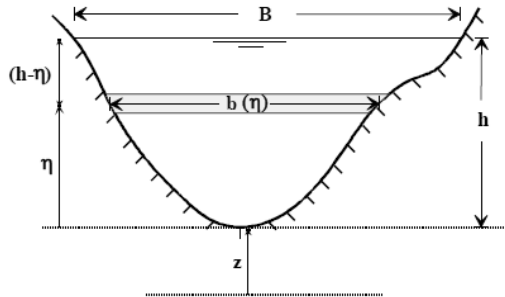


Figura 2.1 – Esquema ilustrativo da definição das variáveis utilizadas.

Em virtude da hipótese de distribuição hidrostática de pressões, ao longo da secção transversal verifica-se a seguinte relação:

$$dp = \rho g dh \quad (18)$$

Assim sendo, da equação da distensibilidade (6) combinada com (17) e (18) resulta:

$$D^* = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial p} = \frac{1}{A} \frac{1}{\rho g} \frac{\partial A}{\partial h} = \frac{B}{\rho g A} \quad (19)$$

Substituindo (18) e (19) e considerando todas as simplificações até agora equacionadas na equação da continuidade (9), obtém-se:

$$\text{EC:} \quad \frac{\partial h}{\partial t} + V \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{A}{B} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{V}{B} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_h = 0 \quad (20)$$

Em relação à equação da dinâmica (10), assumindo a distribuição hidrostática das pressões (18) e a pequena inclinação do canal, obtém-se:

$$\text{ED:} \quad \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - gS_o + g \frac{\tau_w}{\rho R_H} = 0 \quad (21)$$

Estas duas últimas equações representam as equações de Saint-Venant numa das suas formas de reger o escoamento Q1D em canais de secção arbitrária. Tal como ocorreu no caso dos escoamentos sob pressão, este não será o único conjunto de variáveis, nem o mais indicado para algumas situações, sendo por isso necessário saber como obter as referidas equações considerando um diferente par de variáveis.

No caso de se trabalhar com escoamentos variados, consequência de rápidas variações das variáveis dependentes das equações (ressaltos hidráulicos, frentes de onda), é necessário escrever as equações numa forma conservativa. A partir da forma não conservativa (20)-(21) e utilizando as relações:

$$A = \int_0^h b(x, \eta) d\eta$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \int_0^h \frac{\partial}{\partial t} b(x - \eta) d\eta + B \frac{\partial h}{\partial t} = B \frac{\partial h}{\partial t} \quad (22)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} b(x - \eta) d\eta + B \frac{\partial h}{\partial x} = \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_h + B \frac{\partial h}{\partial x}$$

pode obter-se:

$$\text{EC:} \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (VA) = 0 \quad (23)$$

$$\text{ED:} \quad \frac{\partial}{\partial t} (VA) + \frac{\partial}{\partial x} (AV^2) + gA \frac{\partial h}{\partial x} - gA(S_o - Sf) = 0 \quad (24)$$

em que,

$$\frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{- variação temporal da área da secção transversal;}$$

- $\frac{\partial(VA)}{\partial x}$ - variação espacial do caudal no volume de controle;
- $\frac{\partial(VA)}{\partial t}$ - inércia local que reflecte a variação da quantidade de movimento devido à variação temporal do caudal;
- $\frac{\partial}{\partial x}(AV^2)$ - inércia convectiva que descreve a variação da quantidade de movimento devida à variação do caudal e/ou velocidade de escoamento ao longo do canal;
- $g.A.\frac{\partial h}{\partial x}$ - resultante das pressões hidrostáticas actuantes na fronteira do volume de controlo, proporcional ao gradiente de altura de lâmina líquida ao longo do canal;
- $g.A.S_0$ - acção da gravidade, proporcional ao declive de fundo do canal;
- $g.A.S_f$ - acção do atrito no fundo e nas margens do canal.

É possível obter-se também uma forma conservativa “forte” das equações de Saint-Venant, expressando a força de pressão por unidade de comprimento em função dos parâmetros do escoamento, $f_p = -\rho g A \frac{\partial h}{\partial x}$.

A resultante da força de pressão tem duas componentes. A primeira (F_{p1}) resulta da diferença das forças que actuam na secção de montante e de jusante do volume de controlo e é dada por (25). A segunda (F_{p2}) é consequência das variações da largura do canal com a distância, o que acontece no caso de canais não prismáticos e é dada por (26).

$$F_{p1} = -\rho g \frac{\partial I_1}{\partial x} \quad \text{com} \quad I_1 = h_G A \quad (25)$$

$$F_{p2} = -\rho g I_2 \quad \text{com} \quad I_2 = \int_0^{h(x)} [h(x) - \eta] \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)_h d\eta \quad (26)$$

Assim sendo, a força de pressão por unidade de comprimento fica:

$$f_p = -\rho g A \frac{\partial h}{\partial x} = -A \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g \frac{\partial I_1}{\partial x} + \rho g I_2 \quad (27)$$

Finalmente, as equações de Saint-Venant, em forma conservativa “forte” com variáveis (A, V) são dadas por:

$$\text{EC:} \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(AV) = 0 \quad (28)$$

$$\text{ED:} \quad \frac{\partial}{\partial t}(AV) + \frac{\partial}{\partial x}(AV^2) + g \frac{\partial}{\partial x} I_1 = gA(S_o - S_f) + gI_2 \quad (29)$$

A equação geral da velocidade de propagação da onda de superfície é dada pela conjugação das equações (11) e (19), resultando:

$$c^2 = \frac{gA}{B} \quad (30)$$

2.3. Métodos de resolução das equações

Antes do advento do computador digital o cálculo da propagação de cheias era feito manualmente através de métodos algébricos ou por métodos gráficos. Nesta conformidade, justifica-se o aparecimento de várias aproximações, tendo em conta a importância relativa dos diferentes termos das equações de Saint-Venant (modelo da onda cinemática, modelo difusivo, ...). Com o aparecimento e divulgação dos computadores, a metodologia de análise dos escoamentos variáveis passou a basear-se na integração numérica das equações completas de Saint-Venant e resolução das mesmas em conjunto com as equações das condições de fronteira próprias de cada caso. Os esquemas de integração mais utilizados são: Método das Características (MOC), Método das Diferenças Finitas (MDF) e Método dos Elementos Finitos (MEF).

O Método das Características permite utilizar a estratégia de transformar analiticamente as equações diferenciais parciais (EDPs) em equações diferenciais ordinárias (EDOs), após o que estas últimas são resolvidas numericamente. O problema deste método prende-se com a dificuldade de lidar com descontinuidades (Cunge *et al.*, 1980). São vários os *softwares* comerciais a utilizar este método, como é o caso do WHAMO[®] (2009).

O Método das Diferenças Finitas resolve as equações diferenciais parciais por meio de aproximações das derivadas por diferenças divididas (obtidas recorrendo, por exemplo, ao desenvolvimento de uma função em série de Taylor), originando, dependendo do modo como as aproximações são consideradas, dois tipos diferentes de esquemas de diferenças finitas: esquemas explícitos e esquemas implícitos. Um dos melhores *softwares* da especialidade utiliza este método, o HEC-RAS[®] (USACE, 2002).

O Método dos Elementos Finitos é pouco utilizado no cálculo de transitórios hidráulicos e por isso não vai ser alvo de discussão nesta tese.

2.3.1. Método das Características

O Método das Características (MOC) é um método bastante utilizado para a simulação de escoamentos mistos por apresentar uma elevada exactidão na solução, sendo, no entanto, muito mais eficaz na resolução de escoamentos transitórios sob pressão (Abreu, 2004), particularmente em redes de distribuição de água (Araújo, 2010), devido à hipótese aí efectuada de desprezar os termos convectivos. Contudo, este método apresenta grande tempo de cálculo e um elevado uso de memória para simulações de grande complexidade e com características físicas muito heterogéneas (Amado e Marques, 2004). No MOC as equações diferenciais parciais são transformadas num sistema de quatro equações diferenciais ordinárias equivalentes (Wylie e Streeter, 1993), as quais serão posteriormente aproximadas por diferenças finitas com vista à respectiva integração.

No MOC, cada fronteira e cada secção da conduta podem, mediante o estabelecimento de uma estratégia adequada, ser analisadas separadamente durante cada passo de tempo, mesmo em sistemas complexos, sendo por isso bastante apropriado para modelar grandes sistemas com condições de fronteira complexas. É ainda comumente utilizado em associação com o MDF para o estabelecimento de determinadas condições de contorno (Ramos, 1995). As desvantagens prendem-se com a existência de erros numéricos introduzidos pelos esquemas de interpolação utilizados na resolução dos termos convectivos, como ocorre nos casos de escoamentos com superfície livre, e com o facto da estabilidade deste método explícito estar directamente relacionada com o tamanho do passo de tempo utilizado, limitado pela condição Courant–Friedrichs–Lewy (Chaudhry, 1987).

Recentemente, Mohammadian *et al.* (2007) apresentaram uma extensão conservativa do MOC que permitiu a simulação de fluxos 1D, usando um esquema não-oscilatórios uniforme e uma função de interpolação conservadora.

A aplicação do método das características às equações de escoamentos com superfície livre faz-se a partir da combinação linear das equações da continuidade e da dinâmica por intermédio de um multiplicador desconhecido λ , como será explicado no capítulo 3.3 desta tese.

2.3.2. Método das Diferenças Finitas

O Método das Diferenças Finitas (MDF) é amplamente utilizado na área da mecânica dos fluidos por ser capaz de resolver sistemas de equações altamente não-lineares. Basicamente, este método consiste em substituir as derivadas que aparecem nas equações diferenciais por aproximações adequadas em forma de diferenças finitas, obtidas com base, por exemplo, na aproximação de uma função através de séries de Taylor.

Utilizando o MDF existe um grande número de métodos numéricos capazes de simular escoamentos mistos com choque. Os esquemas de Preissmann (1961), MacCormack (1969), e Gaubutti são exemplos de alguns deles e foram estudados e comparados por Fennema e Chaudhry (1987). Muitos autores se seguiram na utilização do esquema original de MacCormack (Franco, 1988; Leandro, 2007), existindo posteriormente algumas adaptações como é o caso do MacCormack/TVD (Franco, 1996; Garcia-Navarro *et al.*, 1992; Tseng e Chu, 2000) que Ferreira (2005) mostrou padecer de alguns problemas de discontinuidades quando sujeito a escoamentos mistos.

Dependendo da natureza da diferença finita a ser usada, a solução do problema pode ser encontrada por via de dois esquemas. Se a aproximação por diferença finita da derivada espacial for constituída por variáveis conhecidas no nível de tempo, as equações podem ser resolvidas directamente para cada nó, em cada tempo, recorrendo a um esquema explícito. Se, por outro lado, utilizar as variáveis (incógnitas) no nível de tempo de cálculo, as equações terão de ser resolvidas simultaneamente por um esquema implícito.

Os esquemas ou métodos de resolução explícitos necessitam apenas da linha de tempo anterior para a resolução de uma linha de tempo futuro, ou seja, as incógnitas do tempo $t+\Delta t$, serão resolvidas única e exclusivamente com valores associados ao tempo t . Por sua vez, os métodos implícitos utilizam informações do tempo anterior e do tempo de cálculo para o cálculo aproximado das derivadas, sendo assim, necessário proceder à resolução de um sistema de equações simultâneas no sentido de poder reunir toda a informação para a determinação das incógnitas no instante de tempo de cálculo (Figura 2.2). Por isso, a programação destes esquemas torna-se às vezes muito mais simples (Marwell, 2009).

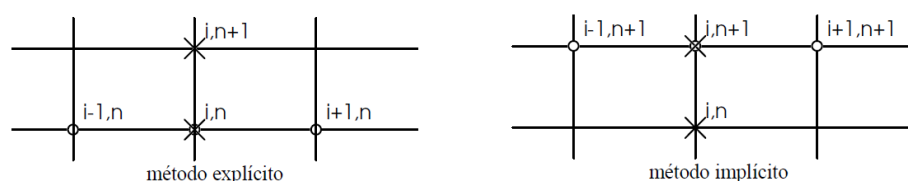


Figura 2.2 - Esquema de cálculo dos métodos explícitos e implícitos (Silva e Buiochi, 2011).

Os métodos explícitos requerem intervalos de tempo bastante reduzidos, na ordem dos segundos ou milésimos de segundo para que se consiga evitar problemas de instabilidade numérica que ocorrem quando um erro é propagado ao longo do tempo, conduzindo a resultados absurdos. Conduzem por esta via, em geral, a esquemas computacionalmente mais demorados. A estabilidade pode ser conseguida se os erros produzidos no tempo t_0 não forem ampliados com as sucessivas aplicações das equações diferenciais e os erros subsequentes no tempo t não tomarem proporções que ponham em causa a solução da equação (Chaudhry, 1987). Segundo a técnica apresentada por Courant (1967), pode-se afirmar que os modelos são estáveis se cumprirem a condição: $\Delta t \leq \Delta x / (|V| \pm c)$.

Os métodos implícitos são muito mais consistentes, conseguindo trabalhar com intervalos de tempo de cálculo muito superiores em relação aos anteriores por não estarem restringidos por nenhum critério de estabilidade. Recentemente, algumas investigações mostraram que, para valores de Δt muito precisos, a condição de Courant deve também ser utilizada (Chaudhry, 1987). A memória computacional despendida pelos métodos implícitos é superior ao dos métodos explícitos e a sua programação mais difícil (Leandro, 2008). Devido ao progresso tecnológico na resolução de sistemas de equações e o aumento da velocidade de processamento, os métodos implícitos são agora intensivamente utilizados para a simulação matemática de escoamentos.

São muitos os esquemas que utilizam os métodos de diferenças finitas implícitos, tais como, Preissmann (1961), Cunge e Wegner (1964), Richtmyer e Morton (1967), Strelkoff (1970), Mahmood e Yevjevic (1975) ou Cunge *et al.* (1980). Dentro destes modelos destaca-se o esquema de Preissmann (1961) que é extensivamente utilizado para a análise de escoamentos em superfície livre. A explicação deste método é efectuada no item seguinte e uma análise mais aprofundada do mesmo é realizada no capítulo 3.2.

2.4. Esquemas para resolução de escoamentos mistos

2.4.1. Esquema Implícito de Preissman

O esquema implícito de Preissman (1961), também conhecido por esquema dos quatro pontos ou modelo de Preissmann, é um método de diferenças finitas (MDF) implícito utilizado extensivamente para análise de regimes não-permanentes em canais abertos a partir dos anos 60 por Cunge *et al.* (1980), Garcia-Navarro *et al.* (1994), Carpat *et al.* (1997), Vasconcelos e Wright (2004), Djordjević (2004), entre outros. Recorre a quatro pontos de uma malha

(Figura 2.3) para gerar uma superfície limitada pela função $f(x,t)$ em cada um desses pontos, sendo posteriormente possível encontrar um valor representativo de f nessa região, utilizando coeficientes de ponderação θ e Ψ .

Este esquema, segundo Chaudhry (1987), apresenta as seguintes vantagens:

- A variável espacial é calculada recorrendo apenas a dois nós adjacentes;
- Ele produz uma solução exacta para a forma linearizada das equações que modela utilizando uma escolha apropriada dos valores de Δx e Δt . Esta propriedade permite a verificação do método para casos simples em que sejam conhecidas as soluções analíticas.
- Ambas as variáveis, Q e A são computacionalmente calculadas no mesmo nó;
- Efectuando a variação do coeficiente de ponderação das derivadas espaciais, podem ser simuladas frentes de onda abruptas.

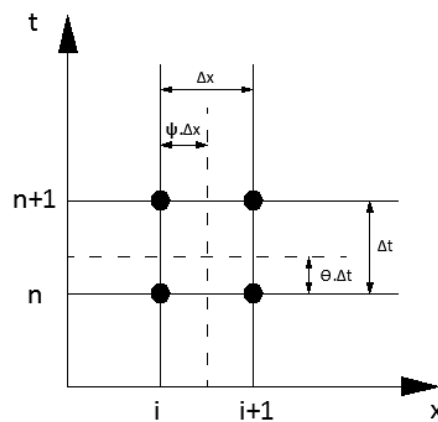


Figura 2.3 – Esquema dos quatro pontos (Neves *et al.*, 2001)

No esquema de Preissmann as derivadas parciais e outras variáveis são aproximadas da seguinte forma:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \cong \theta \frac{(f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1})}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{(f_{i+1}^n - f_i^n)}{\Delta x} \quad (31)$$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \cong \Psi \frac{(f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n)}{\Delta t} + (1 - \Psi) \frac{(f_i^{n+1} - f_i^n)}{\Delta t} \quad (32)$$

$$f(x, t) \cong \theta \frac{(f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1})}{2} + (1 - \theta) \frac{(f_{i+1}^n - f_i^n)}{2} \quad (33)$$

$$C \frac{d}{dx} f(x, t) \cong \theta \frac{C_i^{n+1} + C_{i+1}^{n+1}}{2} \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{C_i^n + C_{i+1}^n}{2} \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} \quad (34)$$

onde $\partial f(x, t)/\partial x$ representa a derivada parcial de f em relação a x , $\partial f(x, t)/\partial t$ representa a derivada parcial de f em relação a t , Δx a distância entre duas secções consecutivas (por exemplo, secções i e $i+1$) e Δt o intervalo de tempo entre os instantes n e $n+1$. Os coeficientes de ponderação tomam valores entre 0 e 1, sendo usual considerar-se $\Psi=0.5$ e $0.6 < \theta < 1.0$, no sentido de evitar as indesejadas oscilações na solução, tal como concluiu Cunge (1975).

Após a aplicação das equações anteriores, cada segmento entre duas secções vai ser definido por duas equações e cada secção vai possuir duas incógnitas: Y e Q no tempo futuro. Esta situação leva a que para a resolução de um troço de colector dividido em N segmentos, estejam disponíveis $2N$ equações para as $2(N+1)$ incógnitas, faltando assim, duas equações para se conseguir resolver o sistema: as condições de fronteira.

Este modelo, por ser implícito, não necessita de respeitar o critério estabilidade de Courant e somente sofre instabilidades quando a mudança de caudal ou de profundidade de escoamento é superior ao tempo de cálculo (Chaudhry, 1987). No caso de pequenas profundidades, estas oscilações poderão provocar o rebentamento do modelo (Leandro, 2008).

O modelo de Preissman é uma ferramenta muito importante para simulação de escoamentos com superfície livre. Quando se pretende a modelação dos regimes mistos será necessário a inclusão de uma fenda hipotética (Figura 2.4b) que permite o uso de equações que regem um só tipo de escoamento (escoamento com superfície livre) em toda a conduta e quantificar a pressão quando o regime é pressurizado. Esta fenda foi introduzida por Preissman em 1961 e é colocada no topo da conduta sendo utilizada no modelo de Cunge-Wegner (1964). A largura da fenda (B_{fenda}) é calculada em função da celeridade pela expressão (30), assumindo $c=a$, resultando a equação seguinte:

$$B_{fenda} = g \frac{A_{conduta}}{a^2} \quad (35)$$

onde $A_{conduta}$ é a área transversal da conduta em secção cheia (m^2), g , o valor da aceleração da gravidade (m/s^2) e o parâmetro a (m/s), a celeridade da onda do golpe de ariete que deverá rondar os 20 m/s (Wylie e Streeter, 1993).

Há ainda alguns autores, tais como Vasconcelos *et al.* (2006) que defendem que o valor de B_{fenda} a escolher deverá ser feito por sucessivas tentativas de modo a minimizar as oscilações numéricas da solução.

As desvantagens do modelo de Cunge-Wegner (1964) prendem-se com a incapacidade de simular subpressões, interação com bolsas de ar, escoamentos subcríticos (Meselhe e Holly, 1997) e secagem da frente de onda. Com o intuito de resolver esses problemas, existem já vários estudos e algumas soluções. A utilização de uma fenda invertida foi a solução encontrada para a simulação das subpressões (Figura 2.4c) (Kerger *et al.*, 2011). Abreu *et al.* (1991) estudaram a influência que as bolhas de ar aprisionadas nas condutas provocam no escoamento. Kutija *et al.* (2002) propuseram o esquema *NewC Sheme* como sendo uma nova perspectiva da modelação de escoamentos supercríticos e Djordjević *et al.* (2004) sugeriu a redução do termo inercial de forma a diminuir a influência do mesmo no caso de ocorrência deste tipo de escoamento. A secagem da frente de onda já foi solucionada por Fraccarollo e Toro (1995), por Dodd (1998) e por Brufau *et al.* (2002) utilizando processos distintos.

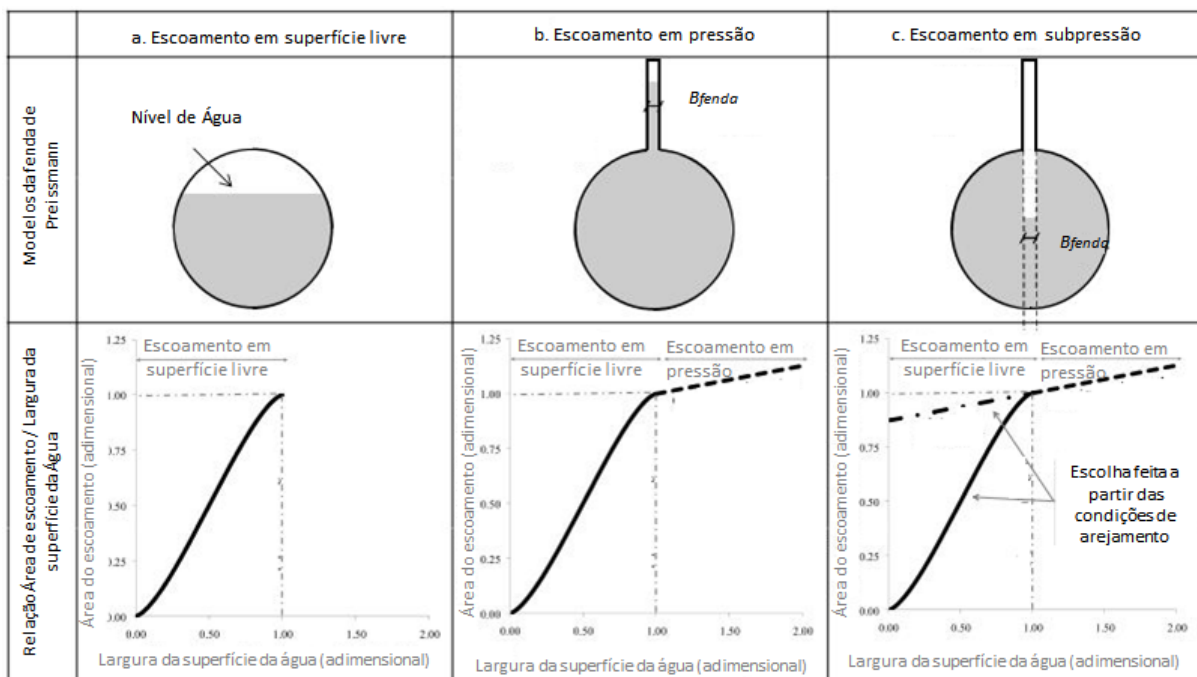


Figura 2.4 – Esquemática do modelo da fenda de Preissmann (Kerger *et al.*, 2011).

Para os processos de cálculo deste modelo são necessários os valores da área (A), do raio hidráulico (R_H) e da largura superficial (B), que numa conduta de secção circular são calculados em função de um ângulo β (Figura 2.5):

$$\beta = 2 \arccos \left(1 - \frac{2h}{D} \right) \quad (36)$$

$$A = \frac{D^2}{8} (\beta - \sin \beta) \quad (37)$$

$$R_H = \frac{D}{4} \left(1 - \frac{\sin \beta}{\beta} \right) \quad (38)$$

$$B = 2\sqrt{h(D-h)} \quad (39)$$

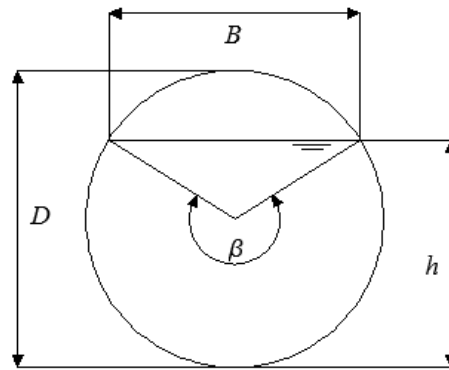


Figura 2.5 – Esquema das grandezas geométricas utilizadas para o cálculo de A , R_H e B numa secção circular.

2.4.2. Modelo TPA

O modelo TPA (*Two-Componente Pressure Approach*) foi proposto por Vasconcelos *et al.* (2006) e não apresenta algumas das limitações dos modelos de Preissmann. Este modelo considera que as paredes da conduta têm um comportamento elástico, sendo esta deformação directamente relacionada com as subpressões e as sobpressões do escoamento. Considerando a incompressibilidade da água, é possível simular com este modelo o escoamento com superfície livre e o escoamento pressurizado. São utilizadas as equações de Saint-Venant escritas na forma conservativa “forte” (28) e (29) nas quais o termo $I_1 = h_G A$ é substituído por $I_1 = (h_c + h_s) A$ e $I_2 = 0$ (hipótese de canal prismático).

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g \frac{\partial}{\partial x} A(h_c + h_s) = gA(S_0 - S_f) \quad (41)$$

onde A é a área de escoamento, Q é o caudal, h_c a distância entre o centro geométrico do escoamento na secção transversal e a superfície livre, h_s a altura do escoamento quando a conduta se encontra sob pressão, S_0 a inclinação do fundo e S_f representa o termo de atrito.

A chave deste modelo é o facto de considerar duas forças de pressão a aplicar na secção transversal do escoamento. A primeira refere-se à pressão hidrostática da água no centro de geométrico da sua secção transversal, referenciada como h_c . A segunda força só aparece quando o escoamento se encontra pressurizado, podendo ser positivo (sobpressões) ou negativo (subpressões), referenciada como h_s e calculada da seguinte forma:

$$h_s = \frac{a^2}{g} \frac{\Delta A}{A} \quad (42)$$

Assim sendo, se ΔA for positivo (expansão da conduta), h_s será positivo. Por outro lado, um valor de ΔA negativo levará a valores de h_s negativos e consequentemente à existência de pressões (relativas) negativas no escoamento.

Vasconcelos *et al.* (2006) utilizaram o conceito TPA, o Método dos Volumes Finitos e o esquema numérico não linear proposto por Roe para a construção do seu modelo. Uma das vantagens deste modelo em relação aos modelos de isolamento da frente de onda (*shock-fitting methods*) é o facto de conseguir simular ressaltos hidráulicos que não são capazes de preencher a totalidade da conduta e não requerer o uso de dois conjuntos de equações, sendo por isso mais simples (Marwell, 2009). Contudo, este modelo a par do modelo de Cunge-Wegner (1964) é incapaz de lidar com frentes secas no escoamento (*Wet/Dry fronts*) e a interacção de ar/água nas condutas.

A Figura 2.6 representa a relação existente entre o modelo TPA e o modelo da Fenda de Preissmann.

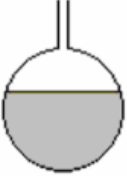
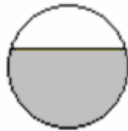
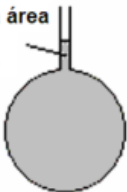
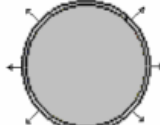
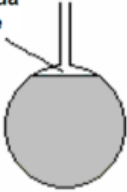
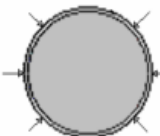
Casos	Modelo da Fenda de Preissmann	Modelo TPA
Escoamento a superfície livre		
Escoamento pressurizado	<p data-bbox="646 571 805 649">Incremento da área causado pela pressurização</p> 	<p data-bbox="1029 548 1316 604">Incremento radial da área decorrente da pressurização</p> 
Escoamento sub-atmosférico	<p data-bbox="646 795 805 862">Regeneração da superfície livre</p> 	<p data-bbox="1029 784 1316 840">Decremento radial de área decorrente da sub-pressão</p> 

Figura 2.6 – Comparação entre o método TPA e o método da Fenda de Preissmann (Vasconcelos, 2008).

3. METODOLOGIA

3.1. Modelos utilizados

Vão ser concebidos neste trabalho 4 modelos, explicados aqui em linhas gerais:

Mod1 - Modelo que utiliza a discretização em ordem às variáveis (Y, Q) (Capítulo 3.2.1) com o esquema de Preissmann e o princípio da fenda de Preissman;

Mod2 - Modelo que utiliza a discretização em ordem às variáveis (A, Q) (Capítulo 3.2.2) com o esquema de Preissmann e o princípio da fenda de Preissman;

Mod3 - Modelo que utiliza a discretização em ordem às variáveis (A, Q) (Capítulo 3.2.2) com o esquema de Preissmann e o princípio do TPA de Vasconcelos;

Mod4 – Modelo que utiliza a discretização em ordem às variáveis (h, V) , o Método das Características (Capítulo 3.3) e o princípio da fenda de Preissman.

3.2. Aplicação do MDF Implícito de Preissmann

As equações resultantes da aplicação directa do esquema de Preissmann às equações de Saint-Venant formam um sistema de equações algébricas não lineares que podem ser resolvidas recorrendo, por exemplo, ao método de Newton-Raphson. Nesta dissertação procedeu-se à linearização dos termos para que se possa aplicar um solver de equações lineares tal como foi realizado no modelo SIPSON de Djordjević (2004).

3.2.1. Discretização em ordem às variáveis (Y, Q)

Esta primeira discretização é utilizada no modelo baseado na Fenda de Preissmann e tem como variáveis, $Y=h+Z$ (cota piezométrica), B (largura superficial) e Q (Caudal escoado), de acordo com as respectivas definições apresentadas na Figura 2.1.

Combinando a EC (23) com $Q=VA$ e tendo em consideração que $dA=Bdh$ e $dh/dt=dY/dt$ ($dZ/dt=0$) obtém-se:

$$\text{EC:} \quad \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial t} = 0 \quad (43)$$

Em relação à ED (24), esta pode ser transformada tendo em conta as seguintes expressões:

$$\frac{\partial h}{\partial x} - S_0 = \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (44)$$

$$S_f = \frac{Q^2}{\left(k \cdot R_H^{\frac{2}{3}} \cdot A\right)^2} \quad (45)$$

obtendo-se:

$$\text{ED:} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g \cdot A \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} + g \cdot A \cdot S_f = 0 \quad (46)$$

Aplicando as aproximações (32) e (34) à Equação da Continuidade (43) resulta:

$$\begin{aligned} & \theta \frac{2}{B_i^{n+1} + B_{i+1}^{n+1}} \frac{(Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1})}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{2}{B_i^n + B_{i+1}^n} \frac{(Q_{i+1}^n - Q_i^n)}{\Delta x} \\ & + \Psi \frac{(Y_{i+1}^{n+1} - Y_{i+1}^n)}{\Delta t} + (1 - \Psi) \frac{(Y_i^{n+1} - Y_i^n)}{\Delta t} = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

Agrupando os termos Q_{i+1}^{n+1} , Q_i^{n+1} , Y_i^{n+1} , Y_{i+1}^{n+1} obtém-se:

$$\begin{aligned} & \theta \frac{2}{B_i^{n+1} + B_{i+1}^{n+1}} \frac{Q_{i+1}^{n+1}}{\Delta x} - \theta \frac{2}{B_i^{n+1} + B_{i+1}^{n+1}} \frac{Q_i^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{2}{B_i^n + B_{i+1}^n} \frac{Q_{i+1}^n + Q_i^n}{\Delta x} \\ & + (1 - \Psi) \frac{Y_i^{n+1}}{\Delta t} - (1 - \Psi) \frac{Y_i^n}{\Delta t} + \Psi \frac{Y_{i+1}^{n+1}}{\Delta t} - \Psi \frac{Y_{i+1}^n}{\Delta t} = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

Colocando os termos incógnita (a que corresponde o índice superior $n+1$) no lado esquerdo da equação e os restantes termos no lado direito, resulta:

$$\begin{aligned} & - \frac{2}{B_i^{n+1} + B_{i+1}^{n+1}} \frac{\theta}{\Delta x} Q_i^{n+1} + \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} Y_i^{n+1} + \frac{2}{B_i^{n+1} + B_{i+1}^{n+1}} \frac{\theta}{\Delta x} Q_{i+1}^{n+1} + \frac{\Psi}{\Delta t} Y_{i+1}^{n+1} \\ & = - \left((1 - \theta) \frac{2}{B_i^n + B_{i+1}^n} \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x} - (1 - \Psi) \frac{Y_i^n}{\Delta t} - \Psi \frac{Y_{i+1}^n}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (49)$$

a qual se pode escrever numa forma simplificada como:

$$ai. Q_i^{n+1} + bi. Y_i^{n+1} + ci. Q_{i+1}^{n+1} + di. Y_{i+1}^{n+1} = ei \quad (50)$$

em que,

$$\begin{aligned} ai &= -\frac{2}{B_i^{n+1} + B_{i+1}^{n+1}} \frac{\theta}{\Delta x}, \quad bi = \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t}, \quad ci = \frac{2}{B_i^{n+1} + B_{i+1}^{n+1}} \frac{\theta}{\Delta x}, \\ di &= \frac{\Psi}{\Delta t}, \quad ei = -\left((1 - \theta) \frac{2}{B_i^n + B_{i+1}^n} \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x} - (1 - \Psi) \frac{Y_i^n}{\Delta t} - \Psi \frac{Y_{i+1}^n}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (51)$$

Da mesma forma, na Equação da Dinâmica, aplicando (31), (32), (33) e (34) tem-se:

$$\begin{aligned} &\Psi \frac{(Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n)}{\Delta t} + (1 - \Psi) \frac{(Q_i^{n+1} - Q_i^n)}{\Delta t} \\ &+ \theta \frac{\left(\frac{Q^2}{A}\right)_{i+1}^{n+1} - \left(\frac{Q^2}{A}\right)_i^{n+1}}{\Delta xi} + (1 - \theta) \frac{\left(\frac{Q^2}{A}\right)_{i+1}^n - \left(\frac{Q^2}{A}\right)_i^n}{\Delta xi} \\ &+ g \times \frac{1}{2} \times (A_i + A_{i+1})^{n+1} \times \theta \frac{Y_{i+1}^{n+1} - Y_i^{n+1}}{\Delta xi} \\ &+ g \times \frac{1}{2} \times (A_i + A_{i+1})^n \times (1 - \theta) \frac{Y_{i+1}^n - Y_i^n}{\Delta xi} \\ &+ g \times \theta \times \frac{1}{2} \left[\frac{|Q_{i+1}^{n+1}| Q_{i+1}^{n+1}}{\left(k \cdot R_{H_{i+1}}^{n+1 \frac{2}{3}} \cdot A_{i+1}^{n+1 \frac{1}{2}}\right)^2} + \frac{|Q_i^{n+1}| Q_i^{n+1}}{\left(k \cdot R_{H_i}^{n+1 \frac{2}{3}} \cdot A_i^{n+1 \frac{1}{2}}\right)^2} \right] \\ &+ g \times (1 - \theta) \times \frac{1}{2} \left[\frac{|Q_{i+1}^n| Q_{i+1}^n}{\left(k \cdot R_{H_{i+1}}^n \cdot A_{i+1}^{\frac{1}{2}}\right)^2} + \frac{|Q_i^n| Q_i^n}{\left(k \cdot R_{H_i}^{\frac{2}{3}} \cdot A_i^{\frac{1}{2}}\right)^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

Agrupando os termos Q_i^{n+1} , Y_i^{n+1} , Q_{i+1}^{n+1} e Y_{i+1}^{n+1} , resulta:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1 - \Psi}{\Delta t} + 9,8 \times \theta \times \frac{1}{2} \frac{|Q_i^{n+1}|}{\left(k \cdot R_{H_i}^{n+1 \frac{2}{3}} \cdot A_i^{n+1 \frac{1}{2}}\right)^2} - \frac{\theta Q_i^{n+1}}{\Delta x A_i^{n+1}} \right] Q_i^{n+1} \\
& + \left[-9,8 \times \theta \times \frac{1}{2} \times \frac{(A_i + A_{i+1})^{n+1}}{\Delta x} \right] Y_i^{n+1} \\
& + \left[\frac{\Psi}{\Delta t} + 9,8 \times \theta \times \frac{1}{2} \frac{|Q_{i+1}^{n+1}|}{\left(k \cdot R_{H_{i+1}}^{n+1 \frac{2}{3}} \cdot A_{i+1}^{n+1 \frac{1}{2}}\right)^2} + \frac{\theta Q_{i+1}^{n+1}}{\Delta x A_{i+1}^{n+1}} \right] Q_{i+1}^{n+1} \\
& + \left[9,8 \times \theta \times \frac{1}{2} \times \frac{(A_i + A_{i+1})^{n+1}}{\Delta x} \right] Y_{i+1}^{n+1} \\
& = - \left[-(1 - \Psi) \frac{Q_i^n}{\Delta t} - \Psi \frac{Q_{i+1}^n}{\Delta t} + \theta \frac{\left(\frac{Q^2}{A}\right)_{i+1}^n - \left(\frac{Q^2}{A}\right)_i^n}{\Delta x} + \frac{9,8(1 - \theta)}{2} \right. \\
& \left. \times \left[\frac{(A_i + A_{i+1})^n \times (Y_{i+1} - Y_i)^n}{\Delta x} \right] + \frac{|Q_{i+1}^n| Q_{i+1}^n}{\left(k \cdot R_{H_{i+1}}^{n \frac{2}{3}} \cdot A_{i+1}^{n \frac{1}{2}}\right)^2} + \frac{|Q_i^n| Q_i^n}{\left(k \cdot R_{H_i}^{n \frac{2}{3}} \cdot A_i^{n \frac{1}{2}}\right)^2} \right]
\end{aligned} \tag{53}$$

Que de uma forma simples se pode escrever:

$$ali \cdot Q_i^{n+1} + bli \cdot Y_i^{n+1} + cli \cdot Q_{i+1}^{n+1} + dli \cdot Y_{i+1}^{n+1} = eli \tag{54}$$

em que,

$$ali = ali1 + ali2 \quad e \quad cli = cli1 + cli2$$

$$ali1 = \frac{1 - \Psi}{\Delta t} + 9,8 \times \theta \times \frac{1}{2} \frac{|Q_i^{n+1}|}{\left(k \cdot R_{H_i}^{n+1 \frac{2}{3}} \cdot A_i^{n+1 \frac{1}{2}}\right)^2}, \quad ali2 = -\frac{\theta Q_i^{n+1}}{\Delta x A_i^{n+1}} \tag{55}$$

$$bli = -9,8 \times \theta \times \frac{1}{2} \times \frac{(A_i + A_{i+1})^{n+1}}{\Delta x}$$

$$cli1 = \frac{\Psi}{\Delta t} + 9,8 \times \theta \times \frac{1}{2} \frac{|Q_{i+1}^{n+1}|}{\left(k \cdot R_{H_{i+1}}^{n+1 \frac{2}{3}} \cdot A_{i+1}^{n+1 \frac{1}{2}}\right)^2}, \quad cli2 = \frac{\theta Q_{i+1}^{n+1}}{\Delta x A_{i+1}^{n+1}}$$

$$dli = 9,8 \times \theta \times \frac{1}{2} \times \frac{(A_i + A_{i+1})^{n+1}}{\Delta x}$$

$$eli = - \left[- (1 - \Psi) \frac{Q_i^n}{\Delta t} - \Psi \frac{Q_{i+1}^n}{\Delta t} + (1 - \theta) \frac{\left(\frac{Q^2}{A}\right)_{i+1}^n - \left(\frac{Q^2}{A}\right)_i^n}{\Delta x} + \frac{9,8(1 - \theta)}{2} \right]$$

$$\times \left[\frac{(A_i + A_{i+1})^n \times (Y_{i+1} - Y_i)^n}{\Delta x} + \frac{|Q_{i+1}^n| Q_{i+1}^n}{\left(k \cdot R_{H_{i+1}}^n \cdot A_{i+1}^{n \frac{1}{2}}\right)^2} + \frac{|Q_i^n| Q_i^n}{\left(k \cdot R_{H_i}^n \cdot A_i^{n \frac{1}{2}}\right)^2} \right]$$

3.2.2. Discretização em ordem às variáveis (A,Q)

Esta discretização é efectuada directamente nas equações de Saint-Venant escritas na forma conservativa “forte” (28) e (29).

A utilização das aproximações (31)-(34) à EC é feita de uma forma directa. Já a ED terá de sofrer um desenvolvimento dos termos $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A}\right)$ e $g \frac{\partial}{\partial x} A(h_c + h_s)$, resultando o seguinte:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial Q^2}{\partial x} + Q^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{A}\right) + g(h_c + h_s) \frac{\partial A}{\partial x} + gA \frac{\partial (h_c + h_s)}{\partial x} - gAS_o + gAS_f = 0 \quad (56)$$

Aplicando as aproximações dadas por (31) e (32) à Equação da Continuidade, resulta:

$$\Psi \frac{A_{i+1}^{n+1} - A_{i+1}^n}{\Delta t} + (1 - \Psi) \frac{A_i^{n+1} - A_i^n}{\Delta t} + \theta \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x} = 0 \quad (57)$$

Que depois das incógnitas agrupadas fica:

$$\Leftrightarrow - \frac{\theta}{\Delta x} Q_i^{n+1} + \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} A_i^{n+1} + \frac{\theta}{\Delta x} Q_{i+1}^{n+1} + \frac{\Psi}{\Delta t} A_{i+1}^{n+1}$$

$$= - \left[- \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} A_i^n - \frac{\Psi}{\Delta t} A_{i+1}^n + (1 - \theta) \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x} \right] \quad (58)$$

ou de numa forma mais simplificada,

$$ai. Q_i^{n+1} + bi. Y_i^{n+1} + ci. Q_{i+1}^{n+1} + di. Y_{i+1}^{n+1} = ei \quad (59)$$

onde,

$$ai = -\frac{\theta}{\Delta x}, \quad bi = \frac{(1-\Psi)}{\Delta t}, \quad ci = \frac{\theta}{\Delta x}, \quad di = \frac{\Psi}{\Delta t}, \quad (60)$$

$$ei = -\left[-\frac{(1-\Psi)}{\Delta t} A_i^n - \frac{\Psi}{\Delta t} A_{i+1}^n + (1-\theta) \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x} \right]$$

Quanto à Equação da Dinâmica, tomará o seguinte aspecto após utilizar (32), (33) e (34):

$$\begin{aligned} & \Psi \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n}{\Delta t} + (1-\Psi) \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} + \theta \frac{2}{A_i^{n+1} + A_{i+1}^{n+1}} \frac{Q_{i+1}^{2n+1} - Q_i^{2n+1}}{\Delta x} \\ & + (1-\theta) \frac{2}{A_i^n + A_{i+1}^n} \frac{Q_{i+1}^{2n} - Q_i^{2n}}{\Delta x} + \theta \frac{Q_i^{2n+1} + Q_{i+1}^{2n+1}}{2} \frac{\left(\frac{1}{A}\right)_{i+1}^{n+1} - \left(\frac{1}{A}\right)_i^{n+1}}{\Delta x} \\ & + (1-\theta) \frac{Q_i^{2n} + Q_{i+1}^{2n}}{2} \frac{\left(\frac{1}{A}\right)_{i+1}^n - \left(\frac{1}{A}\right)_i^n}{\Delta x} \\ & + \theta g \frac{A_i^{n+1} + A_{i+1}^{n+1}}{2} \frac{(hc + hs)_{i+1}^{n+1} - (hc + hs)_i^{n+1}}{\Delta x} \\ & + (1-\theta) g \frac{A_i^n + A_{i+1}^n}{2} \frac{(hc + hs)_{i+1}^n - (hc + hs)_i^n}{\Delta x} \\ & + \theta g \frac{(hc + hs)_i^{n+1} + (hc + hs)_{i+1}^{n+1}}{2} \frac{A_{i+1}^{n+1} - A_i^{n+1}}{\Delta x} \\ & + (1-\theta) g \frac{(hc + hs)_i^n + (hc + hs)_{i+1}^n}{2} \frac{A_{i+1}^n - A_i^n}{\Delta x} - \theta g S_o \frac{A_{i+1}^{n+1} + A_i^{n+1}}{2} \\ & - (1-\theta) g S_o \frac{A_{i+1}^n + A_i^n}{2} + \theta g \frac{ASf_{i+1}^{n+1} + ASf_i^{n+1}}{2} + (1-\theta) g \frac{ASf_{i+1}^n + ASf_i^n}{2} = 0 \end{aligned} \quad (61)$$

Após agrupadas as incógnitas a equação poderá ser escrita na forma alternativa:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{(1-\Psi)}{\Delta t} + \frac{1}{2} \theta g \frac{|Q_i^{n+1}|}{\left(k(Rh_i^{n+1})^{\frac{2}{3}}(A_i^{n+1})^{\frac{1}{2}}\right)^2} \right] Q_i^{n+1} \\
& + \left[-\frac{2\theta}{\Delta x} \frac{Q_i^{n+1}}{A_i^{n+1} + A_{i+1}^{n+1}} + \theta \cdot Q_i^{n+1} \frac{\left(\frac{1}{A}\right)_{i+1}^{n+1} - \left(\frac{1}{A}\right)_i^{n+1}}{2\Delta x} \right] Q_i^{n+1} \\
& + \left[\theta g \frac{1}{2} \left[\frac{(hc + hs)_{i+1}^{n+1} - (hc + hs)_i^{n+1}}{\Delta x} - So \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(hc + hs)_i^{n+1} + (hc + hs)_{i+1}^{n+1}}{\Delta x} \right] \right] A_i^{n+1} \\
& + \left[\frac{\Psi}{\Delta t} + \frac{1}{2} \theta g \frac{|Q_{i+1}^{n+1}|}{\left(k(Rh_{i+1}^{n+1})^{\frac{2}{3}}(A_{i+1}^{n+1})^{\frac{1}{2}}\right)^2} \right] Q_{i+1}^{n+1} \\
& + \left[\frac{2\theta}{\Delta x} \frac{Q_{i+1}^{n+1}}{A_i^{n+1} + A_{i+1}^{n+1}} + \theta \cdot Q_{i+1}^{n+1} \frac{\left(\frac{1}{A}\right)_{i+1}^{n+1} - \left(\frac{1}{A}\right)_i^{n+1}}{2\Delta x} \right] Q_{i+1}^{n+1} \\
& + \left[\theta g \frac{1}{2} \left[\frac{(hc + hs)_{i+1}^{n+1} - (hc + hs)_i^{n+1}}{\Delta x} - So \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(hc + hs)_i^{n+1} + (hc + hs)_{i+1}^{n+1}}{\Delta x} \right] \right] A_{i+1}^{n+1} \\
& = - \left[-\frac{(1-\Psi)}{\Delta t} Q_i^n - \frac{\Psi}{\Delta t} Q_{i+1}^n + (1-\theta) \frac{2}{A_i^n + A_{i+1}^n} \frac{Q_{i+1}^{2n} - Q_i^{2n}}{\Delta x} \right. \\
& + (1-\theta) g \frac{1}{2} \left[\frac{(A_i^n + A_{i+1}^n)((hc + hs)_{i+1}^n - (hc + hs)_i^n)}{\Delta x} - So(A_{i+1}^n + A_i^n) \right. \\
& + \frac{((hc + hs)_i^n + (hc + hs)_{i+1}^n)(A_{i+1}^n - A_i^n)}{\Delta x} + \frac{|Q_i^n| Q_i^n}{\left(k(Rh_i^n)^{\frac{2}{3}}(A_i^n)^{\frac{1}{2}}\right)^2} \\
& \left. \left. + \frac{|Q_{i+1}^n| Q_{i+1}^n}{\left(k(Rh_{i+1}^n)^{\frac{2}{3}}(A_{i+1}^n)^{\frac{1}{2}}\right)^2} \right] + (1-\theta) \frac{Q_i^{2n} + Q_{i+1}^{2n}}{2} \frac{\left(\frac{1}{A}\right)_{i+1}^n - \left(\frac{1}{A}\right)_i^n}{\Delta x} \right]
\end{aligned} \tag{62}$$

Que simplificadamente se pode escrever:

$$ali. Q_i^{n+1} + bli. Y_i^{n+1} + cli. Q_{i+1}^{n+1} + dli. Y_{i+1}^{n+1} = eli \quad (63)$$

em que,

$$ali = ali1 + ali2 \quad e \quad cli = cli1 + cli2$$

$$\begin{aligned}
 ali1 &= \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} + \frac{1}{2} \theta g \frac{|Q_i^{n+1}|}{\left(k(Rh_i^{n+1})^{\frac{2}{3}}(A_i^{n+1})^{\frac{1}{2}}\right)^2}, \\
 ali2 &= -\frac{2\theta}{\Delta x} \frac{Q_i^{n+1}}{A_i^{n+1} + A_{i+1}^{n+1}} + \theta. Q_i^{n+1} \frac{\left(\frac{1}{A}\right)_{i+1}^{n+1} - \left(\frac{1}{A}\right)_i^{n+1}}{2\Delta x} \\
 bli &= \theta g \frac{1}{2} \left[\frac{(hc + hs)_{i+1}^{n+1} - (hc + hs)_i^{n+1}}{\Delta x} - So - \frac{(hc + hs)_i^{n+1} + (hc + hs)_{i+1}^{n+1}}{\Delta x} \right] \\
 cli1 &= \frac{\Psi}{\Delta t} + \frac{1}{2} \theta g \frac{|Q_{i+1}^{n+1}|}{\left(k(Rh_{i+1}^{n+1})^{\frac{2}{3}}(A_{i+1}^{n+1})^{\frac{1}{2}}\right)^2}, \\
 cli2 &= \frac{2\theta}{\Delta x} \frac{Q_{i+1}^{n+1}}{A_i^{n+1} + A_{i+1}^{n+1}} + \theta. Q_{i+1}^{n+1} \frac{\left(\frac{1}{A}\right)_{i+1}^{n+1} - \left(\frac{1}{A}\right)_i^{n+1}}{2\Delta x} \quad (64) \\
 dli &= \theta g \frac{1}{2} \left[\frac{(hc + hs)_{i+1}^{n+1} - (hc + hs)_i^{n+1}}{\Delta x} - So + \frac{(hc + hs)_i^{n+1} + (hc + hs)_{i+1}^{n+1}}{\Delta x} \right] \\
 eli &= - \left[-\frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} Q_i^n - \frac{\Psi}{\Delta t} Q_{i+1}^n + (1 - \theta) \frac{2}{A_i^n + A_{i+1}^n} \frac{Q_{i+1}^{2n} - Q_i^{2n}}{\Delta x} \right. \\
 &+ (1 - \theta) g \frac{1}{2} \left[\frac{(A_i^n + A_{i+1}^n)((hc + hs)_{i+1}^n - (hc + hs)_i^n)}{\Delta x} - So(A_{i+1}^n + A_i^n) \right. \\
 &+ \frac{((hc + hs)_i^n + (hc + hs)_{i+1}^n)(A_{i+1}^n - A_i^n)}{\Delta x} + \frac{|Q_i^n| Q_i^n}{\left(k(Rh_i^n)^{\frac{2}{3}}(A_i^n)^{\frac{1}{2}}\right)^2} \\
 &\left. \left. + \frac{|Q_{i+1}^n| Q_{i+1}^n}{\left(k(Rh_{i+1}^n)^{\frac{2}{3}}(A_{i+1}^n)^{\frac{1}{2}}\right)^2} \right] + (1 - \theta) \frac{Q_i^{2n} + Q_{i+1}^{2n}}{2} \frac{\left(\frac{1}{A}\right)_{i+1}^n - \left(\frac{1}{A}\right)_i^n}{\Delta x} \right]
 \end{aligned}$$

$$k_1 Q_0^{n+1} + k_2 Y_0^{n+1} = k_3 \quad \text{com } \{k_1, k_2, k_3\} \in \mathbb{R} \quad (67)$$

3.3. Aplicação do MOC

3.3.1. Equações do método para o caso das equações de Saint-Venant nas variáveis (h, V)

A aplicação do MOC às equações de Saint-Venant passa por duas etapas:

1. A transformação do sistema de EDPs num sistema de EDOs;
2. Integração do sistema de EDOs resultante.

Etapa 1:

A ideia básica do MOC é a de encontrar umas determinadas direcções no plano $x-t$ sobre as quais as funções a resolver $V(x,t)$ e $h(x,t)$ passem a ser funções exclusivas de uma das variáveis independentes, por exemplo, $V(t)$ e $h(t)$, transformando o sistema de EDPs num sistema de EDOs com integração mais simples. A procura de tais direcções pode efectuar-se a partir da combinação linear das equações da continuidade e da dinâmica por intermédio de um multiplicador desconhecido λ , ou seja:

$$L_1 + \lambda L_2 = 0 \quad (68)$$

onde L_1 representa a equação da dinâmica (21) e L_2 a equação da continuidade (20) do sistema de Saint-Venant. Substituindo estas equações em (68) obtém-se:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - g(S_0 - S_f) \right) + \lambda \left(\frac{\partial h}{\partial t} + V \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{A}{B} \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0 \quad (69)$$

ou ainda,

$$\left[\frac{\partial V}{\partial t} + \left(V + \lambda \frac{A}{B} \right) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \lambda \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \left(V + \frac{g}{\lambda} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \right] - g(S_0 - S_f) = 0 \quad (70)$$

Verifica-se que o primeiro termo entre parênteses rectos seria a derivada total dV/dt se

$$\frac{dx}{dt} = V + \lambda \frac{A}{B} \quad (71)$$

e o segundo termo entre parênteses rectos seria dh/dt se:

$$\frac{dx}{dt} = V + \frac{g}{\lambda} \quad (72)$$

Igualando (71) e (72) obtém-se:

$$\lambda = \pm \sqrt{g \frac{B}{A}} \quad (73)$$

pelo que:

$$\frac{dx}{dt} = V \pm \sqrt{\frac{A}{Bg}} = V \pm c \quad (74)$$

Portanto, dois valores reais e distintos de λ foram determinados, através de (73), as quais transformam as duas EDPs iniciais (equações da continuidade e da dinâmica) num par de EDOs válidas ao longo das direcções características definidas por (74). De facto, a substituição dos valores positivo e negativo de λ na equação (70) conduz a dois pares de equações que podem ser agrupadas e identificadas como C^+ e C^- :

$$\frac{dV}{dt} + \frac{g}{c} \frac{dh}{dt} = g(S_0 - S_f) \quad (75)$$

Válida para: $\frac{dx}{dt} = V + c \quad (76)$

$$\frac{dV}{dt} - \frac{g}{c} \frac{dh}{dt} = g(S_0 - S_f) \quad (77)$$

Válida para: $\frac{dx}{dt} = V - c \quad (78)$

As equações (76) e (78) representam linhas curvas no plano x,t para o qual foram desenvolvidas. Estas curvas são denominadas linhas características ao longo das quais as

equações (75) e (77) são válidas e às quais se dá o nome de equações de compatibilidade C^+ e C^- . Dependendo do tipo de escoamento estas linhas têm um comportamento diferente: no escoamento subcrítico a linha característica C^+ propaga-se para montante e a linha C^- para jusante. No caso de escoamentos supercríticos ambas as linhas podem propagar-se ou para montante ou para jusante.

Numa forma mais genérica as equações (75), (76), (77) e (78) podem escrever-se:

$$\begin{aligned} \text{Ao longo de } C^+ \quad dx - \lambda^+ dt &= 0 \\ dV + E dh + S dt &= 0 \end{aligned} \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \text{Ao longo de } C^- \quad dx - \lambda^- dt &= 0 \\ dV - E dh + S dt &= 0 \end{aligned} \quad (80)$$

em que, $\lambda^+ = V + c$, $\lambda^- = V - c$, $E = g/a$ e $S = g(S_0 - S_f)$

Etapa 2:

Suponha-se agora que se conhecem no plano $x-t$ os valores das variáveis nos pontos R e S (Figura 3.1). A característica C^+ que parte de R corta a característica C^- que parte de S no ponto P, ponto onde se pretende encontrar a solução e onde se tem de integrar (79) e (80). A integração destas equações utilizando o teorema do valor intermédio, conduz a:

$$\begin{aligned} (x_P - x_R) - \lambda_{RP}^+(t_P - t_R) &= 0 \\ (V_P - V_R) + E_{RP}(h_P - h_R) + S_{RP}(t_P - t_R) &= 0 \\ (x_P - x_S) - \lambda_{SP}^-(t_P - t_S) &= 0 \\ (V_P - V_S) - E_{SP}(h_P - h_S) + S_{SP}(t_P - t_S) &= 0 \end{aligned} \quad (81)$$

nas quais,

$$\lambda_{RP}^+ = \frac{1}{\Delta t} \int_R^P (V + c) dt, \quad E_{RP} = \frac{1}{(h_P - h_R)} \int_R^P \frac{g}{c} dh, \quad S_{RP} = \frac{1}{\Delta t} \int_R^P (S_0 - S_f) dt \quad (82)$$

e de forma análoga a (82) para a linha SP.

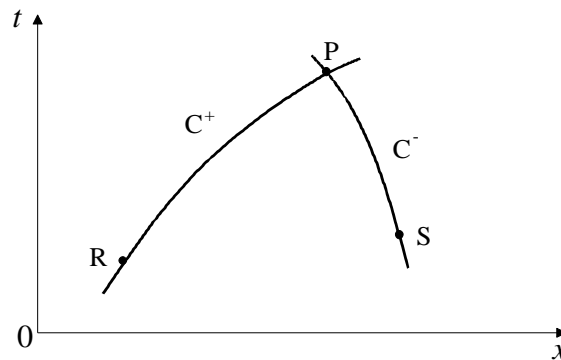


Figura 3.1 – Curvas características C^+ e C^- no plano $x-t$.

Na integração sobre as características não se realizou nenhuma aproximação, visto que esta se efectua a partir de uma avaliação numérica dos integrais realizados, mediante alguma técnica numérica de integração (Abreu, 2004) como por exemplo a regra do rectângulo:

$$\phi_{SP} = \phi_S \quad e \quad \phi_{RP} = \phi_S \quad (83)$$

Assim sendo, a equação (81) fica:

$$(x_P - x_R) + \lambda_R^+(t_P - t_R) = 0 \quad (84a)$$

$$(V_P - V_R) + E_R(h_p - h_R) + S_R(t_P - t_R) = 0 \quad (84b)$$

$$(x_P - x_S) - \lambda_S^-(t_P - t_S) = 0 \quad (84c)$$

$$(V_P - V_S) + E_S(h_p - h_S) + S_S(t_P - t_S) = 0 \quad (84d)$$

Para a aplicação do MOC existem agora dois métodos: o método da rede de Características, que cria uma malha irregular para as características e o método dos intervalos de tempo fixos. Como para aplicações computacionais é mais conveniente uma malha regular de cálculo, vai-se nesta dissertação, explicar somente o segundo método.

3.3.2. Aplicação do MOC na modalidade dos intervalos de tempo fixos

A malha uniforme obtida para este método é criada dividindo o comprimento L do colector, pelo número de troços, N longitudinais, obtendo-se $\Delta x=L/N$ e implementar um passo de tempo

constante Δt . Na integração das equações (84), levada a cabo neste método, é preciso conhecer todas as variáveis do sistema no instante de tempo n em todos os pontos da malha de cálculo e em particular nos pontos da Figura 3.2, A, B e C, a partir dos quais se obtêm os valores para o tempo $n+1$. Como as linhas características não passam nesses mesmos pontos, é necessário em primeiro lugar interpolar os valores das variáveis nos pontos R e S em função de A, B e C.

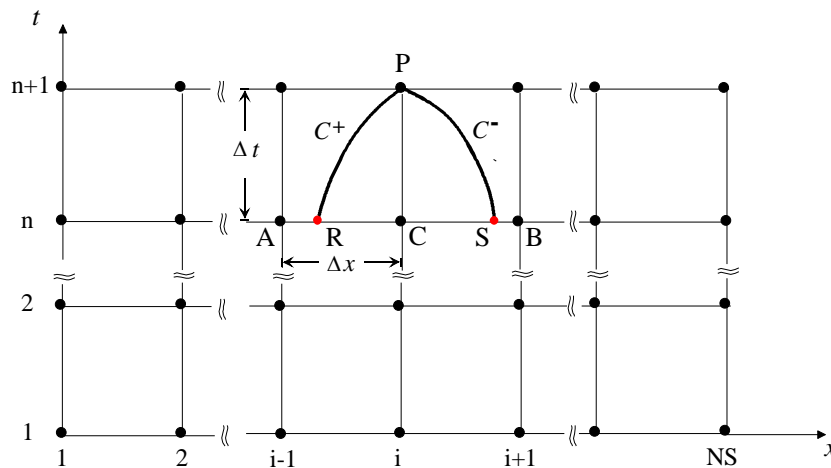


Figura 3.2 – Malha regular e esquema de cálculo para o método dos intervalos de tempo fixos.

Neste sentido, podem-se efectuar três aproximações distintas (Murray, 1992; Vardy e Pan, 1997):

- Determinar a posição de x_R e x_S a partir das equações (84a) e (84c);
- Calcular, mediante algum esquema de interpolação, as condições nos pontos R e S a partir da informação nos pontos A, B e C;
- Avaliação numérica dos integrais dos termos de (84b) e (84d) que não conseguem ser calculados analiticamente.

Utilizando o esquema mais simples de interpolação espacial, interpolação linear, as incógnitas nos pontos R e S, podem ser calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
V_R &= \frac{V_C - \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_C c_A - V_A c_C)}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_C - V_A + c_C - c_A)} \\
c_R &= \frac{c_C - \frac{\Delta t}{\Delta x} V_R (c_C - c_A)}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (c_C - c_A)} \\
h_R &= h_C - \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_R + c_R) (h_C - h_A)
\end{aligned} \tag{85}$$

$$\begin{aligned}
V_S &= \frac{V_C - \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_C c_B - V_A c_C)}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_C - V_B + c_C + c_B)} \\
c_S &= \frac{c_C - \frac{\Delta t}{\Delta x} V_R (c_C - c_A)}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (c_C - c_A)} \\
h_S &= h_C - \frac{\Delta t}{\Delta x} (V_S - c_S) (h_C - h_B)
\end{aligned} \tag{86}$$

Nestas condições, o problema consiste em resolver o sistema formado por (84b) e (84d):

$$\begin{aligned}
V_P + \frac{g}{c_R} h_P &= CP \\
V_P - \frac{g}{c_S} h_P &= CM
\end{aligned} \tag{87}$$

tendo feito anteriormente:

$$\begin{aligned}
CP &= V_R + \frac{g}{c_R} h_R - g \Delta t (S_R - S_0) \\
CM &= V_S + \frac{g}{c_S} h_S - g \Delta t (S_S - S_0)
\end{aligned} \tag{88}$$

Resolvendo o sistema de duas equações a duas incógnitas, retirando V_P e h_P :

$$V_P = \frac{c_R CP + c_S CM}{c_R + c_S} \quad e \quad h_P = \frac{1}{g} \frac{c_R c_S}{c_R + c_S} (CP - CM) \tag{89}$$

A partir destas equações os valores de V e h podem ser sistematicamente determinados para cada instante t em todas as secções de cálculo interiores do domínio.

Em geral o instante inicial de cálculo coincide com o início do regime variável pelo que será necessário conhecer as condições correspondentes ao regime permanente (condições iniciais). A estas condições haverá que juntar as equações que nas extremidades de montante e de jusante do troço de colector, que foi dividido em intervalos de tempo Δx , substitui a falta de uma das duas equações características (condições de fronteira). Estas equações algébricas ou diferenciais terão de ser resolvidas em simultâneo com uma das equações características, C^+ ou C^- . Nos exemplos do capítulo 4 dão-se exemplos de modelação de algumas condições de fronteira.

4. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Neste capítulo vai-se proceder à apresentação e discussão dos resultados numéricos obtidos com os vários modelos, utilizando para o efeito um conjunto de testes de graus de complexidade distintos. Os primeiros, especialmente os dois testes iniciais, resultam de condições de fronteira muito simples, os quais, em conjunto com um terceiro exemplo, servirão para comparar as potencialidades de cada um dos modelos desenvolvidos neste trabalho e efectuar a escolha daquele que parecer o mais adequado. Posteriormente comparar-se-ão os resultados obtidos através do modelo seleccionado com resultados de testes realizados por outros investigadores, nomeadamente Wiggert (1972) e Vasconcelos *et al.* (2006), caracterizados pela transição repentina de um escoamento com superfície livre para um escoamento sob pressão.

Como o valor correcto a atribuir à largura da fenda de Preissman tem sido alvo de alguma controvérsia na literatura da especialidade nos últimos anos e cada autor dá o seu parecer sobre o assunto, é essencial que se crie alguma unanimidade e se proceda a algumas verificações quanto à influência que este factor poderá ter nos resultados. Para o efeito, vai-se aproveitar estes testes para tentar dissipar algumas dúvidas que existem sobre o assunto.

4.1. Exemplos de superfície livre pura

4.1.1. Descrição dos testes

Os quatro testes aqui apresentados resultam de equações de fronteira bastante simples em que o escoamento ocorre somente com superfície livre. O colector, suposto horizontal, tem um comprimento de 20m e a respectiva secção transversal vai ser testada para a forma circular de diâmetro 0.2m e para a forma rectangular com as dimensões de 0.5x0.2m. Considerou-se o valor do coeficiente de resistência n , inverso do coeficiente de Manning, igual a 0.012.

Os modelos seleccionados para este teste serão o modelo Mod1, o Mod2 ou Mod3 (que num escoamento com superfície livre não apresentam qualquer diferença pois, a utilização do princípio da fenda de Preissman ou do princípio TPA que os diferencia, apenas terá relevância após a pressurização) e o Mod4.

As condições iniciais correspondem a um regime estacionário de repouso ($Q=0$) com uma altura da lâmina líquida igual a 0.1m (meia secção).

Utilizaram-se para condição de fronteira de montante, para cada uma das secções transversais consideradas, duas condições de imposição de altura de lâmina líquida, introduzidas nos modelos sob a forma de hidrogramas (h função de t), como se representa na Figura 4.1. Nos modelos Mod1, Mod2 e Mod3 estas condições de fronteira são introduzidas através da equação (67) utilizando $k_1=0$, $k_2=1$. O valor de k_3 corresponderá, para cada instante de tempo, a um valor imposto da altura de água h para o Mod1 (Figura 4.1) e a um valor correspondente da área da secção transversal para os Mod2 e Mod3. No método das características (Mod4), ao estar pré-definido, em cada instante de tempo (hidrograma de h), o valor de $h_p(1)$, a velocidade na secção montante será obtida através da característica C^- , a qual permite escrever:

$$V_p(1) = CM + \frac{g}{c_s} h_p(1) \quad (90)$$

A primeira CF de montante (CFM1) tem como objectivo a utilização de um hidrograma com um patamar para que se possa observar uma onda bem definida no escoamento (Figura 4.1 (a)). A segunda CF de montante (CFM2) representa um “pico” (“pulso” de h) para se verificar o comportamento dos modelos perante estas situações críticas (Figura 4.1 (b)). A condição de fronteira de jusante consiste em manter a altura de escoamento constante e igual a 0.1m ou uma área correspondente a meia secção.

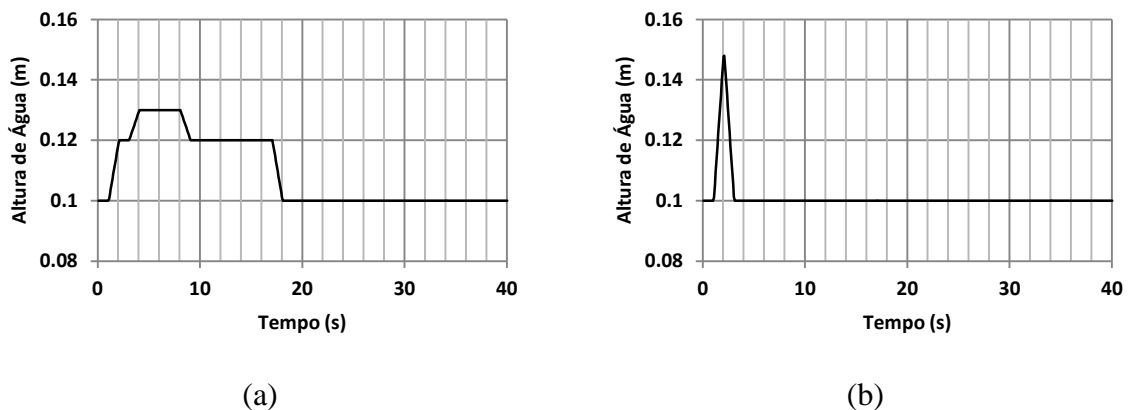


Figura 4.1 – Condições de fronteira de montante: (a) CFM1 , (b) CFM2

Os resultados correspondentes às duas secções (circular e quadrada) e às duas condições de fronteira (CFM1 e CFM2) encontram-se representados na Figura 4.2.

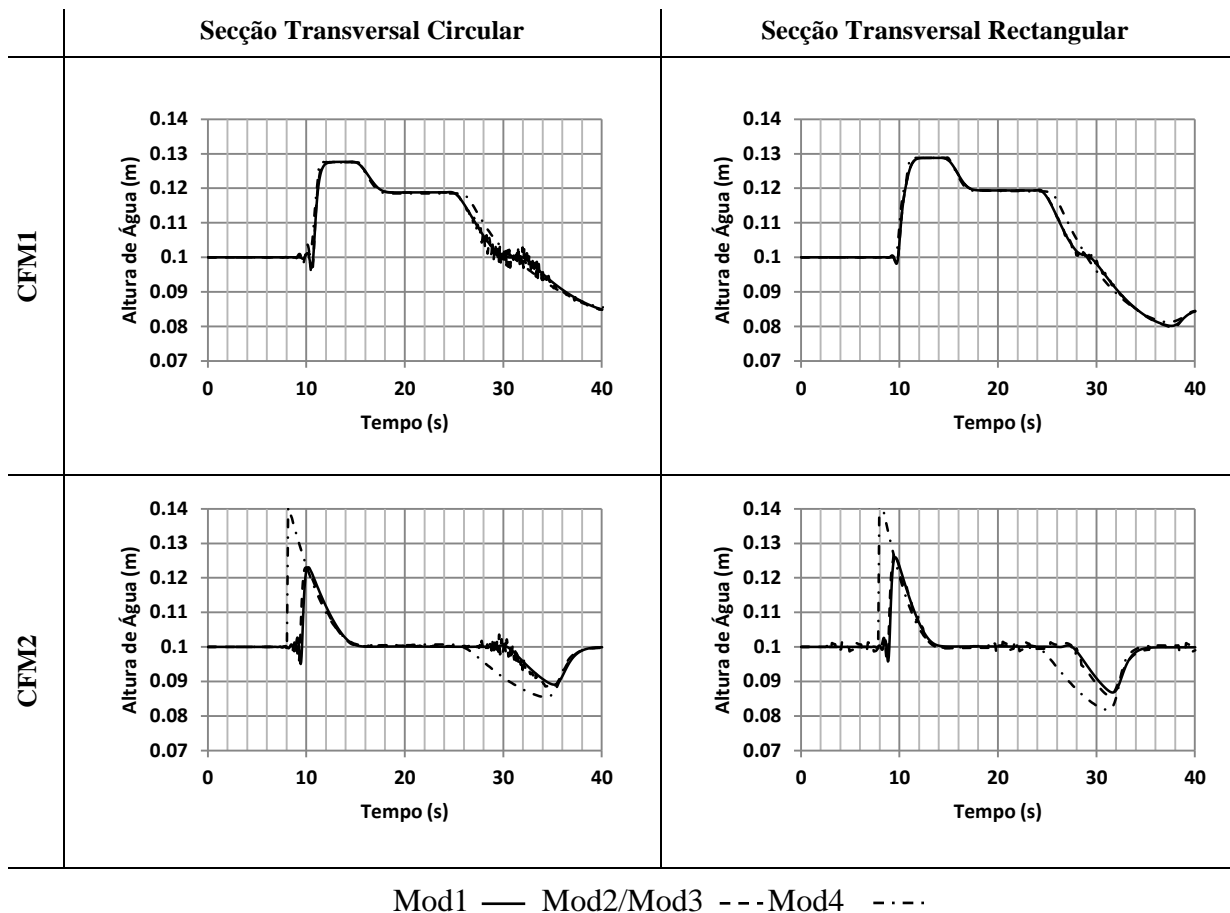


Figura 4.2 – Resultados dos testes com superfície livre nos quais o eixo das abcissas corresponde ao tempo (s) e o eixo das ordenadas à altura da água no colectador (m).

Estes resultados foram obtidos utilizando 100 troços de cálculo ($\Delta x=0.2\text{m}$) e $\Delta t=0.2\text{s}$ nos Mod1 e Mod2/3. No Mod4 foi somente introduzido o valor de $\Delta x=0.2\text{m}$, sendo o valor de Δt ajustado pelo modelo ao longo do tempo de cálculo de forma a cumprir simultaneamente a condição de Courant e minimizar os erros do esquema de interpolação utilizado.

No Quadro seguinte apresenta-se o número de ciclos utilizados pelos diferentes modelos ao processar a solução correspondente aos vários testes, que constituirá, de certa forma, uma medida do respectivo esforço computacional.

Quadro 4.1 – Número de ciclos computacionais para modelos em superfície livre.

Escoamento	CF	Esquema	Geometria	N.º ciclos
Superfície Livre	CFM1	Mod1	Circular	341
		Mod1	Rectangular	349
		Mod2/Mod3	Circular	361
		Mod2/Mod3	Rectangular	2331
		Mod4	Circular	251
		Mod4	Rectangular	265
	CFM2	Mod1	Circular	326
		Mod1	Rectangular	360
		Mod2/Mod3	Circular	764
		Mod2/Mod3	Rectangular	3903
		Mod4	Circular	248
		Mod4	Rectangular	265

4.1.2. Discussão dos resultados

Em relação à condição de fronteira de montante 1 (CFM1) os resultados dos quatro testes são muito idênticos entre si em termos absolutos (Figura 4.2). Interessa ressaltar que os Modelos baseados na discretização em ordem às variáveis (A, Q) (Mod2 ou Mod3), principalmente quando se trata do colector de secção circular, apresentam algumas oscilações numéricas, provenientes, ao que tudo indica, da linearização das equações. Nestes modelos, os termos de A e Q surgem por vezes na coluna de vector S (56) como incógnitas do problema, sendo actualizadas em cada processo iterativo, originando oscilações numéricas. Tal situação, provoca também um grande esforço computacional, na medida em que o maior número de ciclos é realizado pelos modelos Mod2 ou Mod3 (Quadro 4.2).

Em relação à CFM2, genericamente a situação é idêntica à anterior (Figura 4.2). No entanto, o aspecto mais interessante prende-se com o facto de o modelo Mod4, baseado no método das características, conseguir simular mais correctamente o “pico” do hidrograma que os restantes modelos, os quais apresentam uma atenuação da respectiva amplitude substancialmente maior. A conclusão de que será o Mod4 que apresenta um resultado mais correcto deriva do facto de se verificar numericamente que a atenuação sofrida pela amplitude da onda nos modelos 1,2 e 3: $f = (0.15 - 0.12)/10 = 0.003m/m$ é exagerada quando, por exemplo, comparada com a respectiva com a CFM1: $f = 0.0003m/m$. Na opinião do autor, este erro deve-se sobretudo à linearização dos termos das equações de Saint-Venant, efectuada nos modelos que utilizam o esquema de Preissmann de 4 pontos (Mod1,2,3), induzindo algumas

suavizações por não permitir a contribuição total de alguns desses termos como por exemplo o termo convectivo Q^2/A .

4.2. Exemplos com escoamento misto (superfície livre e pressão)

Foram efectuados três testes, igualmente com condições de fronteira simples, para os quais se pretende analisar os resultados dos modelos no momento e após a entrada em pressão do colector (escoamento misto).

4.2.1. Descrição dos testes 1 e 2

Os primeiros dois testes, de certa forma idênticos aos do parágrafo anterior, consideram um colector horizontal com um comprimento de 20m. A respectiva secção transversal, tal como nos dois exemplos iniciais, foi testada para uma forma circular de diâmetro 0.2m e para uma forma rectangular com dimensões 0.5x0.2m. Considerou-se um valor do coeficiente de resistência n igual a 0.012.

As condições iniciais são também idênticas às utilizadas nos anteriores testes, ou seja, condições de repouso com uma altura da lâmina líquida igual a 0.1m (meia secção). Foram igualmente utilizadas duas condições de fronteira a montante para cada uma das secções transversais introduzidas nos modelos sob a forma de hidrogramas (Figura 4.3). A justificação da utilização destes hidrogramas e a aplicação dos mesmos é análoga à apresentada no capítulo anterior. A condição de jusante corresponde à imposição de uma altura de escoamento constante e igual a 0.1m ou área da secção correspondente a meia secção.

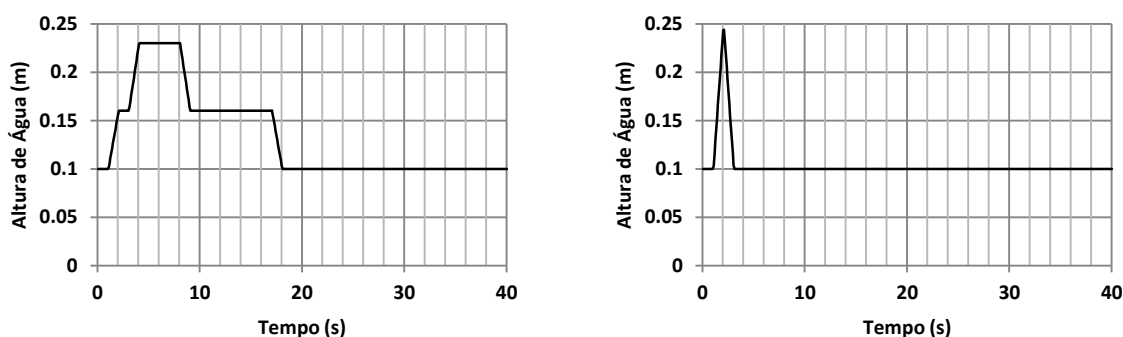


Figura 4.3 - Condições de fronteira de montante CFMp1 e CFMp2.

Os modelos seleccionados para este teste vão ser o modelo Mod1, Mod2, Mod3 e Mod4 visto que, aquando da entrada em pressão os vários modelos apresentam diferenças conceptuais.

Nos modelos Mod1, Mod2 e Mod3 utilizou-se uma fenda de Preissmann de largura constante e igual a 0.05m. No Mod4 foi testada uma transição suave utilizando uma equação exponencial (Yen e Akan, 1999):

$$\frac{B_{fenda}}{D} = 10^{-6} + 0.05423e^{-(h/D)^{2.4}} \quad (91)$$

Os resultados correspondentes às duas secções (circular e quadrada) e às duas condições de fronteira (CFMp1 e CFMp2) encontram-se representados na Figura 4.2.

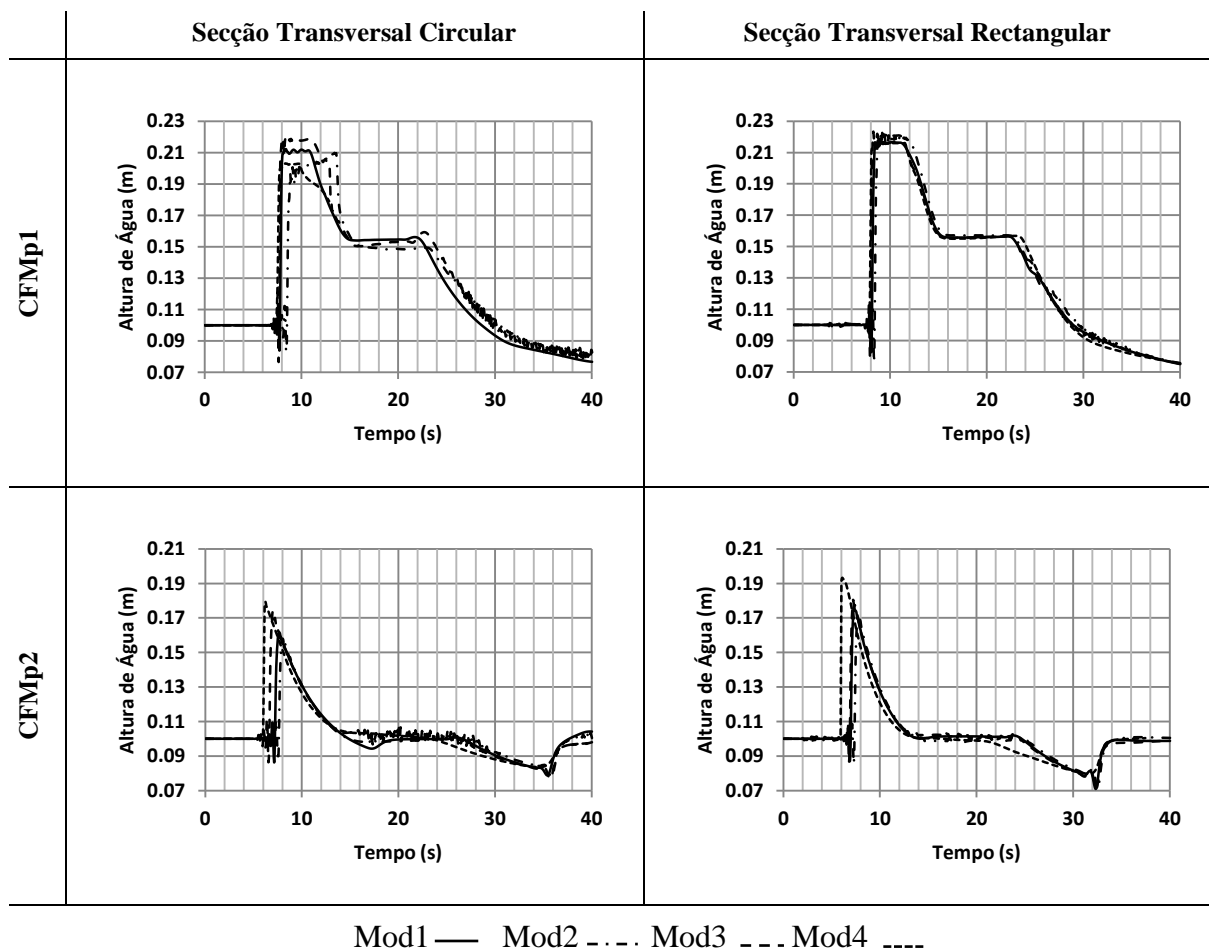


Figura 4.4 – Resultados dos testes em escoamento misto em que o eixo das abcissas corresponde ao tempo (s) e o eixo das ordenadas à altura da água na conduta (m).

Estes resultados foram obtidos utilizando $\Delta x=0.2\text{m}$ e $\Delta t=0.2$ (excepto para o Mod4, em que o valor de Δt varia ao longo do tempo de cálculo, pelas razões já anteriormente referidas).

No Quadro seguinte apresenta-se o número de ciclos efectuados pelos diferentes modelos.

Quadro 4.2 – Número de ciclos computacionais para modelos em superfície livre e pressão.

Escoamento	CF	Esquema	Geometria	N.º ciclos
Superfície Livre e Pressão	CFMp1	Mod1	Circular	490
		Mod1	Rectangular	524
		Mod2	Circular	992
		Mod2	Rectangular	1183
		Mod3	Circular	2586
		Mod3	Rectangular	1091
		Mod4	Circular	475
		Mod4	Rectangular	402
	CFMp2	Mod1	Circular	906
		Mod1	Rectangular	499
		Mod2	Circular	449
		Mod2	Rectangular	1169
		Mod3	Circular	561
		Mod3	Rectangular	1569
		Mod4	Circular	313
		Mod4	Rectangular	329

4.2.2. Discussão dos resultados dos testes 1 e 2

Da análise dos resultados apresentados na Figura 4.4, ressalta desde logo a discrepância dos resultados obtidos pelos diferentes modelos para o caso do colector de secção circular aquando da aplicação da CFMp1. De facto, a partir do momento em que o colector entra em carga, os vários modelos apresentam diferentes evoluções temporais dos valores da pressão, o que não ocorre no caso do colector ter secção rectangular.

Em relação à análise dos resultados correspondentes à CFMp2 encontram-se novamente os problemas, já referidos e analisados anteriormente, em relação à exagerada atenuação numérica do “pico” do hidrograma por parte dos modelos que utilizam o esquema de Preissmann.

Quando se compara o esforço computacional dos vários modelos nestes testes (Quadro 4.2), torna-se a verificar que os modelos que utilizam uma discretização (A, Q) (Mod2 e Mod3) necessitam de mais memória para realizar os processos iterativos no sentido de encontrar a convergência da solução e, por consequência, maior tempo de cálculo, sendo este inevitavelmente um aspecto bastante negativo. Falta referir que os modelos que utilizam o método implícito de Preissmann podem ter número de ciclo computacionais inferiores aos apresentados, expondo na mesma resultados que em termos gerais são idênticos aos exibidos, existindo apenas algumas suavizações na frente e no fecho da onda. Desta forma, comprova-se que a utilização de valores de Δt grandes (1segundo) não é impedimento para que os modelos implícitos obtenham bons resultados.

Neste capítulo 4.2 é proposto também um teste utilizando dois reservatórios que coloca à prova o Mod1 e o Mod4. Os modelos Mod2 e Mod3 foram neste momento colocados de parte devido às instabilidades que apresentam no decurso da simulação para além dos elevados tempos de cálculo já referidos.

4.2.3. Descrição do teste 3

O terceiro teste realizado, embora igualmente simples, pretende não só verificar a resposta dos modelos como mostrar a diferente forma de lidar com condições de fronteira um pouco mais complexas por parte do MOC e do método implícito de Preissmann. É constituído por um colector com $L=20\text{m}$ e $D=0.2\text{m}$ que tem nas suas extremidades dois reservatórios circulares com $D=0.5\text{m}$ (Figura 4.5). A inclinação do canal (S_o) é de 0.005m/m e $n=0.013$. As condições iniciais correspondem a um regime uniforme escoando um caudal $Q=0.005\text{ m}^3/\text{s}$ a que corresponde uma altura uniforme $h_u=0.06306\text{ m}$. A partir do instante inicial o caudal a montante varia linearmente em 50 segundos do valor inicial até $Q=0.025\text{ m}^3/\text{s}$ e a jusante o caudal é mantido constante e igual $0.005\text{ m}^3/\text{s}$.

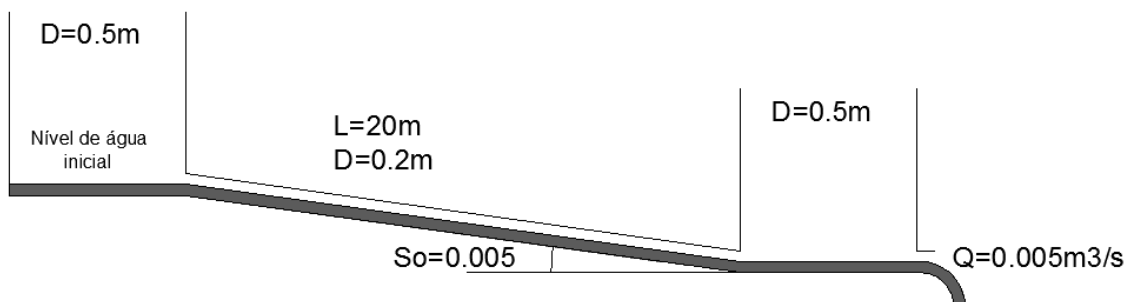


Figura 4.5 - Esquema do teste 3.

Para o modelo baseado na discretização em ordem às variáveis (Y, Q) (Mod1), idealizou-se uma forma de simular a presença de reservatórios para aplicar como condições de fronteira no modelo, sendo o seu funcionamento executado em dois modos distintos:

Modo 1: entrada (saída) de caudal não “afogada” ($h_p(1) < D$).

Nesta situação a condição de fronteira corresponde a um caudal imposto que varia com o tempo e é introduzido no modelo com recurso à expressão (67) com $k_1=0$, $k_2=1.0$ e $k_3=Q_p(1)$.

Modo 2: entrada “afogada” ($h_p(1) > D$).

Neste caso deve-se fazer a distinção entre condição de fronteira de montante e de jusante

Para a CF de montante:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} A_{D1} = Q_{in} - Q_{out} &\Leftrightarrow \frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} \times A_{D1} = Q_{in} - Q_{out} \\ \Leftrightarrow \frac{h^{n+1} A_{D1}}{\Delta t} + Q_{out} = Q_{in} + \frac{h^n A_{D1}}{\Delta t} &\Leftrightarrow k_1 Q_{out} + k_2 h^{n+1} = k_3 \end{aligned} \quad (92)$$

em que $k_1 = 1.0$, $k_2 = A_{D1}/\Delta t$ e $k_3 = Q_{in} + h^n A_{D1}/\Delta t$.

Para a CF de jusante:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} A_{D2} = Q_{in} - Q_{out} &\Leftrightarrow \frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} A_{D2} = Q_{in} - Q_{out} \\ \Leftrightarrow \frac{h^{n+1} A_{D2}}{\Delta t} - Q_{in} = \frac{h^n A_{D2}}{\Delta t} - Q_{out} &\Leftrightarrow k_1 Q_{in} + k_2 h^{n+1} = \frac{h^n A_{D2}}{\Delta t} - Q_{out} \end{aligned} \quad (93)$$

em que $k_1 = -1.0$, $k_2 = A_{D2}/\Delta t$ e $k_3 = h^n A_{D2}/\Delta t - Q_{out}$.

dh/dt é a variação do nível do reservatório entre os instantes de tempo n e $n+1$, A_{D1} e A_{D2} , respectivamente, as área da secção transversal dos reservatório de montante e jusante, Q_{in} o caudal de entrada e Q_{out} o caudal de saída em cada reservatório, como se pode ver na Figura 4.6.

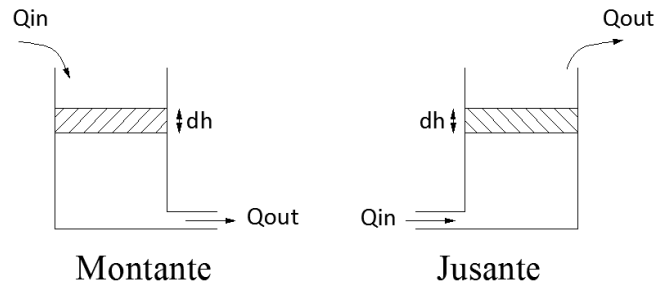


Figura 4.6 – Esquema das condições de fronteira do modelo.

Para o modelo baseado no método das características (Mod4), as condições de fronteira poderão ter dois modos de funcionamento distintos:

Modo 1: entrada (saída) de caudal não “afogada” ($h_p(1) < D$).

Nesta situação a condição de fronteira corresponderá a um caudal imposto ao longo do tempo cuja solução, como veremos em seguida, corresponderá à resolução de uma equação não linear. De facto, sendo o caudal $Q_P(1)$ um dado do problema (condição de fronteira montante) a característica C^- , dá origem à seguinte equação

$$\frac{Q_P(1)}{A(h_p(1))} = CM + \frac{g}{c_s} h_p(1) \quad (94)$$

Ou, em função da variável β , definida em (36):

$$\frac{Q_P(1)}{\frac{\beta - \sin \beta}{8} D^2} = CM + \frac{g}{c_s} \left[\frac{D}{2} \left(1 - \cos \frac{\beta}{2} \right) \right] \quad (95)$$

que corresponde a uma equação não linear em β a ser resolvida por um método numérico (método de Newton-Raphson, por exemplo). Determinado um valor aproximado de β , o correspondente valor aproximado de $h_p(1)$ poderá ser calculado por (96), ou seja,

$$h_p(1) = \frac{D}{2} \left(1 - \cos \frac{\beta}{2} \right) \quad (96)$$

e o valor aproximado de $V_p(1)$ calculado através da característica C^-

$$V_p(1) = CM + \frac{g}{c_s} h_p(1) \quad (97)$$

Modo 2: entrada “afogada” ($h_p(1) > D$).

Da aplicação da equação da continuidade ao reservatório pode obter-se:

$$A_D \frac{dh}{dt} = [Q_E - Q_P(1)] \quad (98)$$

que integrada numericamente entre dois instantes (separados de Δt) permite escrever:

$$h_p(1) = h(1) + \frac{\Delta t}{A_D} [Q_E - Q_P(1)] \quad (99)$$

Da equação anterior combinada com a equação característica C^- pode obter-se:

$$h_p(1) = \frac{h(1) + \frac{\Delta t}{A_D} (Q_E - A \Delta t CM)}{1 + \frac{A}{A_D} \Delta t \frac{g}{c_s}} \quad (100)$$

após o que o valor de $V_p(1)$ será calculado através da equação característica C^- .

A estas condições foi submetido o Mod1 e o Mod4, tendo sido retirados os hidrogramas na secção de montante, na secção de jusante e na secção a 10m de montante. Os resultados são apresentados de seguida:

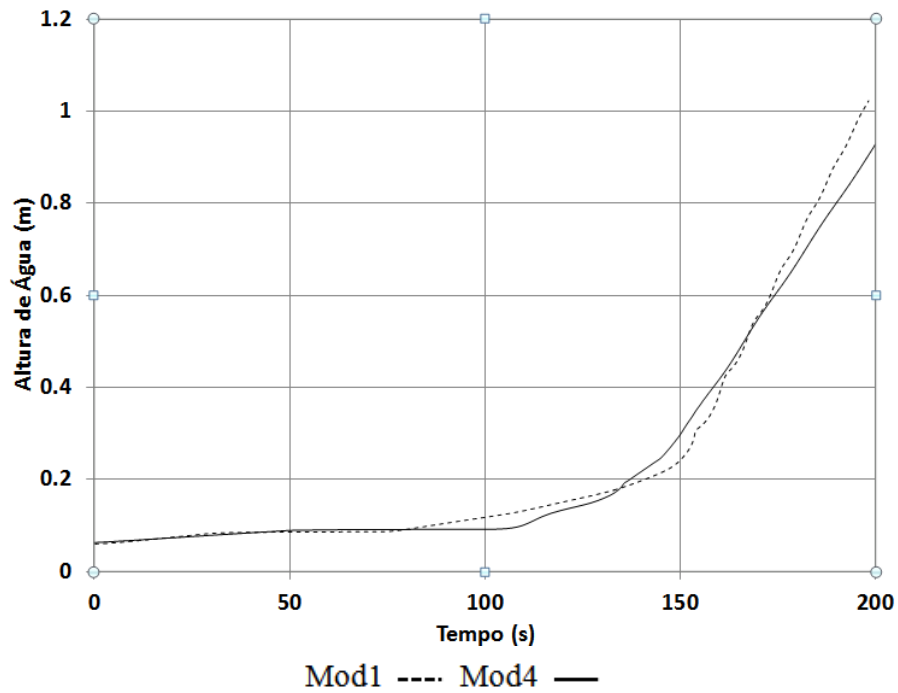


Figura 4.7 – Resultados para a secção de montante.

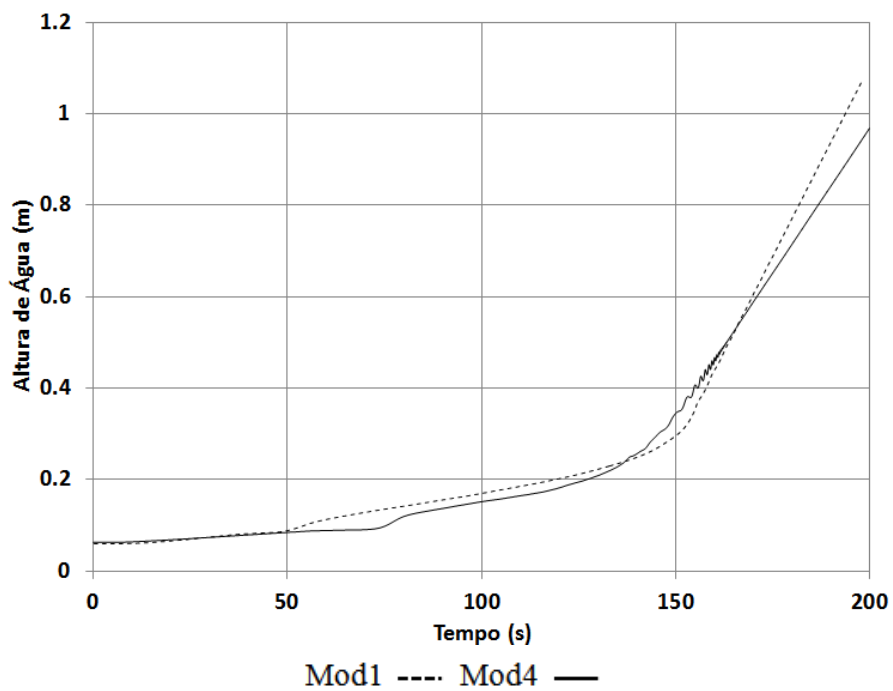


Figura 4.8 – Resultados para a secção distanciada 10m de montante.

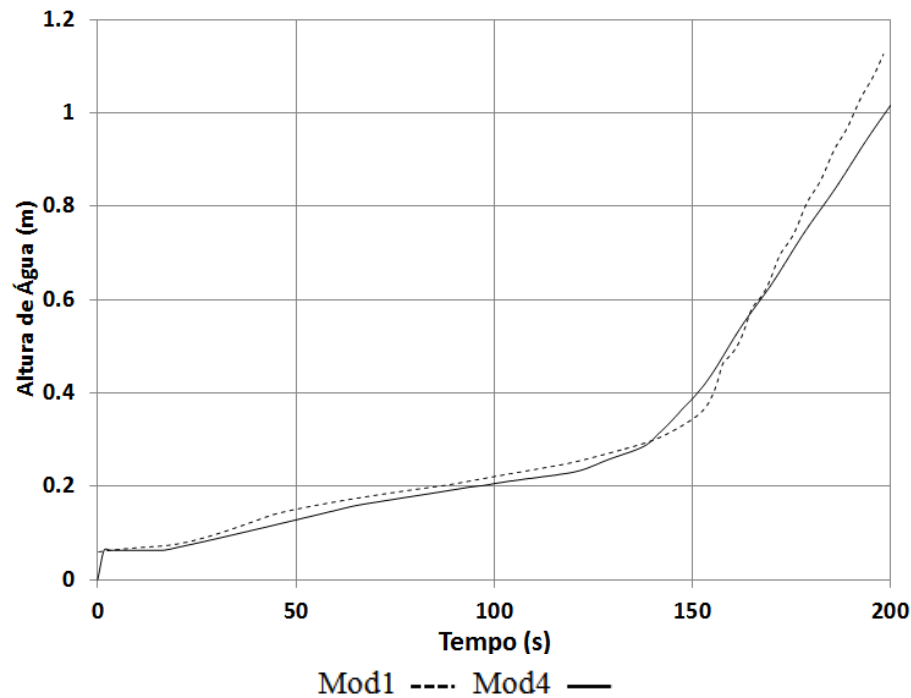


Figura 4.9 – Resultados para a secção de jusante.

4.2.4. Discussão dos resultados

Numa primeira abordagem, pode-se já assinalar que a utilização de uma condição de fronteira deste tipo (fronteira reservatório) no modelo que utiliza o MOC é um pouco mais difícil de implementar que no Mod1 e, por outro lado, dá origem a uma equação não linear (94) o que implica que a resolução, em cada passo de tempo, a resolução da condição de fronteira passe a suportar um esquema iterativo de cálculo. Situação idêntica ocorre quando se pretende simular os reservatórios com o Mod2 e o Mod3 que utilizam uma discretização (A, Q) , onde os parâmetros de entrada têm de ser áreas e não alturas, sendo essa aliás, uma razão suplementar para esses modelos não terem sido já considerados neste teste.

A sobreposição das linhas que simulam a superfície da água em função do tempo é razoável, verificando-se somente algum desajuste na parte final da simulação (Figura 4.8) que pode ser justificado com o facto de o modelo que utiliza o MOC, empregar uma fenda de Preissman com uma transição suave entre a largura do canal em superfície livre e a largura da fenda final B_{fenda} , situação que não ocorre com o Mod1, onde a largura da fenda B_{fenda} é introduzida instantaneamente com a entrada em pressão. Resta referir que essa suavização é necessária para garantir a convergência da solução do MOC, não sendo necessária no Mod1.

4.3. Teste de Wiggert

4.3.1. Descrição do teste

O teste de Wiggert é realizado com recurso a um colector de secção rectangular, onde o fluxo é induzido por um hidrograma fixo a montante, criando uma onda que coloca o sistema instantaneamente em carga.

A estrutura experimental (Figura 4.10) baseia-se num colector horizontal de comprimento $L=10\text{m}$, largura $B=0.51\text{m}$ e altura $H=0.148\text{m}$. O número de Manning $1/K$ é igual a 0.012. As condições iniciais são de $Q_0=0\text{m}^3/\text{s}$ e $h_0=0.128\text{m}$.

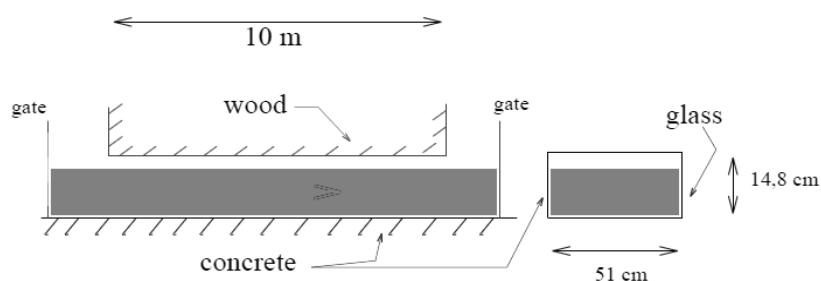
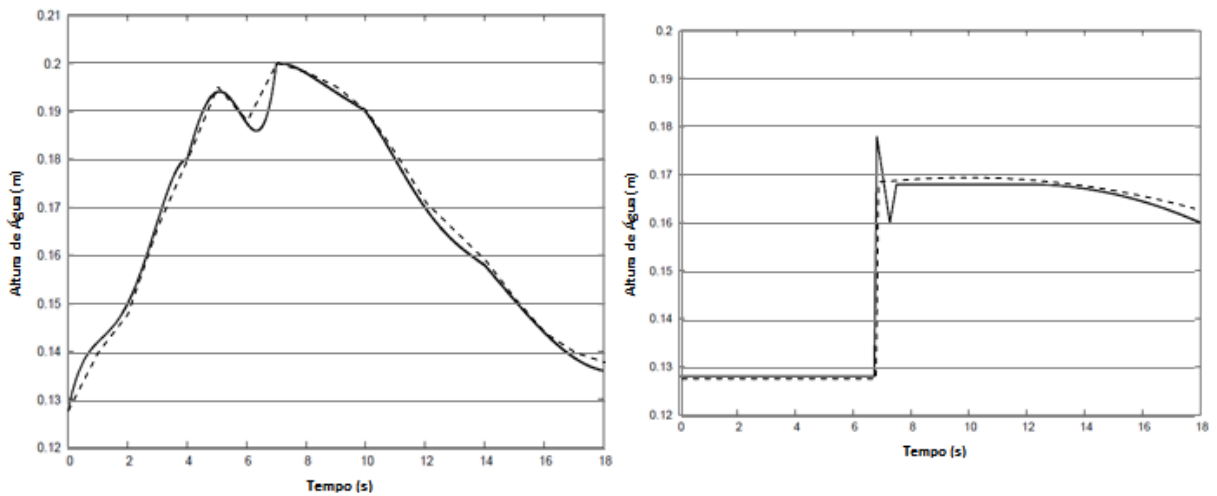


Figura 4.10 – Estrutura experimental (Bourdarias e Gerbi, 2007).

Em relação às condições de fronteira, a condição de montante será o hidrograma a tracejado da Figura 4.11 (a), cujo resultado pode ser comparado com o hidrograma estabelecido por Wiggert. O hidrograma anterior foi obtido de uma forma aproximada com base em interpolações de alturas de água em função do tempo.

A condição de jusante (Figura 4.11 (b)) resulta da imposição do nível de água ao longo do tempo com recurso a funções polinomiais: inicialmente $h=h_0$ e quando a onda atinge a saída do canal (altura em que o caudal deixa de ser igual a zero) há um aumento repentino do nível de água (até aos 0.169m) e posteriormente um decréscimo pouco acentuado ajustado a uma função polinomial de 2º grau.



Mod1 - - - Wiggert —

(a)

(b)

Figura 4.11 – Hidrograma de montante (a) e jusante (b) (Bourdarias e Gerbi, 2007).

No que toca aos parâmetros da fenda de Preissman, considerou-se um B fictício de 0.002m, correspondendo a uma celeridade $a=19.23\text{m/s}$, dada por (35), valor próximo do sugerido por Wylie e Streeter (1993).

Considerando um $\Delta x=0.1\text{m}$ e $\Delta t=0.1\text{s}$, pode-se agora retirar os resultados que nos vão permitir validá-lo. Na Figura 4.12 observa-se a evolução temporal da altura de água na secção de controlo distanciada de 3.5m em relação à entrada. O traçado interrompido corresponde aos dados retirados do modelo numérico realizado, o traçado contínuo são os obtidos por Bourdarias (2007) e o traçado constituído por círculos correspondem a resultados experimentais retirados do artigo de Wiggert (1972).

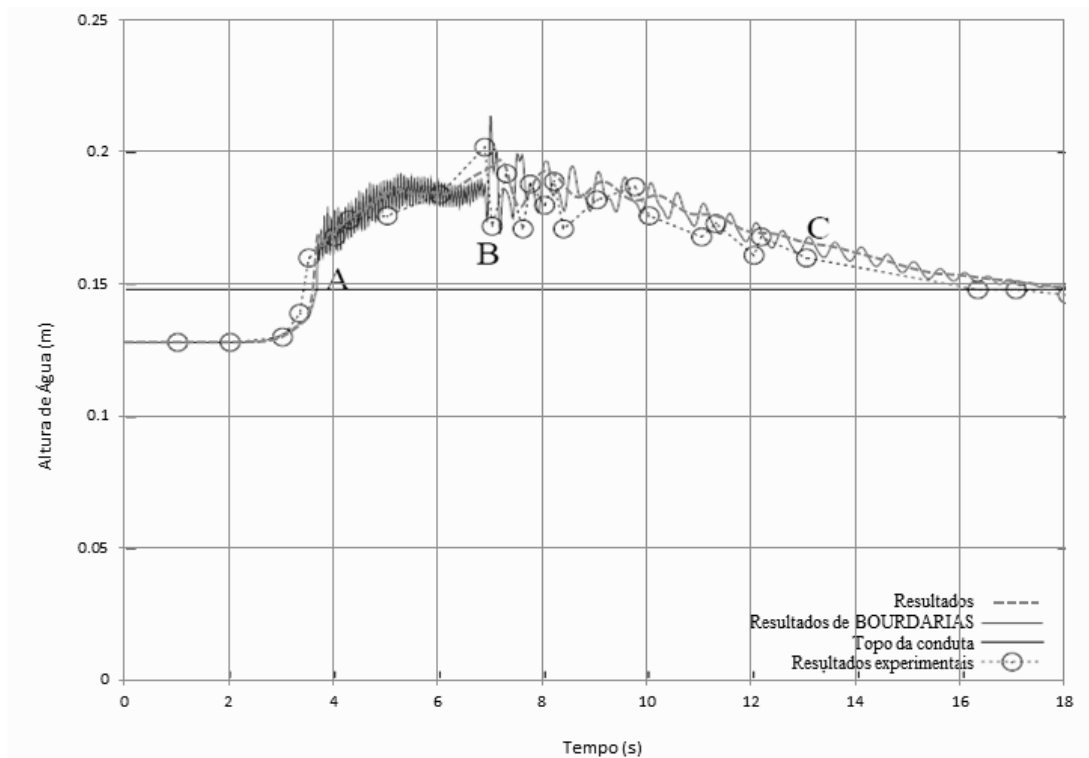


Figura 4.12 – Comparação com os resultados do teste de Bourdarias e Wiggert na secção distanciada 3.5m de montante (Bourdarias e Gerbi, 2007).

Em Kerger *et al.* (2011), o teste de Wiggert também foi realizado, tendo sido apresentados os resultados das alturas de água para as várias secções da conduta distanciadas à origem de: i) 0.5m; ii) 3.5m; iii) 5.5m iv) 9.5m. Os resultados são comparados na Figura 4.13a e Figura 4.13b.

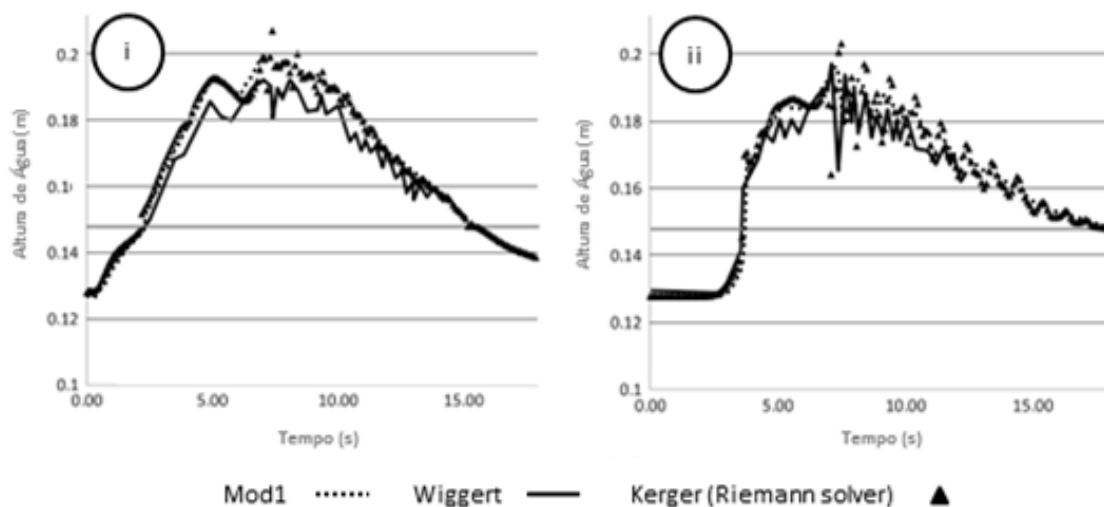


Figura 4.13a - Comparação com os resultados do teste de Kerger *et al.* (2011): secção i e ii.

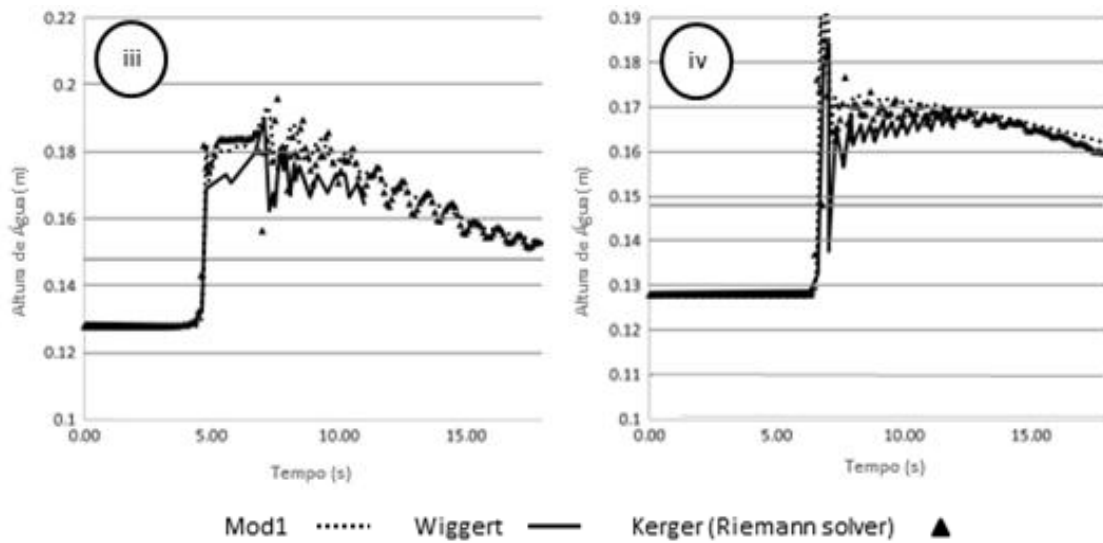


Figura 4.13b – Comparação com os resultados do teste de Kerger *et al.* (2011): secção iii e iv.

Para uma visualização mais global dos resultados obtidos apresentam-se de seguida dois gráficos de superfície: o primeiro (Figura 4.14) relaciona as variáveis nível de água, tempo e secção da conduta, o segundo (Figura 4.15) mostra a interacção entre o caudal, o tempo e a secção da conduta.

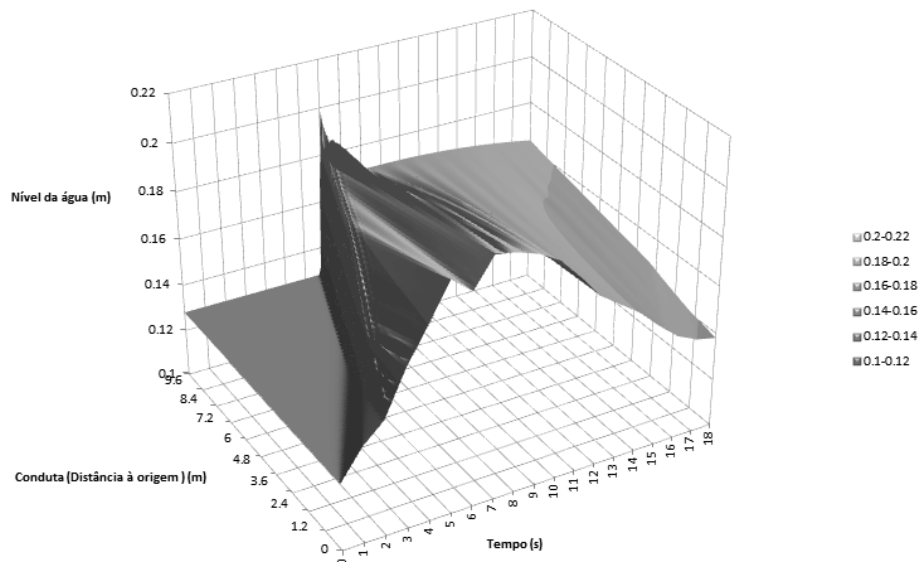


Figura 4.14 – Alturas de água a variarem no tempo e espaço para o teste de Wiggert.

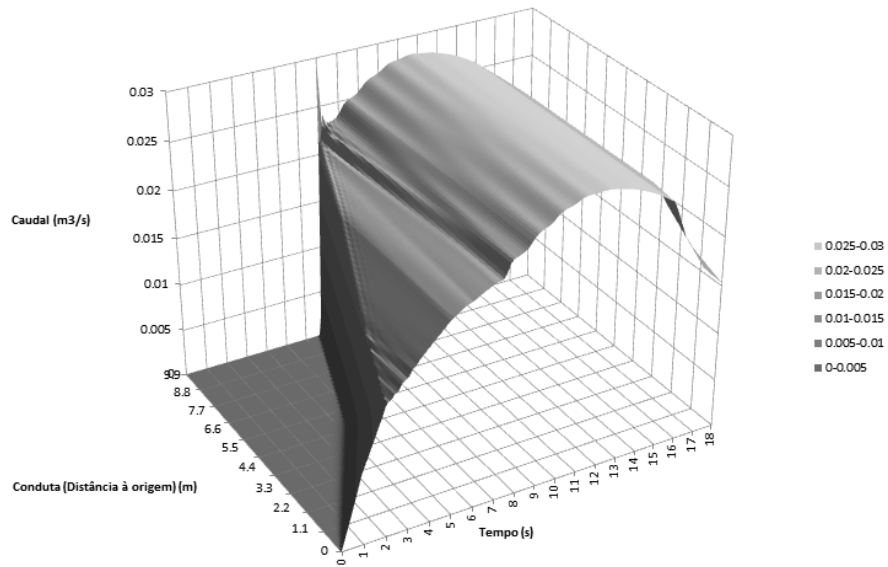


Figura 4.15 – Caudais a variarem no tempo e espaço para o teste de Wiggert.

Depois da apresentação dos resultados, será altura de se fazer testes quanto à influência da largura da fenda (B_{fenda}) nos resultados obtidos para a secção distanciada de 3.5m de jusante. A Figura 4.16 corresponde a valores de B_{fenda} com a ordem de grandeza de 10^{-2} a 10^{-4} m e a Figura 4.17 com grandezas de 10^{-3} m.

Largura da Fenda de Preissmann

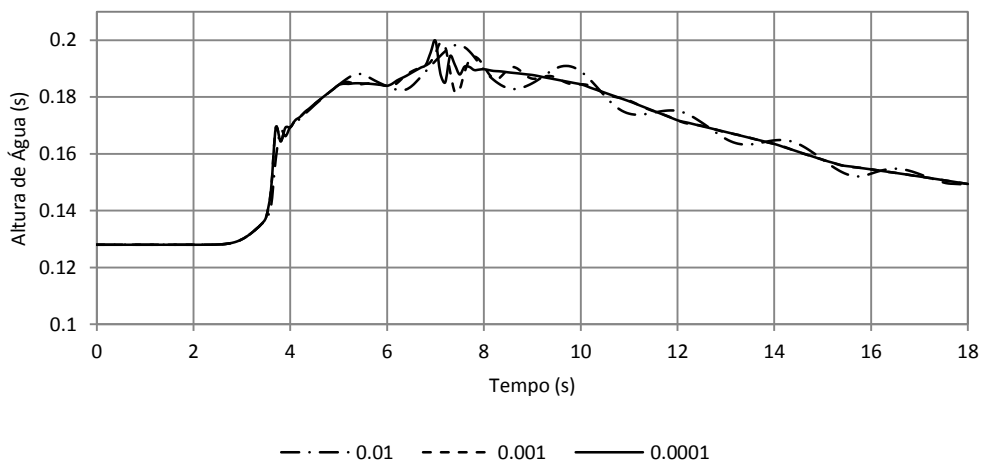


Figura 4.16 – Influência da largura da secção de Preissman nos resultados para valores desde 10^{-2} a 10^{-4} m.

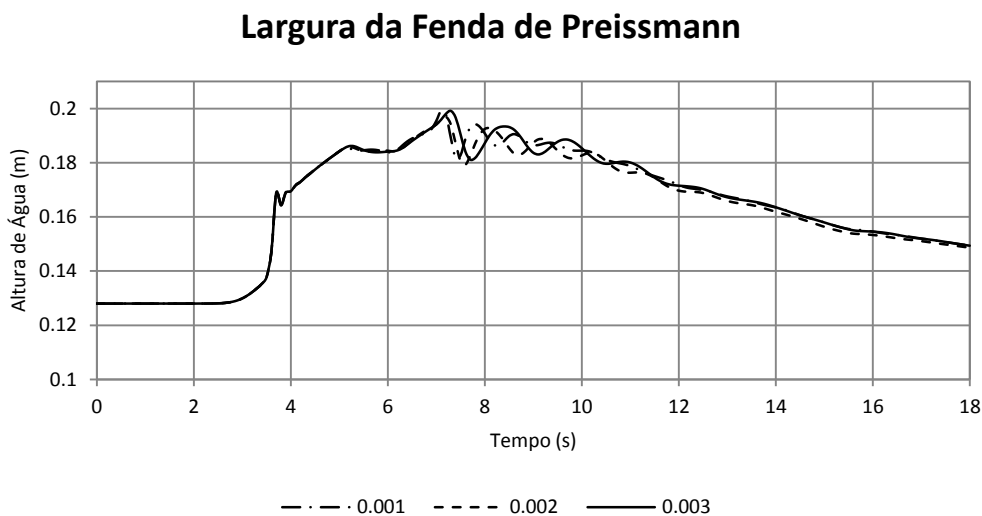


Figura 4.17 – Influência da largura da secção de Preissman nos resultados para valores na ordem dos 10^{-3} m.

4.3.2. Discussão dos resultados do teste de Wiggert

Para o teste de Wiggert é somente proposto o Mod1. Este é realmente o modelo que consegue compatibilizar um bom tempo de cálculo com soluções numéricas razoáveis neste caso de estudo. Este modelo é a base do SIPSON 1D/1D de Djordjević (2004) que será validado em instalação experimental integrado nos projectos da FCT: PTDC/ECM/105446/2008 e PTDC/AAC-AMB/101197/2008 no qual esta tese está inserida.

As condições de fronteira do modelo foram feitas com a imposição de hidrogramas que se ajustam bastante bem aos utilizados por Wiggert. O facto de terem sido dadas alturas pontuais em função do tempo, faz com que se observem alguns troços rectilíneos e alguns pontos angulosos que não se adaptam ao diagrama curvilíneo apresentado (Figura 4.11).

Em relação aos resultados obtidos na secção que dista 3.5m da extremidade montante (Figura 4.12), a frente de onda, tal como se equacionava, chegou à secção de controlo (zona A) aos 3.6s entrando o colector instantaneamente em carga. Até à zona B a secção ainda não sentiu os efeitos da onda reflectida a jusante, observando-se uma pressão quase constante não ocorrendo as oscilações numéricas apresentadas por Bourdarias. Por fim, a zona C é caracterizada por ter um comportamento oscilatório da pressão causada pelas reflexões da onda que o Mod1 apesar das apresentar, não as faz com grande amplitude comparativamente com o modelo de Bourdarias e o resultado experimental de Wiggert.

Kerger (2011) utilizou o mesmo teste de Wiggert para validar o seu modelo com o solver de Riemman (Figura 4.13). Os resultados do Mod1, foram uma vez mais bastante peremptórios no que toca à adequabilidade deste modelo, tendo-se obtido hidrogramas que se sobrepõem de uma forma quase perfeita aos obtidos por Kerger nas várias secções consideradas: 0.5m, 3.5m, 5.5m e 9.5m.

Numa análise da Figura 4.16 pode-se concluir que só para valores de B_{fenda} inferiores a 0.001m é possível eliminar as oscilações numéricas muito características das curvas com largura de fenda na ordem dos 0.01m e 0.001m. Assim sendo, é necessário a celeridade ter valores superiores a 27.2m/s (35) para os resultados serem credíveis.

Para variações mais pequenas da largura da fenda, na ordem dos 10^{-3} m, as diferenças não são tão evidentes, observando-se apenas algumas discrepâncias nas ondas de reflexão (Figura 4.17). Quanto menor for o valor B_{fenda} , menor vai ser o período da onda.

4.4. Teste de Vasconcelos

4.4.1. Descrição do teste

Este teste baseia-se no enchimento de uma conduta até entrar em pressão, partindo de um regime estacionário ($Q_0=0\text{m}^3/\text{s}$).

A estrutura laboratorial utilizada por Vasconcelos *et al.* (2006) consiste numa conduta em acrílico horizontal com $L=14.33\text{m}$ e $D=9.4\text{cm}$. A montante e a jusante existem dois reservatórios, o primeiro de forma paralelepípedica com uma secção $0.25\times 0.25\text{m}$ e altura de 0.31m , o segundo de forma cilíndrica com $D=0.19\text{m}$ como se pode ver na Figura 4.18. A altura do tanque cilíndrico é suficiente para que não exista qualquer descarga de caudal através da sua zona superior.

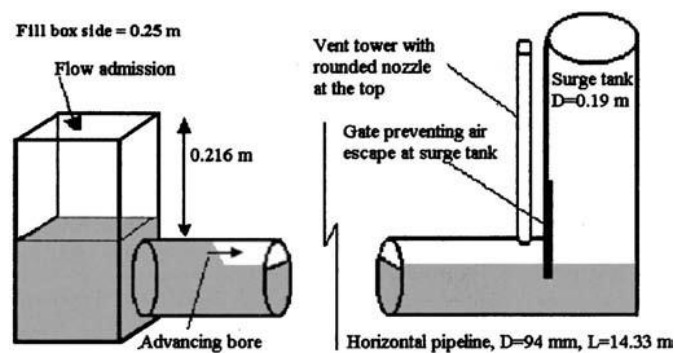
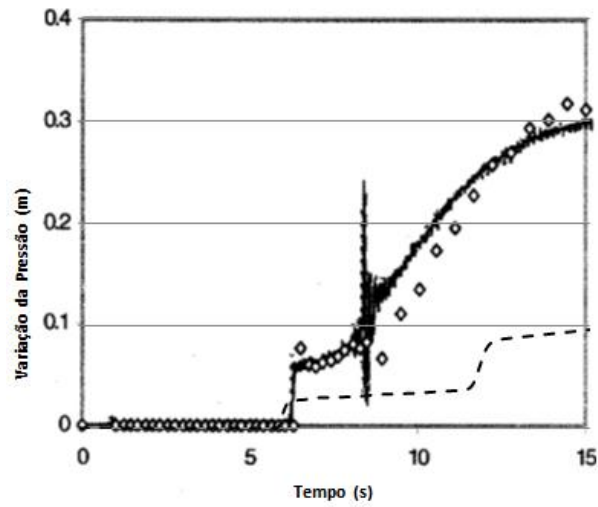


Figura 4.18 – Esquema da estrutura laboratorial (Vasconcelos *et al.*, 2006).

O caudal de entrada é fixado em 3.1 l/s e o nível de água inicial em 7.3cm (78% do diâmetro da conduta) sem velocidade inicial (repouso como condição inicial). O valor da rugosidade de Manning assumida foi $n=0.012$. Foi considerado $\Delta x=0.1433\text{m}$ e $\Delta t=0.085\text{s}$.

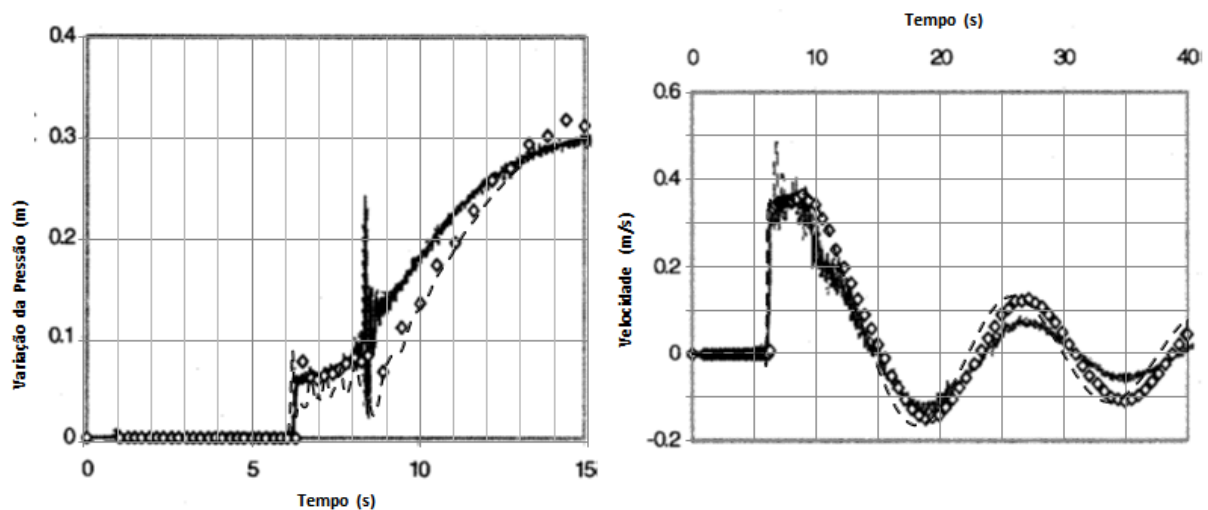
As condições de fronteira consideradas pelo autor não foram um dado fácil de obter à partida por inexistência de informação a esse respeito. Inicialmente considerou-se que a condição de montante seria um caudal de entrada constante de $Q=3.1\text{m}^3/\text{s}$ e a condição de jusante $Q=0\text{m}^3/\text{s}$ com uma largura de fenda (B_{fenda}) de 0.03m , resultando o gráfico da Figura 4.19 para uma secção distanciada de 9.9m de montante para o modelo Mod1.



Mod1 - - TPA — Resultado Experimental \diamond

Figura 4.19 – Resultado do modelo Mod1 sem condições de fronteira de reservatório.

Colocando as condições de reservatório e considerando Δx de 0.1433m, Δt igual a 0.085s e largura da fenda de Preissman de 0.00004m ($a=41.4\text{m/s}$, de acordo com (35)), pode-se agora retirar os resultados obtidos com o modelo Mod1 e sobrepô-los aos conseguidos por Vasconcelos (2006) (Figura 4.20).



(a)

(b)

Mod1 - - TPA — Resultado Experimental \diamond

Figura 4.20 – Gráficos de pressão (a) e velocidade (b) na secção a 9.9m da extremidade de montante e considerando condições de fronteira reservatório com o modelo Mod1.

Para que se consiga avaliar globalmente os resultados obtidos, apresentam-se de seguida os gráficos de alturas de água e caudais ao longo do tempo e do espaço (Figura 4.21 e Figura 4.22, respectivamente).

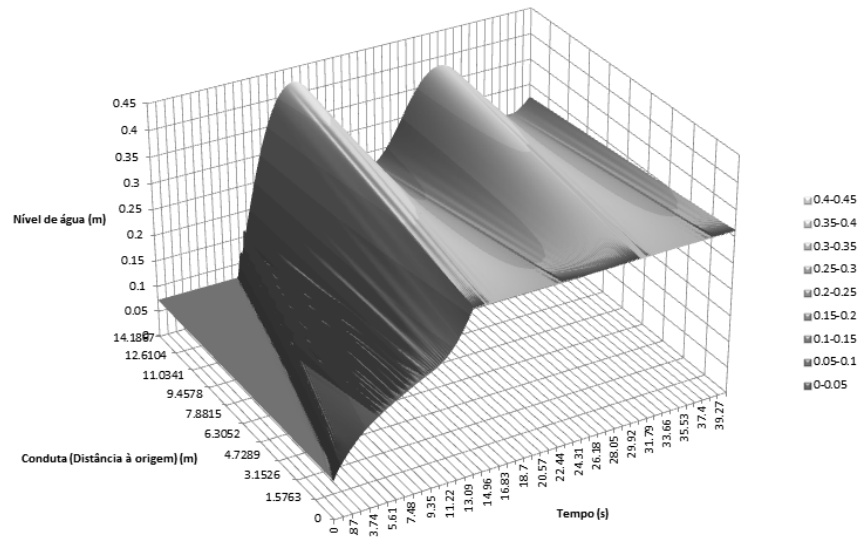


Figura 4.21 - Alturas de água a variarem no tempo e espaço para o teste de Vasconcelos com o modelo Mod1.

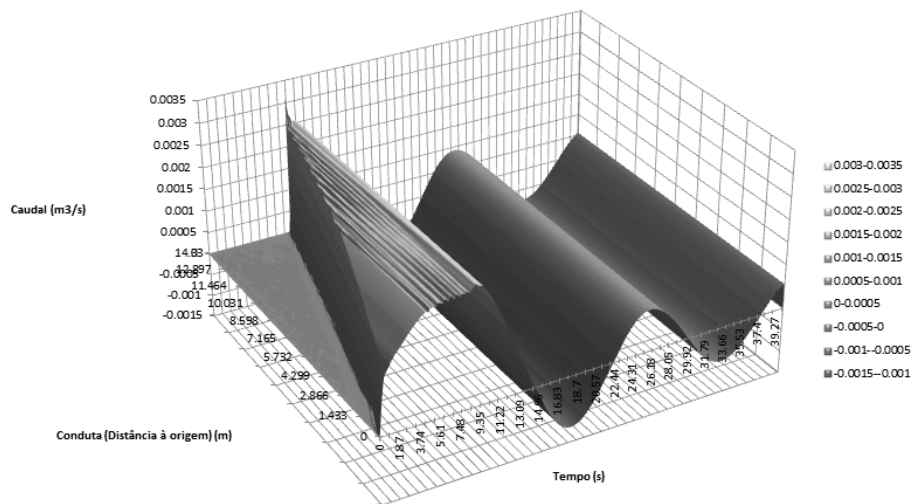
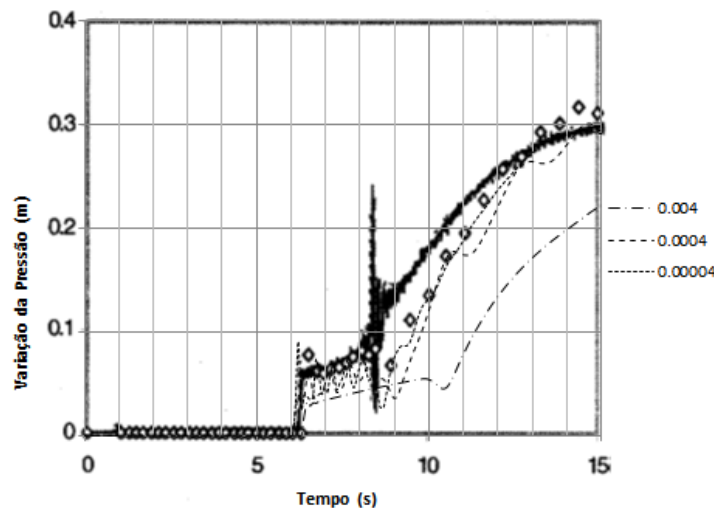


Figura 4.22 - Caudais a variarem no tempo e espaço para o teste de Vasconcelos com o modelo Mod1.

Em relação à variação da largura da fenda de Preissmann, é possível obter o gráfico da Figura 4.23 para valores da ordem de grandeza dos 10^{-3} a 10^{-5} m.



TPA — Resultado Experimental ◇

Figura 4.23 – Influência da largura da secção de Preissman nos resultados para valores desde 4×10^{-3} a 4×10^{-5} m com o modelo Mod1.

4.4.2. Discussão dos resultados do teste de Vasconcelos

Uma vez mais apenas será submetido a este teste o Mod1, pelas razões já apresentadas aquando do teste de Wiggert.

Quando se começou por considerar um caudal de entrada constante e um caudal de saída igual a zero, foi perceptível pelos resultados que algo estaria incorrecto na consideração das condições de fronteira (Figura 4.19). Mas na realidade, não era perceptível pelos dados do teste se o caudal de 3.5l/s era aduzido ao reservatório ou se entrava directamente e de forma constante na conduta quando se tratava da CF de montante. A jusante, realmente a situação de $Q=0\text{m}^3/\text{s}$ não seria de todo absurda face ao esquema e aos dados fornecidos, mas o enchimento do reservatório e o aumento da carga hidráulica no fundo do mesmo, provocam uma diminuição do caudal circulado na conduta até ao ponto em que o sistema entra em equilíbrio. Além disso, os reservatórios quando apresentam dimensões consideráveis, são elementos dos circuitos hidráulicos que absorvem as ondas de choque.

Com a colocação de CF de tipo reservatório os resultados foram melhores que o esperado (Figura 4.20). A curva que representa as alturas água em função do tempo para a secção

distanciada 9.9m de montante tem um ajuste bastante rigoroso aos resultados experimentais obtidos por Vasconcelos e está isenta de um comportamento oscilatório registado aos 7.5s pelo modelo TPA. Já a curva da velocidade em função do tempo apresenta um ligeiro atraso com o Mod1 mas uma amplitude correcta, uma vez mais contrariamente ao modelo TPA.

O parâmetro B_{fenda} apresenta bons resultados para valores inferiores a 10^{-5} m, com os quais elimina por completo as oscilações que os gráficos ostentavam (Figura 4.23). Este valor de B_{fenda} corresponde a uma celeridade de aproximadamente 40m/s (35).

5. CONCLUSÕES

Fundamentado nos resultados obtidos para escoamento exclusivamente com superfície livre, é peremptório afirmar que todos os modelos estão a utilizar adequadamente as equações de Saint-Venant para a simulação das características da onda proposta quando esta não é composta por pontos angulosos ou “picos” com os quais os modelos que utilizam uma linearização das equações perdem rigor. Pode-se também concluir que os modelos que usam a discretização em ordem às variáveis (A, Q) são mais instáveis e criam algumas oscilações nos resultados.

Quando se entra nos testes com superfície livre e pressão (regime misto de escoamento), para o qual esta tese se direcciona, verificou-se que os resultados são um pouco diferentes de modelo para modelo e dependem muito do tipo de secção transversal que se está a utilizar, sendo que os melhores resultados são os apresentados para o colector de secção rectangular.

Os modelos que utilizam a discretização por MDF nas variáveis (A, Q) a par com o modelo que utiliza o MOC, possuem menor versatilidade quando se pretende introduzir equações de fronteira especiais como por exemplo, reservatórios.

O esforço computacional, traduzido através do número de ciclos realizados por cada modelo, é substancialmente superior nos modelos que utilizam a discretização por MDF nas variáveis (A, Q) .

A largura da fenda de Preissman apresenta bons resultados na simulação da pressão da conduta para valores inferiores a 10^{-4} m e valores de celeridade entre os 20 e os 40m/s. Estes valores estão dentro das gamas propostas por outros investigadores. Verificou-se ainda a necessidade do MOC empregar uma fenda de Preissman com uma transição suave para garantir a convergência da solução, não sendo esta transição necessária no Mod1.

Como conclusão final, comprova-se que o modelo mais versátil a nível da definição das condições de fronteira, com um tempo de cálculo e um esforço computacional razoavelmente pequeno e com resultados bastante aceitáveis nos mais diversos exemplos é o Mod1, o qual utiliza uma formulação das equações de Saint-Venant nas variáveis (Y, Q) , com recurso ao esquema de MDF implícito de Preissmann e o artifício da fenda de Preissman.

6. BIBLIOGRAFIA

- Abreu, J. M., 2004. Estudo de Fluxos no Estacionários a Pressão com Modelos 1-D y 2-D. Universidade Politécnica de Valência, Valência, Spain.
- Abreu, J. M.;Cabrera, E.;Garcia-Serra, J.;Izquierdo, J., 1991. Boundary Between Elastic and Inelastic Models in Hydraulic Transients Analysis With Entrapped Air Pockets, Proceedings on the International Meeting on Hydraulic Transients with Water Column Separation, Valência, Spain.
- Almeida, A.;Koelle, E., 1992. Fluid transients in pipe networks. Computational Mechanics Publications, Southampton and Boston, Mass. and London and New York, p. 564 p.
- Amado, J. M. P.;Marques, J. A. A. S., 2004. Modelação Hidráulica de Escoamentos Permanentes e Variáveis em Pressão, Método das Características "Adaptado", Anais do 7º Congresso da Água, Lisboa, Portugal.
- Araújo, F. F. V., 2010. Modelo Hidráulico Baseado no Método das Características e Algoritmos Genéricos para Otimização da Operação de Redes de Abastecimento de Água e de Estações de Bombeamento, Departamento de Engenharia Hidráulica e Ambiental. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.
- Bourdarias, C.;Gerbi, S., 2007. A finite volume scheme for a model coupling free surface and pressurised flows in pipes. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 209, 109-131.
- Brufau, P.;Vázquez-Cendón, M. E.;García-Navarro, P., 2002. A numerical model for the flooding and drying of irregular domains. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 39(3), 247-275.
- Capart, H.;Sillen, X.;Zech, Y., 1997. Numerical and experimental water transients in sewer pipes. *J. Hydraul. Res.* 35(5), 659–670.
- Chaudhry, M. H., 1987. Applied hydraulic transients, Second ed. Van Nostrand Reinhold Company Inc., New York, USA.
- Courant, R.;Friedrichs, K.;Lewy, H., 1967. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM J.* 11, 215–234.
- Cunge, J. A., 1975. Two-Dimensional Modeling of Flood Plains, Water Resources Publications, Fort Collins, CO, Mahmood, K., Yevjevich, V. ed. Water Resources Publications, Fort Collins, CO.
- Cunge, J. A.;Holly, J. R.;Verwey, A., 1980. Practical Aspects of Computational River Hydraulics. Pitman Publishing Ltd., London, England.
- Cunge, J. A.;Wegner, M., 1964. Integration numerique des equations d'ecoulement de Barre de St. Venant par un schema implicite de differences finies. Application au cas d'une galerie tantôt en charge tantôt en surface libre. *La Houille Blanche* 1, 33-39.
- De Saint-Venant, A. B., 1871. Thorie du mouvement non-permanent des eaux avec application aux crues des rivieres et l'introduction des mares dans leur lit. *Seances Acad. Sci.*

- Djordjević, S.;Prodanovic, D.;Walters, G. A., 2004. Simulation of transcritical flow in pipe/channel networks. *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE 130(12), 1167-1178.
- Dodd, N., 1998. Numerical model of wave run-up, overtopping, and regeneration. *J. Waterw., Port, Coastal, Ocean Eng.* 124(2), 73-81.
- Dong, N. T., 1990. Sur une méthode numérique de calcul des écoulements non permanents soit à surface libre, soit en charge, soit partiellement à surface libre et partiellement en charge. *La Houille Blanche*, 149–158.
- Fennema, R. J.;Chaudhry, M. H., 1987. Simulation of one-dimensional dam-break flows. *Journal of Hydraulic Research* 25(1), 41–51.
- Ferreira, R. M., 2005. River morphodynamics and sediment transport conceptual model and solutions, IST/DECivil. UTL, Lisbon.
- Fraccarollo, L.;Toro, E. F., 1995. Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam- break type problems. *J. Hydraul. Res.* 33, 843–864.
- Franco, A. B., 1988. Simulação de cheias provocadas por roturas de barragens em série, IST/DECivil. UTL, Lisbon.
- Franco, A. B., 1996. Modelação computacional e experimental de escoamentos provocados por roturas de barragens., IST/DECivil. UTL, Lisbon.
- Garcia-Navarro, P.;Alcrudo, F.;Saviron, J., 1992. 1-D open channel flow simulation using TVD-MacCormack scheme. *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE 118-(10), 1359–1372.
- Garcia-Navarro, P.;Priestley, A.;Alcrudo, F., 1994. Implicit method for water flow modeling in channels and pipes. *J. Hydraul. Res.* 32(5), 721–742.
- Godunov, S. K., 1959. A Difference Scheme for Numerical Solution of Discontinuous Solution of Hydrodynamic Equations. *Math. Sbornik* 47, 271–306.
- IPCC, 2007. *Mudança do Clima 2007: a Base das Ciências Físicas*, Paris.
- Kerger, F.;Arhambeau, P.;Ercicum, S.;Dewals, B. J.;Piroton, M., 2011. An exact Riemann solver and a Godunov scheme for simulating highly transient mixed flows. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 235(8), 2030-2040.
- Korteweg, D. J., 1878. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in elastischen Röhren, *Annalen der Physik und Chemie*, German, pp. 525-542.
- Kutija, V.;Hewett, C. J. M.;Engineering, C., 2002. Modelling of supercritical flow conditions revisited ; NewC Scheme: Une nouvelle perspective pour la modélisation de sécoulements torrentiels: le schéma NewC. 40(2), 145-152.
- Leandro, J. E. T., 2007. Enabling MacCormack's numerical scheme to perform dam-break calculation, DEC., Universidade Técnica de Lisboa. Instituto Superior Tecnico, Lisbon.
- Leandro, J. E. T., 2008. Advanced Modelling of Flooding in Urban Areas Integrated 1D / 1D and 1D / 2D Models. University of Exeter, Exeter.
- Lighthill, M. J., 1978. *Waves in Fluids*, Cambridge University Press, 2 ed.

- MacCormack, R. W., 1969. The Effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. AIAA Paper, 69-354.
- Mahmood, K.;Yevjevic, V., 1975. Unsteady Flow in Open Channels. Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado.
- Marques, J. A. A. S.;Sousa, J. J. O., 2008. Hidráulica Urbana - Sistemas de Abastecimento de Água e de Drenagem de Águas Residuais, 2ª ed. Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra, p. 426.
- Marwell, D. T. B., 2009. Modelo de transição de regime de escoamento na simulação de transientes subatmosféricos em adutoras de água, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Universidade de Brasília - Faculdade de Tecnologia, Brasília.
- McCorquodale, A.;Hamam, M. A., 1982. Transient conditions in the transition from gravity to surcharged sewer flow. J. Civ. Eng., 189–196.
- Meselhe, E.;Holly, F., 1997. Invalidity of Preissmann scheme for transcritical flo. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE 123(7), 652–655.
- Mohammadian, A.;Le Roux, D. Y.;Tajrishi, M., 2007. A conservative extension of the method of characteristics for 1-D shallow flows. Applied Mathematical Modelling. 31(2), 332–348.
- Murray, 1992. Transient analysis of partially full pipe flow, Proceedings on the International Conference on Unsteady Flow and Fluid Transients, Durham (England), pp. 143-157.
- Neves, M. G.;Villanueva, A.;Tucci, C. E., 2001. Simulação Hidrodinâmica Integrada do Escoamento em Redes de Drenagem Urbana e nas Ruas, RBRH – Revista Brasileira de Recursos Hídricos, Brasil, pp. 111-139.
- Porto, R. M., 1998. Hidráulica Básica, 4ª ed. EESC USP.
- Preissmann, A., 1961. Propagation des intumescences dans les canaux et rivières, 1st Congress of the French Association for Computation (AFCALTI), Grenoble.
- Quintela, A. C., 2007. Hidráulica, 10ª ed. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Ramos, H., 1995. Simulação e controlo de transitórios hidráulicos em pequenos aproveitamentos hidroelectricos. modelação e análise dos efeitos induzidos pela sobrevelocidade de turbogeradores., IST/DECivil. UTL, Lisbon.
- Richtmyer, R. D.;Morton, K. W., 1967. Difference Methods for Inicial-Value Problems, 2nd ed. Interscience Publishers, New York, USA.
- Silva, E. C. N.;Buiochi, F., 2011. Apontamentos de Mecânica Computacional, Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos da Escola Politécnica. Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Song, C. S. S.;Cardle, J. A.;Leung, K. S., 1983. Transient Mixed-flow Models for Storm Sewers. J. Hydraul. Eng., ASCE 109(11), 1487–1504.
- Strelkoff, T., 1970. Numerical Solution of Saint-Venat Equations. Journal of Hyd. Div., ASCE 96, 223-252.

- Toro, E. F., 2001. *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*. JohnWiley and Sons Ltd., London, England.
- Tseng, M. H.;Chu, C. R., 2000. The simulation of dam-break flows by an improved predictor-corrector TVD scheme. *Advances in Water Resources* 23(6), 637–643.
- UE, D., 2007/60. DIRECTIVA 2007/60/CE DO PARLAMENTO EUROPEU E DO CONSELHO. *Jornal Oficial da União Europeia* 288, 27-34.
- USACE, U. S. A. C. o. E., 2002. U.S. Army Corps of Engineers Coastal Engineering Manual, in: USACE (Ed.), Vicksburg, Mississippi.
- Vardy, A.;Pan, Z., 1997. Quasi-steady friction in transient polytropic flow. *Computers & Fluids* 26(8), 793-809.
- Vasconcelos, J. G., 2008. Dinâmica dos Fluidos Computacionais Aplicada a Túnel de Washington,D.C., *Anais Eletrônicos do XVII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, São Paulo, Brasil.
- Vasconcelos, J. G.;Wright, S. J., 2004. Numerical modeling of the transition between free surface and pressurized flow in storm sewers, in: James, W. (Ed.), *Innovative modeling of urban water systems*, Monograph 12. CHI Publications, Ontario, Canada.
- Vasconcelos, J. G.;Wright, S. J.;Roe, P. L., 2006. Improved Simulation of Flow Regime Transition in Sewers: Two-Component Pressure Approach. *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE 132(6), 553-561.
- WHAMO, 2009. *Water Hammer and Mass Oscillation*. US Corps of Engineer.
- Wiggert, D. C., 1972. Transient Flow in Free-surface, Pressurized Systems. *Journal of Hydraulic Div., ASCE* 98(1), 11-27.
- Wylie, E. B.;Streeter, V. L., 1978. *Fluid Transients*. Mc Graw-Hill, New York, USA.
- Wylie, E. B.;Streeter, V. L., 1993. *Fluid Transients in Systems*. Prentice-Hall. Upper Saddle River. N.J.
- Yen, B. C.;Akan, A. O., 1999. *Hydraulic Design of Urban Drainage Systems*. Hydraulic Design Handbook, McGraw-Hill.