



Universidade de Coimbra  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Departamento de Engenharia Electrotécnica e de  
Computadores

# Controlo de Seguimento de Caminho de Robôs Móveis com Rodas na Presença de Incertezas

**Paulo Manuel Machado Coelho**

Janeiro de 2004



# Controlo de Seguimento de Caminho de Robôs Móveis com Rodas na Presença de Incertezas

Dissertação submetida à Universidade de Coimbra para  
obtenção do grau de Doutor  
em Engenharia Electrotécnica na especialidade de  
Instrumentação e Controlo

apresentada por

Paulo Manuel Machado Coelho

realizada sob a orientação de,  
Prof. Doutor Urbano José Carreira Nunes

||

Janeiro de 2004

iii



*Ao meu filho, João Pedro*



# Agradecimentos

Gostaria, em primeiro lugar, de expressar o mais profundo e sincero agradecimento ao meu orientador, Prof. Doutor Urbano Nunes, pela oportunidade que me deu de enveredar pelo tema deste trabalho, bem como pela sua amizade e apoio nos momentos decisivos. O Prof. Doutor Urbano Nunes, foi uma constante fonte de orientação e aconselhamento ao longo do período em que decorreu esta investigação.

A todos os meus colegas do Instituto de Sistemas e Robótica, que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho, quero agradecer o apoio que me deram e, em particular, à Ana Cristina e ao Rodrigo Maia, pelas ajudas e sugestões na utilização do *Matlab/Simulink*<sup>®</sup>.

Quero ainda expressar, em especial, os meus agradecimentos ao Rui Cortesão pela disponibilidade e apoio prestado no esclarecimento de algumas dúvidas sobre o controlador com observador activo (*AOB*).

Devo também uma palavra de agradecimento, pelas facilidades concedidas para a realização deste trabalho, às seguintes Instituições e Programas: Instituto de Sistemas e Robótica da Universidade de Coimbra; Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores da Universidade de Coimbra; Departamento de Engenharia Electrotécnica do Instituto Politécnico de Tomar, e Programa PRODEP III, acção 5.3 (pelos fundos concedidos). Este trabalho foi ainda parcialmente apoiado pela FCT, através do projecto TSM02 (POSI/41618/SRI/2001).

Finalmente agradeço, intimamente, à minha família, em particular aos meus pais, mulher e filho, pelo encorajamento, compreensão e constante apoio.

Coimbra, Janeiro de 2004,

*Paulo Coelho*





# Resumo

Ao longo desta tese é apresentado e discutido o problema do controlo de seguimento de caminho de robôs móveis com rodas, sendo discutidas, clarificadas e sistematizadas as metodologias necessárias à aplicação de técnicas de controlo avançadas. Neste estudo é proposta e descrita, em detalhe, uma nova estratégia de controlo de seguimento de caminho, composta por uma malha interna de linearização por realimentação entrada-saída e por uma malha externa de controlo linear com o controlador AOB (controlador com observador activo baseado no filtro de Kalman). Nos primeiros capítulos são sistematizados e desenvolvidos os conceitos teóricos necessários à obtenção dos modelos cinemático e dinâmico (usando o formalismo de Lagrange) do robô móvel com rodas. Seguidamente, é apresentada uma representação em espaço de estados, não-linear, do sistema dinâmico com restrições holónomas e não-holónomas, que contribui, de um modo conveniente, para a aplicação da linearização por realimentação. É verificado que o sistema não-linear, em estudo, não é linearizável por realimentação entrada-estado, no entanto é linearizável por realimentação entrada-saída quando são especificadas as equações de saída mais adequadas, neste caso para o controlo de seguimento de caminho. A estratégia de controlo de seguimento de caminho proposta, tem a particularidade de ser usada em modo discreto e de permitir que o sistema em malha fechada tenha um comportamento desejado, sendo robusta a incertezas e perturbações.

Finalmente, o desempenho do algoritmo de seguimento de caminho proposto é verificado exaustivamente por meio de simulação computacional, comparando-o com outras estratégias de controlo usadas na malha de realimentação linear (das variáveis de estado), tais como Controlador de Colocação de Pólos (PPC) e Controlador de Colocação de Pólos com um Observador por filtro de Kalman (CKF), de modo a mostrar a sua validade, estabilidade, eficácia e robustez.



# Abstract

This thesis presents and discusses the path following control problem of a wheeled mobile robot, discussing, clarifying and systematizing the methodologies needed to the application of advanced control techniques. In this study, a new control strategy for the path following control of wheeled mobile robots, composed by an internal input-output feedback linearization loop and by an external linear loop with an AOB controller (Kalman based Active Observer Controller), is proposed and described in detail. In the first chapters theoretical concepts needed to the obtention of kinematic and dynamic (using Lagrange formalism) models of the wheeled mobile robot, are systematized and developed. Following, a non-linear state-space representation of the dynamical system with holonomic and non-holonomic constraints that contributes, in a convenient way, to the implementation of feedback linearization, is presented. The non-linear system, in study, is proven to be non-linearizable by input-state feedback, however it is linearizable by input-output feedback, when the appropriate output equations, in this case for the path following control, are specified. The proposed path following control strategy presents the particularities of being used in discrete mode and allowing the closed loop system to present the desired behaviour, being robust against uncertainties and disturbances.

Finally, the performance of the proposed path following algorithm is verified via extensive computer simulation, and it is compared with other control strategies in the linear feedback loop, such as Pole Placement Controller (PPC) and Pole Placement Controller with a Kalman Filter Observer (CKF), so as to verify its validity, stability, effectiveness and robustness.



# Conteúdo

	v
<b>Agradecimentos</b>	<b>vii</b>
<b>Resumo</b>	<b>ix</b>
<b>Abstract</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	1
1.2 Seguimento de Caminho . . . . .	3
1.2.1 Modelos Cinemáticos e Dinâmicos . . . . .	4
1.2.2 Linearização por Realimentação . . . . .	6
1.2.3 Controlo Adaptativo . . . . .	6
1.2.4 Estimação . . . . .	7
1.3 Objectivos . . . . .	9
1.4 Contribuições Chave . . . . .	10
1.5 Estrutura da Tese . . . . .	11
<b>2 Estado da Arte</b>	<b>13</b>
2.1 Aplicações e Controlo de WMRs . . . . .	15
2.2 Seguimento de Caminho/Trajectória . . . . .	22
2.2.1 Cinemática/Dinâmica . . . . .	23
2.2.2 Sistemas de Controlo . . . . .	24
2.2.3 Robustez . . . . .	30
2.2.4 Cadeiras de Rodas Robotizadas . . . . .	33
2.3 Conclusões . . . . .	34

<b>3</b>	<b>Cinemática de Robôs Móveis</b>	<b>35</b>
3.1	Introdução . . . . .	35
3.2	Modelo Cinemático . . . . .	39
3.2.1	Introdução . . . . .	39
3.2.2	Atribuição dos Sistemas de Coordenadas . . . . .	40
3.2.3	Matrizes de Transformação . . . . .	46
3.2.4	Álgebra de Matrizes de Transformação de Coordenadas . . . . .	51
3.2.5	Posição . . . . .	54
3.2.6	Velocidade . . . . .	55
3.2.7	Aceleração . . . . .	60
3.3	Equação Composta do Robô . . . . .	60
3.3.1	Solução da Velocidade Inversa Actuada . . . . .	62
3.3.2	Solução da Velocidade Avançada Detectada . . . . .	65
3.4	Cinemática da Cadeira de Rodas Robotizada . . . . .	68
3.4.1	Matrizes de Transformação . . . . .	69
3.4.2	Matrizes Jacobianas das Rodas . . . . .	72
3.4.3	Solução Inversa Actuada . . . . .	73
3.4.4	Solução Avançada Detectada . . . . .	75
3.5	Transformação das Velocidades do Robô . . . . .	80
3.5.1	Modelo Cinemático e Restrições do WMR . . . . .	82
3.6	Conclusões . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Dinâmica de Robôs Móveis</b>	<b>89</b>
4.1	Introdução . . . . .	89
4.2	Formulação de Lagrange . . . . .	91
4.2.1	Elemento Único . . . . .	91
4.2.2	Dinâmica Generalizada . . . . .	94
4.3	Robôs Móveis Não-Holónomos . . . . .	95
4.3.1	Classificação de Sistemas Não-Holónomos . . . . .	96
4.3.2	Modelo Dinâmico . . . . .	102
4.4	Representação em Espaço de Estados . . . . .	109
4.5	Conclusões . . . . .	111
<b>5</b>	<b>Linearização por Realimentação</b>	<b>113</b>
5.1	Linearização por Entrada-Saída . . . . .	115
5.2	Equações de saída . . . . .	123
5.2.1	Seguimento de Caminho . . . . .	124

5.3	Conclusões . . . . .	128
<b>6</b>	<b>Seguimento de Caminho - Contínuo</b>	<b>129</b>
6.1	Projecto do Controlador . . . . .	129
6.2	Resultados de Simulação . . . . .	130
6.2.1	Velocidades Iniciais . . . . .	132
6.2.2	Ângulos Iniciais . . . . .	134
6.3	Controlador do WMR Diferencial . . . . .	136
6.3.1	Simulações . . . . .	137
6.4	Conclusões . . . . .	141
<b>7</b>	<b>Seguimento de Caminho - Discreto</b>	<b>143</b>
7.1	Planta do Sistema: Discretização . . . . .	144
7.1.1	Discretização do Modelo de Posição . . . . .	144
7.1.2	Discretização do Modelo de Velocidade . . . . .	149
7.2	Colocação de Pólos . . . . .	151
7.2.1	Modelo de Posição . . . . .	152
7.2.2	Modelo de Velocidade . . . . .	154
7.3	Controlador AOB . . . . .	154
7.3.1	Estrutura do AOB - AOB-1 . . . . .	155
7.3.2	AOB-N . . . . .	160
7.3.3	Estratégias de Estimação e de Estabilidade do AOB .	164
7.4	Estrutura ‘Experimental’ . . . . .	165
7.4.1	Projecto do Controlador . . . . .	165
7.4.2	Matrizes Estocásticas do Modelo de Posição . . . . .	169
7.4.3	Matrizes Estocásticas do Modelo de Velocidade . . . .	169
7.4.4	Ruído de Medida . . . . .	169
7.5	Resultados de Simulação . . . . .	170
7.5.1	Seguimento de Caminho com AOB . . . . .	172
7.5.2	Seguimento de Caminho sem Perturbação . . . . .	176
7.5.3	Seguimento de Caminho com Perturbação na Posição	179
7.5.4	Seguimento de Caminho com Perturbação na Velocidade	181
7.5.5	Incertezas de Modelação nos Parâmetros Inerciais $m_c$ e $m_w$ . . . . .	183
7.5.6	Perturbação em Degrau e Rampa na Posição . . . . .	186
7.5.7	Influência dos Elementos da Matriz $Q_k$ . . . . .	191
7.5.8	Influência de MBA, SBA, HBA . . . . .	197

7.5.9	Influência do Valor de $\tau_c$ no AOB-1 e no CKF . . . . .	200
7.5.10	Seguimento de um Caminho ‘Composto’ . . . . .	204
7.6	Conclusões . . . . .	206
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>209</b>
8.1	Considerações Finais . . . . .	210
8.2	Trabalho Futuro . . . . .	216
<b>A</b>	<b>Definições e Teoremas</b>	<b>219</b>
<b>B</b>	<b>Aplicação do Método de Lagrange</b>	<b>227</b>
B.1	Centro Geométrico = Centro de Massa. . . . .	227
B.2	Centro Geométrico $\neq$ Centro de Massa. . . . .	235
<b>C</b>	<b>Dedução de Equações</b>	<b>245</b>
C.1	Cálculo das Derivadas de $z$ . . . . .	245
<b>D</b>	<b>Especificações do Sistema Físico “Real”</b>	<b>247</b>
D.1	Cadeira de Rodas . . . . .	248
D.2	Odometria . . . . .	249
<b>E</b>	<b>Complemento das Simulações</b>	<b>251</b>
E.1	MBA, SBA e HBA . . . . .	251
E.2	Caminho Completo . . . . .	253
E.2.1	Posição Inicial Correcta e Sem Perturbação . . . . .	253
E.2.2	Posição Inicial Distante e Sem Perturbação . . . . .	254
E.2.3	Posição Inicial Distante e Com Perturbação . . . . .	256
	<b>Bibliografia</b>	<b>258</b>



# Lista de Tabelas

3.1	Relações cinemáticas para os diferentes tipos de rodas . . . .	38
3.2	Atribuição dos sistemas de coordenadas . . . . .	43
3.3	Variáveis escalares . . . . .	48
3.4	Axiomas algébricos de matrizes-transformação-coordenadas .	52
3.5	Corolários algébricos de matrizes-transformação-coordenadas	53
6.1	Parâmetros cinemáticos . . . . .	131
7.1	Ganhos de Kalman, $K_k$ , para o modelo de posição . . . . .	187
7.2	Ganhos de Kalman, para o AOB-1 . . . . .	193
7.3	Ganhos de Kalman, para o AOB-2 . . . . .	194



# Lista de Figuras

3.1	Tipo de rodas omnidireccionais. . . . .	37
3.2	Graus de liberdade dos diferentes tipos de rodas. . . . .	38
3.3	Modelo do par planar de uma roda. . . . .	41
3.4	Atribuição dos sistemas de coordenadas num WMR. . . . .	42
3.5	Bola em movimento . . . . .	44
3.6	Gráfico de transformações de um WMR . . . . .	55
3.7	Atribuição do sistema de coordenadas da cadeira de rodas. . . . .	70
3.8	Robô móvel com rodas. . . . .	82
4.1	Elemento único rodando sobre uma junta. . . . .	91
6.1	Esquema de controlo em contínuo considerando a linearização por entrada-saída. . . . .	130
6.2	Seguimento de caminho com diferentes velocidades longitudinais iniciais: (a) efectuado para um caminho em linha recta; (b) efectuado para um caminho circular. . . . .	132
6.3	Posição relativa do WMR com diferentes velocidades longitudinais iniciais: (a) para o caminho em linha recta; (b) para o caminho circular. . . . .	133
6.4	Comportamento das velocidades quando o WMR ‘parte’ com diferentes velocidades longitudinais iniciais: (a) para o caminho em linha recta; (b) para o caminho circular. . . . .	134
6.5	Seguimento de caminho com diferentes ângulos de direcção iniciais: (a) efectuado para um caminho em linha recta; (b) efectuado para um caminho circular. . . . .	135
6.6	Comportamento das velocidades quando o WMR ‘parte’ com diferentes ângulos de direcção iniciais: (a) para um caminho em linha recta; (b) para um caminho circular. . . . .	135

6.7	Esquema de controlo em contínuo com o WMR diferencial. . . . .	136
6.8	Seguimento de caminho com velocidade inicial de $0\text{ m/s}$ : (a) efectuado para um caminho em linha recta; (b) efectuado para um caminho circular. . . . .	138
6.9	Comportamento da velocidade quando o WMR ‘parte’ com velocidade inicial de $0\text{ m/s}$ : (a) para o caminho em linha recta; (b) para o caminho circular. . . . .	138
6.10	Seguimento de caminho: (a) efectuado para um caminho em linha recta com ângulo de direcção inicial de $90.0^\circ$ ; (b) efectuado para um caminho circular com ângulo de direcção inicial de $135.0^\circ$ . . . . .	140
6.11	Comportamento da velocidade quando o WMR: (a) efectua o caminho em linha recta com ângulo de direcção inicial de $90.0^\circ$ ; (b) efectua o caminho circular com ângulo de direcção inicial de $135.0^\circ$ . . . . .	140
7.1	Observador Clássico. O erro do observador $-e_k$ é uma entrada indesejada que entra no sistema. $L$ representa o ganho (i.e. o controlador). . . . .	156
7.2	Controlador AOB. $L$ representa o ganho (i.e. o controlador) e o estado activo $\hat{p}_k$ compensa o erro $e_k$ referente à entrada do sistema. . . . .	157
7.3	Planta detalhada do sistema com linearização por entrada-saída, e alternativas possíveis a colocar na malha de realimentação linear, de modo a realizar o sistema de controlo. . . . .	166
7.4	Controlo de seguimento de caminho com controlador por colocação de pólos. $L_1$ representa o primeiro elemento dos ganhos $L$ , calculado para cada um dos modelos. . . . .	167
7.5	Controlo do seguimento de caminho com o CKF. $L_1$ representa o primeiro elemento dos ganhos $L$ , calculados para cada um dos modelos. . . . .	167
7.6	Controlo do seguimento de caminho com o AOB. $L_1$ representa o primeiro elemento dos ganhos $L$ , calculados para cada um dos modelos. . . . .	168
7.7	Ruído de medida. . . . .	170
7.8	Vista em detalhe da perturbação: (a) na referência da posição; (b) na referência da velocidade. . . . .	172

7.9	Comportamento do WMR usando AOB e sem perturbações. (a) Seguimento de caminho em linha recta. (b) Seguimento de caminho em círculo. (c) Velocidade longitudinal no seguimento de caminho em linha recta. (d) Velocidade longitudinal no seguimento de caminho em círculo. . . . .	173
7.10	Comportamento do WMR usando AOB para várias velocidades desejadas. (a) Caminho em linha recta. (b) Caminho circular. . . . .	174
7.11	Comportamento do WMR usando AOB, sem perturbações e para um caminho circular com raio=1m. (a) Seguimento de caminho partindo de posição no caminho. (b) Seguimento de caminho partindo de posição fora do caminho. (c) Velocidade longitudinal quando o WMR parte de posição no caminho. (d) Velocidade longitudinal quando o WMR parte de posição fora do caminho. . . . .	175
7.12	Seguimento de caminho para o caso de um caminho circular, usando AOB, CKF e PPC. . . . .	177
7.13	Comportamento do WMR usando AOB, CKF e PPC sem perturbações e para um caminho circular. (a) Velocidade do WMR. (b) Estado activo para o modelo de velocidade. (c) Posição relativa do WMR. (d) Estado activo para o modelo de posição. . . . .	178
7.14	Comportamento do WMR para o caso de um caminho circular usando AOB, CKF e PPC, na presença de perturbações. (a) Seguimento de caminho. (b) Velocidade longitudinal no seguimento de caminho. (c) Distância entre o caminho actual e o desejado, realizado pelo robô (i.e. posição relativa do WMR). (d) Estado Activo $\hat{p}_k$ para o AOB e perturbação. . .	180
7.15	Seguimento de caminho para o caso de um caminho circular, usando AOB, CKF e PPC. . . . .	181
7.16	Comportamento do WMR para o caso de um caminho circular usando AOB, CKF e PPC, na presença de perturbações na velocidade. (a) Posição Relativa do WMR. (b) Velocidade longitudinal no seguimento de caminho. (c) Estado Activo $\hat{p}_k$ para a posição. (d) Estado Activo $\hat{p}_k$ para a velocidade e perturbação. . . . .	182

7.17	Comportamento do WMR quando há um erro de modelação em $m_c$ e $m_w$ para o caso de uma linha recta e um caminho circular usando AOB, CKF e PPC. (a) Seguimento de caminho para um caminho em linha recta. (b) Seguimento de caminho para um caminho circular. (c) Velocidade longitudinal no seguimento de caminho de um caminho em linha recta. (d) Velocidade longitudinal no seguimento de um caminho circular. . . . .	184
7.18	Distância entre o caminho actual e o desejado realizado pelo robô (posição relativa), quando há um erro de modelação em $m_c$ e $m_w$ para o caso de um caminho circular, usando AOB, CKF e PPC. . . . .	185
7.19	Comportamento do estado activo quando há um erro de modelação em $m_c$ e $m_w$ para o caso de um caminho circular, usando o AOB. (a) Estado activo $\hat{p}_k$ para o modelo de velocidade. (b) Estado activo $\hat{p}_k$ para o modelo de posição. . . .	186
7.20	Comportamento do WMR, com AOB e na presença de perturbações na posição. (a) Seguimento de caminho com perturbação em degrau e com AOB-1. (b) Seguimento de caminho com perturbação em rampa e com AOB-1. . . . .	188
7.21	Comportamento do WMR, com AOB e na presença de perturbações na posição. (a) Seguimento de caminho com perturbação em degrau e com AOB-2. (b) Seguimento de caminho com perturbação em rampa e com AOB-2. . . . .	188
7.22	Comportamento do WMR, com AOB e na presença de perturbações na posição. (a) Velocidade longitudinal com diferentes perturbações e ordens de AOB. (b) Posição Relativa do WMR quando se usa diferentes perturbações e ordens de AOB. . . . .	189
7.23	Comportamento do WMR, com AOB e na presença de perturbações na posição. (a) Estado Activo do AOB-1 para a posição e perturbação em degrau. (b) Estado Activo do AOB-1 para a posição e perturbação em rampa. (c) Estado Activo do AOB-2 para a posição e perturbação em degrau. (d) Estado Activo do AOB-2 para a posição e perturbação em rampa. . . . .	190

7.24	Caminho circular com AOB-1 no modelo de posição, e diferentes $Q_{p_x}$ . (a) Seguimento de caminho. (b) Estado Activo do AOB-1 para a posição e perturbação em degrau. (c) Velocidade longitudinal . (d) Posição relativa. . . . .	192
7.25	Caminho circular com AOB-1 no modelo de posição, e diferentes $Q_{x_{r,k}}$ . (a) Seguimento de caminho. (b) Estado Activo do AOB-1 para a posição e perturbação em degrau. (c) Velocidade longitudinal . (d) Posição relativa. . . . .	195
7.26	Caminho circular com AOB-2 no modelo de posição, e diferentes $Q_{x_{r,k}}$ e $Q_{p_x}$ . (a) Seguimento de caminho. (b) Estado activo do AOB-1 para a posição e perturbação em rampa. (c) Velocidade longitudinal . (d) Posição relativa. . . . .	196
7.27	Análise do comportamento com HBA, MBA e SBA. (a) Seguimento de caminho. (b) Posição relativa. (c) Velocidade longitudinal . (d) Estado Activo do AOB-1 para a posição e perturbação em degrau. . . . .	199
7.28	Comportamento do WMR com diferentes $\tau_c$ . (a) Seguimento de caminho com AOB-1. (b) Seguimento de caminho com CKF. (c) Velocidade longitudinal . (d) Posição relativa. . . .	201
7.29	Comportamento do WMR com diferentes $\tau_c$ para AOB-1. (a) Estado activo para a velocidade. (b) Estado activo para a posição e perturbação. . . . .	202
7.30	Acelerações presentes no WMR com AOB-1. (a) Aceleração com $\tau_c = 1 s$ . (b) Aceleração com $\tau_c = 2 s$ . . . . .	203
7.31	Comportamento do WMR para o caso de um caminho “composto” na presença de uma perturbação na referência de posição, usando o AOB. (a) Caminho “composto” desejado. (b) Seguimento de caminho para um caminho “composto”. (c) Velocidade longitudinal no seguimento de caminho. (d) Distância entre o caminho actual e o desejado, realizado pelo robô (posição relativa). . . . .	205
7.32	Comportamento dos estados activos quando há uma perturbação na referência de posição, para o caso de um caminho “composto”, usando AOB. (a) Estado activo $\hat{p}_k$ para o modelo de velocidade. (b) Estado activo $\hat{p}_k$ para o modelo de posição e Perturbação. . . . .	206

A.1	Diagrama de conceitos de estabilidade. . . . .	226
B.1	Esboço de um robô móvel de duas rodas motrizes. . . . .	228
D.1	Cadeira de rodas: (a) Vista de perfil. (b) vista de lado. . . .	247
E.1	Análise do comportamento com MBA. (a) Posição relativa do valor real e do valor estimado, para MBA. (b) Diferença entre o valor real e o valor estimado, para MBA. . . . .	251
E.2	Análise do comportamento com SBA e HBA. (a) Posição relativa do valor real e do valor estimado, para SBA. (b) Diferença entre o valor real e o valor estimado, para SBA. (c) Posição relativa do valor real e do valor estimado, para HBA. (d) Diferença entre o valor real e o valor estimado, para HBA.	252
E.3	Caminho “composto” partindo de posição correcta, usando o AOB. (a) Caminho desejado. (b) Seguimento de caminho. (c) Velocidade longitudinal no seguimento de caminho. (d) Distância entre o caminho actual e o desejado, realizado pelo robô. . . . .	253
E.4	Estados activos quando não há perturbação. (a) Estado activo para o modelo de velocidade. (b) Estado activo para o modelo de posição. . . . .	254
E.5	Caminho “composto” partindo de uma posição distante, usando o AOB. (a) Caminho desejado. (b) Seguimento de caminho.	254
E.6	Caminho “composto” sem perturbação, usando AOB. (a) Velocidade longitudinal no seguimento de caminho. (b) Distância entre o caminho actual e o desejado realizado pelo robô. (c) Estado activo para o modelo de velocidade. (d) Estado activo para o modelo de posição. . . . .	255
E.7	Caminho “composto” na presença de uma perturbação na referência de posição, usando o AOB. (a) Caminho desejado. (b) Seguimento de caminho. (c) Velocidade longitudinal no seguimento de caminho. (d) Distância entre o caminho actual e o desejado realizado pelo robô. . . . .	256
E.8	Estados activos quando há uma perturbação na referência de posição. (a) Estado activo para o modelo de velocidade. (b) Estado activo para o modelo de posição e Perturbação. . . .	257



# Abreviaturas e Glossário

AGV	Automated Guided Vehicles
AOB	Kalman based Active Observer controller (controlador AOB)
AOB-0	AOB de ordem zero
AOB-1	AOB de ordem um
AOB-N	AOB de ordem ‘N’
CKF	pole-placement Controller with a Kalman Filter
DC	Direct Current (Corrente contínua)
DOB	Disturbance Observer (Observador de perturbação)
DOF	Degree of Freedom (Grau de Liberdade)
EKF	Extended Kalman Filter (Filtro de Kalman Estendido)
HBA	Hybrid Based Approach (Abordagem híbrida)
KF	Kalman Filter (Filtro de Kalman)
MBA	Model Based Approach (Abordagem baseada no modelo)
PID	Proporcional-integral-derivativo
PPC	Pole-Placement Controller
PWM	Pulse-Width-Modulation (modulação de largura de pulso)
SISO	Single Input Single Output (systems)
SBA	Sensor Based Approach (Abordagem baseada nos sensores)
WMR	Wheeled Mobile Robot (Robô móvel com rodas)
ZOH	Zero-Order-Hold (Retentor de amostras de ordem zero)
et al.	et alli (e outros)
e.g.	exempli gratia (por exemplo)
i.e.	id est (isto é)

Característica (ordem) da matriz .....	“rank”
Codificador óptico das rodas .....	“encoder”
Conjunto roda-ligação .....	“wheel assembly”
Eixo de direcção .....	“hip” (anca ou articulação)
Em linha .....	“on-line”
Erro estacionário .....	“offset”
Espaço (ambiente) exterior .....	“outdoor”
Espaço (ambiente) interior .....	“indoor”
Estabilização num ponto de equilíbrio .....	“point stabilization”
Fecho involutivo .....	“involution closure”
Par de ordem baixa .....	“lower-order pair”
Par de ordem elevada .....	“higher-order pair”
Seguimento de caminho .....	“path following” e/ou “path tracking”
Seguimento de trajectória .....	“trajectory tracking”
Sobreelevação .....	“overshoot”
Solução avançada detectada .....	“sensed forward solution”
Solução inversa actuada .....	“actuated inverse solution”

# Capítulo 1

## Introdução

Neste capítulo apresentam-se a motivação e os objectivos principais deste trabalho de investigação. As primeiras secções incluem a motivação, os conceitos introdutórios, e os objectivos. Por fim, apresentam-se as contribuições chave e a estrutura da tese.

### 1.1 Motivação

Durante centenas de anos a humanidade tem sido fascinada pelas máquinas que apresentam uma aparência e/ou comportamento semelhantes ao Humano. Os sistemas mecânicos que no século XIX estiveram na base do desenvolvimento dos primeiros robôs, eram constituídos por molas e engrenagens, e repetiam de forma precisa uma sequência de movimentos pré-determinada. Durante o século XX, com o desenvolvimento da electrónica, dos computadores, dos microprocessadores e sensores, verificou-se uma grande evolução na área da robótica, o que permitiu dotar os robôs de maior autonomia e capacidade global para execução de tarefas.

Actualmente, a robótica tem uma vasta área de aplicação, encontrando-se a maioria destas aplicações em ambientes industriais. Tal, deve-se ao facto dos ambientes industriais serem mais estruturados que os ambientes domésticos/serviços. Quando se pretende utilizar robôs em ambientes menos estruturados, torna-se necessário dotar o robô de sistemas de sensores externos mais eficientes, de modelos dinâmicos mais próximos da realidade física do robô e de técnicas de controlo mais complexas, permitindo assim uma interacção robô-ambiente mais eficaz.

Os robôs móveis, ao contrário dos robôs manipuladores, têm como característica principal, não estarem restritos a um espaço de trabalho fixo. Esta característica, só é possível dotando o robô com sistemas de sensores externos sofisticados, que forneçam informação correcta sobre o ambiente de operação. Requer ainda a existência de modelos dinâmicos “precisos”, bem como controladores robustos, que permitam ao ‘sistema de navegação’ planejar trajectórias que levem o robô a seguir um caminho sem que ocorram colisões, quer com obstáculos fixos, quer com obstáculos móveis.

Como resultado, foram desenvolvidas várias formulações, usando diversas técnicas matemáticas, de modo a serem aplicadas em sistemas com alguma complexidade. Porém, algumas questões continuam a merecer a atenção da comunidade científica, designadamente a modelação e análise de sistemas dinâmicos. Quando a resposta a estas questões é obtida satisfatoriamente, logo surge a questão seguinte: como controlar os sistemas de modo a exibirem os comportamentos desejados? O controlo é particularmente importante em robótica, uma vez que é unicamente através dele, que se pode utilizar o sistema robótico para realizar qualquer tarefa significativa.

O crescente interesse pelo desenvolvimento de sistemas robóticos autónomos, que se verificou ao longo da última década, motivou uma significativa actividade científica na obtenção de algoritmos de controlo para sistemas não-lineares, nomeadamente no controlo do movimento de robôs móveis [40], [44]. O progresso na mobilidade dos robôs móveis com rodas (WMR), tornou possível a sua aplicação a diversas áreas, como por exemplo na utilização de cadeiras de rodas robotizadas (para auxiliar deficientes e idosos), na exploração planetária e subaquática, no manuseamento de explosivos e armas nucleares, em máquinas agrícolas e militares, entre outros. A maior parte da investigação sobre robôs móveis com rodas (e veículos com condução diferencial em geral), incorporam soluções clássicas para controlo de baixo nível e concentram os esforços de projecto no controlo de alto nível (seguimento de caminho e seguimento de trajectória). O controlo do movimento dos WMRs coloca desafios teóricos que atraem o interesse dos investigadores, permitindo-lhes desenvolver algoritmos inteligentes, que aproximem o comportamento dos WMRs ao comportamento que teriam se fossem conduzidos por humanos. É sabido, que os WMR são, em geral, mecanismos não-holónomos devido às restrições “ideais”, i.e. ausência de escorregamento longitudinal ou lateral das rodas.

A literatura sobre o controlo do movimento sob restrições não-holónomas

usando o modelo cinemático de um robô móvel, é vasta. Por outro lado, encontram-se publicados um menor número de trabalhos que abordam a integração do controlador cinemático não-holónimo com a dinâmica do robô móvel. Além disso, a quantidade de trabalhos sobre a robustez e controlo em presença de incertezas no modelo dinâmico de tais sistemas, é ainda em menor número [111]. Assim, um dos problemas que influenciam os vários algoritmos existentes para o seguimento de caminho de WMRs, é a necessidade de robustez contra ruído, incertezas de modelo e não-linearidades.

A necessidade de preencher este requisito, foi a principal motivação desta tese, levando ao desenvolvimento de um sistema de controlo de seguimento de caminho (de WMRs), que garanta robustez e estabilidade global do sistema na presença de incertezas, permitindo, desta forma, que o sistema exiba os comportamentos desejados, quer em ‘aplicações’ actuais, quer futuras, de WMRs.

## 1.2 Seguimento de Caminho

Dependendo do tipo de aplicação prática a que o WMR se destina, assim a sua estrutura cinemática varia (i.e. número e tipo de rodas, sua localização e actuação, estrutura do veículo uni-corpo ou multi-corpo), possibilitando várias configurações de mobilidade.

Para além da relevância óbvia das aplicações, o problema do controlo do movimento de WMRs tem recebido considerável atenção na literatura. De facto, durante os últimos dez anos verificou-se um grande interesse pela elaboração de projectos de sistemas de controlo para robôs móveis, pelo facto destes sistemas serem exemplos típicos de mecanismos com restrições não-holónomas que surgem devido às restrições assumidas para as rodas (i.e rodarem sem escorregamento).

Vários tipos de controladores não-lineares foram desenvolvidos, tendo como objectivo, essencialmente, a estabilização num ponto de equilíbrio, o controlo de seguimento de trajectória, e o controlo de seguimento de caminho. No entanto, o controlo de seguimento de caminho é uma área sobre a qual há um menor número de trabalhos publicados.

O seguimento de caminho parte do pressuposto de que é possível determinar a cada instante de tempo a distância lateral do WMR ao caminho (de modo a que essa distância tenda para zero), independentemente do perfil

da velocidade longitudinal (que expressa a velocidade com que o caminho é percorrido).

Em virtude de os sistemas não-holónomos (e.g. os WMRs) serem não-lineares, não é possível aplicar directamente as abordagens de controlo linear. Assim, os problemas de seguimento de caminho de WMRs são normalmente resolvidos por meio de abordagens de controlo não-linear, tais como a linearização por realimentação entrada-saída. A completa controlabilidade de sistemas não-holónomos, garante que existem leis de controlo de realimentação que estabilizam assintoticamente o sistema em torno de um ponto de equilíbrio [145].

A dificuldade do problema de controlo do seguimento de caminho de WMRs não depende apenas da natureza não-holónoma do sistema, mas também do objectivo do controlo. Uma realimentação de estados (e.g. controlo adaptativo, colocação de pólos e controlo óptimo) pode ser usada para controlar um sistema linearizado que, no entanto, não representa exactamente o sistema real. Isto deve-se ao facto de as incertezas, que estão sempre presentes em sistemas de controlo complexos, não serem consideradas no desenvolvimento do projecto de controlo. A presença de incertezas na elaboração do projecto de controlo, leva ao desenvolvimento de técnicas de controlo estocásticas.

O controlo adaptativo foi introduzido, nos anos 50, para assegurar que um sistema fosse capaz de se acomodar a mudanças imprevistas na dinâmica do processo. Este conceito é muito importante, pois o sistema, para além de se acomodar às variações na dinâmica do processo, também se acomodaria aos erros de projecto e a perturbações que afectam o processo.

### 1.2.1 Modelos Cinemáticos e Dinâmicos

Os projectos de controlo de WMRs baseiam-se nos modelos cinemáticos e/ou dinâmicos.

A obtenção do modelo cinemático, é então o primeiro passo para o projecto de um sistema de controlo de WMRs. O interesse da estrutura cinemática (tipo e colocação de rodas, braços de ligação, actuadores, sensores, entre outros) reside no facto desta estrutura fornecer informação essencial na obtenção de modelos cinemáticos, o mais próximos possível da realidade.

No caso específico dos WMRs, é importante determinar o movimento do robô tendo em consideração as restrições físicas impostas ao movimento das

rodas. A base para a obtenção do modelo cinemático reside, fundamentalmente, na atribuição de sistemas de coordenadas ao WMR e ao seu ambiente (mundo), e na aplicação de matrizes que exprimem as transformações entre estes sistemas de coordenadas. Assim, torna-se claro que, os parâmetros necessários à modelação cinemática são as distâncias e os ângulos existentes entre os vários sistemas de coordenadas. No entanto, as variáveis principais do modelo cinemático, obtidas por conversão entre diferentes sistemas de coordenadas, são as velocidades do WMR ou as suas acelerações (quando tal for necessário).

Por outro lado, a dinâmica é o ramo da física que trata do movimento dos corpos sob acção de forças, e inclui a cinemática e a cinética, representando assim a relação entre as forças desenvolvidas pelos actuadores e o movimento do WMR.

Como elaborar o modelo de um sistema dinâmico, como prever o comportamento de um sistema dinâmico, e como analisar, classificar e controlar sistemas dinâmicos, são apenas algumas questões que têm suscitado o interesse entre os investigadores.

Sabendo que o modelo dinâmico do WMR descreve as relações entre o movimento do WMR e as forças/binários do actuador, o controlo baseado na dinâmica torna-se particularmente importante.

Fundamentalmente, as abordagens de controlo (e.g. seguimento de caminho e/ou trajectória) podem ser divididas em abordagens baseadas no modelo cinemático e abordagens baseadas no modelo cinemático e dinâmico.

O modelo dinâmico tem em consideração factores tais como as massas do corpo e das rodas do veículo, o centro de massa, as inércias, entre outros. As equações resultantes são mais complexas, sendo mais difícil a sua utilização. Para além disso, pode ser difícil determinar alguns parâmetros. No entanto, as equações dinâmicas permitem uma descrição altamente precisa do comportamento do veículo, e os controladores projectados com a dinâmica, são robustos. Uma abordagem mais simples para a modelação de um WMR (e a mais usada), é ignorar a dinâmica do sistema e usar apenas o modelo cinemático. Os efeitos das massas e inércias são ignorados, e o modelo é obtido usando apenas as restrições cinemáticas. A complexidade do modelo cinemático é menor que a do modelo dinâmico e conseqüentemente a sua precisão, na representação do sistema real, é também menor.

### 1.2.2 Linearização por Realimentação

Para projectar um sistema de controlo, são frequentemente considerados modelos aproximados e linearizados, permitindo que a extensa teoria de controlo linear seja aplicada.

A linearização por realimentação é um método usado no controlo de sistemas não-lineares que tem sido aplicado a diferentes sistemas de engenharia, nomeadamente a vários tipos de robôs.

A linearização por realimentação envolve a transformação de um sistema não-linear num sistema linear controlável, usando realimentação de estado e uma transformação de variáveis de estado (ou transformação de coordenadas). Os métodos de linearização por realimentação têm a particularidade de ter como condição, para a sua aplicação, o conhecimento do ‘grau relativo’<sup>1</sup>, sendo necessário para a sua determinação recorrer a conceitos de álgebra linear, teoria das matrizes e álgebra de Lie.

No caso específico de um WMR, para a linearização do sistema não-linear, utiliza-se a linearização entrada-saída. A aplicação da linearização entrada-saída tem a particularidade de desacoplar o sistema e apresentar uma solução da forma  $y^\rho = v$ , (onde  $v$  é a entrada e  $y$  é a saída), se for aplicada uma lei de controlo apropriada. Pode-se concluir que, o sistema linearizado resultante é uma cadeia de  $\rho$  integradores. Assim, após a linearização, é então possível aplicar a teoria de controlo linear a WMRs.

### 1.2.3 Controlo Adaptativo

Nos últimos anos, o progresso que se verificou em áreas como a robótica, e processos industriais, fez com que aumentasse o interesse nos sistemas de controlo adaptativo.

Quando se pretende controlar processos em que exista grande variação de parâmetros, ou mudanças imprevistas na sua dinâmica, é necessário o uso de técnicas de controlo adaptativo de modo a que o desempenho do sistema de controlo seja satisfatório.

Há diferentes definições de sistema adaptativo actualmente em uso na literatura, devido à dificuldade em classificar e definir os limites entre os sistemas de controlo adaptativos e não-adaptativos. Assim, segundo Ogata [139] “Um sistema de controlo adaptativo é aquele que mede, de forma

---

<sup>1</sup>Capítulo 5, secção 5.1



contínua e automática as características dinâmicas (tal como a equação de estado do processo), compara-as com as características dinâmicas desejadas e usa a diferença para variar parâmetros ajustáveis do sistema (normalmente características do controlador), ou para gerar um sinal actuante de tal forma que o desempenho óptimo possa ser mantido independentemente das mudanças ambientais”. Devem então existir características de auto-organização.

De entre os vários sistemas de controlo adaptativo existentes, o mais utilizado é o sistema adaptativo por modelo de referência. Este é bastante importante no controlo de WMRs, sendo a sua principal característica especificar o modelo de referência como o desempenho desejado. Assim, num sistema de controlo por modelo de referência, a saída do modelo e a do processo são comparadas e a diferença é utilizada para gerar os sinais de controlo.

O controlo por modelo de referência tem sido utilizado na obtenção de desempenhos aceitáveis, em algumas situações muito difíceis de controlo, envolvendo não linearidades e/ou parâmetros variantes no tempo. É de notar que neste tipo de controlo se deve começar por impor o modelo de referência para o processo (impor o comportamento).

O conceito de controlo por modelo de referência, surgiu em 1958 proposto por Whitaker no MIT (USA), com o objectivo de se desenvolver sistemas de controlo para aviões.

### 1.2.4 Estimação

O problema da estimação, consiste em reconstruir integralmente o vector de estado (que melhor se ajuste ao modelo do sistema), apesar de alguns dos estados não serem mensuráveis. Assim, se o estado do sistema não for completamente mensurável, devem ser usadas técnicas de observação. Com o problema da identificação<sup>2</sup>, surge a necessidade do modelo de referência se aproximar o mais possível do modelo real.

No caso de existirem incertezas de modelo, ruídos, e outras perturbações, é natural que se utilizem conceitos estocásticos para descrever estas perturbações. A teoria do controlo estocástico, pode ser usada quando todas as va-

---

<sup>2</sup>De uma forma sintética, pode dizer-se que *Identificação de Sistemas* é o processo da especificação de uma estrutura matemática para o modelo, e da estimação dos seus parâmetros a partir da resposta experimental.

riações (devido a perturbações ou outras) recaírem num modelo estocástico conhecido, e ao mesmo tempo os parâmetros do sistema apresentarem erros de modelo baixos. Uma das dificuldades da teoria estocástica, é encontrar o modelo estocástico adequado que melhor caracterize as variações de parâmetros [51].

É então necessário projectar uma lei de realimentação, e consequentemente um sistema de controlo, que torne o desempenho do sistema robusto a diversos tipos de incertezas. Recorre-se, então, a técnicas estocásticas para complementar as determinísticas.

Uma das questões que tem demonstrado ser de grande importância em engenharia é a estimação de estado de sistemas, quando estes apresentam incertezas nos modelos e ruído nas medições.

Técnicas de estimação óptima de estados foram desenvolvidas para fornecer estimativas das variáveis de estado, quando alguns dos estados não podem ser directamente medidos e/ou podem ser dependentes do erro de medição e de perturbações no sistema. O interesse do uso desta técnica é evidenciado em situações onde estimativas sequenciais podem ser usadas para controlo *em linha*. Estas técnicas exigem, normalmente, o conhecimento prévio das propriedades estatísticas do erro dos modelos do processo.

Vários estimadores foram propostos ao longo do tempo, sendo na sua maioria extensões do bem conhecido filtro de Kalman. O filtro de Kalman, desenvolvido nos anos 60, é uma das técnicas mais poderosas de estimação, e tem sido vastamente usado em muitas áreas de aplicação, como por exemplo no controlo de processos, na exploração espacial, e em robótica. Este foi desenvolvido para determinar uma estimativa óptima,  $\hat{x}$ , do estado actual,  $x$ , a partir das medidas,  $y$ , corrompidas por ruído branco. Uma condição necessária para o sucesso desta técnica é a observabilidade do vector de estado a partir das variáveis medidas. Com o desenvolvimento dos computadores, o filtro de Kalman demonstrou ser muito útil em aplicações, em tempo-real, bastante complexas.

O termo “filtro” teve origem na sua capacidade de reduzir os efeitos do ruído num sinal. Na prática é usado para processar sinais “corrompidos” por ruído, estando-lhe associada uma determinada incerteza. Este ruído pode ser inerente ao próprio processo, associando-se assim a uma certa incerteza na dinâmica do sistema; por outro lado, pode ter origem nas medições. O filtro de Kalman pode ter diversas variantes. A variante que teve e tem mais

sucesso é a forma estendida, tendo ficado conhecida por filtro de Kalman estendido ou filtro Kalman - Schmidt.

Várias estratégias de controlo foram “construídas” com base no observador por filtro de Kalman. Uma estratégia de controlo baseada no filtro de Kalman e robusta a incertezas é o AOB (controlador com Observador Activo baseado no filtro de Kalman), proposto por Cortesão [51]. Esta estratégia mostrou boa eficiência quando usada em robôs manipuladores. Este método usa uma abordagem probabilística para estimar o estado do sistema e as suas perturbações. Apresenta uma formulação sistemática, usando técnicas em espaço de estados e fornece um formalismo estocástico para compensar termos não modelados.

## 1.3 Objectivos

O objectivo principal desta tese, é apresentar um método para a resolução do seguimento de caminho de WMRs, garantindo a estabilidade global do sistema quando este é sujeito a perturbações externas, erros de modelo e diferentes fontes de ruídos. No entanto, este objectivo enquadra-se num âmbito mais alargado, pois pretende-se que seja aplicado, entre outros WMRs, na cadeira de rodas robotizada<sup>3</sup> do projecto “Robchair” (que decorre no Instituto de Sistemas e Robótica, Universidade de Coimbra).

### *Projecto “RobChair”*

O projecto “RobChair” pretende contribuir com resultados de investigação para o avanço no desenvolvimento de equipamentos que possam facilitar a locomoção de pessoas portadores de deficiências físicas, idosos e de pacientes em fase de reabilitação motora. Numa primeira fase os objectivos foram dotar a cadeira “Robchair” de interfaces inteligentes, com destaque para o comando por voz, bem como dotá-la de sensores que possibilitam uma mobilidade sem acidentes [149]. Durante a segunda fase do projecto, actualmente em desenvolvimento, pretende-se expandir a sua autonomia, dotando-a do poder de tomar decisões baseadas no ambiente por onde se desloca. É nesta segunda fase do projecto que esta tese é fundamental, designadamente no controlo do seguimento de caminho.

■

---

<sup>3</sup>A cadeira de rodas robotizada do projecto “Robchair” é o protótipo de WMR usado nesta investigação.

## 1.4 Contribuições Chave

Esta tese apresenta resultados teóricos e de simulação que decorrem de um estudo aprofundado sobre várias áreas, que se revelam fundamentais no desenvolvimento de um sistema de controlo de seguimento de caminho de robôs móveis com rodas, robusto a incertezas. Assim, de entre as contribuições desta tese destacam-se as seguintes:

- ***Implementação de algoritmos de controlo, para seguimento de caminho, em tempo discreto.*** A estratégia de controlo de seguimento de caminho, apresenta a particularidade de utilizar algoritmos em tempo discreto. Assim, no seguimento de caminho, o sistema “físico” (contínuo no tempo) é controlado por um controlador discreto. É reconhecido que a utilização de controladores discretos, permite a sua aplicação prática (no “mundo real”), mas em contrapartida estes são mais sensíveis a perturbações e incertezas.
- ***Uma nova estratégia de controlo de seguimento de caminho é proposta.*** É proposta uma nova estratégia de controlo, para seguimento de caminho de WMRs, robusta a incertezas. Esta estratégia de controlo é composta por uma malha interna de linearização por realimentação entrada-saída e por uma malha externa de controlo linear com o AOB (controlador com observador activo baseado no filtro de Kalman). Esta evidencia bons resultados no seguimento de caminho, quando o sistema é sujeito a ruído, incertezas do modelo, perturbações e não-linearidades. Este novo algoritmo estima as perturbações a que o sistema está sujeito, levando a cabo uma acção de compensação apropriada de modo a atenuar/eliminar os seus efeitos. É ainda de referir que, esta é a primeira vez que o projecto do controlador AOB é aplicado a WMRs.
- ***Validação por simulação do novo algoritmo de seguimento de caminho.*** Foram realizadas simulações computacionais de modo a mostrar a eficiência, flexibilidade, estabilidade e robustez da nova estratégia/algoritmo de controlo de seguimento de caminho de WMRs, quando o sistema foi (ou não) sujeito, a vários tipos de perturbações. O desempenho desta nova estratégia de controlo é ainda comparado com o desempenho de outras estratégias de controlo clássicas, tais

como o controlador de colocação de pólos (PPC) e o controlador de colocação de pólos com observador por filtro de Kalman (CKF).

- ***Sistematização e clarificação de metodologias.*** De modo a facilitar a utilização de certas metodologias, essenciais ao desenvolvimento desta investigação, é realizada uma sistematização e clarificação dos seguintes conceitos: 1) Cinemática de robôs móveis; 2) Dinâmica de robôs móveis; e 3) Linearização por realimentação. O modo como são estruturadas estas metodologias permite a sua aplicação (de uma forma rotineira e organizada) a qualquer WMR, bem como a qualquer sistema mecânico que incorpore as características especiais dos WMRs.

## 1.5 Estrutura da Tese

Esta tese encontra-se dividida em 8 capítulos e em 5 apêndices que complementam as matérias abordadas nos capítulos. A organização da tese apresenta uma forma sequencial na abordagem dos assuntos, tal como se passa a descrever.

No capítulo 1 são apresentados em linhas gerais os assuntos que serão abordados ao longo desta tese, bem como a motivação e os objectivos desta investigação. Resumem-se ainda as contribuições chave desta tese.

No capítulo 2 é abordado o “Estado da Arte” apresentando a literatura mais relevante sobre o controlo de seguimento de caminho/trajectória de WMRs, incluindo as cadeiras de rodas robotizadas.

No capítulo 3 são apresentados de forma sistematizada os conceitos teóricos necessários à realização do modelo cinemático de WMRs. Apresentam-se, também, os sistemas de coordenadas instantaneamente coincidentes que conduzem directamente ao Jacobiano da roda, e que relacionam as velocidades de uma roda com as velocidades do corpo do WMR. Calcula-se o modelo cinemático do robô, no sistema de coordenadas do mundo, e obtêm-se as suas restrições cinemáticas.

No capítulo 4 é sistematizado o cálculo da dinâmica de modelos de robôs móveis com rodas. Apresenta-se a formulação de Lagrange, bem como a classificação de sistemas não-holónomos (recorrendo à álgebra<sup>4</sup> de Lie).

---

<sup>4</sup>Note-se que em alguma literatura se usa o termo no plural, i.e. álgebras de Lie.

Aplicando estas metodologias obtém-se o modelo dinâmico do WMR em estudo. É abordado o problema da formulação em espaço de estados do sistema dinâmico com restrições holónomas e não-holónomas, de um modo unificado. É transformado o problema do modelo dinâmico com restrições num problema padrão, equivalente, de controlo não-linear.

No capítulo 5 é estudado o problema da linearização por realimentação, de sistemas com restrições não-holónomas (e.g. WMRs). É apresentada, e calculada, de forma sistematizada e detalhada a linearização por entrada-saída. A dinâmica interna não observável, resultante deste procedimento, é analisada. Procede-se ainda à escolha das variáveis de saída, tendo em consideração o algoritmo de controlo pretendido.

No capítulo 6 são apresentados os esquemas de controlo de seguimento de caminho, em modo contínuo, do WMR, utilizando um controlador por colocação de pólos (PPC) na malha de realimentação linear. Apresentam-se resultados de simulação computacional, e discute-se o desempenho dos esquemas de controlo e a validade do modelo dinâmico, bem como a influência das velocidades iniciais e dos ângulos iniciais no seguimento de caminho.

No capítulo 7 descrevem-se as metodologias respeitantes à discretização e à colocação de pólos, em malha-fechada. É apresentada e discutida uma nova estratégia de controlo, baseada no AOB, para o seguimento de caminho, em modo discreto, de WMRs sujeitos a restrições não-holónomas. Apresenta-se ainda o algoritmo/estrutura do AOB de primeira ordem e de ordens superiores e discute-se a sua estabilidade, flexibilidade, robustez e estratégias de estimação. Realizam-se extensas simulações computacionais, e analisa-se o comportamento deste novo esquema de controlo quando sujeito a incertezas e perturbações, para diferentes velocidades desejadas e diferentes constantes de tempo em malha-fechada. É realizada uma análise comparativa, do desempenho do esquema de controlo de seguimento de caminho, quando se utilizam diferentes controladores (i.e. AOB, PPC ou CKF) na malha de realimentação-linear.

No capítulo 8 destacam-se os aspectos e contribuições mais relevantes da tese, e discutem-se direcções de pertinente importância para futuros trabalhos de investigação.

Finalmente, nos apêndices *A* a *E* incluem-se informações relevantes que complementam alguns assuntos discutidos nos capítulos desta tese.

# Capítulo 2

## Estado da Arte

Na sociedade actual, verifica-se uma crescente necessidade de utilização de máquinas dotadas de alguma autonomia, eficiência e precisão, para a realização de tarefas, que por vezes ultrapassam a capacidade humana. A robótica, é uma área multidisciplinar que tem como objectivo o desenvolvimento de algoritmos e a integração de diversas técnicas (desenvolvidas ao longo de várias décadas), que conduzem à evolução de máquinas possibilitando a sua integração em ambientes industriais, onde decorrem tarefas repetitivas, perigosas ou que ultrapassem a capacidade humana. A robótica permite ainda aplicações na área de serviços, possibilitando o aumento do bem-estar do Homem.

O conceito de robô remonta à Grécia, ao ano IV a.C., altura em que Aristóteles apresentou a noção de um “instrumento” que conseguisse realizar tarefas sem a influência humana. Mas o termo robô (com origem na palavra checa ‘robotnik’, que significa servo) foi utilizado inicialmente, em 1921, pelo dramaturgo Karel Capek, traduzindo a ideia de um “homem mecânico” que parecia vir de alguma obra de ficção. O robô, começou a ser visto como uma máquina ‘humana’, com inteligência e personalidade individual, mas que laborava de forma incansável.

Ao contrário da ficção, os primeiros robôs foram dotados de braços e articulações, sendo capazes de trabalhos repetitivos e autónomos, não no sentido de terem ‘sensibilidade’, ‘controlando-se’ a si próprios e resolvendo os problemas que poderiam surgir, mas para substituir o homem nos trabalhos pesados. Os robôs foram então desenvolvidos de modo a serem máquinas flexíveis e reprogramáveis, capazes de se adaptarem facilmente a vários tipos

de tarefas.

Ao longo dos anos a evolução da robótica de manipuladores foi bastante mais significativa que a robótica móvel. No entanto, especialmente nas últimas décadas, têm sido desenvolvidos muitos trabalhos de investigação na área da robótica móvel. O súbito interesse pelos robôs móveis autónomos deveu-se ao desenvolvimento do seu suporte tecnológico, nomeadamente no que se refere a tecnologias computacionais e de sensores, que se tornaram mais precisos passando a fornecer mais informação sobre o estado actual do robô e sobre o ambiente que o rodeia. Adicionalmente a evolução dos projectos mecânicos e dos controladores tornou possível o desenvolvimento e controlo do movimento dos robôs móveis.

Assim, nas duas últimas décadas, um dos grandes desafios da robótica móvel tem sido a obtenção de controladores de movimento robustos. São inúmeras as abordagens ao problema do controlo do movimento de robôs móveis. De um modo geral os sistemas de controlo de movimento, são classificados numa das três categorias seguintes:

- ***Estabilização num ponto de equilíbrio***, está relacionada com o projecto de leis de controlo que permitem que o robô atinja um determinado ponto alvo, partindo de um ponto inicial [120] [145].
- ***Seguimento de trajectória***, o robô deve atingir um ponto na trajectória no espaço cartesiano (isto é, um caminho geométrico com uma lei de tempo associada), partindo de um dado ponto inicial (na ou fora da trajectória). O seguimento de trajectória tem, então, como objectivo atingir um determinado ponto, mas num determinado instante de tempo especificado [120].
- ***Seguimento de caminho***<sup>1</sup>, o robô deve seguir e atingir um caminho

---

<sup>1</sup>Na literatura, o seguimento de caminho é comumente designado pelo termo “*path following*”, no entanto surgem frequentemente publicações que se referem ao seguimento de caminho com a designação “*path tracking*”. A diferença existente entre “*path following*” e “*path tracking*” é ambígua, dado que diversos investigadores referem-se a “*path tracking*” quando, na realidade, o que estão a implementar é “*path following*”. Existem, porém, alguns autores que tentaram diferenciar “*path tracking*” de “*path following*”. Por exemplo, segundo Hu [92] o “*path tracking*” é apenas o seguimento de um caminho pré-planeado (no entanto, este autor tem, também, em consideração a velocidade). Para Martinez [124], o “*path tracking*” é realizado tendo como objectivo seguir um caminho previamente planeado, manipulando a velocidade e a condução do WMR. Por sua vez



geométrico no espaço cartesiano, começando numa dada posição inicial (no ou fora do caminho), sem estar sujeito no entanto a especificações temporais [120]. É de notar que no seguimento de caminho é mais importante seguir, o mais próximo possível, um caminho do que atingir determinados pontos em instantes de tempo especificados [161].

O pressuposto subjacente ao problema do controlo do seguimento de caminho pode ser abordado tendo em atenção duas variáveis: - a menor distância de um ponto de referência no robô ao caminho desejado; - e uma dada velocidade longitudinal [161]. Para além disso, com o seguimento de caminho é conseguida uma convergência mais suave para o caminho (quando comparado com o seguimento de trajectória) e os sinais de controlo têm, provavelmente, menos tendência a serem levados à saturação [175].

Os conceitos, base, subjacentes ao seguimento de caminho e ao seguimento de trajectória são comuns, dado que eles evoluíram conjuntamente e cada um deles contribuiu para a evolução do conhecimento nesta área. Portanto, não é de “estranhar” que se refiram como pioneiros na área do seguimento de caminho, trabalhos em que é abordado o seguimento de trajectória. Assim, nesta tese, serão tidos em consideração os estudos realizados sobre estas duas abordagens, que de certa maneira tenham contribuído para o desenvolvimento de algoritmos de controlo de seguimento de caminho; tendo em atenção que nos últimos anos, houve um menor número de publicações sobre seguimento de caminho.

## 2.1 Aplicações e Controlo de WMRs

A extensa investigação que se tem vindo a realizar em torno dos robôs móveis tem vindo a permitir o seu desenvolvimento em diversas áreas de tal modo que tornou a sua presença indispensável e cada vez mais significativa, em inúmeros e diversificados ambientes e aplicações. Por outro lado, a expansão

---

Moret [129] afirma que o “*path tracking*” é o seguimento de caminho sem ter em consideração uma velocidade definida. A grande diferença presente nas anteriores (ou outras) “definições” refere-se, essencialmente, não ao seguimento de caminho, propriamente dito, mas ao controlo de velocidade com que o robô segue o caminho (por exemplo velocidade constante, velocidade variável e velocidade “manipulada”). Assim, devido à grande ambiguidade existente, ambas as abordagens (“*path following*” e “*path tracking*”) serão designadas, nesta tese, por seguimento de caminho.

do tipo e número de aplicações, cria novos desafios ao seu controlo. Assim, a presença dos WMRs há muito que deixou de ser exclusiva da robótica industrial. Todavia, continuam a ser uma presença constante na indústria e serviços, particularmente quando capacidades de movimento autónomo são necessárias em ambientes e superfícies razoavelmente suaves [166].

As várias configurações de mobilidade de WMRs (número e tipo de rodas, sua localização e actuação, estrutura do veículo uni ou multi-corpo) pode ser encontrada em múltiplas aplicações [101]: Os WMRs podem ser aplicados na realização de tarefas, que de algum modo, necessitem de se movimentar em distâncias superiores ao espaço de trabalho dos manipuladores; como AGVs para transportar peças e materiais dentro de fábricas, seguindo caminhos assinalados por fitas reflectoras, pinturas ou fios ocultos; e em WMRs telecomandados aplicados à manipulação remota de substâncias perigosas tais como materiais radioactivos em centrais nucleares [57] e explosivos em esquadrões de anti-bombas.

Os robôs ‘saíram’ do âmbito das fábricas e foram enviados a áreas remotas [192] ou para missões em outros planetas [87]. Os WMRs são a alternativa viável às viagens espaciais tripuladas muito arriscadas, eliminando os problemas dos atrasos temporais, inerentes à comunicação interplanetária, para mecanismos tele-operados. Green *et al.* [78] [79] desenvolveram um algoritmo para o seguimento de caminho e para evitar obstáculos num rover planetário. Boissier [33] apresentou um trabalho desenvolvido, sobre rovers planetários, pela French Space Agency. Howard e Seraji [91] apresentaram um sistema de navegação, para um rover planetário, de modo a evitar obstáculos.

As potenciais aplicações dos WMRs não incluem apenas as missões espaciais. Eles foram também testados como guias nos museus [182] e para fins de entretenimento [82]. Encontram-se WMRs apropriados para tarefas repetitivas tais como monitorização de segurança de prisões e armazéns [183].

Os WMRs são ainda apropriados, para aplicações na maquinaria agrícola [122] em acções como lavrar, semear e colher, uma vez que são tarefas que necessitam de movimentos repetitivos sobre grandes distâncias ao longo de caminhos simples. Podem também ser encontrados como veículos de uso militar específico, estando a ser utilizados, em especial, na desminagem humanitária.

A utilização actual dos robôs móveis na indústria obriga a uma grande

estruturação dos ambientes fabris, e a tendência é que os robôs se tornem cada vez mais robustos de modo a que a estruturação não seja uma das condições para a sua utilização. Por outro lado, ambientes domésticos e de serviços são muito menos estruturados, exigindo por parte dos robôs móveis maior autonomia, bem como projectos de controlo mais robustos e eficientes. Isto torna-se evidente quando são utilizadas, por exemplo, cadeiras de rodas robotizadas por pessoas com incapacidades ou limitações físicas [187].

Todas estas aplicações têm subjacente um objectivo comum, o WMR necessita de efectuar movimentos em distâncias mais ou menos longas, sendo necessário percorrer um determinado caminho sem que se perca ou que colida com obstáculos no percurso. De modo a realizar o projecto de controlo de seguimento de um caminho especificado para um determinado robô móvel com rodas, é necessário recorrer a diversos conhecimentos e conceitos que têm vindo a ser desenvolvidos desde há décadas. Para além do desenvolvimento da ciência, foi necessário o desenvolvimento das máquinas, dos instrumentos e mecanismos.

### Perspectiva Histórica

A teoria do controlo teve um papel vital no avanço da ciência e da engenharia. O uso intencional de controlo para melhorar o desempenho de sistemas dinâmicos começou sensivelmente no início da Revolução Industrial, nos finais do século XVIII e princípios do século XIX. Já nos séculos XVII e XVIII a teoria das equações diferenciais tinha sido desenvolvida por Newton, Leibniz e Riccati. Em 1868, Maxwell obteve o primeiro modelo matemático para descrever o comportamento de um processo, de modo a explicar os problemas de instabilidade encontrados no controlador centrífugo da máquina a vapor de James Watt. Poincaré, em 1892, foi quem primeiro reduziu o estudo de um sistema de ordem “ $N$ ”, a um conjunto de “ $N$ ” equações diferenciais de primeira ordem. No entanto, as bases da teoria do controlo moderno têm as suas origens no início do séc. XX.

A teoria de controlo adaptativo [17] surgiu nos anos 50 e apareceu como uma solução para o problema de manter adequado o desempenho do sistema de controlo na presença de incertezas de parâmetros. No final dos anos 50 e início dos anos 60 os métodos de espaço de estados surgem como a base da teoria de controlo moderno. A característica essencial dos métodos de espaço de estados, é a descrição matemática dos processos por intermédio de equações diferenciais.

Em 1963 foi iniciada a “teoria dos observadores”, por David Luenberger, para a reconstrução do estado de sistemas lineares. Mas foram os estudos sobre observadores para sistemas, realizados por Kalman nos anos 60, que estiveram entre as contribuições mais importantes do século XX na área do controlo, no seguimento dos trabalhos de Nyquist e Bode dos anos 20 e 30, bem como do trabalho de Norbert Wiener dos anos 40. O “filtro de Kalman”, que foi desenvolvido em 1960 [102] e 1961 [103], representa

uma evolução do “filtro de Wiener” (1941), bem como das suas extensões. O filtro de Kalman pode ter diversas variantes. A variante que teve e tem mais sucesso é a forma estendida, tendo ficado conhecida por filtro de Kalman estendido (EKF) ou filtro de Kalman-Schmidt. O termo filtro teve origem na sua capacidade de reduzir os efeitos de ruído num sinal. Os conceitos de Kalman proporcionaram filtros óptimos que continuam ainda a ser largamente usados em problemas de engenharia.

Paralelamente, o primeiro grande impulso no desenvolvimento das máquinas verificou-se no séc. XVIII, com o início da revolução industrial. Por outro lado, no final do séc. XIX ocorre o início da utilização do motor eléctrico, e a máquina começa a substituir o Homem.

A 1ª Guerra Mundial originou muitas mudanças e o poder da máquina mostrou-nos a sua forma negativa e destrutiva.

Em meados dos anos 50 a mecânica é substituída pelo poder eléctrico e hidráulico. George C. Devol desenvolveu um aparelho ao qual chamou “*programmed articulated transfer device*”; um autómato cujas operações eram programadas (operações realizadas segundo uma sequência de instruções). Em 1959, Devol e Joseph F. Engelberger desenvolveram o primeiro robô industrial pela Unimation Inc, que tinha como função executar uma variedade de tarefas automaticamente. Diferia dos anteriores autómatos, uma vez que podia ser reprogramado e remodelado para outras tarefas com um nível de custos pouco elevado. Já naquela época começaram a ser usadas nas fábricas máquinas dotadas de sistemas filo-guiados, e que deste modo orientavam o seu movimento. Surgiu, assim, a “ideia” (ainda que precoce) de seguimento de um caminho, e nasciam aqueles que mais tarde se tornariam nos AGVs, tendo-se mantido neste patamar de evolução até meados dos anos 70.

Nos anos 60, tornou-se significativo o facto de a flexibilidade dos “autómatos” aumentar, com a utilização de diferentes tipos de sensores. É a partir desse momento que a investigação sobre robótica começa a incidir na área da Robótica Móvel. H.A. Ernest iniciou o desenvolvimento de um computador/controlador de uma mão mecânica com sensores tácteis-MH-1. Com esta invenção, conseguia-se mover e “sentir” os blocos, usando depois esta informação para controlar a mão, e empilhar os blocos sem ajuda humana. Tomovic e Boni desenvolveram um protótipo equipado com um sensor de pressão que quando “sentia” o objecto enviava informação do tamanho do objecto para um computador que, por sua vez, enviava um sinal para o motor que iniciava a acção de acordo com a informação recebida.

No início dos anos 60, vários projectos de braços manipuladores foram desenvolvidos, tais como o braço Roehampton e o braço Edinburgh. Pieper estudou o problema da cinemática de um manipulador, que era controlado por computador.

A aplicação dos robôs estendeu-se para além do ambiente industrial, e já em 1969, durante a primeira viagem do homem à lua, foram utilizados manipuladores de controlo remoto para recolher amostras e executar pequenas tarefas de grau de complexidade reduzido.

Em 1970 é introduzido o primeiro robô móvel controlado por inteligência artificial (denominado Shakey). O aparecimento de controladores mais “evoluídos” permitiu expandir a sua capacidade e flexibilidade. Como resultado, a partir desta data as aplicações dos

robôs móveis cresceram grandemente, passando estes a serem usados em diversas áreas.

Nos anos 70 o interesse dos sistemas robóticos começou a incidir na pesquisa do uso de sensores que facilitassem, de algum modo, as operações manuais. A Cincinnati Milacron Corporation, desenvolveu o primeiro robô industrial controlado por computador. Este robô movia objectos numa linha de montagem. Inoue, no Laboratório de Inteligência Artificial aprofundou os sensores de força e no Draper Laboratory, Nevins investigou diferentes técnicas de medida por meio de sensores. Will e Grossman na IBM desenvolveram um manipulador controlado por computador com sensores tácteis e de força para realizar a montagem mecânica de uma máquina de escrever.

Nos anos 80 a General Motors, introduziu um robô industrial capaz de ‘reconhecer’ diferentes componentes num tapete transportador e de escolher o componente que era necessário à tarefa.

Foi também nos anos 80 que foi estudada a locomoção por pernas, no entanto a grande maioria dos robôs móveis que foram construídos utilizavam rodas para a locomoção. Os robôs móveis com rodas (WMRs) mostraram ser mais eficientes, no que diz respeito ao consumo de energia, comparativamente com os robôs com pernas, representando assim uma potencial aplicação, mais alargada, na indústria, devido não só às características do chão das fábricas, como também ao facto de os WMRs necessitarem de componentes mais pequenos e mais simples, sendo portanto mais fáceis de construir que os robôs móveis com pernas. Por outro lado, o controlo de rodas é menos complexo que a actuação de pernas multi-junção, originando dano mínimo numa superfície.



A crescente utilização dos WMRs proporcionou novos desafios aos investigadores nomeadamente no controlo do seu movimento, pois para além do seguimento de caminho ou seguimento de trajectória, o planeamento de movimento dos WMRs tem sido uma área de intensa investigação. A maior parte dos estudos de controlo de seguimento de caminho ou trajectória foram aplicados ao controlo de robôs móveis com rodas [39] [157]. No entanto, existem estudos de seguimento de caminho (e de trajectória) em áreas como a exploração subaquática [146] e [67].

O planeamento do movimento, tal como o controlo do movimento, é também um campo de grande interesse de pesquisa (ver referências: [180], [116], [128], [132], [111], [186] [115], [50]). Os principais objectivos aqui, são determinar a existência de caminhos admissíveis, entre duas dadas posições<sup>2</sup> de um robô, que possam ser percorridos livres de colisões com obstáculos. Pressupostos básicos apresentados por Dubins [63] bem como por Reeds e Shepp [153] são a base de qualquer caminho, isto é, os autores afirmam que

---

<sup>2</sup>Posição neste contexto significa a sua localização cartesiana e a sua orientação.

entre quaisquer dois pontos (inicial e final) existe um conjunto de caminhos compostos apenas por linhas rectas e segmentos de arcos circulares. Estes pressupostos foram recentemente usados por diversos autores como, por exemplo, Alexander [6], ou Venditelli [186] que utiliza estes pressupostos de modo a encontrar os caminhos mais curtos evitando os obstáculos no caminho de um WMR. Contudo, o planeamento do movimento ultrapassa o objectivo desta dissertação.

O seguimento de caminho dos WMRs não pode ser abordado, sem se ter em consideração que os WMRs são sistemas mecânicos caracterizados por restrições cinemáticas, que não podem ser eliminadas das equações de movimento. A maioria dos WMRs, podem ser classificados como sendo sistemas mecânicos não-holónomos. O controlo de tais sistemas, pode-se tornar, num problema de difícil resolução.

Na última década o controlo por realimentação de WMRs tem sido extensivamente estudado. Há duas tarefas de controlo básicas para os WMRs:

- **A estabilização num ponto de equilíbrio**- é considerada um desafio porque um sistema não-holónimo não pode ser estabilizado num ponto de equilíbrio por uma lei de realimentação de estado suave [36]. Para ultrapassar estas dificuldades, esforços substanciais foram envidados para desenvolver leis de controlo de realimentação de estado sofisticadas, tais como leis de realimentação não suave [41] [15], leis de realimentação variantes no tempo [151] [160], e leis de realimentação híbridas (não suaves e variantes no tempo) [177][126]. Vários autores mostraram com base no teorema de Brockett [36] que sistemas não-holónomos são controláveis em malha aberta mas não são estabilizáveis por leis de realimentação suaves invariantes no tempo [29] [131]. Sugere-se a consulta de Kolmanovsky e McClamroch [111], para um revisão geral na área de controlo de sistemas mecânicos não-holónomos.

- **A convergência (seguimento) para um dado caminho ou trajectória**- o seguimento de caminho/trajectória não é sujeito às dificuldades do caso anterior. Isto deve-se ao facto, de se poder definir saídas com a mesma dimensão que as entradas. Teorias de controlo não-lineares clássicas podem então ser usadas para resolver o problema do seguimento de caminho ou trajectórias [179][161] [40][194]. Além disso, técnicas de linearização por realimentação entrada-saída (estática ou dinâmica) são bem compreendidas e eficazes no controlo de seguimento.

As técnicas de linearização por realimentação entrada-saída têm sido largamente utilizadas em WMRs, permitindo transformar a entrada-saída

em malha fechada em ‘dinâmica’ linear, e assim os projectos de controlo tornaram-se uma tarefa “fácil” de realizar (no entanto a dinâmica interna dos sistemas não holónomos continua a ser não-linear, e portanto um ponto crítico na aplicação de leis de controlo de realimentação) [190].

A linearização, é quase sempre considerada aquando da elaboração de projectos de controladores para sistemas não-lineares. A linearização por entrada-saída, que se pode entender com sendo o cancelamento “exacto” das não-linearidades do sistema de modo a obter uma relação linear entre as entradas e as saídas em malha fechada, é uma metodologia de projecto baseada no modelo não-linear que foi largamente estudada nas últimas décadas [95] [137] [86] [10] [34], onde a álgebra de Lie, uma ferramenta matemática muito poderosa, demonstra ser indispensável. Abordagens sobre a álgebra de Lie podem ser encontradas nas referências clássicas [83] [185] e mais recentemente por Leite [118]. Um tutorial sobre a aplicação de álgebra de Lie no controlo de seguimento de caminho de WMRs pode ser encontrado em Coelho e Nunes [48].

A linearização por realimentação aplicada a sistemas robóticos surgiu, então, apenas a partir do final dos anos 80, e princípio dos anos 90 (e.g. [173][137]). A investigação foi subsequentemente expandida para cobrir classes mais gerais de sistemas não-lineares.

Diversos investigadores, abordaram desde o início dos anos 90 o problema da estabilização por realimentação de sistemas mecânicos não-holónomos. *Campion et al.* [39] provaram que os sistemas não-holónomos, apesar de não serem assintoticamente estáveis, podem ser globalmente tornados marginalmente estáveis com um projecto de leis de controlo adequado. Hui e Goldenberg [93] apresentaram um estudo sobre estabilidade de um sistema não-holónimo usando o segundo método de Lyapunov e o teorema da invariância de La Salle. Por sua vez *Pomet et al.* [152] estudaram uma estratégia híbrida que usou realimentação de estado descontínua, combinando as vantagens do controlo de realimentação suave invariante com o tempo (longe do ponto alvo), com o controlo de realimentação suave que varia com o tempo (perto do alvo).

A linearização por realimentação tem, desde então, sido utilizada com sucesso na abordagem de alguns problemas práticos de controlo, nomeadamente no seguimento de caminho de WMRs. No entanto, há inúmeros aspectos não abordados e limitações associadas à abordagem da linearização por realimentação, que continuam a ser investigados.

Podem distinguir-se duas grandes direcções de investigação empregando projectos de controladores não-lineares:

- Uma, em que se usa realimentação descontínua [27],[28], e
- Outra, em que se usa realimentação contínua variante no tempo [157].

O desenvolvimento de inúmeros trabalhos de investigação com o intuito da obtenção de algoritmos de controlo de sistemas não-lineares, nomeadamente no controlo de robôs móveis, podem ser encontrados nas referências: [105] [188] [80] [161] [14] [31] [41] [44] [160] [84] [170] [10] [61]. Um bom resumo sobre a linearização pode ser encontrado no trabalho de Krener [112].

## 2.2 Seguimento de Caminho/Trajectória

Um dos problemas encontrados na aplicação dos WMRs em fábricas, hospitais, serviços automatizados, entre outros, é o adequado projecto de controlo de seguimento de caminho. Geralmente, a abordagem típica ao projecto destes controladores é desenvolver modelos cinemáticos ou dinâmicos do veículo, considerar caminhos em linha recta ou circulares que devem ser seguidos com uma velocidade constante, e depois obter um controlador de seguimento de caminho, cuja acção é normalmente proporcional à distância entre o robô e o caminho. Tipicamente, o desempenho dos controladores de seguimento de caminho apresentam uma convergência mais suave para o caminho (não sendo função do tempo) do que a obtida com os controladores de seguimento de trajectória, e os sinais de controlo têm menos tendência de atingirem a saturação [89].

Durante as últimas duas décadas houve um grande esforço de investigação no controlo de seguimento de caminho.

O seguimento de caminho de robôs móveis tem sido estudado desde meados dos anos 80. Apesar da não-linearidade das equações do sistema, leis de controlo linear foram frequentemente propostas, usando o facto de que o sistema pseudo-linearizado equivalente é controlável, quando a velocidade longitudinal do veículo for constante [59][104][136]. Já nos anos 90, foram também considerados esquemas de controlo não-lineares de modo a obter melhor estabilidade, como já atrás referido [105], ou melhorar o desempenho [88].

Foi com os trabalhos de Samson [157] [158] que se deu início ao estudo



mais aprofundado de sistemas de controlo de seguimento de caminho. Em [157] utilizou uma abordagem baseada no modelo de referência (também considerada por Kanayama [105]), e em [158] propôs uma lei de controlo de velocidade angular não-linear que aproxima localmente as realimentações lineares óptimas, e assegura a convergência para o caminho desejado, independentemente da velocidade longitudinal do robô. Os trabalhos de Samson [157] conjuntamente com os de Canudas [42] e Micaelli [127], são considerados por muitos investigadores como os trabalhos ‘pioneiros’ do controlo de seguimento de caminho.

### 2.2.1 Cinemática/Dinâmica

Os métodos de seguimento de caminho/trajectória de WMRs podem ser baseados apenas na cinemática ou na cinemática e dinâmica. Reconhecendo a importância de considerar a dinâmica do sistema, vários investigadores dedicaram-se a este problema nos últimos anos.

A grande maioria dos algoritmos de controlo disponíveis para os WMRs, usa apenas o modelo cinemático para a obtenção de leis de controlo para o seguimento de um caminho ou para atingir um determinado ponto ‘alvo’ (como é referido em [109] [171] [13]). A literatura sobre como resolver o problema do movimento sob restrições não-holónomas usando o modelo cinemático de um robô móvel é vasta, referências detalhadas sobre o estudo analítico da cinemática do WMR podem ser consultadas em [130] [5]. Em vários trabalhos foi estudado o problema da representação do modelo cinemático [188] [43] [84] [2] [160] [120] [3] [100]. Um grande número de autores abordaram o problema do seguimento de caminho considerando apenas o modelo cinemático do WMR (e.g. [159] [127] [42] [30] [80] [81] [43] [84] [60] [178]).

Por outro lado, pouco foi escrito sobre o problema da integração do controlador cinemático não-holónomo e dinâmica do robô móvel. Note-se ainda que o controlo tendo em conta o modelo dinâmico do sistema permite um funcionamento mais eficiente e com menos erros. Diversos autores consideram o modelo dinâmico dos sistemas no controlo de movimento de WMRs, podendo ser citados como exemplo Sarkar [161], DeSantis [58], Fierro [72], Bentalba [24], Yang [194], Fukao [77], Yamada [193], Egerstedt [65], Andersen [7], entre outros.

## 2.2.2 Sistemas de Controlo

O desenvolvimento de microprocessadores de baixo custo, impulsionou grandes desenvolvimentos na teoria e aplicações do controlo não-linear. Uma vez conhecido o caminho ou a trajectória existem várias técnicas que foram, e são, utilizadas para realizar o seu seguimento. Essencialmente, na última década, verificou-se o desenvolvimento de várias abordagens de controlo de seguimento de caminho (algumas delas já referidas ao longo deste capítulo). Existem assim, várias teorias para o projecto do controlo de seguimento de caminho, algumas baseadas em controladores lineares, outras baseadas em controladores não-lineares.

### Controladores Lineares

DeSantis [58] discutiu o controlo de seguimento de caminho de robôs móveis com rodas com condução diferencial, assumindo um movimento que é planar e livre de escorregamentos, tendo em consideração a cinemática e a dinâmica do veículo. Baseado no conceito de seguimento de caminho, é projectado um controlador que actua como uma ‘função sem memória’ dos erros laterais ao caminho, erros de direcção, e erros de velocidade longitudinal. Se estes erros forem mantidos pequenos, e a velocidade de seguimento for constante, então pode ser dada a este controlador uma estrutura PID linear, invariante no tempo e desacoplada. É de notar, no entanto, que apesar de ser usado um controlador PID, são aplicadas neste trabalho técnicas de linearização por realimentação não linear para linearizar e desacoplar o sistema. DeSantis dá, ainda, um exemplo da aplicação desta técnica de controlo, nomeadamente a uma cadeira de rodas, não sendo no entanto fornecidos resultados sobre a sua exactidão.

Bak *et al.* [19] abordaram os algoritmos de seguimento de caminho para robôs móveis, com restrições nas velocidade das rodas, considerando apenas o modelo cinemático. O caminho proposto neste estudo, é constituído por linhas rectas que se intersectam com determinados ângulos. Foi apresentado um controlador de realimentação de estado linear, que em conjunto com um estimador, conseguem prever as intersecções do caminho. Assim, o movimento do robô é controlado, em tempo real, de um modo suave, em particular quando efectua curvas. O seguimento de caminho é particularmente importante num ambiente interior, onde os compartimentos são normalmen-

te rectangulares, e onde este tipo de caminhos (com curvas acentuadas) são frequentemente encontrados. O estudo de simulação apresentado indica que o controlador é robusto, se se mantiverem dentro de certos parâmetros os valores do ângulo de viragem e a posição de partida.

Outros estudos, de seguimento de caminho, foram realizados considerando controladores lineares, baseando-se essencialmente na utilização de controladores por realimentação ou controladores da família dos PID. Por exemplo Ollero e Heredia [141] apresentaram uma abordagem de seguimento de caminho, considerando o modelo cinemático do robô e usando um controlador proporcional para ‘compensar’ o erro lateral.

### Controladores Não-Lineares

Sarkar *et al.* [161] realizou um estudo comparativo entre seguimento de trajectória e seguimento de caminho, tendo concluído que o seguimento de caminho tem um comportamento mais suave e portanto mais adequado ao controlo do seguimento dos WMRs. No trabalho de Sarkar foram utilizados os modelos cinemático e dinâmico do WMR e a sua linearização foi obtida através da linearização por realimentação entrada-saída, tendo o sistema global sido desacoplado em dois sub-sistemas. Um controlando a distância do robô ao caminho e o outro controlando a velocidade. É de notar que a implementação dos algoritmos foi realizada em modo contínuo no tempo.

Fierro e Lewis [72] apresentaram um estudo bastante completo, onde aplicaram diversas estratégias de controlo. É proposto um controlador não-linear que permite realizar a estabilização num ponto, o seguimento de trajectória, e o seguimento de caminho. O controlador, para além da cinemática do WMR, necessita conhecer a sua dinâmica. O resultado é uma estrutura geral para controlar um robô móvel que pode acomodar diferentes técnicas de controlo, desde um controlador *computed-torque* convencional onde toda a dinâmica é conhecida, até aos controladores adaptativos robustos baseados nas redes neuronais. A tarefa das redes neuronais é a aprendizagem em-linha da dinâmica do veículo, e o controlador cinemático é usado para determinar as entradas de controlo do sistema. O esquema de controlo das redes neuronais foi testado em simulação, e comparado com um controlador que assume uma velocidade de seguimento perfeita, e um controlador que assume conhecimento completo da dinâmica do veículo (*computed-torque*).

Desde que as entradas de controlo da velocidade sejam pequenas, suaves e limitadas, e as perturbações sejam também limitadas, o esquema de controlo apresentado é válido. Os resultados obtidos por Fierro e Lewis mostraram que o controlador baseado nas redes neuronais, comparativamente com o controlador *computed-torque* e o controlador com velocidade de seguimento perfeita, obtém o melhor desempenho. O desempenho do controlador que assume uma velocidade de seguimento perfeita é fraco. Por sua vez, o controlador por *computed-torque* necessita de um conhecimento exacto da dinâmica de modo a funcionar devidamente. A resposta do controlador de redes neuronais é, assim, considerada como sendo a melhor comparativamente com a dos dois anteriores controladores.

Egerstedt *et al.* [64], [65] [66] propôs uma solução para o problema de controlo de um robô não-holónimo semelhante a um carro usando uma abordagem de veículo virtual, onde o movimento do ponto de referência (veículo virtual) na trajectória planeada, é regulado por uma equação diferencial que contém o erro de realimentação. Esta abordagem pode ser vista como uma combinação do convencional seguimento de trajectória (onde a trajectória de referência é parametrizada no tempo), com o seguimento de caminho [161] (onde o critério é manter-se perto de um caminho, mas não necessariamente perto de um ponto especificado à partida, num dado tempo). Esta abordagem utiliza o modelo dinâmico do veículo e recorre ao controlo por realimentação não-linear. No entanto, desde que a localização do veículo virtual seja determinada, o seguimento passa a ser controlado por um controlador proporcional. O autor refere que uma das vantagens desta abordagem é ser robusta no que diz respeito a erros de medição e perturbações externas. Se tanto os erros como as perturbações estiverem dentro de certos limites, o ponto de referência vai mover-se ao longo da trajectória de referência enquanto o robô a segue, de outro modo o ponto de referência poderia ‘parar’ e esperar pelo robô.

Aguilar e Souères [4] apresentaram uma abordagem do seguimento de caminho de WMRs baseada no modelo cinemático, e no conhecimento da dinâmica dos actuadores. Este método original baseado na técnica da linearização por realimentação discreta, permite usar alguns resultados da análise do controlo linear. É mostrado que este novo sistema de controlo permite deduzir uma lei de controlo estabilizante global (recorrendo a técnicas de controlo em modo deslizante). Finalmente provaram que esta

lei de controlo, tirando partido da teoria de controlo linear, pode também ser usada para estabilizar o sistema original. Segundo Aguilar e Souères, o principal interesse da utilização desta estrutura de controlo variável, com o modelo dinâmico, é filtrar os fenómenos de ruído e a ‘trepidação’.

Diversos investigadores, recorreram ao controlo não-linear de WMRs, como por exemplo Sordalen *et al.* [176] que propuseram um controlador por realimentação suave para o seguimento de caminho de um WMR, tendo a particularidade de poder especificar as velocidades desejadas, em certos pontos, ao longo do caminho (podendo ser zero, positivas ou negativas). B. d’Andrea Novel *et al.* [8] usaram um controlador baseado no modelo dinâmico para um robô móvel de três rodas com restrições não-holónomas, recorrendo a linearização entrada-saída para estabilizar o sistema. Walsh *et al.* [188] abordaram o problema do seguimento de trajectória de um WMR, e propuseram a estabilização de sistemas não-holónomos em torno de trajectórias de referência. Para robôs com configuração tipo carro, o problema do seguimento de trajectória foi também abordado em [9] usando o método de linearização por realimentação dinâmica. Astolfi *et al.* [16] também usou técnicas não-lineares no seguimento de caminho.

## Outros Métodos de Controlo

Os problemas de seguimento de caminho e seguimento de trajectória foram resolvidos essencialmente por meio de abordagens de controlo não-linear standard, tais como a linearização por realimentação entrada-saída (já abordada neste capítulo) [10]. No entanto, outras técnicas/metodologias foram desenvolvidas ao longo dos anos apresentando diferentes abordagens para realizar o seguimento de caminho (e/ou trajectória) de robôs móveis, como se passa a descrever.

### • *Controlo em Modo Deslizante*

Uma técnica de controlo bastante utilizada é o controlo em modo deslizante, que integra uma lei de controlo de realimentação de comutação rápida que induz um modo de deslizamento. A ideia básica do funcionamento do modo deslizante é forçar o sistema dinâmico a um movimento restrito em espaço de estados, na superfície de deslizamento [55],[184],[170]. O controlo em modo deslizante básico, tendo sido inicialmente utilizado como uma abordagem de controlo robusta de manipuladores [172] [196], tem sido apli-

cado também, com êxito, no controlo de seguimento de caminho/trajectória de WMRs (por exemplo em [2], [21]). Desde há alguns anos que o modo deslizante tem recebido a atenção por parte dos investigadores no controlo de sistemas não-holónomos, nomeadamente quando são consideradas as incertezas [194]. Aguilar *et al.* [2],[3] apresentaram uma abordagem ao seguimento de caminho usando um controlador de realimentação em modo deslizante, para um robô semelhante a um carro, que é robusto contra erros de estimação de curvatura, e erros de localização. Belhocine [21] apresentou um projecto de controlo de seguimento de trajectória robusto para robôs móveis com rodas (WMR), usando uma metodologia de linearização por realimentação dinâmica e um controlador em modo deslizante que garante a robustez em presença de incerteza de parâmetros e dinâmica não modelada. Souères *et al.*[178] propôs um controlador de seguimento de caminho para robôs móveis, usando o modelo cinemático e recorrendo a técnicas de controlo em modo deslizante. A lei de controlo utilizada apresenta propriedades de flexibilidade, que permitem a realização da tarefa secundária de desvio de obstáculos, enquanto decorre o processo de seguimento de caminho. Outros trabalhos que utilizam o modo deslizante para o controlo de seguimento de caminho podem ser encontrados em [201] [194]. Alguns controladores robustos em modo deslizante foram propostos para lidar com os modelos na presença de incertezas de parâmetros [62] [80][148][90]. As vantagens do controlo em modo deslizante incluem resposta rápida, bom desempenho e robustez no que respeita à variação de parâmetros [194].

- ***Controlo por Backstepping***

O controlo por *backstepping* é uma técnica de controlo recursiva que garante a existência de uma função de Lyapunov de modo a proporcionar a estabilidade do sistema global, possibilitando uma alternativa à técnica de linearização por realimentação existente [9]. Existem diversos trabalhos que usam o controlo por *backstepping* para o seguimento de caminho e seguimento de trajectória de robôs móveis. Jiang *et al.* [98] [99] aplicaram a técnica do controlo por *backstepping* ao controlo adaptativo de sistemas não-holónomos com parâmetros desconhecidos. Fierro [72] usou técnicas de controlo baseadas na teoria de Lyapunov e técnicas de controlo por *backstepping* para obter uma lei de controlo combinada e robusta para o seguimento de caminho de WMRs, do mesmo modo Soetanto [175] desenvolveu um controlador baseado nesta teoria, aplicando-o a um uni-ciclo. Em Kristić [113]

e Khalil [108] é exposta de um modo elucidativo os fundamentos teóricos e práticos para a aplicação das técnicas de controlo por *backstepping*. Jaewon [97] aplica esta técnica ao seguimento de trajectória de um WMR. Para mais informação sobre esta técnica podem ser consultadas, por exemplo, as referências: [111][114][117].

- ***Controlador de Kanayama***

Kanayama e Fahroo [107] propuseram um método de seguimento de uma linha para veículos não-holónomos (utilizando o modelo cinemático). O controlador de Kanayama [105], [106], [107] fundamenta-se na análise da dinâmica do erro de um robô móvel não-holónimo, é de simples implementação e a estabilidade do sistema em malha fechada é garantida pela teoria da estabilidade de Lyapunov. Este método apesar de ser considerado não-linear apresenta um ‘comportamento’ linear. Os comandos de velocidade gerados, assumem um comportamento do tipo controlo proporcional (i.e. “proporcionais” ao erro). Na prática este comportamento traduz-se em variações bruscas nas velocidades quando ocorrem variações bruscas no vector de erros.

- ***Controlo por Lógica Difusa***

Um outro sistema de controlo, o controlador por lógica difusa, apresenta como uma das principais características a sua capacidade de representar os conceitos linguísticos e a subsequente capacidade de modelizar a experiência de operadores humanos. Este tipo de controlador é particularmente interessante no controlo de processos para os quais não se tem um modelo matemático adequado. Ishikawa [94] usa os controladores por lógica difusa de modo a projectar o seguimento de trajectória de robôs móveis. Bentalba [24] projectou um controlador de seguimento de caminho para um carro (fazendo uso do modelo dinâmico) usando primeiro uma lei de realimentação de estado e depois um controlo por lógica difusa. O controlador por lógica difusa, apresentou bom desempenho na presença de não-linearidades. O controlador por lógica difusa também foi utilizado no controlo de condução de veículos do tipo automóvel por Fraichard [75]. O objectivo neste caso consistia em efectuar a condução automática do veículo de modo a seguir uma trajectória pré-definida e em simultâneo reagir, em tempo real, a eventos inesperados.

- ***Controlo por Redes Neurais***

O controlo por redes neuronais, pode ser usado para determinar as entradas de controlo do sistema, com base nas actuais medições, ou pode ser usado para estimar parâmetros do modelo. X.Yang *et al.* [195] apresentaram uma abordagem de controlo preditivo (baseado no controlo por redes neuronais) para o seguimento de caminho de um WMR. O conceito básico deste controlador preditivo é, em primeiro lugar, a estimação da localização e orientação futuras do veículo, baseado na localização e orientação actuais, bem como nas entradas de controlo actuais. O erro é calculado então, com base nesta predição comparando-a com o caminho desejado. Finalmente, uma técnica de optimização é usada para determinar a saída do controlador para o período de tempo seguinte. O controlador preditivo usa um modelo cinemático do veículo que é dependente da velocidade (modelada por um sistema linear simples) actual do veículo e do ângulo de direcção. O modelo de seguimento, por outro lado, é determinado usando as redes neuronais. Fierro [72] utiliza as redes neuronais na ‘aprendizagem’ da dinâmica do WMR (como já referido neste capítulo). Para mais informação sobre redes neuronais podem ser consultadas, as referências:[25] [150].

### 2.2.3 Robustez

Devido ao forte impacto da introdução dos robôs móveis em diversas áreas de aplicação, o assunto da robustez, isto é, neste caso, “o problema do controlo de sistemas não-holónomos quando há incertezas de modelo” [111], tem sido largamente abordado na literatura. No entanto, foram poucos os trabalhos apresentados relativamente a este assunto, em que são abordados o controlo de seguimento de caminho ou de trajectória de WMRs. Isto poderá dever-se ao facto de que, ao realizar o projecto do controlo do sistema usando o modelo cinemático do veículo não se tenha em conta explicitamente as variações dos parâmetros do modelo (incertezas na modelação), que podem dever-se a características intrínsecas dos robôs móveis tais como a dinâmica interna do veículo, inércia, limites máximos de potência dos actuadores e erros de localização. Os ruídos são normalmente descritos em termos estocásticos com uma distribuição estatística conhecida (com ou sem parâmetros conhecidos), no entanto devido à grande diversidade de perturbações, torna-se difícil a sua classificação e caracterização. As perturbações incluindo ruído e não-linearidades estão sempre presentes em sistemas de



controlo complexos, podendo surgir devido à natureza do sistema ou serem deliberadamente introduzidas por fontes externas no controlador de modo a verificar se as incertezas de modelo são toleradas. Torna-se então necessário implementar abordagens de controlo robustas a incertezas.

Relativamente ao seguimento de caminho ou trajectória, há apenas um pequeno número de trabalhos que abordam a problemática das incertezas em sistemas não-holónomos [111]. A presença de incertezas nos sistemas não-holónomos, representa um problema para os sistemas de controlo, que obriga a uma redobrada atenção e que necessita ainda ser mais intensamente estudado. Alguns resultados preliminares sobre o controlo de sistemas não-holónomos com incertezas foram apresentados por Canudas [43] e ainda Jiang e Pomet [98]. Aguilar *et al.* [2] [3] apresentaram um controlador de realimentação em modo deslizante, para o seguimento de caminho de um robô semelhante a um carro, afirmando possuir robustez para erros de estimação de curvatura e localização.

Egerstedt [64], tal como já foi referido, apresentou um controlador para o seguimento de caminho de um WMR, que é globalmente robusto contra erros de posição e velocidade. Afirma, no entanto, que mais trabalho é necessário de modo a que o sistema se torne ainda mais robusto.

Uma solução robusta foi apresentada por Jiang [99] com base na utilização de um controlador por *backstepping*. Como foi discutido por Oriolo *et al.* [144] o controlo por ‘aprendizagem’ representa uma abordagem conceptualmente diferente ao projecto de leis de controlo e são capazes de lidar com incertezas e não-linearidades. Um trabalho recente de Kim and Tsiotras [110], realizou uma análise teórica sobre vários controladores, para WMRs, existentes na literatura, comparando as suas propriedades de robustez e estabilidade.

Soetanto *et al.* [175] apresentou uma lei de controlo que consegue lidar explicitamente com a dinâmica do veículo, e com as incertezas de parâmetros de processos. Isto é obtido controlando a razão de progressão de um ‘alvo virtual’ a ser seguido ao longo do caminho. Esta abordagem usa uma lei de controlo adaptativa não-linear baseada na teoria de Lyapunov e nas técnicas de *backstepping*, permitindo assegurar a convergência do sistema (em malha fechada) para zero.

Oriolo *et al.* [143] apresentaram uma abordagem ao controlo de seguimento de trajectória de WMRs em ambientes sem obstáculos, mostrando um controlador, usando linearização por realimentação dinâmica, eficiente e

robusto. Salientam ainda que perturbações que actuam no modelo de robôs móveis não são de igual importância, isto é, o desvio numa direcção compatível com a mobilidade do veículo não é tão importante como um desvio que viole as restrições cinemáticas do sistema. A grande importância deste estudo, deve-se ao facto de fornecer importantes ‘*guidelines*’ para os projectos de controladores, dado que compara o método proposto com outras técnicas. Assim, propõem a inclusão em futuras abordagens de controlo do modelo dinâmico do veículo que proporcionaria uma abordagem mais ‘realística’ do problema de controlo. Por outro lado, refere que são muito poucos os trabalhos que abordam a problemática da robustez no controlo de sistemas não-holónomos [143].

A estabilização robusta de WMRs foi ainda obtida nos trabalhos de Bennani e Rouchon [23] e Lucibello e Oriolo [121].

De modo a apresentarem robustez, essencialmente contra o ruído presente nas medições (bem como estimar os estados não medidos), muitos são os trabalhos (desde o controlo de processos químicos à robótica) que utilizam o observador (ou estimador) filtro de Kalman. Uma série de estimadores foram propostos ao longo dos tempos, que na maior parte dos casos são extensões do filtro de Kalman. Para cada sistema, tem de ser escolhido o estimador adequado. Até à pouco tempo o filtro de Kalman estendido (EKF) era inquestionavelmente a técnica de estimação de estados dominante [138]. Há diversos trabalhos em que é usado o filtro de Kalman estendido como por exemplo, Hu [92] propôs um filtro de Kalman estendido para estimar a posição do WMR a partir dos dados que recebe dos *encoders* e do sensor *laser*, de modo a projectar o seguimento de trajectória do WMR.

Uma nova estrutura, observador activo baseado no filtro de Kalman (AOB) foi apresentado por Cortesão [51], e reformula o projecto do filtro de Kalman para atingir o comportamento em malha fechada desejado, apesar dos termos não-modelados. Esta estrutura tem como objectivo compensar termos não-modelados e mostrou ser robusta contra incertezas, perturbações e ruídos. O AOB pertence à classe de observadores de perturbações estocásticas, mas a sua abordagem é muito diferente da abordagem usada no observador de perturbação (DOB) [140]. No DOB, a quantificação das incertezas nunca entra no projecto. O DOB apenas estima a perturbação equivalente, enquanto que o AOB estima o estado completo, incluindo a perturbação equivalente, fazendo uso apenas de métodos discretos de es-

paço de estados. O AOB foi aplicado com sucesso a manipuladores [52] [53] [54], mas até ao momento nunca foi aplicado a WMRs.

Como foi constatado por alguns investigadores [143] [65] [194], apesar de serem inúmeros os trabalhos de investigação realizados, são poucos os que apresentam a robustez desejável (contra ruído não modelado, incertezas e não-linearidades) para o controlo de sistemas não holónomos, com especial destaque para o seguimento de caminho (ou de trajectória) de WMRs.

#### 2.2.4 Cadeiras de Rodas Robotizadas

O progresso nomeadamente ao nível da mobilidade e controlo de movimento de WMRs tornou possível a sua aplicação em áreas em que o movimento deve ser suave, como por exemplo a utilização de cadeiras de rodas inteligentes, equipadas com motor, para auxiliar deficientes e idosos [187]. Esta é uma área onde surgiram muitos trabalhos de investigação, no entanto, poucos são os trabalhos que se dedicam especificamente ao controlo do movimento de cadeiras robotizadas, e em particular no que diz respeito ao seguimento de um caminho pré-definido. São abordadas essencialmente estratégias de planeamento de caminho (e de trajectória), destaca-se por exemplo o trabalho de Han [85] que aborda a problemática do planeamento do movimento de uma cadeira de rodas. Diversos outros trabalhos abordam a problemática da realização de projectos de controlo de cadeiras de rodas, de modo a proporcionar um sistema de navegação assistida para pessoas com incapacidades [35][156][165]. No entanto, e como já referido, não incidem particularmente no controlo de seguimento de caminho. De entre os poucos trabalhos que tratam o tema do seguimento de caminho de uma cadeira de rodas robotizada, pode referir-se o de Yoder [197] e o de Espinosa [68] que apresentam diferentes abordagens de controlo. Assim, Yoder [197], no sentido de resolver o problema do seguimento de caminho, usa um algoritmo de controlo PID e uma ‘descrição’ de um caminho geométrico para calcular os erros de seguimento; por outro lado usa ainda um EKF para estimar a posição e orientação do robô no ambiente. Espinosa [68], inclui um controlador óptimo adaptativo dedicado, de condução diferencial, na malha de controlo, que permite melhorar o conforto e segurança dos sistemas de condução automática. Possui ainda, um controlador por lógica difusa, dedicado ao seguimento de trajectória, para minimizar os erros de localização, proporcionando à cadeira um alto grau de ‘inteligência’ e autonomia, mesmo

quando se depara com obstáculos.

O grupo de trabalho a que pertence Balcells e Río, interessou-se nos últimos anos pelo controlo de seguimento de caminho de WMRs, com o intuito de aplicar as diversas técnicas utilizadas nos WMRs às cadeiras de rodas eléctricas ([45] [46] [154] [155]) melhorando os seus desempenhos.

Estas abordagens de controlo de uma cadeira de rodas, não são mais do que a aplicação dos métodos de controlo de WMRs a um caso particular. Devido às características especiais que apresentam as cadeiras de rodas, como por exemplo o facto de serem veículos “tripulados” por indivíduos com alguma incapacidade, o movimento deverá ser muito mais suave e seguro, com todas as implicações que isto tem no seu projecto de controlo.

## 2.3 Conclusões

Neste capítulo, foram apresentadas um grande número de referências que dizem respeito a seguimento de trajectórias. Isto resulta do facto de os conceitos fundamentais com que se “rege” esta área de investigação serem comuns com a área em estudo (seguimento de caminho). No entanto, apesar de o seguimento de trajectória ser fácil de compreender, não é o único método (nem talvez o mais adequado), para seguir caminhos pré-estabelecidos. Nos anos 90, várias alternativas foram propostas. O seguimento de caminho, foi a melhor, e mais adequada, alternativa demonstrada na literatura para muitas situações nas quais o tempo não é um parâmetro crítico. Além disso, a ‘extracção’ de uma lei assintoticamente estável, usando o seguimento de caminho, não é mais difícil de obter do que no caso da utilização do seguimento de trajectória, como se pode verificar na literatura mencionada nesta tese. Assim, o interesse no seguimento de caminho tem vindo a crescer rapidamente.

# Capítulo 3

## Cinemática de Robôs Móveis

Este capítulo aborda de uma forma sistemática a cinemática de robôs móveis com rodas. São apresentados um conjunto de conceitos fundamentais para a obtenção das equações cinemáticas (designadamente a convenção de Sheth-Uicker na atribuição de sistemas de coordenadas, sistemas de coordenadas instantaneamente coincidentes, álgebra de matrizes de transformação, Jacobianos das rodas). É desenvolvido de modo sistematizado a obtenção do modelo cinemático de robôs móveis com rodas e exemplificado para o robô em estudo (cadeira de rodas robotizada).

### 3.1 Introdução

A evolução dos sistemas de controlo de movimento, tem vindo a permitir uma melhor aplicação de robôs móveis com rodas (WMR) a tarefas em ambientes não estruturados. A obtenção do modelo cinemático é o primeiro passo para o controlo eficiente de WMRs. A cinemática trata do estudo da geometria do movimento [168], e a sua análise, aplicada a WMRs, será objecto de estudo aprofundado neste capítulo.

Na obtenção do modelo cinemático de robôs manipuladores utiliza-se a convenção “Denavit-Hartenbeg” [56], para atribuir sistemas de coordenadas a cada uma das junções do braço robotizado. A metodologia da modelação cinemática dos manipuladores<sup>1</sup>, não se apresenta como sendo a mais ade-

---

<sup>1</sup>Nesta tese o termo manipulador é utilizado para descrever um robô manipulador fixo relativamente a um sistema referencial (sistema de coordenadas do mundo).

quada à aplicação nos WMRs, devido a um conjunto de características dos WMRs das quais se destacam [130]:

1. Na classe de WMRs em estudo, estes têm uma configuração em que existe sempre mais que uma roda em contacto com o “chão”, conseqüentemente têm múltiplas cadeias em ligação fechada [142]. Os manipuladores, por sua vez, formam cadeias em ligação fechada apenas quando estão em contacto com objectos estacionários [125].
2. Uma roda do robô móvel pode ter movimento de rotação e de translação no ponto de contacto roda-“chão”. Quando este contacto<sup>2</sup> está restrito a um ponto ou uma linha de contacto, diz-se estar perante um **par de ordem elevada** [20]. No manipulador este tipo de contacto corresponde a uma “junção prismática”, e diz-se estar perante um **par de ordem baixa**. Neste último caso os movimentos relativos dos pares de componentes estão restringidos a uma superfície comum de contacto [11][168][169].
3. Geralmente, no WMR nem todas as rodas são actuadas, e apenas alguns graus de liberdade (DOFs) de uma roda são actuados. Num manipulador não-redundante todas as junções são actuadas (havendo uma correspondência entre junções e DOFs).

O movimento do WMR é função da sua configuração geométrica, e das restrições impostas pelo movimento das rodas. No estudo da cinemática são atribuídos sistemas de coordenadas ao corpo e a outros constituintes do robô (e.g. rodas, ligações de direcção, etc.), e são utilizadas matrizes de transformação ( $4 \times 4$ ) para relacionar os diferentes sistemas de coordenadas, possibilitando a obtenção das equações de movimento. Estas matrizes são obtidas através da convenção de “Sheth-Uicker” [167] (ver secção 3.2.2). Usam-se ainda matrizes Jacobianas, que relacionam o movimento de cada roda com o movimento do corpo do robô. Podem-se então combinar as equações de cada roda (individual), para obter a equação final do movimento do robô.

Os conceitos definidos anteriormente são de extrema importância na obtenção do modelo cinemático, fornecendo ainda bases sólidas para o modelo dinâmico do robô e para o seu controlo.

---

<sup>2</sup>Para uma correspondência de análise com um manipulador, o ponto de contacto pode ser entendido como uma junção.

Na elaboração do modelo cinemático do WMR em estudo, vão ser considerados três graus de liberdade: duas translações e uma rotação no plano. É ainda necessário ter em consideração as rodas utilizadas no WMR. Normalmente, as rodas dos robôs são paralelas, havendo no entanto exceções. Um outro aspecto importante é o tipo de rodas utilizadas, que se podem agrupar nas seguintes categorias: *Roda Convencional*, *Roda Omnidireccional*, e *Roda Esférica*.

A **roda convencional** tem 2 DOFs e é a de construção mais simples. Este tipo de roda move-se ao longo da superfície na direcção da orientação da roda (ver figura 3.2), e a rotação é feita no ponto de contacto entre a roda e o “chão”. É de notar que o DOF rotacional corresponde ao ‘deslizamento’, uma vez que o ponto de contacto não é estacionário em relação à superfície do chão. Sabe-se que existe um certo escorregamento (deslizamento) transversal aquando da rotação, no entanto, não se considera este deslizamento transversal como sendo um DOF, dado que a sua magnitude é reduzida nas situações normais de movimento do robô (quando efectuado de forma controlada). Por seu lado, a **roda convencional direccionada** tem um DOF adicional, que é fornecido pela ligação (braço) de direcção (tem assim um total de 3 DOFs).

A **roda omnidireccional** (figura 3.1) tem 3 DOFs. O primeiro deles é na direcção da orientação da roda (ver figura 3.2). O segundo DOF corresponde ao movimento dos rolamentos (rolos) montados em torno da periferia do aro da roda principal. Em princípio os rolos podem ser montados com qualquer ângulo  $\eta$ , não nulo, em relação à orientação da roda. O terceiro DOF é o deslizamento rotacional em torno do eixo perpendicular ao plano de movimento e que passa no ponto de contacto. É possível, actuar os rolos das rodas omnidireccionais [130], não sendo no entanto muito usual devido à complexidade exigida na implementação do método de condução.

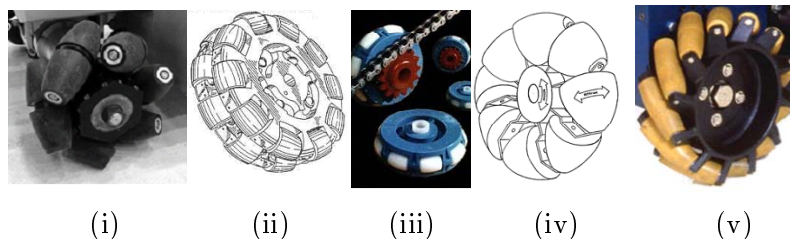


Figura 3.1: Tipo de rodas omnidireccionais.

A **roda esférica** tem 3 DOFs sem deslizamento (ou escorregamento). A roda omnidireccional é cinematicamente equivalente à roda esférica no caso particular em que a orientação dos rolos (i.e. a perpendicular ao eixo dos rolos) apresenta um ângulo de  $\eta = 90^\circ$  em relação à orientação da roda (ver figura 3.1(iii)).

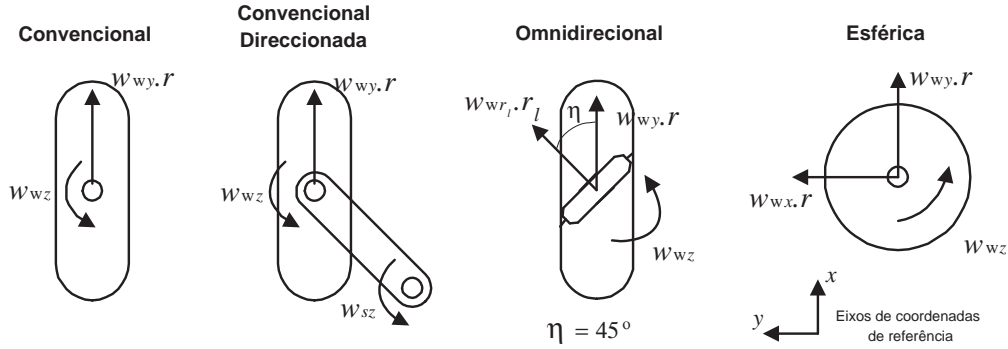


Figura 3.2: Graus de liberdade dos diferentes tipos de rodas. Na roda omnidireccional é representado um único rolamento cuja orientação tem um ângulo de  $\eta$  em relação à orientação da roda.

Tabela 3.1: Relações cinemáticas para os diferentes tipos de rodas

<i>Convencional e Convencional Direccionada</i>	<i>Omnidireccional</i>	<i>Esférica</i>
$\nu_x = w_{wy} \cdot r$	$\nu_x = w_{wy} \cdot r - w_{wr_l} \cdot r_l \cdot \cos(\eta)$	$\nu_x = w_{wy} \cdot r$
$\nu_y = 0$	$\nu_y = w_{wr_l} \cdot r_l \cdot \sin(\eta)$	$\nu_y = w_{wx} \cdot r$
$w_z = w_{wz}$	$w_z = w_{wz}$	$w_z = w_{wz}$

Na tabela 3.1  $\nu_x$  e  $\nu_y$  são os componentes  $x$  e  $y$  da velocidade linear da roda no “ponto de contacto”;  $w_z$  é o componente  $z$  da velocidade angular da roda no “ponto de contacto”;  $w_{wr_l}$  é a velocidade angular do rolo sobre os seus eixos;  $w_{wx}$ ,  $w_{wy}$  e  $w_{wz}$  são as velocidades angulares em torno dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente;  $w_{sz}$  é a velocidade angular da ligação de direcção (braço de ligação) em torno de  $z$ ;  $\eta$  é o ângulo entre a orientação dos rolos e a orientação da roda; e  $r$  e  $r_l$  representam os raios das rodas e de um rolo (na roda omnidireccional), respectivamente.



## 3.2 Modelo Cinemático

### 3.2.1 Introdução

Muir [130] define WMR como sendo “um robô com capacidade de locomoção numa superfície, unicamente por meio da actuação dos *conjuntos roda-ligação* montadas no robô e em contacto com a superfície”. Considera-se que um WMR é constituído, do ponto de vista mecânico, pelo corpo, por rodas, e por estruturas de ligação entre cada roda e o corpo. Cada conjunto, constituído por uma roda (convencional, omnidireccional ou esférica) e seus dispositivos de ligação ao corpo do robô, é designado por *conjunto roda-ligação*. Um conjunto roda-ligação permite o movimento relativo entre o corpo do robô e uma superfície na qual se movimenta, sendo desejável que haja um único ponto de contacto rolante.

Na obtenção do modelo cinemático consideram-se as seguintes suposições:

- ***Suposições de projecto***

- 1) O robô é constituído por mecanismos rígidos;
- 2) O robô não contém nenhuma, ou, no máximo, contém uma ligação de direcção por roda;
- 3) Todos os eixos de direcção são perpendiculares à superfície na qual o WMR se movimenta.

- ***Suposições operacionais***

- 4) O WMR move-se numa superfície plana e sem rugosidade;
- 5) A fricção longitudinal (i.e. relativa ao movimento longitudinal) no ponto de contacto entre a roda e a superfície é suficientemente grande, de modo a não permitir o deslizamento longitudinal;
- 6) A fricção rotacional no ponto de contacto entre a roda e a superfície é suficientemente pequena, de modo a permitir o deslizamento rotacional.

A suposição 1 indica que a dinâmica dos componentes do WMR, de que são exemplo os mecanismos flexíveis da suspensão e os pneus, é ‘insignificante’. Esta suposição é feita de modo a aplicar a mecânica do corpo rígido ao modelo cinemático.

Com as suposições 2 e 3 reduz-se a gama dos WMRs a que esta metodologia se dirige, e deste modo limita-se a complexidade dos modelos cinemáticos. No caso dos WMRs que apresentem mais do que uma ligação de direcção por roda, esta metodologia só pode ser aplicada se apenas uma

ligação de direcção tiver liberdade de movimento. É necessário que todas as ligações não-direccionais sejam estacionárias. Com a suposição 3 restringem-se as ligações de direcção a ligações das quais resultam movimentos de rotação segundo o eixo  $z$  (eixo perpendicular ao plano de movimento do robô), daí resulta que todos os movimentos do WMR se confinam a um plano.

De acordo com a suposição 4, despreza-se o efeito de possíveis irregularidades da superfície em que se movimenta o WMR.

Com a suposição 5 são aplicáveis as propriedades teóricas da cinemática de uma roda em contacto puramente rolante, i.e. cada roda pode ‘rolar’ na direcção em que aponta, e girar em torno do seu eixo vertical, mas não pode deslizar. Esta suposição é realística para superfícies secas, como decorre do sucesso dos mecanismos de travagem dos automóveis.

Os automóveis ilustram também a validade, na prática, da suposição 6. As rodas devem girar, (i.e. deslizar) sobre os seus pontos de contacto para fazerem uma curva. Esta suposição também é válida pelos mesmos motivos, para os WMRs.

### 3.2.2 Atribuição dos Sistemas de Coordenadas

#### Convenção de Sheth-Uicker

Para a obtenção do modelo cinemático, é necessário proceder à atribuição de sistemas de coordenadas a alguns dos elementos do robô. Os mecanismos de *par de ordem baixa*, nos manipuladores, funcionam com duas superfícies em movimento relativo. Por sua vez, as rodas de um WMR são *par de ordem elevada* e funcionam idealmente por contacto num ponto. A convenção de Denavit-Hartenberg [56] utilizada na modelação cinemática de manipuladores conduz no caso dos WMRs a atribuições ambíguas de matrizes de transformação de coordenadas para as múltiplas cadeias de ligação fechadas [167], devido ao facto da modelação por esta convenção ser baseada na posição e orientação relativa de duas junções sucessivas. A ambiguidade, surge então ao decidir qual a ordem de ‘utilização’ da junção, quando há mais do que duas junções numa única ligação.

Nos WMRs, aplica-se a convenção Sheth-Uicker para atribuir sistemas de coordenadas e modelizar cada roda como um **par planar** no ponto de contacto. Esta convenção permite modelizar o movimento da roda de *par de ordem elevada* e elimina ambiguidades nas matrizes de transformação de

coordenadas. Como se ilustra na figura 3.3, o par planar permite 3 DOFs, respeitantes aos movimentos de translação segundo  $x$  e  $y$ , e ao movimento de rotação em torno do eixo  $z$  no ponto de contacto. A convenção de Sheth-Uicker é ideal para modelizar rodas esféricas; as velocidades angulares da roda são convertidas directamente em velocidades lineares ao longo da superfície. Os movimentos do par planar devem ser limitados para incluir rodas que não permitam 3 DOFs. Por exemplo, o sistema de coordenadas atribuído no ponto de contacto de uma roda convencional é alinhado com o eixo  $x$  paralelo à roda. O modelo da roda fica completo, restringindo o movimento segundo o eixo do  $y$  da velocidade da roda, a zero, em concordância com a suposição 5 de que não ocorre deslizamento longitudinal.

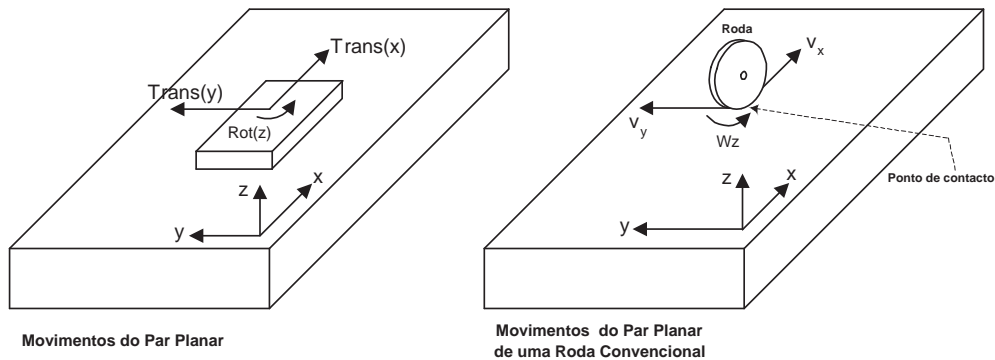


Figura 3.3: Modelo do par planar de uma roda.

### Sistemas de Coordenadas de um WMR

De acordo com Muir [130] e McKerrow [125], atribuem-se sistemas de coordenadas a ambos os extremos de cada ligação do WMR, como se exemplifica na figura 3.4 para cada conjunto roda-ligação. Para cada roda em contacto com o chão gera-se uma cadeia de ligação-fechada que engloba o ponto de contacto da roda com a superfície, as ligações de direcção e o corpo do robô. Veja-se a constituição de uma cadeia de ligação-fechada, por exemplo relativamente à roda 1 (ver figura 3.4). A cadeia de ligação-fechada tem um par planar que modeliza o corpo do robô relativamente à superfície, um par de revolução que diz respeito ao movimento de rotação do conjunto roda-ligação relativamente ao corpo do robô (movimento em torno do eixo

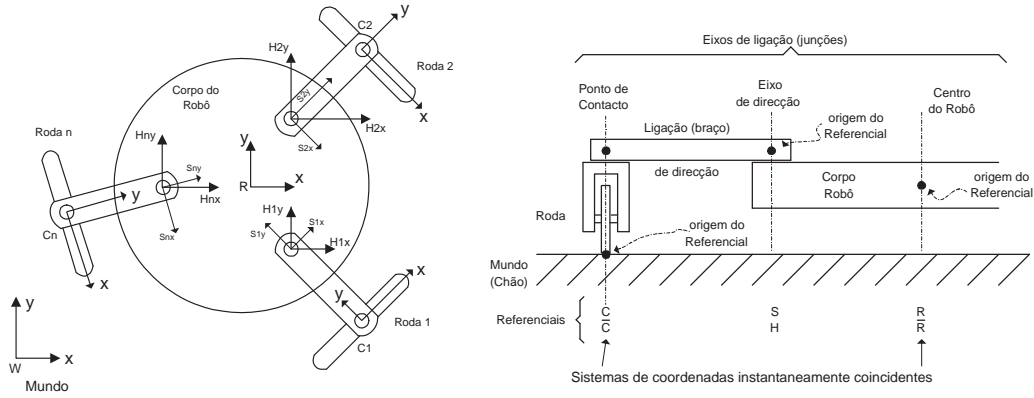


Figura 3.4: Atribuição dos sistemas de coordenadas num WMR.

$z$  que passa no ponto de origem dos referenciais  $S$  e  $H$ ), e o par planar que modeliza o contacto da roda com a superfície. A atribuição de sistemas de coordenadas segue as regras gerais definidas na tabela 3.2. A um WMR com  $N$  rodas, com estrutura do tipo da representada na figura 3.4, atribuem-se  $3N + 1$  sistemas de coordenadas: três sistemas de coordenadas por cada conjunto roda-ligação, e um sistema de coordenadas atribuído ao corpo do robô. Há também  $N + 1$  *sistemas de coordenadas instantaneamente coincidentes*, que não necessitam de ser atribuídos explicitamente (assunto a ser abordado na secção seguinte).

O sistema de coordenadas do mundo  $W$ , é estacionário relativamente à superfície de ‘viagem’ (ou do movimento), e é usado como sistema de coordenadas de referência para os movimentos do robô. O sistema de coordenadas do robô  $R$  é atribuído ao corpo do robô, de modo a que a posição do WMR seja dada pela localização do sistema de coordenadas do robô no sistema de coordenadas do mundo.

As atribuições dos sistemas de coordenadas não são únicas. Há liberdade para atribuir sistemas de coordenadas a posições e orientações, que conduzam a estruturas mais convenientes para o modelo cinemático. Por exemplo, pode ser escolhido qualquer sistema de coordenadas do robô,  $R$ , desde que localizado no corpo do robô. É comum escolher-se o centro geométrico do robô, ou fazer com que o sistema de coordenadas coincida com o eixo das rodas motrizes. No caso particular do robô utilizado neste estudo, o sistema de coordenadas é coincidente com o centro de massa.

Tabela 3.2: Atribuição dos sistemas de coordenadas

---

<b>W</b>	- <i>Mundo (ou ‘chão’)</i> : Sistema de coordenadas de referência estacionário, com o eixo $z$ perpendicular à superfície de movimento do robô (i.e sistemas de coordenadas do ‘Mundo’).
<b>R</b>	- <i>Robô</i> : Sistema de coordenadas que se move com o corpo do WMR, com o eixo $z$ perpendicular à superfície de movimento do robô (i.e. sistema de coordenadas do robô).
<b>H<sub>i</sub></b>	- <i>Eixo de direcção</i> (para $i = 1, \dots, N$ ): Sistema de coordenadas com orientação coincidente com o sistema de coordenadas $R$ , e com o eixo $z$ e origem coincidentes com o eixo da junção $i$ (i.e. o eixo existente entre a ligação de direcção $i$ e o corpo do robô), se existir alguma; ou coincidente com o eixo $z$ e origem do sistema de coordenadas $C_i$ caso não exista nenhuma ligação de direcção.
<b>S<sub>i</sub></b>	- <i>Direcção</i> (para $i = 1, \dots, N$ ): Sistema de coordenadas que se move com a ligação de direcção $i$ , com o eixo $z$ e origem coincidentes com o eixo $z$ e origem de $H_i$ .
<b>C<sub>i</sub></b>	- <i>Ponto de Contacto</i> (para $i = 1, \dots, N$ ): Sistema de coordenadas com a origem no ponto de contacto entre a roda $i$ e a superfície, com o eixo $x$ paralelo à roda e orientado no sentido do movimento (se a roda tiver uma orientação preferencial, caso contrário, o eixo é atribuído arbitrariamente), e com o plano x-y tangente à superfície.
<b><math>\bar{R}</math></b>	- <i>Robô instantaneamente coincidente</i> : Sistema de coordenadas coincidente com o sistema de coordenadas $R$ e estacionário relativamente ao sistema de coordenadas $W$ .
<b><math>\bar{C}_i</math></b>	- <i>Ponto de contacto instantaneamente coincidente</i> (para $i = 1, \dots, N$ ): Sistema de coordenadas coincidente com o sistema de coordenadas $C_i$ e estacionário relativamente ao sistema de coordenadas $W$ .

---

### Sistema de Coordenadas Instantaneamente Coincidentes

Para se introduzir o conceito de sistema de coordenadas instantaneamente coincidentes, considere-se o exemplo uni-dimensional de uma bola (actuada) rolando em linha recta numa superfície lisa [130] (ver figura 3.5(a)).

A bola move-se da direita para a esquerda com velocidade  $\nu_e$  e aceleração  $a_e$ , variáveis no tempo. O ponto de referência estacionário  $\bar{e}$  está no caminho da bola em movimento. No momento em que a bola (ponto  $e$ ) e a referência

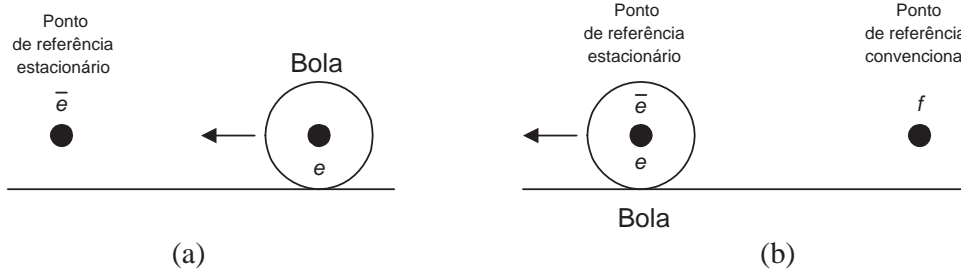


Figura 3.5: Bola em movimento: (a) Antes da coincidência instantânea. (b) No momento da coincidência instantânea.

(ponto  $\bar{e}$ ) coincidem, observa-se que: (1) a posição da bola relativamente ao ponto de referência,  ${}^{\bar{e}}p_e$ , é zero; (2) a velocidade,  ${}^{\bar{e}}\nu_e$ , e aceleração,  ${}^{\bar{e}}a_e$ , da bola relativamente ao ponto de referência são diferentes de zero.

Chama-se ao ponto  $\bar{e}$  um ponto de referência instantaneamente coincidente, para a bola em movimento no instante mostrado na figura 3.5(b).

Atribuem-se continuamente pontos de referência coincidentes  $\bar{e}$  durante o movimento da bola, para generalizar as observações para todo o tempo  $t$ . A posição da bola, relativamente ao seu ponto de referência instantaneamente coincidente, é zero (i.e.  ${}^{\bar{e}}p_e(t) = 0$ ), e a velocidade e aceleração da bola, relativamente ao seu ponto de referência instantaneamente coincidente, é diferente de zero (i.e.  ${}^{\bar{e}}\nu_e(t) \neq 0$  e  ${}^{\bar{e}}a_e(t) \neq 0$ ). No espaço de trabalho de pontos de referência instantaneamente coincidentes é de salientar que não é possível derivar a equação de posição/velocidade, de modo a obter a equação de velocidade/aceleração.

Na figura 3.5(b) o ponto de referência estacionário  $f$  é um ponto de referência convencional. Para o exemplo uni-dimensional ambos os pontos de referência  $f$  e  $\bar{e}$  são estacionários, a velocidade/aceleração da bola relativamente ao ponto  $f$  é igual à velocidade/aceleração da bola relativamente ao ponto  $\bar{e}$ . Consequentemente, não é vantajoso introduzir referências instantaneamente coincidentes no caso uni-dimensional.

A necessidade prática de sistemas de coordenadas instantaneamente coincidentes, surge em casos multi-dimensionais. No caso em estudo -WMR em movimento numa superfície plana- o sistema de coordenadas  $R$  move-se em três dimensões  $X$ ,  $Y$  e  $\phi$ . Os sistemas de coordenadas  $\bar{R}$  e  $W$  são estacionários;  $\bar{R}$  é um sistema de coordenadas instantaneamente coincidentes e  $W$

é um sistema de coordenadas de referência convencional. Em analogia com o caso uni-dimensional, a posição do sistema de coordenadas  $R$  relativamente ao seu sistema de coordenadas instantaneamente coincidentes é zero (i.e.  $\bar{R}p_R = 0$ ); A posição do sistema de coordenadas  $R$  relativamente ao sistema de coordenadas de referência convencional  $W$ , é diferente de zero (i.e.  ${}^W p_R \neq 0$ ); A velocidade  $\bar{R}\nu_R$  / aceleração  $\bar{R}a_R$  do sistema de coordenadas  $R$  relativamente ao seu sistema de coordenadas instantaneamente coincidentes, não é igual à velocidade  ${}^W \nu_R$  / aceleração  ${}^W a_R$  do sistema de coordenadas  $R$  relativamente ao sistema de coordenadas de referência convencional  $W$ ; A velocidade/aceleração do sistema de coordenadas  $R$  relativamente ao sistema de coordenadas de referência convencional  $W$ , depende da posição e orientação do sistema de coordenadas  $R$  relativamente ao sistema de coordenadas de referência  $W$ .

O sistema de coordenadas instantaneamente coincidentes é uma ferramenta conceptual, que permite calcular as velocidades e acelerações de um sistema de coordenadas  $R$ , relativamente à sua posição e orientação correntes instantâneas  $\bar{R}$ .

Atribui-se a um sistema de coordenadas instantaneamente coincidentes  $\bar{R}$  de um robô, a mesma posição e orientação no espaço, que o sistema de coordenadas  $R$  do robô (na tabela 3.2,  $\bar{R}$  é definido como sendo estacionário relativamente a  $W$ ). Em projecto, a posição e orientação do sistema de coordenadas  $R$  e o sistema de coordenadas instantaneamente coincidentes  $\bar{R}$  são idênticos, mas (em geral) as velocidades e acelerações relativas entre os dois sistemas de coordenadas são diferentes de zero. Quando o sistema de coordenadas do robô se move relativamente ao sistema de coordenadas do mundo, atribui-se um sistema de coordenadas instantaneamente coincidentes diferente em cada instante de tempo.

O sistema de coordenadas instantaneamente coincidentes do robô facilita as especificações das velocidades/acelerações do robô, independentemente da sua posição. De modo semelhante, o sistema de coordenadas instantaneamente coincidentes do ponto de contacto  $\bar{C}_i$  (na tabela 3.2) coincide com o sistema de coordenadas do ponto de contacto  $C_i$ , e é estacionário relativamente ao sistema de coordenadas do mundo. Como a posição do ponto de contacto não é detectada, necessita-se do sistema de coordenadas instantaneamente coincidentes do ponto de contacto para especificar as velocidades e acelerações da roda.

### 3.2.3 Matrizes de Transformação

Matrizes de transformação homogêneas ( $4 \times 4$ ) expressam as posições e orientações relativas dos sistemas de coordenadas [133]. A matriz de transformação homogênea  ${}^A\Pi_B$  transforma as coordenadas do ponto  ${}^B e$  descrito no referencial de coordenadas  $B$ , nas coordenadas correspondentes do ponto  ${}^A e$  descrito no referencial de coordenadas  $A$ :

$${}^A e = {}^A\Pi_B \cdot {}^B e \quad (3.1)$$

As matrizes são representadas por letras maiúsculas (e.g.  $\Pi$ ), os vectores por letras minúsculas sendo devidamente identificados (e.g. vector  $e$ ), e as quantidades escalares são identificadas por letras minúsculas (e.g.  $b$ ). Por exemplo,  ${}^A e$  representa o vector ‘ $e$ ’ no referencial de coordenadas  $A$ ,  ${}^A\Pi_B$  define a matriz de transformação que relaciona a posição e a orientação do sistema de coordenadas  $B$  relativamente ao referencial de coordenadas  $A$ , e  $e_x$  representa o componente  $x$  do vector ‘ $e$ ’.

Vectores que indicam pontos no espaço, tal como  ${}^A e$  em (3.1), são constituídos por três coordenadas cartesianas e um factor de escala como quarto elemento:

$${}^A e = \begin{bmatrix} {}^A e_x \\ {}^A e_y \\ {}^A e_z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

O factor de escala usado é sempre a unidade. As matrizes de transformação contêm a matriz ( $3 \times 3$ ) rotacional constituída pelos vectores ( $n \ o \ a$ ), e o vector ( $3 \times 1$ ) translacional ‘ $p$ ’ [147].

$${}^A\Pi_B = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Os três componentes de cada um dos vectores ‘ $n$ ’, ‘ $o$ ’, e ‘ $a$ ’ da matriz rotacional, expressam a orientação dos eixos  $x, y, z$  respectivamente, do sistema de coordenadas  $B$  relativamente ao sistema de coordenadas  $A$ , e são portanto ortonormais. Os três componentes  $p_x, p_y$  e  $p_z$  do vector translacional ‘ $p$ ’, expressam o deslocamento da origem do sistema de coordenadas



$B$  em relação à origem do sistema de coordenadas  $A$ , ao longo dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  do sistema de coordenadas  $A$ .

As propriedades de uma matriz de transformação garantem que a sua inversa tem sempre a forma especial [130]:

$${}^A\Pi_B^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -(p \cdot n) \\ o_x & o_y & o_z & -(p \cdot o) \\ a_x & a_y & a_z & -(p \cdot a) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

pelo que:

$${}^A\Pi_B^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -p_x n_x - p_y n_y - p_z n_z \\ o_x & o_y & o_z & -p_x o_x - p_y o_y - p_z o_z \\ a_x & a_y & a_z & -p_x a_x - p_y a_y - p_z a_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nas matrizes de transformação de sistemas de coordenadas utiliza-se a nomenclatura exposta na tabela 3.3, para descrever deslocamentos, velocidades e acelerações rotacionais e translacionais (i.e. lineares).

Nos modelos cinemáticos de WMRs, em estudo, considera-se que todos os sistemas de coordenadas têm o eixo  $z$  perpendicular à superfície de movimento, pelo que todas as rotações entre sistemas de coordenadas ocorrem em torno do mesmo eixo  $z$ . Uma matriz de transformação para o WMR inclui então, uma rotação  ${}^A\phi_B$  em torno do eixo  $z$  e as translações  ${}^A d_{Bx}$ ,  ${}^A d_{By}$  e  ${}^A d_{Bz}$  ao longo dos respectivos eixos de coordenadas:

$${}^A\Pi_B = \begin{bmatrix} \cos {}^A\phi_B & -\sin {}^A\phi_B & 0 & {}^A d_{Bx} \\ \sin {}^A\phi_B & \cos {}^A\phi_B & 0 & {}^A d_{By} \\ 0 & 0 & 1 & {}^A d_{Bz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Para situações em que não haja deslocamentos translacionais, nem deslocamentos rotacionais ( $\phi = 0^\circ$ ), a matriz de transformação de coordenadas (3.5) reduz-se à matriz identidade.

O cálculo da inversa da matriz de transformação (3.5) vai ser essencial na obtenção da posição cinemática. Assim, com base em (3.4) obtém-se a

Tabela 3.3: Variáveis escalares

---

<b>Deslocamentos rotacionais e translacionais escalares</b>	
${}^A\phi_B$	O deslocamento rotacional, em torno do eixo $z$ do sistema de coordenadas $A$ ; entre os eixos dos $x$ do sistema de coordenadas $A$ e o eixo dos $x$ do sistema de coordenadas $B$ (anti-horário por convenção).
${}^Ad_{Bj}$	(para $j \in [x, y, z]$ ): O deslocamento translacional ao longo do eixo $j$ do sistema de coordenadas $A$ ; entre a origem do sistema de coordenadas $A$ e a origem do sistema de coordenadas $B$ .
<b>Velocidades rotacionais e translacionais escalares</b>	
${}^A\omega_B$	A velocidade rotacional ${}^A\dot{\phi}_B$ em torno do eixo $z$ do sistema de coordenadas $A$ ; entre o eixo do $x$ do sistema de coordenadas $A$ e o eixo do $x$ do sistema de coordenadas $B$ .
${}^A\nu_{Bj}$	(para $j \in [x, y]$ ): A velocidade translacional ${}^A\dot{d}_{Bj}$ ao longo do eixo $j$ do sistema de coordenadas $A$ ; entre a origem do sistema de coordenadas $A$ e a origem do sistema de coordenadas $B$ . Uma vez que todo o movimento está no plano $x - y$ , o componente $z$ , ${}^A\dot{d}_{Bz}$ , da velocidade translacional é zero.
<b>Acelerações rotacionais e translacionais escalares</b>	
${}^A\alpha_B$	A aceleração rotacional ${}^A\ddot{\phi}_B = {}^A\dot{\omega}_B$ em torno do eixo $z$ do sistema de coordenadas $A$ ; entre o eixo $x$ do sistema de coordenadas $A$ e o eixo $x$ do sistema de coordenadas $B$ .
${}^Aa_{Bj}$	(para $j \in [x, y]$ ): A aceleração translacional ${}^A\ddot{d}_{Bj} = {}^A\dot{\nu}_{Bj}$ ao longo do eixo $j$ do sistema de coordenadas $A$ ; entre a origem do sistema de coordenadas $A$ e a origem do sistema de coordenadas $B$ . Uma vez que todo o movimento é paralelo ao plano $x - y$ , o componente $z$ de ${}^A\ddot{d}_{Bz}$ da aceleração translacional é zero.

---

inversa da matriz de transformação (3.5):

$${}^A\Pi_B^{-1} = \begin{bmatrix} \cos {}^A\phi_B & \sin {}^A\phi_B & 0 & -{}^Ad_{Bx} \cos {}^A\phi_B - {}^Ad_{By} \sin {}^A\phi_B \\ -\sin {}^A\phi_B & \cos {}^A\phi_B & 0 & {}^Ad_{Bx} \sin {}^A\phi_B - {}^Ad_{By} \cos {}^A\phi_B \\ 0 & 0 & 1 & -{}^Ad_{Bz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Derivando (3.5) em ordem ao tempo obtém-se a matriz de transformação de velocidades:

$${}^A\dot{\Pi}_B = \begin{bmatrix} -{}^Aw_B \sin {}^A\phi_B & -{}^Aw_B \cos {}^A\phi_B & 0 & {}^A\nu_{Bx} \\ {}^Aw_B \cos {}^A\phi_B & -{}^Aw_B \sin {}^A\phi_B & 0 & {}^A\nu_{By} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Do mesmo modo, derivando a matriz de transformação (3.7) em ordem ao tempo obtém-se a matriz de transformação das acelerações:

$${}^A\ddot{\Pi}_B = \begin{bmatrix} -{}^A\alpha_B \sin {}^A\phi_B - {}^Aw_B^2 \cos {}^A\phi_B & -{}^A\alpha_B \cos {}^A\phi_B + {}^Aw_B^2 \sin {}^A\phi_B & 0 & {}^Aa_{Bx} \\ {}^A\alpha_B \cos {}^A\phi_B - {}^Aw_B^2 \sin {}^A\phi_B & -{}^A\alpha_B \sin {}^A\phi_B - {}^Aw_B^2 \cos {}^A\phi_B & 0 & {}^Aa_{By} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

A atribuição de sistemas de coordenadas resulta em dois tipos de matrizes de transformação, entre sistemas de coordenadas: constante e variável. A matriz de transformação entre sistemas de coordenadas atribuídos a duas posições diferentes na mesma ligação, é uma matriz constante. As matrizes de transformação que relacionam a posição e orientação de sistemas de coordenadas relativos a diferentes ligações, incluem variáveis de ligação, e são então matrizes variáveis. As matrizes de transformação constantes e variáveis são representadas por  ${}^AT_B$  e  ${}^A\Phi_B$ , respectivamente. As matrizes de transformação constantes são a transformação mundo-robô<sup>3</sup> ( ${}^WT_{\bar{R}}$ ), a transformação mundo-‘ponto de contacto’<sup>4</sup> ( ${}^WT_{\bar{C}_i}$ ), a transformação robô-‘eixo de direcção’ ( ${}^RT_{Hi}$ ) para rodas direccionáveis, a transformação direcção-‘ponto de contacto’ ( ${}^{Si}T_{Ci}$ ) para rodas direccionáveis, e a transformação

<sup>3</sup>mundo-robô, significa a transformação do sistema de coordenadas instantaneamente coincidentes,  $\bar{R}$ , para o sistema de coordenadas do mundo,  $W$ .

<sup>4</sup>mundo-‘ponto de contacto’, significa a transformação do sistema de coordenadas instantaneamente coincidentes,  $\bar{C}_i$ , para o sistema de coordenadas do mundo,  $W$ .

robô-‘ponto de contacto’ ( ${}^R T_{C_i}$ ) para rodas não-direccionáveis. Uma vez que os sistemas de coordenadas instantaneamente coincidentes  $\bar{R}$  e  $\bar{C}_i$  são estacionários em relação a  $W$ , todas as matrizes de transformação entre o sistema de coordenadas do mundo e os sistemas de coordenadas instantaneamente coincidentes são constantes.

As matrizes de transformação robô-robô ( $\bar{R}\Phi_R$ ), ‘eixo de direcção’-direcção ( ${}^{H_i}\Phi_{S_i}$ ) e ‘ponto de contacto’-‘ponto de contacto’ ( $\bar{C}_i\Phi_{C_i}$ ), são matrizes variáveis.

As derivadas das matrizes que envolvem sistemas de coordenadas instantaneamente coincidentes (i.e.  $\bar{R}\dot{\Phi}_R$ ,  $\bar{C}_i\dot{\Phi}_{C_i}$ ,  $\bar{R}\ddot{\Phi}_R$  e  $\bar{C}_i\ddot{\Phi}_{C_i}$ ), são obtidas por diferenciação dos elementos das matrizes de transformação  $\bar{R}\Phi_R$  e  $\bar{C}_i\Phi_{C_i}$ , respectivamente, e fazendo uso das igualdades  $\bar{R}\phi_R = 0$  e  $\bar{C}_i\phi_{C_i} = 0$ . Devido às igualdades anteriores, a segunda derivada em ordem ao tempo da matriz de transformação, envolvendo um sistema de coordenadas instantaneamente coincidentes, não pode ser obtida derivando a primeira derivada em ordem ao tempo, da matriz de transformação (3.5), deve-se então usar as expressões (3.7) e (3.8).

Para todas as rodas que não tenham ligações de direcção, os sistemas de coordenadas do ‘eixo de direcção’ e da direcção são atribuídos para coincidir com o sistema de coordenadas do ponto de contacto, de modo a que as matrizes de transformação do ‘eixo de direcção’-direcção e direcção-‘ponto de contacto’ se reduzam a matrizes identidade, simplificando assim o modelo cinemático.

Pelo exposto atrás, pode-se concluir que no cálculo das matrizes de transformação homogéneas é necessário ter em consideração certos pressupostos. O facto das rotações só poderem ocorrer em torno do eixo  $z$  simplifica a transformação, por outro lado é assumido que o robô tem translações em todas as três direcções.

Para facilitar a compreensão das matrizes de transformação, num robô móvel com rodas, apresenta-se em seguida uma forma simplificada (comum em alguma literatura técnica) das matrizes (3.5), (3.6), (3.7) e (3.8), respectivamente:

$${}^A\Pi_B = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 & p_x \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
{}^A T_B^{-1} &= \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & -p_x \cdot \cos \phi - p_y \cdot \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 & p_x \cdot \sin \phi - p_y \cdot \cos \phi \\ 0 & 0 & 1 & -p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^A \dot{\Pi}_B = {}^A \nu_B &= \begin{bmatrix} -w \sin \phi & -w \cos \phi & 0 & \nu_x \\ w \cos \phi & -w \sin \phi & 0 & \nu_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
{}^A \ddot{\Pi}_B = {}^A a_B &= \begin{bmatrix} -\alpha \sin \phi - w^2 \cos \phi & -\alpha \cos \phi + w^2 \sin \phi & 0 & a_x \\ \alpha \cos \phi - w^2 \sin \phi & -\alpha \sin \phi - w^2 \cos \phi & 0 & a_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

em que:

$\phi = {}^A \phi_B =$  ângulo de rotação entre dois referenciais.

$w = {}^A w_B =$  velocidade angular.

$\alpha = {}^A \alpha_B =$  aceleração angular.

$p_x = {}^A d_{Bx} =$  componente  $x$  do deslocamento linear.

$\nu_x = {}^A \nu_{Bx} =$  componente  $x$  da velocidade linear.

$a_x = {}^A a_{Bx} =$  componente  $x$  da aceleração linear.

### 3.2.4 Álgebra de Matrizes de Transformação de Coordenadas

Esta secção é baseada no estudo, sobre a cinemática de WMRs, realizado por Muir [130]. Os operandos da álgebra de matrizes de transformação de coordenadas, são as matrizes de transformação e as suas primeiras e segundas derivadas em ordem ao tempo. Na tabela 3.4,  $A$ ,  $B$  e  $X$  são sistemas de coordenadas e  $\Pi$  denota tanto uma matriz de transformação constante  $T$ , como uma matriz de transformação variável  $\Phi$ . A álgebra de matrizes de transformação de coordenadas permite o cálculo directo de posições, velocidades e acelerações descritas nos diferentes sistemas de coordenadas associados ao robô, incluindo os sistemas de coordenadas instantaneamente coincidentes.

A transformação de um sistema de coordenadas no seu sistema de coordenadas instantaneamente coincidentes, satisfaz o axioma de Identidade.

Tabela 3.4: Axiomas algébricos de matrizes-transformação-coordenadas

- 
1. Identidade :  ${}^A\Pi_B = I$  para  $B = A$  ou  $B = \bar{A}$
  2. Cascata:  ${}^A\Pi_B = {}^A\Pi_X \cdot {}^X\Pi_B$
  3. Inversão:  ${}^A\Pi_B = {}^B\Pi_A^{-1}$
  4. Velocidade zero:  ${}^A\dot{\Pi}_B = 0$  para  $B = A$  ou  $\Pi = T$
  5. Velocidade:  ${}^A\dot{\Pi}_B = {}^A\dot{\Pi}_X \cdot {}^X\Pi_B + {}^A\Pi_X \cdot {}^X\dot{\Pi}_B$
  6. Aceleração zero:  ${}^A\ddot{\Pi}_B = 0$  para  $B = A$  ou  $\Pi = T$
  7. Aceleração:  ${}^A\ddot{\Pi}_B = {}^A\ddot{\Pi}_X \cdot {}^X\Pi_B + 2{}^A\dot{\Pi}_X \cdot {}^X\dot{\Pi}_B + {}^A\Pi_X \cdot {}^X\ddot{\Pi}_B$
- 

O axioma de cascata é o mais utilizado nas operações entre matrizes de transformação de coordenadas e especifica a ordem pela qual estas matrizes são multiplicadas. A matriz de transformação de coordenadas de um sistema de referência para outro é obtida através de sistemas de coordenadas intermédios, até chegar ao seu ‘destino’.

O axioma de inversão mostra que a matriz de transformação de coordenadas, a partir do sistema de referência ‘origem’ para um sistema de referência ‘destino’, é igual à inversa da matriz de transformação de coordenadas, partindo do sistema de referência ‘destino’ para o sistema de referência ‘origem’.

Uma vez que a manipulação de matrizes de transformação é especificada pelo axioma de cascata, a derivação em ordem ao tempo das matrizes de transformação é especificada pelos quatro axiomas de velocidade e aceleração. Especificamente, não se podem derivar ambos os lados de uma equação de matriz de transformação. Por exemplo, se houvesse necessidade de derivar ambos os lados de uma equação  ${}^A\Pi_{\bar{A}} = I$ , seria obtido um resultado incorrecto  ${}^A\dot{\Pi}_{\bar{A}} = 0$ , uma vez que as velocidades entre um sistema de coordenadas e o seu ‘correspondente’ instantaneamente coincidente são (em geral) diferentes de zero.

O axioma de velocidade-zero mostra que as velocidades relativas entre um sistema de coordenadas  $A$  e ele próprio ( $B = A$ ) ou outro sistema de co-

ordenadas na mesma ligação ( $\Pi = T$ ) são zero. Tal acontece, porque os dois sistemas de coordenadas atribuídos à mesma ‘ligação’ são estacionários entre eles e em relação à ‘ligação’. Para o axioma da aceleração-zero, verifica-se o mesmo que para o axioma anterior mas relativamente às acelerações.

O axioma de velocidade especifica como a derivada em ordem ao tempo da matriz de transformação pode ser expressa em termos de duas matrizes de transformação em cascata e das suas derivadas em ordem ao tempo. Finalmente, o axioma de aceleração especifica como a segunda derivada em ordem ao tempo de uma matriz de transformação pode ser expressa em termos de duas matrizes de transformação em cascata e das suas primeira e segunda derivada em ordem ao tempo [130].

Os axiomas de matrizes de transformação de coordenadas na tabela 3.4 conduzem aos corolários da tabela 3.5, que se aplicam ao ‘modelo cinemático’ dos WMRs.

Tabela 3.5: Corolários algébricos de matrizes-transformação-coordenadas

1. Coincidência instantânea:  ${}^A\Pi_B = {}^A\Pi_{\bar{B}} = {}^{\bar{A}}\Pi_{\bar{B}} = {}^A\Pi_B$
2. Posição em cascata:  ${}^A\Pi_Z = {}^A\Pi_B {}^B\Pi_C {}^C\Pi_D \dots {}^Y\Pi_Z$
3. Velocidade em cascata:  ${}^A\dot{\Pi}_Z = {}^A\dot{\Pi}_B {}^B\Pi_Z + {}^A\Pi_B {}^B\dot{\Pi}_C {}^C\Pi_Z + \dots + {}^A\Pi_Y {}^Y\dot{\Pi}_Z$
4. Aceleração em cascata:
 
$$\begin{aligned} {}^A\ddot{\Pi}_Z &= {}^A\ddot{\Pi}_B {}^B\Pi_Z + {}^A\Pi_B {}^B\ddot{\Pi}_C {}^C\Pi_Z + \dots + {}^A\Pi_Y {}^Y\ddot{\Pi}_Z \\ &+ 2{}^A\dot{\Pi}_B \left[ {}^B\dot{\Pi}_C {}^C\Pi_Z + {}^B\Pi_C {}^C\dot{\Pi}_D {}^D\Pi_Z + \dots + {}^B\Pi_Y {}^Y\dot{\Pi}_Z \right] \\ &+ 2{}^A\Pi_B {}^B\dot{\Pi}_C \left[ {}^C\dot{\Pi}_D {}^D\Pi_Z + \dots + {}^C\Pi_Y {}^Y\dot{\Pi}_Z \right] \\ &+ \dots + 2{}^A\Pi_X {}^X\dot{\Pi}_Y {}^Y\dot{\Pi}_Z \end{aligned}$$

O corolário da coincidência instantânea, tem por base os axiomas identidade e cascata. Este corolário simplifica as expressões das matrizes de transformação, através da eliminação dos sistemas de coordenadas instantaneamente coincidentes. O corolário de posição em cascata utiliza o axioma em cascata, permitindo calcular a matriz de transformação a partir de um sistema de coordenadas de referência para um sistema de coordenadas ‘destino’, fazendo uso de sistemas de coordenadas intermédios em cascata até atingir o sistema de coordenadas ‘destino’.

O corolário de posição em cascata, que é obtido por aplicação repetida do axioma de cascata, é a base dos cálculos da posição. O corolário de velocidade em cascata é obtido por aplicação repetida do axioma de velocidade e do axioma de cascata. O corolário de aceleração em cascata é obtido por aplicação repetida dos axiomas de cascata, velocidade e aceleração. Vão ser aplicados os corolários de velocidade em cascata e aceleração em cascata, para relacionar velocidades e acelerações lineares e angulares entre sistemas de coordenadas. No cálculo da matriz Jacobiana das rodas, vão ser aplicados axiomas e corolários da álgebra de matrizes de transformação de coordenadas.

### 3.2.5 Posição

No cálculo da posição, aplicam-se matrizes de transformação (secção 3.2.3) e a álgebra de matrizes de transformação de coordenadas. Na prática, as relações de posição no controlo do WMR necessitam do cálculo da posição de um ponto relativamente a um sistema de coordenadas, a partir da posição do ponto relativamente a um outro sistema de coordenadas, por exemplo

$${}^A e = {}^A \Pi_Z \cdot {}^Z e \quad (3.9)$$

Quando a matriz de transformação  ${}^A \Pi_Z$  não é conhecida directamente, aplica-se o corolário em cascata para a calcular, a partir de matrizes de transformação conhecidas:

$${}^A \Pi_Z = {}^A \Pi_B {}^B \Pi_C {}^C \Pi_D \dots {}^Y \Pi_Z \quad (3.10)$$

A figura 3.6 apresenta um gráfico de transformação entre os diferentes sistemas de coordenadas de um WMR com uma ligação de direcção por roda. No gráfico os sistemas de coordenadas são identificados pelo símbolo ( $\bullet$ ), e as transformações entre estes pelo símbolo ( $\downarrow$ ). A transformação na orientação oposta à direcção definida por uma seta é calculada pelo axioma de inversão.

De acordo com a figura 3.6, pode dizer-se que a transformação entre quaisquer referenciais de coordenadas, é simplesmente a multiplicação de referenciais intermédios:

$${}^R \Pi_{\tilde{C}_i} = {}^R T_{H_i} {}^{H_i} \Phi_{S_i} {}^{S_i} T_{C_i} {}^{C_i} \Phi_{\tilde{C}_i} \quad (3.11)$$



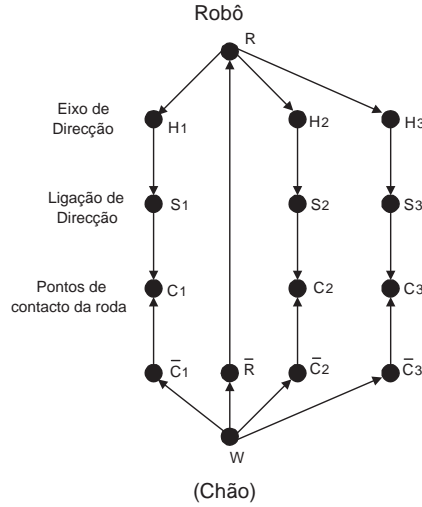


Figura 3.6: Gráfico de transformações de um WMR

Sendo  ${}^{C_i}\Phi_{\bar{C}_i}$  uma matriz identidade (ver tabela 3.4 - axioma identidade) logo (3.11) simplifica-se para

$${}^R\Pi_{\bar{C}_i} = {}^R T_{H_i} {}^{H_i}\Phi_{S_i} {}^{S_i} T_{C_i} \quad (3.12)$$

Muitos robôs não têm ligações de direcção. Para estes robôs, o eixo de direcção e o eixo do ponto de contacto coincidem, e as transformadas entre estes eixos reduzem-se a matrizes identidades, reduzindo nestes casos a expressão (3.12) a

$${}^R\Pi_{\bar{C}_i} = {}^R T_{H_i} {}^{H_i} T_{C_i}$$

### 3.2.6 Velocidade

Nesta secção relacionam-se as velocidades do WMR fazendo uso dos axiomas e dos corolários apresentados nas tabelas 3.4 e 3.5. É feito o cálculo das velocidades do robô relativamente ao sistema de coordenadas instantaneamente coincidente do robô, considerando a velocidade das rodas, pelo que é necessário obter as matrizes Jacobianas das rodas.

### Velocidade de Um Ponto

Pode calcular-se a velocidade de um ponto ‘e’ derivando em ordem ao tempo (3.9), obtendo-se

$${}^A\dot{e} = {}^A\dot{\Pi}_Z \cdot {}^Z e \quad (3.13)$$

Quando  ${}^A\dot{\Pi}_Z$  não é conhecida directamente, aplica-se o corolário de velocidade em cascata (corolário 3 da tabela 3.5) que para facilidade de leitura se passa a reescrever:

$${}^A\dot{\Pi}_Z = {}^A\dot{\Pi}_B {}^B\Pi_Z + {}^A\Pi_B {}^B\dot{\Pi}_C {}^C\Pi_Z + \dots + {}^A\Pi_Y {}^Y\dot{\Pi}_Z \quad (3.14)$$

De modo a ilustrar a aplicação dos axiomas e corolários, apresenta-se o exemplo seguinte.

Considere-se a expressão

$${}^R e = {}^R\Pi_{\bar{C}_i} \cdot \bar{C}_i e \quad (3.15)$$

onde se relaciona a posição ‘e’, descrita no sistema de coordenadas do ponto de contacto instantaneamente coincidente, com a posição descrita no sistema de coordenadas do robô. Derivando (3.15) obtém-se a velocidade do ponto ‘e’ descrita no sistema de coordenadas do robô,

$${}^R\dot{e} = {}^R\dot{\Pi}_{\bar{C}_i} \cdot \bar{C}_i e + {}^R\Pi_{\bar{C}_i} \cdot \dot{\bar{C}_i} e$$

que se simplifica (uma vez que sendo  $\bar{C}_i e$  constante, a sua derivada é nula) na forma

$${}^R\dot{e} = {}^R\dot{\Pi}_{\bar{C}_i} \cdot \bar{C}_i e . \quad (3.16)$$

Aplicando-se o corolário da velocidade em cascata a (3.11), obtém-se a expressão para a derivada da matriz de transformação,

$${}^R\dot{\Pi}_{\bar{C}_i} = {}^R\dot{T}_{H_i} {}^{H_i}\Pi_{\bar{C}_i} + {}^R T_{H_i} {}^{H_i}\dot{\Phi}_{S_i} {}^{S_i}\Pi_{\bar{C}_i} + {}^R\Pi_{S_i} {}^{S_i}\dot{T}_{C_i} {}^{C_i}\Phi_{\bar{C}_i} + {}^R\Pi_{C_i} {}^{C_i}\dot{\Phi}_{\bar{C}_i} \quad (3.17)$$

É possível simplificar (3.17), de modo a que apenas se utilizem matrizes de transformação conhecidas (e suas derivadas), através da utilização de axiomas e corolários. Assim, e por ordem de aplicação, os axiomas e corolários utilizados para se chegar a (3.18) foram, respectivamente: 1º- axioma de velocidade-zero; 2º- corolário posição em cascata; e por fim 3º- axioma identidade:

$$\begin{aligned} {}^R\dot{\Pi}_{\bar{C}_i} &= {}^R T_{H_i} {}^{H_i}\dot{\Phi}_{S_i} {}^{S_i}\Pi_{\bar{C}_i} + {}^R\Pi_{C_i} {}^{C_i}\dot{\Phi}_{\bar{C}_i} \\ &= {}^R T_{H_i} {}^{H_i}\dot{\Phi}_{S_i} {}^{S_i}T_{C_i} {}^{C_i}\Phi_{\bar{C}_i} + {}^R T_{H_i} {}^{H_i}\Phi_{S_i} {}^{S_i}T_{C_i} {}^{C_i}\dot{\Phi}_{\bar{C}_i} \\ &= {}^R T_{H_i} {}^{H_i}\dot{\Phi}_{S_i} {}^{S_i}T_{C_i} + {}^R T_{H_i} {}^{H_i}\Phi_{S_i} {}^{S_i}T_{C_i} {}^{C_i}\dot{\Phi}_{\bar{C}_i} \end{aligned} \quad (3.18)$$

### Matrizes Jacobianas das Rodas

Considere-se as  $N$  equações de matrizes de transformação de um WMR (ver figura 3.6):

$${}^{\bar{R}}\Pi_R = {}^R T_{H_i} {}^{H_i} \Phi_{S_i} {}^{S_i} T_{C_i} {}^{C_i} \Phi_{\bar{C}_i} {}^{\bar{C}_i} T_W {}^W T_{\bar{R}} \quad (3.19)$$

onde  $i = 1, \dots, N$  é o índice da roda.

O pseudo-Jacobiano,  $\hat{J}_i$ , obtém-se derivando a equação (3.19) e posteriormente efectuando algumas manipulações matemáticas fazendo uso quer dos axiomas e corolários algébricos (tabelas 3.4 e 3.5), quer aplicando as matrizes de transformação (3.5) e (3.7) [130]:

$$\hat{J}_i = \begin{bmatrix} \cos {}^R \phi_{C_i} & -\sin {}^R \phi_{C_i} & {}^R d_{C_i y} & -{}^R d_{H_i y} \\ \sin {}^R \phi_{C_i} & \cos {}^R \phi_{C_i} & -{}^R d_{C_i x} & {}^R d_{H_i x} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

As matrizes Jacobianas das rodas,  $J_i$ , relacionam a velocidade do WMR com as velocidades das rodas. As velocidades das rodas, como se ilustra na figura 3.2, compreendem as seguintes velocidades:

- $w_{sz}$ , velocidade angular da ligação de direcção em torno de  $z$ ;
- $w_{wy}$ , velocidade angular da roda em torno do seu eixo;
- $w_{wz}$ , velocidade de deslizamento rotacional;
- $w_{wr_i}$ , velocidade angular dos rolos (para rodas omnidireccionais);
- $w_{wx}$ , velocidade rotacional (para rodas esféricas).

A matriz Jacobiana da roda  $i$ ,  $J_i$ , varia consoante o tipo de roda utilizada, e é obtida pelo produto da matriz pseudo-Jacobiana  $\hat{J}_i$  pela matriz característica da roda<sup>5</sup>  $F_i$  [130],

$$J_i = \hat{J}_i \cdot F_i$$

A matriz pseudo-Jacobiana das rodas,  $\hat{J}_i$ , relaciona as pseudo-velocidades da roda,  $\hat{q}_i$ ,

$$\hat{q}_i = \begin{bmatrix} \bar{C}_i \nu_{C_i x} \\ \bar{C}_i \nu_{C_i y} \\ \bar{C}_i w_{C_i} \\ H_i w_{S_i} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

---

<sup>5</sup>A matriz característica da roda expressa um conjunto de características da roda, como por exemplo os raios e o ângulo existente entre a orientação dos rolos e a orientação da roda (no caso da roda omnidireccional).

com as velocidades do robô<sup>6</sup>,  $\bar{R}\dot{p}_R$ , ou seja

$$\bar{R}\dot{p}_R = \dot{p}_R = \hat{J}_i \cdot \dot{q}_i \quad (3.22)$$

Substituindo (3.20) e (3.21) em (3.22), obtém-se

$$\bar{R}\dot{p}_R = \begin{bmatrix} \bar{R}\nu_{R_x} \\ \bar{R}\nu_{R_y} \\ \bar{R}w_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos {}^R\phi_{C_i} & -\sin {}^R\phi_{C_i} & {}^Rd_{C_i y} & -{}^Rd_{H_i y} \\ \sin {}^R\phi_{C_i} & \cos {}^R\phi_{C_i} & -{}^Rd_{C_i x} & {}^Rd_{H_i x} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_i \nu_{C_i x} \\ \bar{C}_i \nu_{C_i y} \\ \bar{C}_i w_{C_i} \\ {}^{H_i}w_{S_i} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

em que as pseudo-velocidades  $\bar{C}_i \nu_{C_i x}$ ,  $\bar{C}_i \nu_{C_i y}$ ,  $\bar{C}_i w_{C_i}$ , e  ${}^{H_i}w_{S_i}$  correspondem às velocidades  $\nu_x$ ,  $\nu_y$ ,  $w_z$ , e  $w_{sz}$  na figura 3.2.

Define-se  $w_i$  como sendo o número de variáveis da roda  $i$ . O vector velocidade (física)  $\dot{q}_i$  das rodas<sup>7</sup> não contém todos os quatro componentes das pseudo-velocidades ( $\dot{q}_i$ ) expressos na equação (3.23). As rodas possuem menos que quatro variáveis e portanto menos que quatro elementos no vector de velocidade. Uma vez que todos os movimentos físicos da roda são rotações em torno dos seus eixos, o vector de velocidade da roda ( $\dot{q}_i$ ) é unicamente composto por velocidades angulares (não são aqui incluídas as velocidades tangenciais (lineares) no ponto de contacto).

A pseudo-velocidade,  $\dot{q}_i$ , ( $4 \times 1$ ) relaciona-se com o vector de velocidade física  $\dot{q}_i$  ( $w_i \times 1$ ) e com a matriz característica da roda  $F_i$  ( $4 \times w_i$ ) pela expressão:

$$\dot{q}_i = F_i \cdot \dot{q}_i \quad (3.24)$$

Substituindo (3.24) em (3.22) obtém-se a velocidade do robô em função do vector velocidade da roda:

$$\bar{R}\dot{p}_R = \hat{J}_i F_i \dot{q}_i = J_i \dot{q}_i \quad (3.25)$$

em que  $J_i = \hat{J}_i F_i$  representa a matriz Jacobiana da roda  $i$  ( $3 \times w_i$ ). A equação (3.25) reflecte o efeito da velocidade da roda  $i$  na velocidade do robô, i.e. a velocidade do robô no referencial  $R$ , assumindo um efeito nulo das restantes rodas. A dimensão (ordem) da matriz Jacobiana indica o numero de DOFs da roda [130].

<sup>6</sup>O vector  $\bar{R}\dot{p}_R$  é usualmente representado na notação simplificada  $\dot{p}_R$ .

<sup>7</sup>O termo rodas é aqui utilizado para abranger qualquer um dos tipos de rodas apresentadas na secção 3.1.

Seguidamente, de forma sintética, apresentam-se as matrizes Jacobianas das rodas e matrizes características das rodas para os quatro tipos de rodas apresentados na figura 3.2:

### 1. Rodas convencionais não direccionadas

$$\dot{q}_i = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{w_i y} \\ w_{w_i z} \end{bmatrix} = F_i \dot{q}_i \quad (3.26)$$

A Matriz Jacobiana de rodas convencionais não direccionadas é:

$$J_i = \begin{bmatrix} r_i \cos {}^R\phi_{C_i} & {}^R d_{C_i y} \\ r_i \sin {}^R\phi_{C_i} & -{}^R d_{C_i x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

### 2. Rodas convencionais direccionadas

$$\dot{q}_i = \begin{bmatrix} \bar{C}_i \nu_{C_i x} \\ \bar{C}_i \nu_{C_i y} \\ \bar{C}_i w_{C_i} \\ H_i w_{S_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{w_i y} \\ w_{w_i z} \\ w_{s_i z} \end{bmatrix} = F_i \dot{q}_i \quad (3.28)$$

Matriz Jacobiana de rodas convencionais direccionadas:

$$J_i = \begin{bmatrix} r_i \cos {}^R\phi_{C_i} & {}^R d_{C_i y} & -{}^R d_{H_i y} \\ r_i \sin {}^R\phi_{C_i} & -{}^R d_{C_i x} & {}^R d_{H_i x} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

### 3. Rodas omnidireccionais

$$\dot{q}_i = \begin{bmatrix} r & -r_l \cos \eta & 0 \\ 0 & r_l \sin \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{w_i y} \\ w_{w_i r_l} \\ w_{w_i z} \end{bmatrix} = F_i \dot{q}_i$$

Matriz Jacobiana para rodas omnidireccionais:

$$J_i = \begin{bmatrix} r_i \cos {}^R\phi_{C_i} & -r_{l,i} \cos ({}^R\phi_{C_i} - \eta_i) & {}^R d_{C_i y} \\ r_i \sin {}^R\phi_{C_i} & r_{l,i} \sin (\eta_i - {}^R\phi_{C_i}) & -{}^R d_{C_i x} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 4. Rodas esféricas

$$\dot{\hat{q}}_i = \begin{bmatrix} 0 & r & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{w_i x} \\ w_{w_i y} \\ w_{w_i z} \end{bmatrix} = F_i \dot{q}_i$$

Matriz Jacobiana para Rodas esféricas:

$$J_i = \begin{bmatrix} r_i \cos {}^R\phi_{C_i} & -r_i \sin {}^R\phi_{C_i} & {}^R d_{C_i y} \\ r_i \sin {}^R\phi_{C_i} & r_i \cos {}^R\phi_{C_i} & -{}^R d_{C_i x} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.2.7 Aceleração

Tal como no cálculo da velocidade em que foi necessário aplicar o corolário da velocidade em cascata, para o cálculo da aceleração de um WMR é necessário aplicar o corolário da aceleração em cascata (tabela 3.5). Fazendo um paralelismo com o cálculo da velocidade (secção 3.2.6) faz-se notar que as equações da aceleração de movimento não podem ser obtidas por simples derivação dos resultados obtidos para a velocidade (equação (3.18)), porque a derivação de ambos os lados de uma equação de matriz de transformação não é uma operação permitida na álgebra de matrizes de transformação de coordenadas [130]. Assim, no cálculo de

$${}^R\ddot{e} = {}^R\ddot{\Pi}_{\tilde{C}_i} \cdot \tilde{C}_i e$$

é necessário aplicar o corolário de aceleração em cascata, de modo a obter-se a segunda derivada em ordem ao tempo da matriz de transformação  ${}^R\ddot{\Pi}_{\tilde{C}_i}$ .

## 3.3 Equação Composta do Robô

Nesta secção, combinam-se as equações cinemáticas do movimento de todas as rodas de um WMR, para formar a equação composta do robô. A resolução desta equação requer a abordagem de dois problemas clássicos de modelação cinemática: a **solução inversa actuada** e a **solução avançada detectada**.

As  $3N$  equações em (3.25), devem ser resolvidas simultaneamente para caracterizar o movimento do WMR, ou seja, compõem-se na forma matricial, para formar a equação composta do robô:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \dot{p}_R = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

que se pode expressar na forma compacta

$$A_o \dot{p}_R = B_o \dot{q}_c \quad (3.31)$$

onde  $I_i$ , para  $i = 1, \dots, N$ , são matrizes identidade ( $3 \times 3$ ),  $A_0$  é uma matriz ( $3N \times 3$ ),  $B_0$  é uma matriz diagonal de blocos ( $3N \times w$ ) com  $w = w_1 + w_2 + \dots + w_N$ , e  $\dot{q}_c$  é o vector das velocidades angulares das rodas. A equação matricial (3.31), representa um sistema de equações algébricas lineares da forma  $Ax = By$ , o qual é facilmente resolvido através de técnicas clássicas.

### Solução de $Ax = By$

Considere-se o sistema de equações algébricas lineares

$$Ax = By \quad (3.32)$$

onde  $A$  é uma matriz ( $m \times n$ ),  $x$  é um vector ( $n \times 1$ ),  $B$  é uma matriz ( $m \times p$ ), e  $y$  é um vector ( $p \times 1$ ).

Uma solução, para “ $x$ ”, usualmente adoptada para sistemas sobre-determinados e determinados é a pseudo-inversa (correspondendo a uma estimativa pelo método dos mínimos quadrados [49][18]):

$$x = (A^T A)^{-1} A^T B y \quad (3.33)$$

entende-se por *sistemas sobre-determinados*, aqueles que têm menos variáveis que equações independentes, e por *sistemas determinados* aqueles que têm o mesmo número de variáveis que equações independentes.

A condição necessária para aplicar a solução de mínimos quadrados (3.33), é que a dimensão da matriz  $A$  seja  $n$  ( $\dim(A) = n$ ). Não há uma solução única para *sistemas indeterminados* (i.e. sistemas tendo menos equações independentes que variáveis independentes).

O erro residual da solução de mínimos quadrados é:

$$Ax - By = [A(A^T A)^{-1} A^T - I] B y = \Delta(A) B y \quad (3.34)$$

onde a função matriz Delta,  $\Delta(\cdot)$ , é por conveniência, definida por

$$\Delta(U) = \begin{cases} -I & \text{para } U = \text{nulo} \\ U(U^T U)^{-1} U^T - I & \text{restantes casos} \end{cases} \quad (3.35)$$

onde o argumento  $U$  é uma matriz ( $c \times d$ ) de dimensão  $d$ .

Uma vez que a equação composta do robô (3.31), tem a forma de (3.32), as soluções de (3.32) são directamente aplicáveis à solução da equação composta do robô.

Para caracterizar o movimento do WMR, é necessário determinar se o erro dos mínimos quadrados (3.34) é zero para todo o  $y$  [130].

■

### 3.3.1 Solução da Velocidade Inversa Actuada

A solução da velocidade inversa actuada, calcula as velocidades actuadas das rodas (3.31) a partir das velocidades do robô. Devido às cadeias de ligação fechada nos WMRs, não é necessário actuar todas as variáveis das rodas. Separando as variáveis actuadas e não actuadas das rodas, (3.25) pode reescrever-se na forma

$$\dot{p}_R = J_{ia}\dot{q}_{ia} + J_{iu}\dot{q}_{iu} \quad \text{para } i = 1, \dots, N \quad (3.36)$$

onde ‘ $a$ ’ subscripto identifica as componentes actuadas, e ‘ $u$ ’ subscripto identifica as componentes não actuadas. Seja  $a_i$  o número de variáveis actuadas, e  $u_i$  o número de variáveis não actuadas para a roda  $i$  (i.e.  $a_i + u_i = w_i$ ), então  $w = \sum_{i=1}^N w_i = \sum_{i=1}^N a_i + \sum_{i=1}^N u_i$ , representa o número total de variáveis relativas a todas as rodas, sendo o somatório do número total de variáveis actuadas com o número total de variáveis não actuadas. Considerando a equação (3.36), pode-se reescrever a equação composta do robô (3.30) na forma

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \dot{p}_R = \begin{bmatrix} J_{1a} & 0 & \dots & 0 & J_{1u} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{2a} & \ddots & \vdots & 0 & J_{2u} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{Na} & 0 & \dots & 0 & J_{Nu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_{1a} \\ \dot{q}_{2a} \\ \vdots \\ \dot{q}_{Na} \\ \dot{q}_{1u} \\ \dot{q}_{2u} \\ \vdots \\ \dot{q}_{Nu} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$



ou na forma compacta

$$A_o \dot{p}_R = B_{op} \dot{q}_p \quad (3.38)$$

A matriz  $B_{op}$  ( $3N \times w$ ) e o vector  $\dot{q}_p$  ( $w \times 1$ ) são os ‘equivalentes’ reestruturados da matriz  $B_o$  e do vector  $\dot{q}_c$  na equação (3.31). Segundo Muir [130], o ‘**critério de movimento solúvel**’, indica que a solução dos mínimos quadrados pode ser aplicada para calcular a solução da velocidade inversa actuada quando  $\dim[B_o] = w$ . Até ao final desta secção, vai ser assumido que a solução dos mínimos quadrados é aplicável, e que todas as inversas das matrizes encontradas, na sua aplicação, são calculáveis. Aplicando-se então, a solução dos mínimos quadrados (3.33), obtém-se o vector das variáveis das rodas a partir do vector de velocidade do robô:

$$\dot{q}_p = (B_{op}^T B_{op})^{-1} B_{op}^T A_o \dot{p}_R \quad (3.39)$$

Muir [130] demonstrou que o vector das velocidades actuadas das rodas,  $\dot{q}_a = [\dot{q}_{1a}^T \dots \dot{q}_{Na}^T]$  na equação (3.37), é dado por

$$\dot{q}_a = \begin{bmatrix} [J_{1a}^T \Delta(J_{1u}) \ J_{1a}]^{-1} J_{1a}^T \Delta(J_{1u}) \\ [J_{2a}^T \Delta(J_{2u}) \ J_{2a}]^{-1} J_{2a}^T \Delta(J_{2u}) \\ \vdots \\ [J_{Na}^T \Delta(J_{Nu}) \ J_{Na}]^{-1} J_{Na}^T \Delta(J_{Nu}) \end{bmatrix} \dot{p}_R = J_a \dot{p}_R \quad (3.40)$$

A equação (3.40) representa a solução inversa actuada, onde a função matriz  $\Delta(J_{iu})$  é definida pela expressão (3.35). Cada bloco de linhas ( $a_i \times 3$ ) da matriz  $J_a$  em (3.40), corresponde às velocidades actuadas  $\dot{q}_{ia}$  que envolvem apenas a matriz Jacobiana da roda  $i$ . A solução inversa, para cada roda, é então independente das equações cinemáticas de todas as  $(N - 1)$  restantes rodas. Quando a roda  $i$  é ‘não redundante’ tendo três DOFs, e todas as três variáveis da roda são actuadas, cada bloco de linhas simplifica-se para

$$\dot{q}_{ia} = (J_i^{-1}) \dot{p}_R . \quad (3.41)$$

Assume-se então que todas as variáveis, de todas as rodas não-redundantes com 3 DOFs (i.e. rodas com matrizes Jacobianas  $(3 \times 3)$  e dimensão 3), são actuadas, e resolve-se o sistema de  $w_i$  equações algébricas lineares para calcular todas as velocidades das rodas, e extrair todas as velocidades actuadas possivelmente necessárias ao controlo do robô. Esta abordagem, reduz

substancialmente as operações algébricas necessárias na aplicação directa da expressão matricial (equação 3.40).

Muir concluiu no ‘**critério do movimento com três DOFs**’ [130], que um WMR (no seu projecto cinemático) permite 3 DOFs se e só se todas as rodas possuírem 3 DOFs.

### Características da Actuação

Muir [130] investigou as características do movimento do WMR, quando as velocidades actuadas das rodas atingem os valores calculados através da solução da velocidade inversa actuada. Eliminando as velocidades não-actuadas das rodas na equação composta do robô (3.30), obtém-se a velocidade do robô devida unicamente às velocidades actuadas das rodas. Supondo que não há deslizamento translacional, as velocidades não-actuadas das rodas vão ser consistentes e obedecem ao movimento do WMR. A partir das velocidades do robô na solução da velocidade inversa actuada (3.40), trocando os “papéis” das variáveis actuadas e não-actuadas, obtém-se a expressão (3.42) para as velocidades não-actuadas das rodas

$$\dot{q}_u = \begin{bmatrix} [J_{1u}^T \Delta(J_{1a}) \ J_{1u}]^{-1} J_{1u}^T \Delta(J_{1a}) \\ [J_{2u}^T \Delta(J_{2a}) \ J_{2u}]^{-1} J_{2u}^T \Delta(J_{2a}) \\ \vdots \\ [J_{Nu}^T \Delta(J_{Na}) \ J_{Nu}]^{-1} J_{Nu}^T \Delta(J_{Na}) \end{bmatrix} \dot{p}_R \quad (3.42)$$

As condições que garantem a possibilidade de cálculo das soluções da velocidade inversa actuada e não-actuada são idênticas, e são indicadas pelo já referido ‘critério do movimento solúvel’. Substituindo (3.42) em (3.37), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} I - J_{1u} [J_{1u}^T \Delta(J_{1a}) \ J_{1u}]^{-1} J_{1u}^T \Delta(J_{1a}) \\ I - J_{2u} [J_{2u}^T \Delta(J_{2a}) \ J_{2u}]^{-1} J_{2u}^T \Delta(J_{2a}) \\ \vdots \\ I - J_{Nu} [J_{Nu}^T \Delta(J_{Na}) \ J_{Nu}]^{-1} J_{Nu}^T \Delta(J_{Na}) \end{bmatrix} \dot{p}_R = \begin{bmatrix} J_{1a} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{2a} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{Na} \end{bmatrix} \dot{q}_a \quad (3.43)$$

que pode ser escrita na forma compacta como

$$A_a \dot{p}_R = B_a \dot{q}_a \quad (3.44)$$

A equação de **actuação do robô** (3.44) exhibe a forma da equação (3.32), com  $A_a$ ,  $B_a$ ,  $\dot{p}_R$ , e  $\dot{q}_a$  assumindo o papel de  $A$ ,  $B$ ,  $x$ , e  $y$ , respectivamente. Segundo Muir [130] o ‘**critério de actuação adequado**’ assegura que todos os DOFs do robô sejam actuados (i.e. assegura que todos os movimentos permitidos ao robô possam ser produzidos por acção dos actuadores), quando  $\det(A_a^T A_a) \neq 0$ .

### 3.3.2 Solução da Velocidade Avançada Detectada

A solução da velocidade avançada detectada resulta na obtenção do vector de velocidade do corpo do robô  $\dot{p}_R$  (3.31), a partir da detecção (i.e. a medição por intermédio de sensores) de posições e velocidades ( $q_s$  e  $\dot{q}_s$ , respectivamente) das rodas. O primeiro passo é separar as velocidades detectadas e não-detectadas das rodas, e reescrever a equação (3.25) na forma

$$\dot{p}_R = J_{is}\dot{q}_{is} + J_{in}\dot{q}_{in} \quad (3.45)$$

As letras subscritas ‘ $s$ ’ e ‘ $n$ ’ representam as quantidades detectadas e não detectadas, respectivamente. O número de variáveis detectadas e não detectadas da roda  $i$  é  $s_i$  e  $n_i$ , respectivamente (com  $s_i + n_i = w_i$ ). Por simples operações algébricas, pode reescrever-se (3.45) na forma [130]:

$$\begin{bmatrix} I_1 & -J_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ I_2 & 0 & -J_{2n} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ I_N & 0 & \cdots & 0 & -J_{Nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_R \\ \dot{q}_{1n} \\ \dot{q}_{2n} \\ \vdots \\ \dot{q}_{Nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{1s} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{2s} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{Ns} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{1s} \\ \dot{q}_{2s} \\ \vdots \\ \dot{q}_{Ns} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

com a forma compacta

$$A_n \dot{p}_n = B_s \dot{q}_s \quad (3.47)$$

em que as velocidades desconhecidas, das rodas e do robô, são isoladas num único vector,  $\dot{p}_n$ .

Seja  $s = s_1 + \dots + s_N$  o número total de variáveis detectadas e  $n = n_1 + \dots + n_N$  o número total de variáveis não-detectadas. Assim, as matrizes e vectores em (3.47) têm as seguintes dimensões:  $A_n$  ( $3N \times [3+n]$ ),  $\dot{p}_n$  ( $[3+n] \times 1$ ),  $B_s$  ( $3N \times s$ ) e  $\dot{q}_s$  ( $s \times 1$ ). Aplicando-se o método dos mínimos quadrados (3.33) a (3.47) resulta

$$\dot{p}_n = (A_n^T A_n)^{-1} A_n^T B_s \dot{q}_s \quad (3.48)$$

que relaciona o vector das velocidades do robô e das velocidades não-detectadas,  $\dot{p}_n$ , com as velocidade detectadas das rodas,  $\dot{q}_s$ .

Em contraste com a solução da velocidade inversa actuada, a solução da velocidade avançada detectada, pelo método dos mínimos quadrados não tem a necessidade de produzir um erro zero, devido ao ruído de medida e ao deslizamento das rodas. Na presença destas fontes de erro, não se consegue calcular a velocidade exacta do WMR. A solução dos mínimos quadrados proposta por Muir [130], proporciona uma solução óptima, minimizando a soma dos erros quadráticos nos componentes da velocidade, sendo aplicável na prática ao *dead reckoning*<sup>8</sup>, para um WMR na presença de ruídos sensoriais e deslizamento das rodas.

Até ao final desta secção, assume-se que é possível aplicar a solução da velocidade avançada detectada, e que a matriz inversa  $(A_n^T A_n)^{-1}$ , em (3.48), existe. Assim, desta equação, obtém-se então (para  $\dot{p}_R$ ) a solução de velocidade avançada detectada [130]:

$$\dot{p}_R = [\Delta(J_{1n}) + \Delta(J_{2n}) + \dots + \Delta(J_{Nn})]^{-1} [\Delta(J_{1n})J_{1s} \ \Delta(J_{2n})J_{2s} \ \dots \ \Delta(J_{Nn})J_{Ns}] \dot{q}_s$$

ou na forma compacta

$$\dot{p}_R = J_s \dot{q}_s \quad (3.49)$$

Uma roda sem variáveis detectadas, não introduz colunas  $\Delta(J_{in})J_{is}$  em (3.49). Além do mais, se não for detectada nenhuma das três variáveis independentes de uma roda  $i$ , a sua matriz  $\Delta(J_{in})$  é nula. Podem-se então eliminar as equações cinemáticas do movimento, no cálculo da solução da velocidade avançada detectada, relativas a uma qualquer roda que satisfaça as duas seguintes condições: 1)- possua três DOFs; 2)- nenhum dos DOFs é detectado (i.e. não medido).

### Características da Detecção

A relação entre as variáveis detectadas das rodas e o movimento do robô, exhibe um certo paralelismo com a relação entre as variáveis actuadas das rodas e o movimento do robô. Considerando (3.45), a equação composta do

---

<sup>8</sup>'Dead reckoning' é um cálculo em tempo real da posição do robô a partir das medições feitas pelos sensores das rodas.

robô (3.30) pode ser reescrita na forma

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \dot{p}_R = \begin{bmatrix} J_{1s} & 0 & \cdots & 0 & J_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{2s} & \ddots & \vdots & 0 & J_{2n} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{Ns} & 0 & \cdots & 0 & J_{Nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_{1s} \\ \dot{q}_{2s} \\ \vdots \\ \dot{q}_{Ns} \\ \dot{q}_{1n} \\ \dot{q}_{2n} \\ \vdots \\ \dot{q}_{Nn} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

que apresenta semelhanças com a equação (3.37), obtida para a solução da velocidade inversa actuada (secção 3.3.1). Tendo em consideração o raciocínio usado na obtenção da equação das velocidades actuadas das rodas (3.40), podem-se expressar, aplicando esta equação, as velocidades não-detectadas das rodas em função das velocidades do robô, com as velocidades não-detectadas (' $n$ ' subscripto) e detectadas (' $s$ ' subscripto), desempenhando o papel de velocidades actuadas (' $a$ ' subscripto) e não-actuadas (' $u$ ' subscripto) das rodas, respectivamente [130]:

$$\dot{q}_n = \begin{bmatrix} [J_{1n}^T \Delta(J_{1s}) \ J_{1n}]^{-1} J_{1n}^T \Delta(J_{1s}) \\ [J_{2n}^T \Delta(J_{2s}) \ J_{2n}]^{-1} J_{2n}^T \Delta(J_{2s}) \\ \vdots \\ [J_{Nn}^T \Delta(J_{Ns}) \ J_{Nn}]^{-1} J_{Nn}^T \Delta(J_{Ns}) \end{bmatrix} \dot{p}_R = J_n \dot{p}_R \quad (3.51)$$

Note-se que, tal como já anteriormente referido, a solução dos mínimos quadrados pode ser aplicada a qualquer WMR, que satisfaça o 'critério de movimento solúvel'. Considerando (3.45) e substituindo (3.51) em (3.50), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} I - J_{1n} [J_{1n}^T \Delta(J_{1s}) \ J_{1n}]^{-1} J_{1n}^T \Delta(J_{1s}) \\ I - J_{2n} [J_{2n}^T \Delta(J_{2s}) \ J_{2n}]^{-1} J_{2n}^T \Delta(J_{2s}) \\ \vdots \\ I - J_{Nn} [J_{Nn}^T \Delta(J_{Ns}) \ J_{Nn}]^{-1} J_{Nn}^T \Delta(J_{Ns}) \end{bmatrix} \dot{p}_R = \begin{bmatrix} J_{1s} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{2s} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{Ns} \end{bmatrix} \dot{q}_s \quad (3.52)$$

que pode ser escrita na forma compacta

$$A_s \dot{p}_R = B_s \dot{q}_s \quad (3.53)$$

A equação de **detecção do robô** (3.53) exhibe a forma da equação (3.32), com  $A_s$ ,  $B_s$ ,  $\dot{p}_R$ , e  $\dot{q}_s$  assumindo o papel de  $A$ ,  $B$ ,  $x$ , e  $y$ , respectivamente. O ‘**critério de detecção adequado**’ [130], indica que todos os movimentos do WMR são discerníveis por meio de medições dos sensores quando  $\det(A_s^T A_s) \neq 0$ . Este critério indica ainda as condições sob as quais a solução de velocidade avançada detectada (3.49) existe.

De modo a elucidar a aplicação destes conceitos, será apresentada de seguida a sua utilização no WMR em estudo (cadeira de rodas robotizada). Assim, serão deduzidas as matrizes de transformação de coordenadas, os Jacobianos das rodas, a solução da velocidade inversa actuada e a solução da velocidade avançada detectada.

### 3.4 Cinemática da Cadeira de Rodas Robotizada

De modo a esclarecer a aplicação de todos os conceitos atrás expostos, vai ser apresentada a dedução da “cinemática” para o robô em estudo. Os passos essenciais a ter em atenção, quando se pretende obter o modelo cinemático de um WMR, são:

1. **Fazer um desenho do WMR.** Nesse desenho é necessário mostrar as posições relativas das rodas e dos eixos de direcção. Não é necessário que o desenho seja feito à escala. Uma vista de cima e uma de lado são suficientes.
2. **Atribuir os sistemas de coordenadas.** Os sistemas de coordenadas do robô, dos eixos de direcção, das direcções, dos pontos de contacto e do Mundo (‘chão’), devem ser atribuídos de acordo com a tabela 3.2.
3. **Obter as matrizes de transformação de coordenadas.** As matrizes devem ser obtidas usando a metodologia exposta no presente capítulo (ver secção 3.2.3), e devem relacionar sempre dois sistemas de coordenadas (e.g. robô-‘eixo de direcção’)

4. **Formular as equações de posição.** As posições e orientações relativas entre dois sistemas de coordenadas são determinadas, aplicando o corolário da posição em cascata. O gráfico de transformações, da figura 3.6, é utilizado para determinar a ordem pela qual se deve fazer a cascata das matrizes.
5. **Formular as equações de velocidade.** As equações que relacionam as velocidades são formuladas aplicando o corolário da velocidade em cascata. A matriz Jacobiana da roda, que relaciona as velocidades da roda com as velocidades do robô, pode ser escrita directamente, substituindo os componentes das matrizes de transformação nas matrizes Jacobianas das rodas, compiladas na secção 3.2.6.
6. **Formular as equações de aceleração.** As equações que relacionam as acelerações (quando tal for necessário), são formuladas aplicando o corolário de aceleração em cascata.

De seguida vamos deduzir o modelo cinemático da cadeira de rodas robotizada (denominada de *robchair*), cujo desenho descritivo a duas vistas é ilustrado na figura 3.7.

A cadeira de rodas robotizada tem duas rodas actuadas com raio  $r$ , diametralmente opostas, e três rodas livres tipo ‘castor’ com raio  $r_p$ , cujo movimento giratório é livre. As rodas actuadas são dotadas de *encoders*, enquanto os ‘castores’ não são actuados nem têm sensores. As atribuições dos sistemas de coordenadas, bem como dimensões e distâncias entre sistemas de coordenadas, são mostrados na figura 3.7.

### 3.4.1 Matrizes de Transformação

Sendo as rodas actuadas fixas ao corpo, os referenciais de direcção não se movem em relação aos referenciais do corpo do robô, e do ponto de contacto, logo

$${}^{H_1}\Phi_{S_1} = {}^{S_1}T_{C_1} = {}^{H_2}\Phi_{S_2} = {}^{S_2}T_{C_2} = I \quad (\text{Matriz Identidade}) \quad (3.54)$$

As matrizes de transformação de coordenadas da cadeira de rodas, para as rodas actuadas (roda 1 e roda 2) são dadas por

$${}^R T_{C_i} = {}^R T_{H_i} {}^{H_i} \Phi_{S_i} {}^{S_i} T_{C_i} \quad (3.55)$$

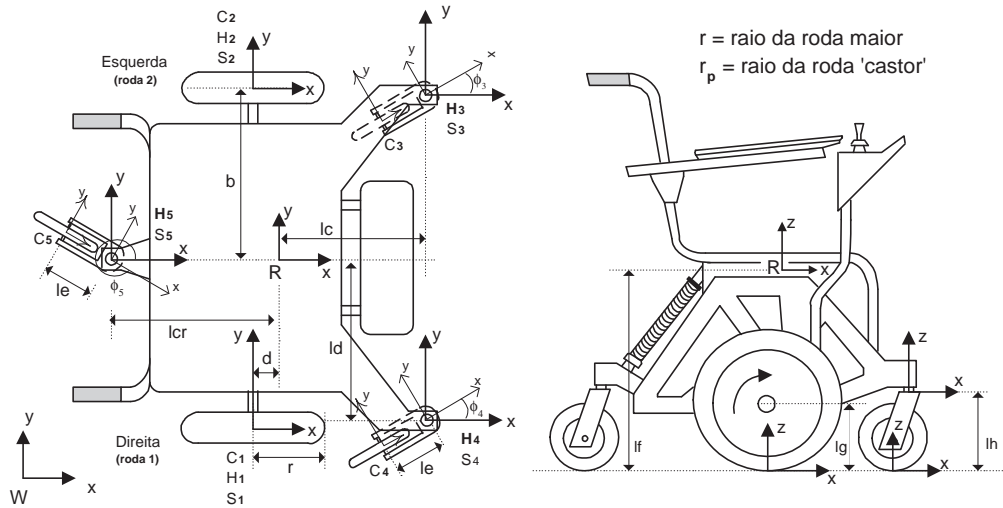


Figura 3.7: Atribuição do sistema de coordenadas da cadeira de rodas: (esquerda)- vista de cima; (direita)- vista lateral. Na figura estão especificadas as seguintes distâncias:  $b$ ,  $d$ ,  $l_c$ ,  $l_{cr}$ ,  $l_d$ ,  $l_e$ ,  $l_f$ ,  $l_g$ ,  $l_h$ ,  $r$ .

De (3.55), (3.54) e (3.5), e com ajuda da figura 3.7, obtêm-se as matrizes de transformação das rodas 1 e 2:

• **Roda 1:**

$${}^R T_{C_1} = {}^R T_{S_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -d \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -l_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• **Roda 2:**

$${}^R T_{C_2} = {}^R T_{S_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -d \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & -l_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As matrizes de transformação das rodas ‘castores’, considerando a figura 3.7, obtêm-se de (3.55) e (3.5):



• **Roda 3:**

$${}^R T_{C_3} = {}^R T_{H_3} {}^{H_3} \Phi_{S_3} {}^{S_3} T_{C_3}$$

$${}^R T_{C_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_c \\ 0 & 1 & 0 & l_d \\ 0 & 0 & 1 & -l_f + l_h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_3 & -\sin \phi_3 & 0 & 0 \\ \sin \phi_3 & \cos \phi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -l_e \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \phi_3 & -\sin \phi_3 & 0 & -\cos \phi_3.l_e + l_c \\ \sin \phi_3 & \cos \phi_3 & 0 & -\sin \phi_3.l_e + l_d \\ 0 & 0 & 1 & -l_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• **Roda 4:**

$${}^R T_{C_4} = {}^R T_{H_4} {}^{H_4} \Phi_{S_4} {}^{S_4} T_{C_4}$$

$${}^R T_{C_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_c \\ 0 & 1 & 0 & -l_d \\ 0 & 0 & 1 & -l_f + l_h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_4 & -\sin \phi_4 & 0 & 0 \\ \sin \phi_4 & \cos \phi_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -l_e \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \phi_4 & -\sin \phi_4 & 0 & -\cos \phi_4.l_e + l_c \\ \sin \phi_4 & \cos \phi_4 & 0 & -\sin \phi_4.l_e - l_d \\ 0 & 0 & 1 & -l_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• **Roda 5:**

$${}^R T_{C_5} = {}^R T_{H_5} {}^{H_5} \Phi_{S_5} {}^{S_5} T_{C_5}$$

$${}^R T_{C_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_{cr} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_f + l_h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_5 & -\sin \phi_5 & 0 & 0 \\ \sin \phi_5 & \cos \phi_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -l_e \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \phi_5 & -\sin \phi_5 & 0 & -\cos \phi_5.l_e + l_{cr} \\ \sin \phi_5 & \cos \phi_5 & 0 & -\sin \phi_5.l_e \\ 0 & 0 & 1 & -l_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.4.2 Matrizes Jacobianas das Rodas

Nesta secção apresentam-se os Jacobianos das rodas da cadeira de rodas robotizada.

#### Rodas Actuadas Convencionais, Não-Direccionadas

As equações da pseudo-velocidade e do Jacobiano para este tipo de rodas são dadas pelas equações (3.26) e (3.27) que para facilidade de leitura seguidamente reescrevemos:

$$\dot{\hat{q}}_i = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_{w_i y} \\ w_{w_i z} \end{bmatrix} = F_i \dot{q}_i, \quad J_i = \begin{bmatrix} r_i \cos {}^R\phi_{C_i} & {}^R d_{C_i y} \\ r_i \sin {}^R\phi_{C_i} & -{}^R d_{C_i x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que as rodas actuadas são fixas ao corpo, o referencial do corpo do robô não se move em relação ao referencial do ponto de contacto, logo  $\phi = 0^\circ$ , e da equação (3.25) vem:

#### • Roda 1:

$$\dot{p}_R = \begin{bmatrix} \nu_{R_x} \\ \nu_{R_y} \\ w_{R_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & -b \\ 0 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{w_1 y} \\ w_{w_1 z} \end{bmatrix} = J_1 \dot{q}_1 \quad (3.56)$$

#### • Roda 2:

$$\dot{p}_R = \begin{bmatrix} \nu_{R_x} \\ \nu_{R_y} \\ w_{R_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & b \\ 0 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{w_2 y} \\ w_{w_2 z} \end{bmatrix} = J_2 \dot{q}_2 \quad (3.57)$$

#### Restantes Rodas

As rodas 3, 4 e 5 são, na cadeira de rodas robotizada, rodas livres tipo ‘castor’, pelo que a sua contribuição é nula.

Supondo, no entanto, que estas rodas eram actuadas e direccionadas, passavam a enquadrar-se na categoria das rodas convencionais direccionadas. Neste caso, as equações da pseudo-velocidade e do Jacobiano para este

tipo de rodas, são dadas pelas equações (3.28) e (3.29), que para facilidade de leitura se reescrevem:

$$\dot{q}_i = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{w_i y} \\ w_{w_i z} \\ w_{s_i z} \end{bmatrix} = F_i \dot{q}_i$$

onde  $w_{s_i z}$  é a velocidade angular em torno do eixo da direcção.

$$J_i = \begin{bmatrix} r_i \cos {}^R\phi_{Ci} & {}^R d_{Ciy} & -{}^R d_{Hiy} \\ r_i \sin {}^R\phi_{Ci} & -{}^R d_{Cix} & {}^R d_{Hix} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Neste caso a contribuição de cada roda seria expressa por:

• **Roda 3:**

$$\begin{bmatrix} \nu_{R_x} \\ \nu_{R_y} \\ w_{R_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_p \cos \phi_3 & -l_e \sin \phi_3 + l_d & -l_d \\ r_p \sin \phi_3 & l_e \cos \phi_3 - l_c & l_c \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{w_3 y} \\ w_{w_3 z} \\ w_{s_3 z} \end{bmatrix} = J_3 \dot{q}_3$$

• **Roda 4:**

$$\begin{bmatrix} \nu_{R_x} \\ \nu_{R_y} \\ w_{R_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_p \cos \phi_4 & -l_e \sin \phi_4 - l_d & l_d \\ r_p \sin \phi_4 & l_e \cos \phi_4 - l_c & l_c \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{w_4 y} \\ w_{w_4 z} \\ w_{s_4 z} \end{bmatrix} = J_4 \dot{q}_4$$

• **Roda 5:**

$$\begin{bmatrix} \nu_{R_x} \\ \nu_{R_y} \\ w_{R_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_p \cos \phi_5 & -l_e \sin \phi_5 & 0 \\ r_p \sin \phi_5 & l_e \cos \phi_5 + l_{cr} & -l_{cr} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{w_5 y} \\ w_{w_5 z} \\ w_{s_5 z} \end{bmatrix} = J_5 \dot{q}_5$$

### 3.4.3 Solução Inversa Actuada

Tendo em consideração a figura da cadeira de rodas (figura 3.7), e o atrás exposto, irá proceder-se ao cálculo das velocidades das rodas em função da velocidade do robô. O critério do ‘movimento com três DOFs’ (secção 3.3.1), não é satisfeito pelas rodas convencionais não-direccionadas (roda 1 e 2). A matriz Jacobiana destas rodas tem dimensão  $3 \times 2$ , o que está de

acordo com o esperado para uma roda convencional não dirigida que tem dois DOFs: movimento na direcção da orientação da roda e escorregamento rotacional em torno do eixo  $z$  que passa no ponto de contacto. As rodas 3, 4 e 5 permitem três DOFs, não impondo qualquer restrição ao movimento cinemático. No entanto, o ‘critério de actuação’ (secção 3.3.1) e o ‘critério de detecção’ (secção 3.3.2) para este robô são satisfeitos, indicando que este pode ser controlado e que se consegue distinguir ambos os DOFs do WMR.

A solução de velocidade inversa ‘completa’, vai ser calculada assumindo que todas as variáveis da roda são actuadas, na solução da velocidade inversa actuada (3.40). Se todas as variáveis das rodas são actuadas, então o Jacobiano de variáveis não actuadas é nulo,  $J_{iu} = 0$ , pelo que da equação (3.35) se conclui que  $\Delta(J_{iu}) = -I$ . Substituindo este resultado na equação (3.40), esta reduz-se a:

$$\dot{q}_{ia} = (J_i^T J_i)^{-1} J_i^T \dot{p}_R \quad (3.58)$$

Dado que, só as rodas 1 e 2 são actuadas, ou seja, só estas influenciam directamente a velocidade do robô, desprezam-se na modelação cinemática as restantes rodas (tipo ‘castor’).

#### • Roda 1

De (3.56) conhece-se a matriz Jacobiana da roda 1, roda convencional não-direccionada,

$$J_1 = \begin{bmatrix} r & -b \\ 0 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Substituindo  $J_1$  na equação (3.58) e após algum desenvolvimento algébrico obtém-se o seguinte resultado:

$$\begin{bmatrix} w_{w_1y} \\ w_{c_1z} \end{bmatrix} = \frac{1}{r(d^2 + 1)} \begin{bmatrix} d^2 + 1 & b.d & b \\ 0 & r.d & r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nu_{R_x} \\ \nu_{R_y} \\ w_R \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

#### • Roda 2

De (3.57) conhece-se a matriz Jacobiana da roda 2, roda convencional não-direccionada,

$$J_2 = \begin{bmatrix} r & b \\ 0 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Substituindo  $J_2$  na equação (3.58) e após algum desenvolvimento algébrico obtém-se o seguinte resultado:

$$\begin{bmatrix} w_{w_2y} \\ w_{c_2z} \end{bmatrix} = \frac{1}{r(d^2 + 1)} \begin{bmatrix} d^2 + 1 & -b.d & -b \\ 0 & r.d & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nu_{R_x} \\ \nu_{R_y} \\ w_R \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

A solução da velocidade inversa actuada é obtida a partir da solução da velocidade inversa ‘completa’, equações (3.59) e (3.60), extraíndo apenas as velocidades actuadas das rodas (neste caso só para a roda 1 e 2). Como só se actua nas velocidades em torno do eixo  $y$  das rodas, vai ser usada só a primeira linha das matrizes (3.59) e (3.60), obtendo-se a solução da velocidade inversa actuada, que exprime as velocidades das rodas em função das velocidades do robô,

$$\begin{bmatrix} w_{w_1y} \\ w_{w_2y} \end{bmatrix} = \frac{1}{r(d^2 + 1)} \begin{bmatrix} d^2 + 1 & b.d & b \\ d^2 + 1 & -b.d & -b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nu_{R_x} \\ \nu_{R_y} \\ w_R \end{bmatrix}$$

**Nota:** No caso de se usar outro tipo de roda (sem ser a convencional não-direccionada), a matriz Jacobiana seria  $3 \times 3$  e, desta forma, cumpria todos os critérios de ‘movimento solúvel’ e do ‘movimento com três DOFs’. Neste caso, considerando que todas as variáveis seriam actuadas, poder-se-ia simplificar a equação (3.40) para a expressão (3.41):

$$\dot{q}_{ia} = (J_i^{-1})\dot{p}_R .$$

Esta equação simplificada, como já foi referido na secção 3.3.1, só pode ser aplicada quando a roda  $i$  é não-redundante (não supérflua), i.e. tem três DOFs e todas as três variáveis da roda são actuadas.

### 3.4.4 Solução Avançada Detectada

De acordo com o exposto na secção 3.3.2, o cálculo directo (ou solução avançada detectada), consiste na determinação das velocidades do robô ( $\dot{p}_R$ ) em função das velocidades detectadas (medidas por sensores) das rodas ( $\dot{q}_s$ ). A título elucidativo da aplicação do método apresentam-se os cálculos referentes ao robô em estudo:

**1º Passo** - Separar as velocidades detectadas (medidas), ‘s’, e não detectadas (não medidas), ‘n’, das rodas, de acordo com a expressão (3.45):

$$\dot{p}_R = J_{is}\dot{q}_{is} + J_{in}\dot{q}_{in} \quad i = 1, \dots, N \quad \text{e} \quad s_i + n_i = w_i$$

**2º Passo** - Usar a expressão da solução de velocidade avançada detectada (3.49):

$$\dot{p}_R = [\Delta(J_{1n}) + \Delta(J_{2n}) + \dots + \Delta(J_{Nn})]^{-1} [\Delta(J_{1n})J_{1s} \quad \Delta(J_{2n})J_{2s} \quad \dots \quad \Delta(J_{Nn})J_{Ns}] \dot{q}_s$$

onde  $J_{in}$  é o Jacobiano das velocidades não-detectadas, e  $J_{is}$  é o Jacobiano das velocidades detectadas. Como se detectam variáveis (de velocidade) das rodas 1 e 2,  $J_{in}$  para estas rodas não é nulo e, fazendo uso da equação (3.35), obtêm-se

$$\Delta(J_{in}) = J_{in} (J_{in}^T J_{in})^{-1} J_{in}^T - I \quad (3.61)$$

Recorde-se que, para a cadeira de rodas robotizada, as matrizes Jacobi-anas obtidas foram:

$$J_1 = \begin{bmatrix} r & -b \\ 0 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad J_2 = \begin{bmatrix} r & b \\ 0 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad J_3 = \begin{bmatrix} r_p \cos \phi_3 & -l_e \sin \phi_3 + l_d & -l_d \\ r_p \sin \phi_3 & l_e \cos \phi_3 - l_c & l_c \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J_4 = \begin{bmatrix} r_p \cos \phi_4 & -l_e \sin \phi_4 - l_d & l_d \\ r_p \sin \phi_4 & l_e \cos \phi_4 - l_c & l_c \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad J_5 = \begin{bmatrix} r_p \cos \phi_5 & -l_e \sin \phi_5 & 0 \\ r_p \sin \phi_5 & l_e \cos \phi_5 + l_{cr} & -l_{cr} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

No robô em estudo só as rodas 1 e 2 são actuadas e detectadas, pelo que no desenvolvimento que se segue não são incluídas as rodas livres tipo ‘castor’.

Então, separando as velocidades detectadas das não-detectadas, obtêm-se os termos  $J_{in}$  e  $J_{is}$ ,

$$J_{1n} = \begin{bmatrix} -b \\ d \\ 1 \end{bmatrix} \quad J_{2n} = \begin{bmatrix} b \\ d \\ 1 \end{bmatrix} \quad J_{1s} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad J_{2s} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Conhecidos estes termos, passamos ao cálculo da equação (3.61) que nos dá os termos  $\Delta(J_{in})$ .

• **Roda 1**

Para a roda 1 obtém-se de (3.61),

$$\Delta(J_{1n}) = J_{1n} (J_{1n}^T J_{1n})^{-1} J_{1n}^T - I$$

Fazendo o cálculo da inversa das matrizes,

$$(J_{1n}^T J_{1n})^{-1} = \left( \begin{bmatrix} -b & d & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b \\ d \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{d^2 + b^2 + 1}$$

logo,

$$J_{1n} (J_{1n}^T J_{1n})^{-1} J_{1n}^T = \frac{1}{d^2 + b^2 + 1} \begin{bmatrix} b^2 & -b.d & -b \\ -b.d & d^2 & d \\ -b & d & 1 \end{bmatrix}$$

e finalmente,

$$\begin{aligned} \Delta(J_{1n}) &= J_{1n} (J_{1n}^T J_{1n})^{-1} J_{1n}^T - I \\ &= \frac{1}{d^2 + b^2 + 1} \begin{bmatrix} b^2 & -b.d & -b \\ -b.d & d^2 & d \\ -b & d & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-(d^2+1)}{d^2+b^2+1} & -\frac{b.d}{d^2+b^2+1} & -\frac{b}{d^2+b^2+1} \\ -\frac{b.d}{d^2+b^2+1} & \frac{-(b^2+1)}{d^2+b^2+1} & \frac{d}{d^2+b^2+1} \\ -\frac{b}{d^2+b^2+1} & \frac{d}{d^2+b^2+1} & \frac{-(d^2+b^2)}{d^2+b^2+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.62)$$

• **Roda 2**

Para a roda 2 obtém-se de (3.61),

$$\Delta(J_{2n}) = J_{2n} (J_{2n}^T J_{2n})^{-1} J_{2n}^T - I$$

Fazendo o cálculo da inversa das matrizes

$$(J_{2n}^T J_{2n})^{-1} = \left( \begin{bmatrix} b & d & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{d^2 + b^2 + 1}$$

logo,

$$J_{2n} (J_{2n}^T J_{2n})^{-1} J_{2n}^T = \frac{1}{d^2 + b^2 + 1} \begin{bmatrix} b^2 & b.d & b \\ b.d & d^2 & d \\ b & d & 1 \end{bmatrix}$$

e finalmente,

$$\begin{aligned} \Delta(J_{2n}) &= J_{2n} (J_{2n}^T J_{2n})^{-1} J_{2n}^T - I \\ &= \frac{1}{d^2 + b^2 + 1} \begin{bmatrix} b^2 & b.d & b \\ b.d & d^2 & d \\ b & d & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-(d^2+1)}{d^2+b^2+1} & \frac{b.d}{d^2+b^2+1} & \frac{b}{d^2+b^2+1} \\ \frac{b.d}{d^2+b^2+1} & \frac{-(b^2+1)}{d^2+b^2+1} & \frac{d}{d^2+b^2+1} \\ \frac{b}{d^2+b^2+1} & \frac{d}{d^2+b^2+1} & \frac{-(d^2+b^2)}{d^2+b^2+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.63)$$

#### • Rodas ‘Castor’

Dado que nas rodas 3, 4 e 5 (rodas tipo ‘castor’) não se detectam nenhuma das três variáveis (de velocidade) independentes de cada roda, i.e. não se detecta nenhuma velocidade nestas rodas, obtém-se, segundo o exposto na secção 3.3.2, o seguinte:

$$\Delta(J_{3n}) = 0; \quad \Delta(J_{4n}) = 0; \quad \Delta(J_{5n}) = 0; \quad (3.64)$$

Após a obtenção dos  $\Delta(J_{in})$  para as rodas 1 e 2 torna-se necessário calcular  $\Delta(J_{in})J_{is}$  para as mesmas rodas. Logo,

#### • Roda 1

Para a roda 1, o cálculo de  $\Delta(J_{1n})J_{1s}$  conduz a

$$\Delta(J_{1n})J_{1s} = \begin{bmatrix} \frac{-(d^2+1)}{d^2+b^2+1} & -\frac{b.d}{d^2+b^2+1} & -\frac{b}{d^2+b^2+1} \\ -\frac{b.d}{d^2+b^2+1} & \frac{-(b^2+1)}{d^2+b^2+1} & \frac{d}{d^2+b^2+1} \\ -\frac{b}{d^2+b^2+1} & \frac{d}{d^2+b^2+1} & \frac{-(d^2+b^2)}{d^2+b^2+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r(d^2+1)}{d^2+b^2+1} \\ -\frac{r.b.d}{d^2+b^2+1} \\ -\frac{r.b}{d^2+b^2+1} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$



• **Roda 2**

Para a roda 2, o cálculo de  $\Delta(J_{2n})J_{2s}$  conduz a

$$\Delta(J_{2n})J_{2s} = \begin{bmatrix} \frac{-(d^2+1)}{d^2+b^2+1} & \frac{b.d}{d^2+b^2+1} & \frac{b}{d^2+b^2+1} \\ \frac{b.d}{d^2+b^2+1} & \frac{-(b^2+1)}{d^2+b^2+1} & \frac{d}{d^2+b^2+1} \\ \frac{b}{d^2+b^2+1} & \frac{d}{d^2+b^2+1} & \frac{-(d^2+b^2)}{d^2+b^2+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r(d^2+1)}{d^2+b^2+1} \\ \frac{r.b.d}{d^2+b^2+1} \\ \frac{r.b}{d^2+b^2+1} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Finalmente, pode-se prosseguir o cálculo desenvolvendo a expressão final:

$$\dot{p}_R = [\Delta(J_{1n}) + \Delta(J_{2n}) + \dots + \Delta(J_{Nn})]^{-1} [\Delta(J_{1n})J_{1s} \quad \Delta(J_{2n})J_{2s} \quad \dots \quad \Delta(J_{Nn})J_{Ns}] \dot{q}_s \quad (3.67)$$

De (3.62), (3.63) e (3.64), vem

$$\begin{aligned} [\Delta(J_{1n}) + \Delta(J_{2n}) + \dots + \Delta(J_{Nn})]^{-1} &= [\Delta(J_{1n}) + \Delta(J_{2n})]^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{2(d^2+1)}{d^2+b^2+1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2(b^2+1)}{d^2+b^2+1} & \frac{2d}{d^2+b^2+1} \\ 0 & \frac{2d}{d^2+b^2+1} & -\frac{2(d^2+b^2)}{d^2+b^2+1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{d^2+b^2+1}{2(d^2+1)} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d^2+b^2}{2b^2} & -\frac{d}{2b^2} \\ 0 & -\frac{d}{2b^2} & -\frac{b^2+1}{2b^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Dos resultados obtidos em (3.65) e (3.66), obtém-se:

$$[\Delta(J_{1n})J_{1s} \quad \Delta(J_{2n})J_{2s}] = \begin{bmatrix} -\frac{r(d^2+1)}{d^2+b^2+1} & -\frac{r(d^2+1)}{d^2+b^2+1} \\ -\frac{r.b.d}{d^2+b^2+1} & \frac{r.b.d}{d^2+b^2+1} \\ -\frac{r.b}{d^2+b^2+1} & \frac{r.b}{d^2+b^2+1} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Substituindo (3.68) e (3.69) em (3.67) resulta

$$\dot{p}_R = \begin{bmatrix} -\frac{d^2+b^2+1}{2(d^2+1)} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d^2+b^2}{2b^2} & -\frac{d}{2b^2} \\ 0 & -\frac{d}{2b^2} & -\frac{b^2+1}{2b^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{r(d^2+1)}{d^2+b^2+1} & -\frac{r(d^2+1)}{d^2+b^2+1} \\ -\frac{r.b.d}{d^2+b^2+1} & \frac{r.b.d}{d^2+b^2+1} \\ -\frac{r.b}{d^2+b^2+1} & \frac{r.b}{d^2+b^2+1} \end{bmatrix} \cdot \dot{q}_s$$

logo,

$$\dot{p}_R = \frac{r}{2b} \begin{bmatrix} b & b \\ d & -d \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \dot{q}_s \quad (3.70)$$

Finalmente, pode-se escrever a solução da velocidade avançada detectada que exprime as velocidades do robô em função das velocidades das rodas:

$$\begin{bmatrix} \nu_{Rx} \\ \nu_{Ry} \\ w_R \end{bmatrix} = \frac{r}{2b} \begin{bmatrix} b & b \\ d & -d \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_{w1y} \\ w_{w2y} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

### 3.5 Transformação das Velocidades do Robô

Na secção anterior obteve-se uma expressão para  $\dot{p}_R$  (equação (3.70)). Torna-se agora necessário obter a expressão que nos dá as velocidades do robô descritas no referencial inercial  $W$ , isto é pretende-se chegar a uma expressão para  $\dot{p}_W = f(\dot{p}_R)$ . Com este objectivo aplica-se a metodologia exposta na secção 3.2.6, ao problema prático da transformação das velocidades do robô<sup>9</sup>, partindo das coordenadas do referencial  $\bar{R}$ , para as coordenadas do mundo,  $W$ . Assume-se que, a matriz de transformação mundo-robô  ${}^W T_{\bar{R}}$  (i.e. a posição e orientação relativamente ao mundo) e a matriz  ${}^{\bar{R}} \dot{\Phi}_R$  (i.e. as velocidades do robô relativamente à sua posição e orientação actuais) são conhecidas.

As velocidades do robô no referencial inercial mundo, em função de matrizes conhecidas, são dadas pela expressão

$${}^W \dot{\Pi}_R = {}^W \dot{T}_{\bar{R}} {}^{\bar{R}} \Phi_R + {}^W T_{\bar{R}} {}^{\bar{R}} \dot{\Phi}_R \quad (3.72)$$

A expressão anterior resulta da observação do gráfico de transformação do WMR (figura 3.6) e da aplicação do corolário da velocidade em cascata (tabela 3.5), secção 3.2.4.

Aplicando-se o axioma da velocidade-zero simplifica-se a equação (3.72) para

$${}^W \dot{\Pi}_R = {}^W T_{\bar{R}} {}^{\bar{R}} \dot{\Phi}_R \quad (3.73)$$

---

<sup>9</sup>Assume-se que não há velocidades translacionais (i.e. lineares) ao longo do eixo  $z$  ou velocidades angulares em torno do eixo  $x$  e  $y$  devido à atribuição de coordenadas que foi feita.

A matriz  ${}^W\dot{\Pi}_R$  é obtida por simples aplicação directa da equação (3.7), para os referenciais  $W$  e  $R$ :

$${}^W\dot{\Pi}_R = \begin{bmatrix} -{}^Ww_R \sin {}^W\phi_R & -{}^Ww_R \cos {}^W\phi_R & 0 & {}^W\nu_{Rx} \\ {}^Ww_R \cos {}^W\phi_R & -{}^Ww_R \sin {}^W\phi_R & 0 & {}^W\nu_{Ry} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

A matriz de transformação  ${}^WT_{\bar{R}}$  resulta de (3.5), considerando neste caso os referenciais  $W$  e  $\bar{R}$ :

$${}^WT_{\bar{R}} = \begin{bmatrix} \cos {}^W\phi_{\bar{R}} & -\sin {}^W\phi_{\bar{R}} & 0 & {}^Wd_{\bar{R}x} \\ \sin {}^W\phi_{\bar{R}} & \cos {}^W\phi_{\bar{R}} & 0 & {}^Wd_{\bar{R}y} \\ 0 & 0 & 1 & {}^Wd_{\bar{R}z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

A matriz de transformação  $\bar{R}\dot{\Phi}_R$  é também obtida recorrendo à equação (3.7). No entanto, dado que os sistemas de coordenadas  $\bar{R}$  e  $R$  são coincidentes, o ângulo entre eles é zero,  $\bar{R}\phi_R = 0$ , e conseqüentemente após substituição em (3.7), obtém-se:

$$\bar{R}\dot{\Phi}_R = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{R}w_R & 0 & \bar{R}\nu_{Rx} \\ \bar{R}w_R & 0 & 0 & \bar{R}\nu_{Ry} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Multiplicando (3.75) por (3.76), e sabendo que  ${}^W\phi_{\bar{R}} = {}^W\phi_R$ , obtém-se,

$${}^WT_{\bar{R}}\bar{R}\dot{\Phi}_R = \begin{bmatrix} -\bar{R}w_R \sin {}^W\phi_R & -\bar{R}w_R \cos {}^W\phi_R & 0 & \bar{R}\nu_{Rx} \cos {}^W\phi_R - \bar{R}\nu_{Ry} \sin {}^W\phi_R \\ \bar{R}w_R \cos {}^W\phi_R & -\bar{R}w_R \sin {}^W\phi_R & 0 & \bar{R}\nu_{Rx} \sin {}^W\phi_R + \bar{R}\nu_{Ry} \cos {}^W\phi_R \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Igualando os elementos das matrizes (3.74) e (3.77) (de modo a verificar-se a igualdade (3.73)), obtêm-se imediatamente as equações das velocidades do robô descritas no referencial do mundo, que podem ser expressas na

seguinte forma matricial,

$$\dot{p}_W = {}^W \dot{p}_R = \begin{bmatrix} {}^W \nu_{Rx} \\ {}^W \nu_{Ry} \\ {}^W \omega_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos {}^W \phi_R & -\sin {}^W \phi_R & 0 \\ \sin {}^W \phi_R & \cos {}^W \phi_R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{R} \nu_{Rx} \\ \bar{R} \nu_{Ry} \\ \bar{R} \omega_R \end{bmatrix} = R(\phi) \cdot \dot{p}_R \quad (3.78)$$

De (3.78), observa-se que a velocidade angular do robô é igual em ambos os referenciais de coordenadas, enquanto que as velocidades lineares no referencial de coordenadas do mundo dependem explicitamente da orientação do robô.

### 3.5.1 Modelo Cinemático e Restrições do WMR

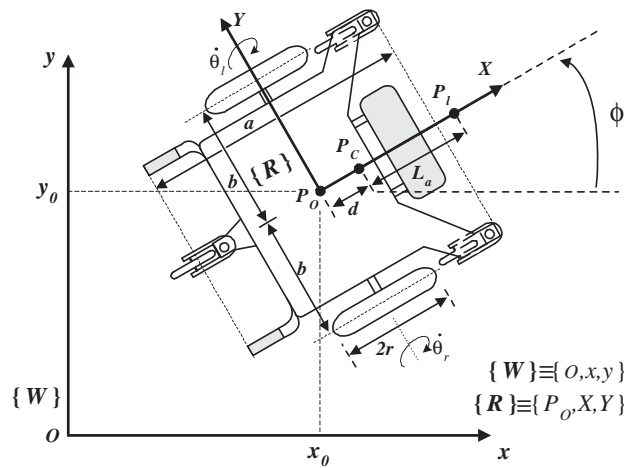


Figura 3.8: Robô móvel com rodas.

A figura 3.8 apresenta um modelo geométrico da cadeia de rodas onde se definem as variáveis necessárias para obter o modelo cinemático. Este WMR tem, como já referido neste capítulo, duas rodas actuaadas diametralmente opostas (com raio  $r$ ) e três rodas tipo 'castor'. Ambas as rodas actuaadas são dotadas de *encoders*, enquanto os 'castores' não são actuaados nem têm acoplados sensores.  $P_0$  define a origem do sistema de coordenadas do robô, com coordenadas  $(x_0, y_0)$ .  $P_c$  é o centro de massa do robô, com coordenadas  $(x_c, y_c)$  e situa-se no eixo dos X a uma distância  $d$  de  $P_0$ .  $P_l$  é um ponto de referência virtual associado à plataforma do robô, com coordenadas  $(x_l, y_l)$  e

está posicionado no eixo dos X a uma distância  $L_a$ , distância *Look-ahead*,<sup>10</sup> de  $P_c$ . ‘ $2b$ ’ é o comprimento do eixo entre as rodas actuadas do robô móvel, e ‘ $a$ ’ define o comprimento do robô.  $\phi$  é o ângulo entre o eixo dos  $x$  de  $W$  e o eixo dos X de  $R$  (por convenção é medido no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio).  $\dot{\theta}_r$  e  $\dot{\theta}_l$  são as velocidades angulares<sup>11</sup> das rodas *direita* e *esquerda* em torno do eixo dos Y.

O modelo cinemático no que respeita ao referencial do robô  $R$  (equação 3.71), é dado por

$$\dot{p}_R = J_s \cdot \dot{q}_s \quad (3.79)$$

com

$$\dot{p}_R = \begin{bmatrix} \nu_{Rx} \\ \nu_{Ry} \\ w_R \end{bmatrix}, \quad J_s = \frac{r}{2b} \begin{bmatrix} b & b \\ d & -d \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \dot{q}_s = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{w1y} \\ w_{w2y} \end{bmatrix}$$

onde  $J_s$  é o Jacobiano de actuação,  $\nu_{Rx}$  e  $\nu_{Ry}$  são as velocidades lineares do robô ao longo do eixo dos X e do eixo dos Y, e  $w_R$  é a velocidade angular do robô. Aplicando a transformação de coordenadas (3.78), ou seja

$$\dot{p}_W = R(\phi) \cdot \dot{p}_R \quad (3.80)$$

em que

$$\dot{p}_W = \begin{bmatrix} \nu_x \\ \nu_y \\ w \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

obtêm-se as velocidades no referencial do mundo  $W$

$$\begin{cases} \nu_x = \frac{r}{2} (\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) \cos \phi - \frac{r}{2b} (d\dot{\theta}_r - d\dot{\theta}_l) \sin \phi \\ \nu_y = \frac{r}{2} (\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) \sin \phi + \frac{r}{2b} (d\dot{\theta}_r - d\dot{\theta}_l) \cos \phi \\ w = \frac{r}{2b} (\dot{\theta}_r - \dot{\theta}_l) \end{cases} \quad (3.81)$$

<sup>10</sup>À semelhança da condução de veículos em que o condutor “olha para um ponto” na frente do veículo, é utilizado um ponto de referência virtual (ou ponto de *Look-ahead*) de modo a facilitar a manobrabilidade do WMR, bem como o controlo de seguimento de qualquer caminho [200]. A distância de *Look-ahead* é então usada como um parâmetro de afinação com o objectivo de conferir mais estabilidade ao sistema. O ponto de *Look-ahead* deve ser colocado a uma distância suficientemente grande que permita a estabilidade do sistema, e simultaneamente suficientemente pequena para permitir reduzir rapidamente os erros laterais presentes aquando do seguimento de caminho [64],[37],[189],[22].

<sup>11</sup>É de notar que  $\dot{\theta}_r$  e  $\dot{\theta}_l$  foram até aqui designados por  $w_{w1y}$  e  $w_{w2y}$ , respectivamente.

Considere-se que,

$$q = [x_c \ y_c \ \phi \ \theta_r \ \theta_l]^T \quad (3.82)$$

denota a configuração do sistema, i.e. as cinco coordenadas generalizadas, onde  $\theta_r$  e  $\theta_l$  representam os ângulos de rotação da roda direita e roda esquerda, respectivamente (com respeito a estados iniciais arbitrários).

Considerando (3.81) e (3.82), o modelo cinemático pode ser escrito na forma

$$\dot{q} = S(q) \nu(t) \quad (3.83)$$

$$\text{com } \nu = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix} \quad \text{e,}$$

$$S(q) = [s_1(q), s_2(q)] = \begin{bmatrix} c(b \cos \phi - d \sin \phi) & c(b \cos \phi + d \sin \phi) \\ c(b \sin \phi + d \cos \phi) & c(b \sin \phi - d \cos \phi) \\ c & -c \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

onde a constante  $c = \frac{r}{2b}$ .

No modelo cinemático, pressupõe-se que em cada contacto existe um movimento *puramente rolante*, i.e. cada roda pode ‘rolar’ na direcção da orientação da roda, e girar em torno do seu eixo vertical, mas não pode deslizar. Assumindo que a velocidade de  $P_0$  deve ser na direcção do eixo de simetria (eixo dos X), e que as rodas não deslizam, obtêm-se através de deduções simples as restrições, relativamente a  $P_c$ , [47], que se passam a apresentar.

**Proposição 1.** *Admitindo-se a existência de movimento da plataforma somente na direcção do sentido de deslocamento, obtém-se:*

$$-\dot{x}_c \sin \phi + \dot{y}_c \cos \phi - \dot{\phi} d = 0 \quad (3.85)$$

*Demonstração:* Da cinemática de um robô móvel com rodas (ver figura 3.8) e da equação (3.80), vem:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = \nu_{Rx} \cos \phi - \nu_{Ry} \sin \phi \\ \dot{y}_c = \nu_{Rx} \sin \phi + \nu_{Ry} \cos \phi \\ \dot{\phi} = w_R \end{cases} \quad (3.86)$$

onde  $\nu_{Rx}$  e  $\nu_{Ry}$  são, respectivamente, a velocidade linear segundo o eixo  $x$  e segundo o eixo  $y$ , no referencial do robô, e  $w_R$  é a velocidade angular.

Da equação (3.86), obtém-se:

$$\begin{cases} -\dot{x}_c \sin \phi = -\nu_{Rx} \cos \phi \sin \phi + \nu_{Ry} \sin \phi \sin \phi \\ \dot{y}_c \cos \phi = \nu_{Rx} \sin \phi \cos \phi + \nu_{Ry} \cos \phi \cos \phi \end{cases}$$

Donde resulta somando, membro-a-membro, as duas equações

$$\dot{y}_c \cos \phi - \dot{x}_c \sin \phi = \nu_{Ry}. \quad (3.87)$$

De (3.79) obtém-se que  $\nu_{Ry} = \frac{r}{2b}(\dot{\theta}_r - \dot{\theta}_l) d = \dot{\phi} d$ , pelo que substituindo esta expressão em (3.87) resulta

$$\dot{y}_c \cos \phi - \dot{x}_c \sin \phi = \dot{\phi} d$$

Obtém-se assim a **primeira restrição cinemática**:

$$-\dot{x}_c \sin \phi + \dot{y}_c \cos \phi - \dot{\phi} d = 0$$

■

**Proposição 2.** *Considerando que as rodas do veículo não escorregam, resulta:*

$$\dot{x}_c \cos \phi + \dot{y}_c \sin \phi + b\dot{\phi} = r\dot{\theta}_r \quad (3.88)$$

$$\dot{x}_c \cos \phi + \dot{y}_c \sin \phi - b\dot{\phi} = r\dot{\theta}_l \quad (3.89)$$

*Demonstração:* Ainda da cinemática do robô (equação 3.79), obtém-se

$$2b\dot{\phi} = r\dot{\theta}_r - r\dot{\theta}_l \quad (3.90)$$

$$2\nu_{Rx} = r\dot{\theta}_r + r\dot{\theta}_l \quad (3.91)$$

Esta última equação (3.91) pode dar origem a:

$$r\dot{\theta}_r = 2\nu_{Rx} - r\dot{\theta}_l \quad (3.92)$$

$$r\dot{\theta}_l = 2\nu_{Rx} - r\dot{\theta}_r \quad (3.93)$$

Da equação (3.86) chega-se ao resultado

$$\dot{x}_c \cos \phi = \nu_{Rx} \cos^2 \phi - \nu_{Ry} \sin \phi \cos \phi \quad (3.94)$$

$$\dot{y}_c \sin \phi = \nu_{Rx} \sin^2 \phi + \nu_{Ry} \cos \phi \sin \phi \quad (3.95)$$

Adicionando (3.94) a (3.95), vem

$$\dot{x}_c \cos \phi + \dot{y}_c \sin \phi = \nu_{Rx} \quad (3.96)$$

Regressando à equação (3.90), pode-se rescrevê-la da seguinte forma

$$2b\dot{\phi} - r\dot{\theta}_r + r\dot{\theta}_l = 0 \quad (3.97)$$

De (3.93) e (3.97), e eliminando  $\dot{\theta}_l$  resulta

$$\nu_{Rx} = -b\dot{\phi} + r\dot{\theta}_r$$

Substituindo  $\nu_{Rx}$  em (3.96), obtém-se a **segunda restrição cinemática**:

$$\dot{x}_c \cos \phi + \dot{y}_c \sin \phi + b\dot{\phi} = r\dot{\theta}_r$$

Para a obtenção da terceira restrição multiplica-se a equação (3.97) por “-1” resultando

$$-2b\dot{\phi} + r\dot{\theta}_r - r\dot{\theta}_l = 0 \quad (3.98)$$

De (3.92) e (3.98), e eliminando  $\dot{\theta}_r$  resulta

$$\nu_{Rx} = b\dot{\phi} + r\dot{\theta}_l$$

Substituindo  $\nu_{Rx}$  em (3.96), obtém-se a **terceira restrição cinemática**:

$$\dot{x}_c \cos \phi + \dot{y}_c \sin \phi - b\dot{\phi} = r\dot{\theta}_l$$

■

Então, resumindo, o conjunto de restrições, relativamente a  $P_c$ , são:

$$\dot{y}_c \cos \phi - \dot{x}_c \sin \phi - \dot{\phi}d = 0 \quad (3.99)$$

$$\dot{x}_c \cos \phi + \dot{y}_c \sin \phi + b\dot{\phi} = r\dot{\theta}_r \quad (3.100)$$

$$\dot{x}_c \cos \phi + \dot{y}_c \sin \phi - b\dot{\phi} = r\dot{\theta}_l \quad (3.101)$$



Estas restrições podem ser reescritas na forma matricial

$$A(q)\dot{q} = 0$$

em que

$$A(q) = \begin{bmatrix} -\sin \phi & \cos \phi & -d & 0 & 0 \\ -\cos \phi & -\sin \phi & -b & r & 0 \\ -\cos \phi & -\sin \phi & b & 0 & r \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

Note-se que as matrizes  $A(q)$  e  $S(q)$ , expressas pelas equações (3.102) e (3.84), satisfazem a equação

$$A(q)S(q) = 0 \text{ ,}$$

onde a sua importância será constatada no capítulo 4.

## 3.6 Conclusões

Neste capítulo apresentou-se uma metodologia para a obtenção do modelo cinemático de qualquer WMR, sendo a sua aplicação ilustrada na obtenção do modelo cinemático do WMR em estudo (cadeira de rodas robotizada). A metodologia utilizada no ‘cálculo’ do modelo cinemático de manipuladores, não é aplicável a WMRs devido ao facto de, entre outros, estes últimos terem múltiplas cadeias de ligação fechada formadas por múltiplas rodas, e nem todas as variáveis das rodas serem actuadas. No desenvolvimento deste capítulo começou-se pela atribuição de sistemas de coordenadas através da convenção de Sheth-Uicker. Foi realizada a formulação de matrizes de transformação sendo de destacar a sua álgebra (axiomas e corolários). Na formulação do modelo cinemático teve-se em consideração a posição e a velocidade. Relativamente à velocidade, recorreu-se ao estudo das matrizes Jacobianas de modo a ser possível caracterizar cada tipo de roda utilizada nos WMRs. As considerações teóricas terminam com a dedução da equação composta do robô, i.e. o cálculo da velocidade inversa actuada e da velocidade avançada detectada.

Para complementar os conceitos teóricos foi projectado o modelo cinemático do WMR em estudo. Começou-se pela atribuição dos sistemas de coordenadas e pelo cálculo das matrizes de transformação de coordenadas.

Cada roda foi modelizada como um par-planar. Através do gráfico da figura 3.6 escreveram-se as matrizes de transformação que relacionam os vários referenciais. O sistema de coordenadas do mundo,  $W$ , é bastante importante, porque permite referenciar as velocidades do ponto de contacto da roda no sistema de coordenadas instantaneamente coincidente ( $\bar{C}$ ). Para cada roda, foram desenvolvidas matrizes Jacobianas, para especificar as velocidades do corpo do WMR como combinações lineares das velocidades das rodas.

Calcularam-se as duas soluções da equação composta do robô: a solução da velocidade inversa actuada e a solução da velocidade avançada detectada. Na solução de velocidade inversa actuada calcularam-se as velocidades actuadas das rodas a partir das velocidades do corpo do WMR. A solução de velocidade inversa actuada é aplicável aos WMRs que satisfazem o ‘critério de movimento solúvel’. Na solução de velocidade avançada detectada calcularam-se as velocidades do corpo do WMR, a partir das velocidades detectadas das rodas. O ‘critério de detecção adequado’ indica se uma solução de velocidade avançada detectada é aplicável a um dado WMR. Constatou-se que a solução de velocidade avançada detectada pode ser simplificada, eliminando as equações de movimento de rodas tendo três DOFs sem sensores (ou seja não são detectados), uma vez que elas não afectam a solução.

Por fim foi realizada a transformação das velocidades do robô em estudo, do sistema de coordenadas do robô ( $R$ ) para o sistema de coordenadas do mundo ( $W$ ), e obtiveram-se as suas restrições cinemáticas.

# Capítulo 4

## Dinâmica de Robôs Móveis

Neste capítulo faz-se uso de Lagrangianos na obtenção das equações dinâmicas de WMRs, i.e. sistemas nos quais o contacto rolante é mantido passivo apesar das forças externas, tais como forças de gravidade. Os contactos rolantes entre dois corpos rígidos geram restrições não-holónomas, em sistemas que de outro modo seriam holónomos. Os WMRs são exemplos típicos de sistemas mecânicos com restrições não-holónomas.

Pode-se dizer que um robô móvel holónimo é aquele que tem movimento sem restrições, ou seja, é um robô que pode rodar sobre si mesmo, o que lhe permite, partindo de uma dada posição, mover-se arbitrariamente em qualquer direcção dentro do espaço de ‘trabalho’. Por sua vez, um robô móvel não-holónimo é aquele onde não se verificam as anteriores características de holonomia, isto é, um robô móvel não-holónimo não pode rodar sobre si mesmo sem que simultaneamente se mova numa dada direcção, logo tem restrições.

### 4.1 Introdução

A dinâmica é o ramo da física que trata do movimento dos corpos sob acção de forças [125]. Isto inclui cinemática, que é o estudo do movimento dos corpos sem referência às forças que originam o movimento, e cinética que relaciona estas forças com os movimentos resultantes. O comportamento dinâmico é descrito em termos da taxa de mudança no tempo da configuração do robô, em função dos binários exercidos pelos seus actuadores.

O problema da dinâmica inversa pode ser formulado do seguinte modo:

dado um vector de posição, velocidade e aceleração de um determinado ponto, calcular o vector dos binários que são necessários aplicar nos actuadores. Se a dinâmica inversa é modelada com exactidão, o sistema de controlo pode prever o binário adicional necessário para seguir uma determinada trajectória. O problema inverso é o da dinâmica directa, ou seja, dado um vector de binários de actuadores, calcular os valores resultantes de movimentos do robô, i.e. os seus valores correspondentes em posição, velocidade e aceleração. Um sistema tem de equilibrar forças de duas origens: forças internas, que resultam da interacção entre partículas dentro do sistema e forças externas, que resultam da interacção com o meio-ambiente.

As leis básicas da dinâmica podem ser formuladas a partir de vários princípios [125], incluindo a lei de Newton em conjunto com o conceito de trabalho virtual, princípio de D'Alembert, equações de Lagrange, equações de Hamilton e princípio de Hamilton. Todas estas formulações são equivalentes e todas elas podem ser derivadas das leis de Newton e do princípio de trabalho virtual. Em robótica, usam-se as formulações de Lagrange e de Newton-Euler.

Na formulação de Newton-Euler, as equações dinâmicas são obtidas em função de forças e movimentos. Nesta, as forças internas são tratadas de forma explícita, fazendo com que apresente um maior esforço de cálculo que a formulação de Lagrange.

A formulação Lagrangiana descreve o comportamento dinâmico de um robô em termos de trabalho realizado pelo sistema e pela energia armazenada no sistema, envolvendo apenas funções escalares sem necessidade de se explicitar as forças internas. O robô é tratado como uma caixa negra que tem um balanço de energia.

Este capítulo inicia-se com uma breve revisão de mecânica clássica com base na perspectiva Lagrangiana, de modo a introduzir algumas das “estruturas” necessárias para a boa compreensão deste estudo, bem como da dinâmica de robôs móveis não-holónomos. Para uma boa compreensão da dedução das equações de Lagrange, é necessário ter presente diversos conceitos, tais como os de trabalho virtual, forças de restrição, coordenadas generalizadas, deslocamentos virtuais, etc. Uma boa introdução a estes assuntos está disponível na obra publicada por Wells [191]. Descrições mais resumidas destes assuntos encontram-se nas referências [133], [32].

No apêndice A encontram-se algumas definições úteis para a leitura deste capítulo.

## 4.2 Formulação de Lagrange

As equações que regem o movimento de um sistema mecânico complexo como um robô, podem ser expressas pelo uso de um método desenvolvido no século *XVIII* pelo matemático francês Lagrange. As equações diferenciais, que são o resultado do uso deste método, são conhecidas por *equações de Lagrange* e derivam das Leis de Newton referentes ao movimento.

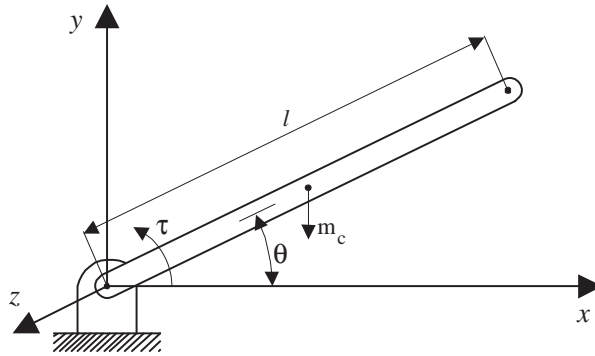


Figura 4.1: Elemento único rodando sobre uma junta.

### 4.2.1 Elemento Único

As equações de Lagrange podem obter-se a partir da equação de D'Alembert [125] :

$$\delta W = f_x \delta x + f_y \delta y + f_z \delta z = m_c (a_x \delta x + a_y \delta y + a_z \delta z) \quad (4.1)$$

onde  $\delta W$  é o trabalho virtual,  $f_x$  é a força segundo  $x$ ,  $\delta x$  é o deslocamento virtual segundo  $x$ ,  $m_c$  é a massa do 'corpo' e  $a_x$  é a aceleração segundo  $x$ . A designação dos restantes termos é similar.

Para ilustrar o desenvolvimento da equação de Lagrange, os cálculos vão ser realizados considerando uma barra fina e uniforme que pode rodar em torno de um eixo fixo (figura 4.1). Quando o eixo é perpendicular à superfície da terra, a gravidade não entra nestes cálculos, e portanto a energia potencial não muda. Como este sistema tem apenas um grau de liberdade, há apenas uma equação expressa em termos de uma única coordenada

generalizada,  $q_1$ , de tal modo que as coordenadas cartesianas são expressas como função de  $q_1$ .

$$x = x(q_1), \quad y = y(q_1) \quad \text{e} \quad z = z(q_1) \quad (4.2)$$

Se as equações fossem expressas em termos de duas coordenadas generalizadas,  $q_1$  e  $q_2$ , por exemplo, a função resultante seria  $x = x(q_1, q_2)$ . Nesta secção, restringe-se a discussão a uma coordenada generalizada para uma maior simplicidade.

Deslocamentos virtuais em coordenadas cartesianas podem ser descritos em termos de deslocamentos virtuais de coordenadas generalizadas.

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1, \quad \delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 \quad \text{e} \quad \delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 \quad (4.3)$$

Substituindo estes deslocamentos na equação de D'Alembert vem:

$$\delta W = f_x \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + f_y \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + f_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 = m_c \left( a_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + a_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + a_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 \quad (4.4)$$

Estes deslocamentos ajustam-se à restrição do movimento, em um grau de liberdade: rotação em torno do eixo da junta. Portanto, o trabalho virtual de um deslocamento virtual ajusta-se à restrição. Como a  $q_1$  pode ser atribuído um valor arbitrariamente pequeno sem violar a restrição, e a restrição é 'suave' (i.e. continuamente diferenciável), o trabalho realizado pela força de restrição é zero. Então, a força de restrição é eliminada da equação.

Para 'conseguir' uma relação entre o trabalho virtual e a energia cinética, começa-se por obter expressões que relacionem a derivada das coordenadas cartesianas com as coordenadas generalizadas. Primeiro, deriva-se a equação (4.2) em ordem ao tempo

$$\frac{dx}{dt} = \nu_x = \frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1 \quad (4.5)$$

As equações para  $\nu_y$  e  $\nu_z$  são similares. Agora, calcula-se a derivada parcial em relação a  $q_1$ .

$$\frac{\partial \nu_x}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) \dot{q}_1 \quad (4.6)$$

Como as segundas derivadas são comutativas, o resultado é o mesmo, ainda que a ordem dos elementos (presentes na operação de derivação) seja “inversa”, portanto [125]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial \nu_x}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) \dot{q}_1 \quad (4.7)$$

Em seguida, calcula-se a derivada parcial de (4.5) em relação a  $\dot{q}_1$  [125]:

$$\frac{\partial \nu_x}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} \quad (4.8)$$

Segundo, calcula-se uma equação de aceleração

$$\frac{d}{dt} \left( \nu_x \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) = a_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + \nu_x \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) \quad (4.9)$$

Reorganizando a equação (4.9) vem

$$a_x \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left( \nu_x \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) - \nu_x \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) \quad (4.10)$$

Substituindo as equações (4.7) e (4.8) na equação (4.10),

$$a_x \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left( \nu_x \frac{\partial \nu_x}{\partial \dot{q}_1} \right) - \nu_x \frac{\partial \nu_x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \left( \frac{\nu_x^2}{2} \right)}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial \left( \frac{\nu_x^2}{2} \right)}{\partial q_1} \quad (4.11)$$

Para  $y$  e  $z$  obtêm-se resultados similares aos anteriores.

Finalmente substitui-se a equação (4.11) na equação (4.4), de modo a obter uma relação entre trabalho virtual e energia cinética.

$$\begin{aligned} \delta W_{q_1} &= \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} m_c \frac{(\nu_x^2 + \nu_y^2 + \nu_z^2)}{2} \right] - \frac{\partial}{\partial q_1} m_c \frac{(\nu_x^2 + \nu_y^2 + \nu_z^2)}{2} \right\} \delta q_1 \\ &= \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} \right] \delta q_1 = \left( f_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + f_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + f_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde  $T$  é a energia cinética do ‘elemento’:

$$T = \frac{1}{2} m_c (\nu_x^2 + \nu_y^2 + \nu_z^2)$$

Neste exemplo elucidativo, um elemento com rotação simples, a coordenada generalizada, é o ângulo de junção  $\theta$  e a equação (4.12) reduz-se à equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial w} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = f_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + f_y \frac{\partial y}{\partial \theta} + f_z \frac{\partial z}{\partial \theta} = F = \tau \quad (4.13)$$

onde  $w$  é a velocidade angular, e  $F$  é a força generalizada, que neste caso é igual ao binário  $\tau$ .

## 4.2.2 Dinâmica Generalizada

O exemplo anterior é um caso específico de equações de Lagrange generalizadas. O princípio fundamental das equações de Lagrange é a representação de um sistema por um conjunto de coordenadas generalizadas  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) que integram completamente as restrições do sistema, i.e. as interconexões entre as partes do sistema [191]. Depois de definidas as coordenadas generalizadas, a energia cinética,  $T$ , é expressa em termos destas coordenadas e das suas derivadas, e a energia potencial,  $V$ , é expressa unicamente em termos das coordenadas generalizadas. A diferença entre a energia cinética e energia potencial define o Lagrangiano:

$$L_{ge} = T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) - V(q_1, \dots, q_n) \quad (4.14)$$

ou seja

$$L_{ge}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q) \quad (4.15)$$

Derivando a equação (4.15) em ordem ao tempo, obtêm-se as equações de Lagrange, ou seja, as ' $n$ ' equações não-lineares que descrevem a dinâmica sob a forma de coordenadas generalizadas

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L_{ge}}{\partial q_i} = F_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.16)$$

onde  $F_i$  representa as forças generalizadas (forças e binários), ou seja forças externas ao sistema. Esta força representa a força residual que subsiste depois de subtraídos os efeitos das forças inerciais (associadas à energia cinética) e forças gravíticas (associadas à energia potencial). São exemplos destas forças residuais as forças de dissipação e de actuação.



Para se obter o Lagrangiano é necessário calcular a energia cinética total do sistema,

$$T(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^n T_i(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (4.17)$$

onde  $M(q) \in R^{n \times n}$  é a matriz de inércia do sistema.

A energia cinética de um corpo movendo-se linearmente (translação) ( $T_{lin}$ ) e rotacionalmente ( $T_{rot}$ ) num espaço a duas dimensões (2D), é dada por:

$$\begin{aligned} T &= T_{lin} + T_{rot} \\ T &= \frac{1}{2} m_c \nu^2 + \frac{1}{2} I_{cm} w^2 \end{aligned}$$

onde,  $m_c$  é a massa do ‘corpo’;  $\nu$  é a velocidade linear no centro de massa;  $w$  é velocidade angular do corpo; e  $I_{cm}$  é o momento de inércia do corpo relativamente ao centro de massa.

Aplicando a equação de Lagrange (4.16) ao Lagrangiano é possível reescrever o resultado das equações dinâmicas na forma matricial,

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = F, \quad (4.18)$$

em que  $G(q) = \frac{\partial V}{\partial q} \in R^n$  representa o vector gravitacional e  $C(q, \dot{q}) \in R^{n \times n}$  representa a matriz de força centrípeta e de Coriolis dada por:

$$C_{ij}(q, \dot{q}) = \left( \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_h} + \frac{\partial M_{ih}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{hj}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_h \quad i, j, h = 1, \dots, n \quad (4.19)$$

É de notar que alguns autores representam  $G(q)$  por  $N(q, \dot{q})$ , neste caso o vector inclui para além das forças gravitacionais, outras forças.

### 4.3 Robôs Móveis Não-Holónomos

Na obtenção das equações dinâmicas é necessário ter em consideração as suposições de projecto e suposições operacionais, apresentadas no capítulo 3 (secção 3.2), bem como as equações ‘cinemáticas’ (3.83) e (3.84).

Assim, as equações que descrevem a dinâmica de um robô móvel não-holónimo, são obtidas sabendo que o movimento de um sistema mecânico

pode ser descrito por um conjunto de  $n$  coordenadas generalizadas e por equações diferenciais de movimento, que permitem relacionar as coordenadas com forças e momentos externos. Se o sistema for sujeito a,  $\alpha$ , restrições holónomas, podem ser eliminadas  $\alpha$  coordenadas generalizadas apesar do processo de eliminação não ser frequentemente trivial [161]. O mesmo não acontece para restrições não-holónomas, que não dão lugar a eliminação de coordenadas generalizadas. É bem conhecido que a natureza das restrições tem um papel importante na determinação da resposta de um sistema dinâmico [77].

Considere um robô móvel não-holónomo com  $n$  coordenadas generalizadas  $q$  sujeito a ‘ $m$ ’ restrições (assumindo que  $m < n$ ), cujas equações dinâmicas de movimento são descritas por:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B(q)\tau - A^T(q)\lambda \quad (4.20)$$

onde  $B(q) \in R^{n \times (n-m)}$  é a matriz de transformação das entradas,  $A(q)^T$  é uma matriz Jacobina associada às restrições,  $\tau \in R^{(n-m)}$  é o vector de entrada, neste caso o binário, e  $\lambda \in R^m$  representa o vector das forças de restrição. As  $m$  equações de restrição do sistema mecânico podem ser escritas na forma

$$w(q, \dot{q}) = 0.$$

Se a equação de restrição puder ser definida matematicamente na forma  $w_i(q) = 0$  é dita holónoma, isto significa que se trata de uma restrição especificada ao nível das coordenadas generalizadas (no caso do robô móvel ao nível da posição), i.e. uma restrição geométrica. Por sua vez, uma restrição não-holónoma é especificada ao nível da velocidade, i.e. uma restrição cinemática (em oposição a uma geométrica).

### 4.3.1 Classificação de Sistemas Não-Holónomos

É importante conhecer o tipo de restrições de movimento do sistema. Seguidamente vão ser apresentados alguns conceitos e formulações matemáticas que permitem atingir este objectivo. Como formulado em [199], suponha-se que há  $k$  restrições holónomas e  $m - k$  restrições não-holónomas, todas elas podendo ser escritas na forma de

$$A(q)\dot{q} = 0 \quad (4.21)$$

onde  $A(q) \in R^{m \times n}$  é uma matriz regular (i.e. têm característica completa). Seja  $s_1, \dots, s_{n-m}$  um conjunto de campos de vectores *suaves*<sup>1</sup> e linearmente independentes no espaço nulo de  $A(q)$ ,  $\mathcal{N}(A)$ , i.e.

$$A(q) s_i(q) = 0 \quad i = 1, \dots, n-m.$$

Seja  $S(q) = [s_1(q) \ \dots \ s_{n-m}(q)]$  a matriz de característica completa constituída por estes vectores, tal que (ver equações (3.84) e (3.102))

$$A(q) S(q) = 0$$

e  $\Delta$  a distribuição gerada por estes campos de vectores:

$$\Delta(q) = \text{span} \{s_1(q), \dots, s_{n-m}(q)\} = \text{span} \{S(q)\} \quad (4.22)$$

assim, segue-se que  $\dim \Delta(q) = \text{rank } S(q)$  e qualquer  $\dot{q}$  que satisfaça a equação (4.21) pertence<sup>2</sup> a  $\Delta$  [199].

**Definição 1.** Para dois campos de vectores ‘ $f$ ’ e ‘ $g$ ’, os parêntesis de Lie são um terceiro campo de vectores definido por:

$$[f, g](q) = \frac{\partial g}{\partial q} f(q) - \frac{\partial f}{\partial q} g(q)$$

É óbvio que  $[f, g] = -[g, f]$  e  $[f, g] = 0$  para campos de vectores constantes ‘ $f$ ’ e ‘ $g$ ’. Igualmente, a identidade Jacobi vem,

$$[h, [f, g]] + [f, [g, h]] + [g, [h, f]] = 0 \quad (4.23)$$

A seguinte notação é comumente usada na representação dos parêntesis de Lie:

$$\begin{aligned} ad_f^0 g(q) &= g(q) \\ ad_f g(q) &= [f, g](q) \\ ad_f^k g(q) &= [f, ad_f^{k-1} g](q), \quad k > 1 \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Continuamente diferenciáveis.

<sup>2</sup>Matematicamente, esta conclusão é facilmente obtida, uma vez que a equação (4.21) é equivalente a  $\dot{q} \in \mathcal{N}(A)$  o que implica que  $\dot{q}$  seja uma combinação linear de  $s_1, \dots, s_{n-m}$ , i.e.  $\dot{q} \in \Delta$ .

**Definição 2.** A distribuição  $\Delta$  é involutiva se é fechada sob a operação dos parêntesis de Lie, ou seja, se

$$g_1 \in \Delta \quad \text{e} \quad g_2 \in \Delta \quad \Rightarrow \quad [g_1, g_2] \in \Delta$$

Então, recorrendo às definições anteriores, vai-se analisar se a distribuição  $\Delta$  é ou não involutiva. Seja  $\Delta^*$  a mais pequena distribuição involutiva que contém  $\Delta$ , neste caso  $\dim(\Delta) \leq \dim(\Delta^*)$ .

De acordo com Campion *et al.*[39] há três casos possíveis: 1) para  $k = m$ , isto é todas as restrições são holónomas,  $\Delta$  é involutivo; 2) para  $k = 0$ , isto é todas as restrições são não-holónomas,  $\Delta^*$  gera todo o espaço; 3) para  $0 < k < m$ , as  $k$  restrições são integráveis e  $k$  componentes das coordenadas generalizadas podem ser eliminados das equações de movimento. No último caso  $\dim(\Delta^*) = n - k$ .

No entanto, convém ser mais preciso, e distinguir entre restrições holónomas e não-holónomas. Para verificar o tipo de restrições é necessário calcular repetidamente os parêntesis de Lie dos campos de vectores  $s_1, \dots, s_{n-m}$  de  $\Delta$  (ou do sistema  $\dot{q}(t) = \sum_{i=1}^{n-m} s_i \nu_i(t) = S(q)\nu(t)$ ).

A classificação de sistemas não-holónomos recorre à utilização do conceito de *filtração*<sup>3</sup>. Este conceito é baseado na sequência e ordem dos parêntesis de Lie, bem como na álgebra correspondente.

**Definição 3.** [119] A *filtração gerada pela distribuição  $\Delta$*  (equação 4.22) é definida como a sequência  $\{\Delta_i\}$  com

$$\Delta_i = \Delta_{i-1} + [\Delta_1, \Delta_{i-1}], \quad i \geq 2$$

onde

$$\Delta_1 = \Delta, \quad e$$

$$[\Delta_1, \Delta_{i-1}] = \text{span} \{[s_j, \gamma] \mid s_j \in \Delta_1, \gamma \in \Delta_{i-1}\}, \quad j = 1, \dots, n - m$$

Note que  $\Delta_i \subseteq \Delta_{i+1}$ . Note ainda que, a partir da identidade Jacobi (4.23) segue-se que  $[\Delta_i, \Delta_j] \subseteq [\Delta_1, \Delta_{i+j-1}] \subseteq \Delta_{i+j}$ .

Uma **filtração é regular** [119] numa dada vizinhança  $V_z$  de  $q_0$  se  $\dim \Delta_i(q) = \dim \Delta_i(q_0)$ ,  $\forall q \in V_z$ .

---

<sup>3</sup>O termo *filtração* é usado para traduzir do inglês o termo ‘filtration’.

Para uma filtração regular, se  $\dim \Delta_{i+1} = \dim \Delta_i$ , então  $\Delta_i$  é involutiva e  $\Delta_{i+j} = \Delta_i$  para todo  $j \geq 0$ . Uma vez que  $\dim \Delta_1 = n - m$  e  $\dim \Delta_i \leq n$ , a condição de *fim de cálculo* tem lugar após  $m$  passos, i.e. está em concordância com o número de restrições cinemáticas originais.

Se a filtração gerada pela distribuição  $\Delta$  é regular, é possível definir o *grau de não-holonomia* de  $\Delta$  como sendo o menor valor inteiro  $\kappa$  que verifica a condição  $\dim \Delta_{\kappa-1} = \dim \Delta_\kappa$ . Note que a verificação desta condição implica que  $\kappa \leq m + 1$ .

As anteriores condições para holonomia, não-holonomia parcial e não-holonomia completa podem ser reescritas como se segue: 1)- para  $\kappa = 1$ , isto é  $\dim \Delta_\kappa = n - m$ , todas as restrições são holónomas; 2)- para  $2 \leq \kappa \leq m$  e se  $\dim \Delta_\kappa = n$ , todas as restrições são não-holónomas; 3)- para  $2 \leq \kappa \leq m$  e se  $(n - m) + 1 \leq \dim \Delta_\kappa < n$ , as restrições são parcialmente não-holónomas.

### Grau de Não-Holonomia do WMR em Estudo

Neste ponto, o teste de não-holonomia é realizado com o objectivo de determinar o tipo de restrições cinemáticas presentes no robô em estudo (cadeira de rodas robotizada). Usando o conceito de filtração, definição 3, e recorrendo à equação (3.84), vem como consequência que

$$\Delta_1 = \Delta(q) = \text{span} \{s_1(q), s_2(q)\}$$

onde  $\dim \Delta_1 = \text{rank} [s_1(q), s_2(q)] = 2$ .

Assim, calculando os parêntesis de Lie de  $s_1(q)$  e  $s_2(q)$ , tem-se

$$s_3 = [s_1(q), s_2(q)] = \frac{\partial s_2}{\partial q} s_1 - \frac{\partial s_1}{\partial q} s_2$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_2}{\partial q} s_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & c(-b \sin \phi + d \cos \phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c(b \cos \phi + d \sin \phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c(b \cos \phi - d \sin \phi) \\ c(b \sin \phi + d \cos \phi) \\ c \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c^2(-b \sin \phi + d \cos \phi) \\ c^2(b \cos \phi + d \sin \phi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_1}{\partial q} s_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & c(-b \sin \phi - d \cos \phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c(b \cos \phi - d \sin \phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c(b \cos \phi + d \sin \phi) \\ c(b \sin \phi - d \cos \phi) \\ -c \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c^2(b \sin \phi + d \cos \phi) \\ -c^2(b \cos \phi - d \sin \phi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tendo em atenção o facto de que  $s_3 = \frac{\partial s_2}{\partial q} s_1 - \frac{\partial s_1}{\partial q} s_2$ , então

$$s_3 = \begin{bmatrix} c^2(-b \sin \phi + d \cos \phi) - c^2(b \sin \phi + d \cos \phi) \\ c^2(b \cos \phi + d \sin \phi) + c^2(b \cos \phi - d \sin \phi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c^2(2b \sin \phi) \\ c^2(2b \cos \phi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e como  $c = \frac{r}{2b}$  obtém-se finalmente

$$s_3 = \begin{bmatrix} -\frac{r}{2b} c (2b \sin \phi) \\ \frac{r}{2b} c (2b \cos \phi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -rc \sin \phi \\ rc \cos \phi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uma vez que  $s_3(q)$  não é uma combinação linear de  $s_1(q)$  e  $s_2(q)$ , então  $s_3(q)$  não está na distribuição  $\Delta_1$  gerada por  $s_1(q)$  e  $s_2(q)$ , e pelo menos uma das restrições é não-holónoma. Então a distribuição  $\Delta_2$  assume a forma de  $\Delta_2 = \text{span} \{s_1(q), s_2(q), s_3(q)\}$  com  $\dim \Delta_2 = \text{rank} [s_1(q), s_2(q), s_3(q)] = 3$ . Usando o mesmo processo de cálculo apresentado para  $s_3(q)$ , os parêntesis de Lie são calculados de modo a obter  $s_4(q)$  e  $s_5(q)$ :

$$s_4(q) = [s_1(q), s_3(q)] = \begin{bmatrix} -rc^2 \cos \phi \\ -rc^2 \sin \phi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad s_5(q) = [s_2(q), s_3(q)] = -s_4(q)$$

como  $s_5(q)$  é múltiplo de  $s_4(q)$  então  $\Delta_3$  é unicamente:

$$\Delta_3 = \text{span}\{s_1(q), s_2(q), s_3(q), s_4(q)\}, \text{ e } \dim \Delta_3 = \text{rank}[s_1(q), s_2(q), s_3(q), s_4(q)] = 4;$$

Do mesmo modo, as próximas combinações de parêntesis de Lie são:

$$s_6(q) = [s_1(q), s_4(q)] = [rc^3 \sin \phi \quad -rc^3 \cos \phi \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T = -c^2 s_3(q) \in \Delta_3 ;$$

$$s_7(q) = [s_2(q), s_4(q)] = c^2 s_3(q) \in \Delta_3 ;$$

$$s_8(q) = [s_3(q), s_4(q)] = 0 \in \Delta_3 .$$

Como  $s_6(q)$  e  $s_7(q)$  são múltiplos de  $s_3(q)$ ,  $s_8(q)$  é uma combinação linear de  $s_3(q)$  e  $s_4(q)$ , e todos eles estão na distribuição  $\Delta_3$ , então:

$$\Delta_4 = \text{span}\{s_1(q), s_2(q), s_3(q), s_4(q)\} = \Delta_3 \quad \text{e} \quad \dim \Delta_4 = 4.$$

Como  $\dim \Delta_4 = \dim \Delta_3$ , então  $\Delta_3$  é involutiva e  $\Delta_{3+j} = \Delta_3$  para todos os  $j \geq 0$ . A partir deste resultado, pode-se concluir que a distribuição gerada por  $s_1(q)$ ,  $s_2(q)$ ,  $s_3(q)$  e  $s_4(q)$  é involutiva sendo todos os seus vectores linearmente independentes e, portanto,

$$\Delta^* = \text{span}\{s_1(q), s_2(q), s_3(q), s_4(q)\}.$$

O grau de não-holonomia de  $\Delta^*$  é  $\kappa = 3$ , e o sistema é parcialmente não-holónimo. A partir do conceito de filtração, do grau de não-holonomia, e recorrendo a simples operações aritméticas, pode-se concluir que de entre as três restrições, duas delas são não-holónomas.

Subtraindo a equação (3.101) da equação (3.100), a restrição holónoma é obtida,

$$\dot{\phi} = \frac{r}{2b} (\dot{\theta}_r - \dot{\theta}_l). \quad (4.24)$$

Em conclusão, existe uma restrição holónoma (4.24), e duas restrições não-holónomas:

$$\dot{y}_c \cos \phi - \dot{x}_c \sin \phi - \dot{\phi} d = 0$$

$$\dot{x}_c \cos \phi + \dot{y}_c \sin \phi - \frac{r}{2} (\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) = 0.$$

### 4.3.2 Modelo Dinâmico

Considerando a figura 3.8 (do capítulo 3), e recordando que este robô é actuado por duas rodas,  $o - xy$  é o sistema de coordenadas do mundo e  $P_0 - XY$  é o sistema de coordenadas do robô móvel. A localização do centro de massa do robô móvel é em  $P_c$  ( $P_c$  situa-se no eixo  $X$  e a uma distância “ $d$ ” de  $P_0$ ).  $\theta_r, \theta_l$  representam os ângulos de rotação das duas rodas. A posição do robô é determinada pelos valores  $(x_c, y_c)$  do seu centro de massa e pelo seu ângulo de direcção  $\phi$ , sendo que  $q = [x_c \ y_c \ \phi \ \theta_r \ \theta_l]^T$  representa a configuração do sistema (i.e. as cinco coordenadas generalizadas).

No desenvolvimento do sistema dinâmico do robô em estudo vão ser desprezadas as rodas tipo ‘castor’ dado que, como já foi dito anteriormente, elas só têm como função manter o equilíbrio do robô. Vai-se então considerar unicamente as rodas actuadas, pois são as únicas que estão ligadas a motores, logo podem influenciar directamente a velocidade.

Para se obterem as equações dinâmicas do robô móvel em estudo é necessário calcular o seu Lagrangiano, de modo a obter as equações de Lagrange do movimento e consequentemente as matrizes  $M$ ,  $C$  e  $B$  (referidas na equação (4.20)), de modo a tornar mais fácil a representação em espaço de estados.

Uma vez que o Lagrangiano (equação (4.15)) é dado pela diferença entre a energia cinética e a energia potencial, é necessário obter, para o WMR em estudo, a expressão para cada uma destas energias.

Assim, para se calcular a “Energia Cinética”(T) em  $P_0$  é necessário calcular:

#### 1. Energia cinética da Plataforma:

- *Movimento linear:*

$$T_{lin} = \frac{1}{2}m_c(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)$$

onde  $m_c$  é a massa da plataforma do robô.

Para obter a energia em função de  $x_c$  e  $y_c$ , é necessário começar por calcular a velocidade no ponto  $P_0$ , logo

$$\begin{cases} x_0 = x_c - d \cos \phi \\ y_0 = y_c - d \sin \phi \end{cases} \quad \text{derivando vem} \quad \begin{cases} \dot{x}_0 = \dot{x}_c + d \sin \phi \dot{\phi} \\ \dot{y}_0 = \dot{y}_c - d \cos \phi \dot{\phi} \end{cases}$$



O quadrado de cada uma das expressões é:

$$\begin{cases} \dot{x}_0^2 = \dot{x}_c^2 + d^2 \sin^2 \phi \dot{\phi}^2 + 2\dot{x}_c d \sin \phi \dot{\phi} \\ \dot{y}_0^2 = \dot{y}_c^2 + d^2 \cos^2 \phi \dot{\phi}^2 - 2\dot{y}_c d \cos \phi \dot{\phi} \end{cases}$$

e consequentemente a soma, membro-a-membro, das duas expressões anteriores, conduz a:

$$\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 = \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + d^2 \dot{\phi}^2 + 2d\dot{\phi}(\dot{x}_c \sin \phi - \dot{y}_c \cos \phi) \quad (4.25)$$

Finalmente, obtém-se a energia cinética relativa ao movimento linear:

$$T_{lin} = \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) = \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2} m_c (d^2 \dot{\phi}^2) + m_c d \dot{\phi} (\dot{x}_c \sin \phi - \dot{y}_c \cos \phi).$$

-*Movimento Rotacional:*

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I_c \dot{\phi}^2$$

onde  $I_c$  é a inércia da plataforma do robô, em torno de um eixo perpendicular ao plano e que passa pelo centro de massa,  $P_c$ .

-*Energia cinética Global:*

Para obter a energia cinética total da plataforma basta somar as energias referentes aos movimentos linear e rotacional, donde resulta

$$T_P = \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2} m_c (d^2 \dot{\phi}^2) + m_c d \dot{\phi} (\dot{x}_c \sin \phi - \dot{y}_c \cos \phi) + \frac{1}{2} I_c \dot{\phi}^2 \quad (4.26)$$

2. **Energia cinética das Rodas:** Para o cálculo da energia cinética das rodas (em  $P_c$ ), e de modo a simplificar os cálculos, começa-se por calcular a energia cinética em relação a  $P_0$ , e só depois em relação a  $P_c$ .

-Roda Direita:

-*Movimento linear:*

Considerando que  $(x_r, y_r)$  representa as coordenadas do centro da roda direita, e tendo em consideração a figura 3.8, obtém-se

$$\begin{cases} x_r = x_0 + b \sin \phi \\ y_r = y_0 - b \cos \phi \end{cases} \quad \text{derivando vem} \quad \begin{cases} \dot{x}_r = \dot{x}_0 + b \cos \phi \dot{\phi} \\ \dot{y}_r = \dot{y}_0 + b \sin \phi \dot{\phi} \end{cases}$$

O quadrado de cada uma das expressões é:

$$\begin{cases} \dot{x}_r^2 = \dot{x}_0^2 + b^2 \cos^2 \phi \dot{\phi}^2 + 2\dot{x}_0 b \cos \phi \dot{\phi} \\ \dot{y}_r^2 = \dot{y}_0^2 + b^2 \sin^2 \phi \dot{\phi}^2 + 2\dot{y}_0 b \sin \phi \dot{\phi} \end{cases}$$

e conseqüentemente

$$\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + b^2 \dot{\phi}^2 + 2b\dot{\phi}(\dot{x}_0 \cos \phi + \dot{y}_0 \sin \phi)$$

Finalmente a energia cinética linear, da roda direita vem:

$$T_{lin} = \frac{1}{2} m_w (\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2) = \frac{1}{2} m_w (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2} m_w (b^2 \dot{\phi}^2) + m_w b \dot{\phi} (\dot{x}_0 \cos \phi + \dot{y}_0 \sin \phi)$$

onde  $m_w$  é a massa de cada roda actuada (mais o rotor do seu motor).

*-Movimento Rotacional:*

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I_m \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_w \dot{\theta}_r^2$$

onde  $I_m$  é a inércia em torno de um eixo definido no plano da roda (perpendicular ao eixo da roda), e  $I_w$  é a inércia das rodas actuadas em torno do eixo das rodas.

*-Energia cinética total da roda direita:*

Para obter a energia cinética total da roda direita somam-se as energias referentes aos movimentos linear e rotacional desta roda, donde resulta

$$T_r = \frac{1}{2} m_w (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2} m_w (b^2 \dot{\phi}^2) + m_w b \dot{\phi} (\dot{x}_0 \cos \phi + \dot{y}_0 \sin \phi) + \frac{1}{2} I_m \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_w \dot{\theta}_r^2 \quad (4.27)$$

-Roda Esquerda:

*-Movimento linear:*

Considerando que  $(x_l, y_l)$  representa as coordenadas do centro da roda esquerda, e tendo em consideração a figura 3.8, obtém-se

$$\begin{cases} x_l = x_0 - b \sin \phi \\ y_l = y_0 + b \cos \phi \end{cases} \quad \text{derivando vem} \quad \begin{cases} \dot{x}_l = \dot{x}_0 - b \cos \phi \dot{\phi} \\ \dot{y}_l = \dot{y}_0 - b \sin \phi \dot{\phi} \end{cases}$$

O quadrado de cada uma das expressões é:

$$\begin{cases} \dot{x}_l^2 = \dot{x}_0^2 + b^2 \cos^2 \phi \dot{\phi}^2 - 2\dot{x}_0 b \cos \phi \dot{\phi} \\ \dot{y}_l^2 = \dot{y}_0^2 + b^2 \sin^2 \phi \dot{\phi}^2 - 2\dot{y}_0 b \sin \phi \dot{\phi} \end{cases}$$

e conseqüentemente

$$\dot{x}_l^2 + \dot{y}_l^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + b^2 \dot{\phi}^2 - 2b\dot{\phi}(\dot{x}_0 \cos \phi + \dot{y}_0 \sin \phi)$$

Finalmente a energia cinética linear, da roda esquerda vem:

$$T_{lin} = \frac{1}{2}m_w(\dot{x}_l^2 + \dot{y}_l^2) = \frac{1}{2}m_w(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2}m_w(b^2 \dot{\phi}^2) - m_w b \dot{\phi}(\dot{x}_0 \cos \phi + \dot{y}_0 \sin \phi)$$

*-Movimento Rotacional:*

$$T_{rot} = \frac{1}{2}I_m \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_w \dot{\theta}_l^2$$

*-Energia cinética total da roda esquerda:*

Para obter a energia cinética total da roda esquerda procede-se como para a roda direita, donde resulta

$$T_l = \frac{1}{2}m_w(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2}m_w(b^2 \dot{\phi}^2) - m_w b \dot{\phi}(\dot{x}_0 \cos \phi + \dot{y}_0 \sin \phi) + \frac{1}{2}I_m \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_w \dot{\theta}_l^2 \quad (4.28)$$

***-Energia cinética Global:*** Para obter a energia cinética total das rodas soma-se as contribuições de cada uma das rodas, i.e. adiciona-se (4.27) e (4.28):

$$T_R = T_r + T_l = \underbrace{\frac{1}{2}(2m_w)(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)}_{\mathbf{A}} + \underbrace{\frac{1}{2}(2m_w)(b^2 \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}(2I_m)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_w(\dot{\theta}_r^2 + \dot{\theta}_l^2)}_{\mathbf{B}} \quad (4.29)$$

Como se constata por observação da equação (4.29), o termo da equação identificado por “**A**”, está em função da velocidade em  $P_0$ . De modo a obter-se o resultado em função da velocidade em  $P_c$ , é

necessário aplicar a equação (4.25) à equação (4.29), nomeadamente ao termo identificado por “**A**”.

Assim, para o termo “**A**”, resulta:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(2m_w)(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2}(2m_w)d^2\dot{\phi}^2 + (2m_w)d\dot{\phi}(\dot{x}_c \sin \phi - \dot{y}_c \cos \phi) \quad (4.30)$$

De modo a obter a energia cinética global das rodas basta somar o resultado obtido para o termo “**A**” da equação (4.30) com o termo “**B**” da equação (4.29), obtém-se então:

$$T_R = \frac{1}{2}(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2)2m_w + \frac{1}{2}2m_w\dot{\phi}^2(d^2 + b^2) + 2m_w d\dot{\phi}(\dot{x}_c \sin \phi - \dot{y}_c \cos \phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 2I_m + \frac{1}{2}I_w(\dot{\theta}_r^2 + \dot{\theta}_l^2) \quad (4.31)$$

### 3. Energia cinética Total:

A energia total do robô obtém-se somando as energias cinéticas da plataforma e das rodas, ou seja as equações (4.26) e (4.31), donde resulta

$$T = T_P + T_R = \frac{1}{2}m_t(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 I + \frac{1}{2}I_w(\dot{\theta}_r^2 + \dot{\theta}_l^2) + m_t d\dot{\phi}(\dot{x}_c \sin \phi - \dot{y}_c \cos \phi)$$

$$\text{onde } m_t = m_c + 2m_w \quad \text{e} \quad I = m_c d^2 + 2m_w(b^2 + d^2) + I_c + 2I_m.$$

Assim, para este sistema o Lagrangiano é então:

$$L_{ge}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$$

$$L_{ge}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m_t(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_w(\dot{\theta}_r^2 + \dot{\theta}_l^2) + m_t d\dot{\phi}(\dot{x}_c \sin \phi - \dot{y}_c \cos \phi) - m_t g r \quad (4.32)$$

Sendo a energia potencial,  $V(q) = m_t g r$ , constante (pois considera-se que a altura do robô ao solo não varia) e dado que não depende de qualquer uma das coordenadas generalizadas, nos cálculos que se seguem (em que é usada a equação de Lagrange), a sua contribuição vai ser nula (i.e.  $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$ ).

Pela Equação de Lagrange (4.16), resulta:

- $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{x}_c} \right) - \frac{\partial L_{ge}}{\partial x_c} = 0$  , calculando as derivadas obtém-se:

$$\frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{x}_c} = m_t \dot{x}_c + m_t d \dot{\phi} \sin \phi ;$$

$$\frac{d}{dt} (m_t \dot{x}_c + m_t d \dot{\phi} \sin \phi) = m_t \ddot{x}_c + m_t d (\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi) ;$$

$$\frac{\partial L_{ge}}{\partial x_c} = 0, \text{ donde resulta, } m_t \ddot{x}_c + m_t d (\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi) = 0.$$

- $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{y}_c} \right) - \frac{\partial L_{ge}}{\partial y_c} = 0$  , calculando as derivadas:

$$\frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{y}_c} = m_t \dot{y}_c - m_t d \dot{\phi} \cos \phi ;$$

$$\frac{d}{dt} (m_t \dot{y}_c - m_t d \dot{\phi} \cos \phi) = m_t \ddot{y}_c - m_t d (\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi) ;$$

$$\frac{\partial L_{ge}}{\partial y_c} = 0, \text{ obtém-se, } m_t \ddot{y}_c - m_t d (\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi) = 0.$$

- $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L_{ge}}{\partial \phi} = 0$  , calculando as derivadas:

$$\frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{\phi}} = I \dot{\phi} + m_t d (\dot{x}_c \sin \phi - \dot{y}_c \cos \phi) ;$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{\phi}} \right) = I \ddot{\phi} + m_t d (-\ddot{y}_c \cos \phi + \ddot{y}_c \sin \phi + \ddot{x}_c \sin \phi + \dot{x}_c \cos \phi \dot{\phi}) ;$$

$$\frac{\partial L_{ge}}{\partial \phi} = m_t d \dot{\phi} (\dot{y}_c \sin \phi + \dot{x}_c \cos \phi) ;$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L_{ge}}{\partial \phi} = I \ddot{\phi} - m_t d \ddot{y}_c \cos \phi + m_t d \ddot{x}_c \sin \phi,$$

$$\text{obtém-se, } I \ddot{\phi} - m_t d \ddot{y}_c \cos \phi + m_t d \ddot{x}_c \sin \phi = 0.$$

- $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{\theta}_r} \right) - \frac{\partial L_{ge}}{\partial \theta_r} = \tau_r$  , calculando as derivadas:  
 $\frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{\theta}_r} = I_w \dot{\theta}_r$  ;  $\frac{d}{dt} (I_w \dot{\theta}_r) = I_w \ddot{\theta}_r$  ;  $\frac{\partial L_{ge}}{\partial \theta_r} = 0$ , então:  $I_w \ddot{\theta}_r = \tau_r$ .
- $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{\theta}_l} \right) - \frac{\partial L_{ge}}{\partial \theta_l} = \tau_l$  , utilizando o raciocínio anterior:  $I_w \ddot{\theta}_l = \tau_l$ .

As equações dinâmicas vêm então:

$$\begin{cases} m_t \ddot{x}_c + m_t d (\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi) = 0 \\ m_t \ddot{y}_c - m_t d (\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi) = 0 \\ I \ddot{\phi} - m_t d \ddot{y}_c \cos \phi + m_t d \ddot{x}_c \sin \phi = 0 \\ I_w \ddot{\theta}_r = \tau_r \\ I_w \ddot{\theta}_l = \tau_l \end{cases}$$

onde  $\tau_r$  e  $\tau_l$  são os binários das rodas direita e esquerda, respectivamente. Quando se considera as forças de restrição (utilizando multiplicadores de Lagrange) a equação dinâmica é a seguinte:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L_{ge}}{\partial q} + A^T(q) \lambda = F_i \quad (4.33)$$

onde  $F_i$  representa as forças generalizadas (forças e binários) e  $\lambda$  as forças de restrição. Como neste caso existem 3 restrições, para  $A^T(q) \lambda$ , vem:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} -\sin \phi & -\cos \phi & -\cos \phi \\ \cos \phi & -\sin \phi & -\sin \phi \\ -d & -b & b \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}}^{A^T(q)} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\lambda_1 \sin \phi - \cos \phi (\lambda_2 + \lambda_3) \\ \lambda_1 \cos \phi - \sin \phi (\lambda_2 + \lambda_3) \\ -d \lambda_1 + b (\lambda_3 - \lambda_2) \\ \lambda_2 r \\ \lambda_3 r \end{bmatrix}}^{A^T(q) \lambda}$$

Finalmente, as equações dinâmicas (considerando as forças de restrição) são então:

$$\begin{cases} m_t \ddot{x}_c + m_t d (\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi) - \lambda_1 \sin \phi - \cos \phi (\lambda_2 + \lambda_3) = 0 \\ m_t \ddot{y}_c - m_t d (\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi) + \lambda_1 \cos \phi - \sin \phi (\lambda_2 + \lambda_3) = 0 \\ I \ddot{\phi} - m_t d \ddot{y}_c \cos \phi + m_t d \ddot{x}_c \sin \phi - d \lambda_1 + b (\lambda_3 - \lambda_2) = 0 \\ I_w \ddot{\theta}_r + \lambda_2 r = \tau_r \\ I_w \ddot{\theta}_l + \lambda_3 r = \tau_l \end{cases}$$

Na forma matricial, o sistema vem

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = B(q)\tau - A^T(q)\lambda \quad (4.34)$$

onde

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_t & 0 & m_t d \sin \phi & 0 & 0 \\ 0 & m_t & -m_t d \cos \phi & 0 & 0 \\ m_t d \sin \phi & -m_t d \cos \phi & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_w \end{bmatrix}, \quad \ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta}_r \\ \ddot{\theta}_l \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} m_t d \dot{\phi} \cos \phi \\ m_t d \dot{\phi} \sin \phi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix}, \quad B(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix}$$

sendo,  $M(q) \in R^{n \times n}$  a matriz inercial,  $C(q, \dot{q}) \in R^{n \times n}$  a matriz das forças centrípetas e de coriolis,  $B(q) \in R^{n \times (n-m)}$  a matriz de transformação de entrada,  $A^T(q)$  uma matriz Jacobiana,  $\tau \in R^{(n-m)}$  o vector de entrada, e  $\lambda \in R^m$  o vector das forças de restrição.

No apêndice B são apresentados outros exemplos de cálculo das equações dinâmicas de WMRs, para o caso em que o centro de massa é colocado em posição diferente da utilizada no robô em estudo, e para o caso em que os cálculos são realizados em relação a  $P_0$  em vez de  $P_c$ .

## 4.4 Representação em Espaço de Estados

Considera-se agora o sistema mecânico dado por (4.21) e (4.34), e que  $k$  das  $m$  restrições sejam holónomas. Como a velocidade restringida ( $\dot{q}$ ) está sempre no espaço nulo de  $A(q)$ ,  $n - m$  velocidades  $\nu(t) = [\nu_1 \ \nu_2 \ \dots \ \nu_{n-m}]^T$  podem ser definidas de tal modo que para todo o  $t$  [199]:

$$\dot{q} = S(q)\nu(t). \quad (4.35)$$

A equação anterior representa a cinemática de um sistema mecânico (neste caso de um WMR), onde  $S(q)$  (equação 3.84) é basicamente uma matriz Jacobiana que converte velocidades entre sistemas de coordenadas.

Derivando a equação (4.35) em relação a  $t$ , após substituir o resultado ( $\ddot{q}$ ) na equação (4.34), e finalmente multiplicando o resultado por  $S^T$ , consegue-se eliminar a matriz de restrição  $A^T(q)\lambda$ , vem então:

$$S^T M S \dot{\nu} + S^T (M \dot{S} + C S) \nu = S^T B \tau \quad (4.36)$$

tendo em consideração que  $S^T A^T \lambda = 0$ , uma vez que a matriz  $S$  gera  $\mathcal{N}(A)$ , dado que as duas colunas de  $S(q)$  estão no espaço nulo de  $A(q)$  e são linearmente independentes, é possível exprimir  $\dot{q}$  como uma combinação linear de  $s_1(q)$  e  $s_2(q)$ , isto é,  $\dot{q} = \nu_1 s_1(q) + \nu_2 s_2(q)$ .

Neste caso, devido à escolha de  $S(q)$ , as velocidades generalizadas,  $\nu$ , vêm  $\nu = [\nu_1 \ \nu_2]^T = [\dot{\theta}_r \ \dot{\theta}_l]^T$ .

Assim, considera-se o seguinte vector de estado

$$x = \begin{bmatrix} q \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c & y_c & \phi & \theta_r & \theta_l & \dot{\theta}_r & \dot{\theta}_l \end{bmatrix}^T \quad (4.37)$$

e baseado nas equações (4.35) e (4.36) a equação de estado do sistema é obtida:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} S \nu \\ f_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (S^T M S)^{-1} S^T B \end{bmatrix} \tau \quad (4.38)$$

onde  $f_2 = (S^T M S)^{-1} S^T (-M \dot{S} - C S) \nu$ . Assumindo<sup>4</sup> que o número de entradas do sistema é maior ou igual à diferença entre o número de coordenadas generalizadas e o número de restrições independentes do sistema mecânico ( $r_a \geq n - m$ ), e que  $(S^T M S)^{-1} S^T B$  tem característica  $n - m$ , a seguinte realimentação não-linear pode ser aplicada [161]:

$$\tau = \left( (S^T M S)^{-1} S^T B \right)^+ (u - f_2) \quad (4.39)$$

onde  $(.)^+$  denota uma inversa generalizada<sup>5</sup> de  $(.)$ . A equação de estado

<sup>4</sup>É possível fazer esta suposição visto que usualmente os sistemas robóticos controlados por computador são projectados de modo a que todos os graus de liberdade sejam controlados por actuadores.

<sup>5</sup>É conveniente usar a inversa generalizada para resolver o problema de alguma redundância, caso exista [198].



(4.38) pode ser reescrita na forma:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4.40)$$

onde

$$f(x) = \begin{bmatrix} S(q)\nu(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

## 4.5 Conclusões

Neste capítulo foi abordado o tema da dinâmica de robôs móveis, dando particular ênfase ao robô diferencial (neste caso, uma cadeira de rodas robotizada). Ao longo do capítulo foram abordados vários temas necessários à compreensão da dinâmica dos WMRs, nomeadamente a formulação de Lagrange, a classificação de sistemas não-holónomos (onde foi determinado o grau de holonomia do robô em estudo), e a dedução do modelo dinâmico do robô recorrendo ao Lagrangiano e às equações de Lagrange. Finalmente, após obtenção do modelo dinâmico, e juntamente com o modelo cinemático (obtido no capítulo anterior), foi possível determinar a representação em espaço de estados do sistema mecânico em estudo. É de notar que esta representação em espaço de estados é fundamental para o controlo do robô.

A dinâmica de robôs móveis é bastante importante no controlo de trajectórias em robótica móvel. O desafio com que se depara no controlo de trajectórias, prende-se com o facto de um WMR diferencial ser apenas actuado por duas entradas de controlo (directamente relacionadas com as velocidades das rodas/robô). Além desta dificuldade, acresce que os robôs móveis têm uma mobilidade restrita, traduzida em restrições não-holónomas. Por isso um bom modelo dinâmico é fundamental na caracterização do robô, com vista a um bom desempenho ao nível do seu controlo.

Dado que as rodas motrizes são as únicas que estão ligadas a motores, logo que podem influenciar directamente a velocidade, desprezam-se, na obtenção do modelo dinâmico, as rodas tipo “castor”, tendo estas como função unicamente manter o equilíbrio do robô. Além disso, as rodas tipo “castor” permitem três graus de liberdade, não impondo portanto nenhuma restrição cinemática ao movimento do robô móvel. No entanto, o sistema de controlo deve ser suficientemente robusto para minimizar as perturbações ao movimento causadas pela existência destas rodas, cujo efeito é particularmente sensível em mudanças não suaves de direcção e/ou de sentido.

O facto de se proceder ao estudo dinâmico, vai permitir ter modelos de simulação mais realistas, e permitir o estudo e ajuste dos controladores em ambiente simulado sem ser necessário recorrer constantemente ao protótipo. Por outro lado, a inclusão do modelo dinâmico na malha de controlo, e não apenas do modelo cinemático, vai permitir a obtenção de controladores mais robustos. Assim, com mais precisão e com melhor desempenho é de esperar que estes controladores conduzam a melhores sistemas de controlo.

# Capítulo 5

## Linearização por Realimentação

Neste capítulo considera-se o problema da obtenção de uma representação linear do sistema, aplicando-se para tal, uma transformação não linear de estado. Uma descrição mais detalhada desta teoria pode ser encontrada em [137, 174, 95, 123, 108]. Em seguida será apresentada uma breve introdução ao tema, dando ênfase à linearização entrada-saída.

Considere-se o seguinte sistema não-linear de entrada-única, saída-única:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde  $x \in R^n$  representa o vector estado,  $u \in R$  é a entrada de controlo e  $y \in R$  é a saída.  $f$  e  $g$  são campos de vectores (a partir daqui designados por funções),  $h$  é uma função. Todas as funções são não-lineares e assume-se que são diferenciáveis.

No problema de linearização por realimentação entrada-saída a questão é encontrar, caso exista, uma lei de controlo de realimentação de estado

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

e uma transformação de variáveis de estado<sup>1</sup>

$$z = T(x)\tag{5.2}$$

---

<sup>1</sup>Aqui  $z$ , representa o vector de estado transformado, não confundir com o eixo de coordenadas  $z$ , previamente designado pela mesma letra.

que transforme o sistema não-linear num sistema linear equivalente. A variável  $v$  é a nova entrada externa,  $z_i$  são as novas variáveis de estado,  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  são funções algébricas escalares com  $\beta(x) \neq 0$ .

A matriz de transformação  $T(x)$  deve ser invertível, de modo a que  $x = T^{-1}(z)$  seja possível, e uma vez que as derivadas de  $z$  e  $x$  devem ser contínuas, então tanto  $T(\cdot)$  como  $T^{-1}(\cdot)$  devem ser continuamente diferenciáveis. Um *mapeamento* continuamente diferenciável com uma inversa continuamente diferenciável é designado por *difeomorfismo*.

Pretende-se agora analisar de que forma a linearização (exacta) por realimentação pode ser aplicada ao problema do controlo de WMRs, de modo a obter um modelo linear mais simples de controlar.

Os sistemas não-holónomos têm propriedades únicas. Assim, Campion [39] estabeleceu que o sistema (4.40) é controlável se todas as suas restrições forem não-holónomas, e o seu ponto de equilíbrio  $x = 0$ , pode ser tornado estável segundo Lyapunov mas não pode ser tornado assintoticamente estável por meio de uma realimentação de estado *suave* (ver algumas destas definições no Apêndice A).

Duas situações devem ser distinguidas: 1)- quando  $\rho = n$ , ( $\rho$ , representa graus relativos) está-se em presença de uma linearização entrada-estado e as equações de estado e de saída representam um sistema linear; 2)- quando  $\rho < n$ , verifica-se uma linearização entrada-saída, e algumas variáveis de estado vão apresentar uma dinâmica não-linear.

A seguinte propriedade do sistema (4.40) foi estabelecida em [199]:

**Teorema 1.** *O sistema (4.40) não é linearizável entrada-estado por uma realimentação de estado se uma ou mais restrições forem não holónomas.*

Foi provado no capítulo 4 que o sistema tem duas restrições não holónomas. Pode-se, então, afirmar, que um sistema com restrições não-holónomas não é linearizável por entrada-estado, e pode ser linearizável por entrada-saída se for escolhido um conjunto apropriado de equações de saída [199][161]. É importante salientar que na linearização entrada-estado a equação de estado é completamente linearizada, enquanto na linearização entrada-saída, onde o mapeamento de entrada-saída é linearizado, a equação de estado poderá apenas ser linearizada parcialmente.

## 5.1 Linearização por Entrada-Saída

Uma das condições para a aplicação dos métodos de linearização por realimentação é o conhecimento do *grau relativo*,  $\rho$ . O grau relativo de um sistema é a menor ordem das derivadas de saída,  $y$ , que depende explicitamente da entrada,  $u$ .

Assim, por diferenciação de (5.1), é obtido

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h}{\partial x} [f(x) + g(x)u] \stackrel{def}{=} L_f h(x) + L_g h(x)u ,$$

onde

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x)$$

é por definição a derivada de Lie da função escalar  $h(x)$  em relação à função vector  $f(x)$  ou ao longo de  $f(x)$ . Esta é a noção comum de derivada de  $h$  ao longo da trajetória do sistema  $\dot{x} = f(x)$ . Para continuar o cálculo do grau relativo é necessário conhecer as seguintes expressões de álgebra de Lie [48]:

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial (L_f h)}{\partial x} g(x)$$

$$L_f^2 h(x) = L_f L_f h(x) = \frac{\partial (L_f h)}{\partial x} f(x)$$

$$L_f^k h(x) = L_f L_f^{k-1} h(x) = \frac{\partial (L_f^{k-1} h)}{\partial x} f(x).$$

$$L_f^0 h(x) = h(x).$$

Se  $L_g h(x) \neq 0$ , então  $\rho = 1$ . Se  $L_g h(x) = 0$ , então  $\dot{y} = L_f h(x)$  é independente de  $u$ . Calculando a segunda derivada de  $y$ , representada por  $y^{(2)}$ , vem:

$$y^{(2)} = \frac{\partial (L_f h)}{\partial x} [f(x) + g(x)u] = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u$$

Uma vez mais, se  $L_g L_f h(x) \neq 0$ , então  $\rho = 2$ . Se  $L_g L_f h(x) = 0$  então  $y^{(2)} = L_f^2 h(x)$  é independente de  $u$ . Prosseguindo o cálculo das derivadas de  $y$ , a definição de *grau relativo*,  $\rho$ , é obtida desde que,  $h(x)$  satisfaça

$$\begin{aligned} L_g L_f^{i-1} h(x) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, r-1 \\ L_g L_f^{r-1} h(x) &\neq 0 \end{aligned}$$

então  $u$  não aparece nas equações de  $y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}$ , mas aparece com um coeficiente diferente de zero na equação de  $y^{(r)}$ , i.e.  $\rho = r$ , e

$$y^{(\rho)} = L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x) u. \quad (5.3)$$

A equação anterior mostra que o sistema é linearizável por entrada-saída e é descrito pela equação

$$y^{(\rho)} = v, \quad (5.4)$$

se a seguinte lei de controlo for escolhida

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} [v - L_f^\rho h(x)].$$

De (5.4) pode-se concluir que o sistema linearizado resultante, isto é, um sistema com entrada  $v$  e saída  $y$ , é uma cadeia de  $\rho$  integradores.

Uma característica importante do método de linearização por realimentação entrada-saída é o facto de decompor a dinâmica de um sistema não-linear numa parte externa e numa parte interna. Uma vez que a parte externa consiste numa relação linear entre  $y$  e  $v$  (ou de modo equivalente a forma canónica de controlabilidade entre  $y$  e  $u$  [174]), é fácil projectar a entrada  $v$  de modo a que a saída  $y$  se comporte como desejado. Então, a questão que se coloca é saber se a dinâmica interna se vai comportar de modo satisfatório, isto é, se os estados internos se vão manter dentro de certos limites. Uma vez que o projecto de controlo deve ter em consideração a dinâmica global (e portanto não pode tolerar a instabilidade da dinâmica interna), o comportamento interno deve ser cuidadosamente abordado. O problema da instabilidade é normalmente ultrapassado através da utilização da dinâmica zero do sistema. A dinâmica zero pode ser obtida considerando que as entradas e as condições iniciais do sistema são escolhidas de modo a permitir que a saída do sistema seja nula (i.e. identicamente *zero*) [48].

A linearização por entrada-saída, tem como base a aplicação da transformação (5.2), que permite que o sistema transformado seja apresentado

como:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{\rho-1} &= z_\rho \\
 \dot{z}_\rho &= v \\
 \dot{z}_{\rho+1} &= q_{\rho+1}(z) \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_n &= q_n(z)
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$y = z_1$$

onde

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \\ \vdots \\ T_\rho(x) \\ \hline T_{\rho+1}(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1} h(x) \\ \hline T_{\rho+1}(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

A partir da equação (5.5) verifica-se que as últimas  $n - \rho$  equações não são observáveis por intermédio da *saída*, tornando-se no entanto necessário garantir que estas sejam estáveis. As funções  $T_{\rho+1}(x), \dots, T_n(x)$  podem ser escolhidas arbitrariamente, desde que seja garantido que  $T(x)$  é um difeomorfismo. Em particular, baseado em (5.5), é possível obter funções  $T_{\rho+1}(x), \dots, T_n(x)$ , de modo que as últimas  $n - \rho$  equações sejam independentes da entrada  $u$ . De (5.5) pode verificar-se que as primeiras  $\rho$  equações exibem um comportamento entrada-saída de um *integrador* de ordem  $\rho$  (tal como apresentado anteriormente no estudo dos graus relativos).

De modo a ilustrar a aplicação do método de linearização por entrada-saída, considera-se que as equações de saída são apenas função da variável de estado de posição,  $q$ , (ver (4.37)). Uma vez que o número de graus de liberdade do sistema é instantaneamente  $n - m$ , pode-se ter neste caso, no máximo  $n - m$  equações de saída independentes:

$$y = h(q) = [h_1(q) \ \dots \ h_{n-m}(q)] .$$

Assim, para determinar o grau relativo, é necessário derivar em ordem ao tempo a saída,  $y$ , até que apareça explicitamente a entrada  $u$ . Supondo que  $u$  aparece, pela primeira vez, na segunda derivada de  $y$ , pode-se concluir que o grau relativo do sistema é  $\rho = 2$ . Logo, a transformação (5.2) permite representar o sistema (5.6) na forma

$$z = T(x) = T(q) = \begin{bmatrix} h(q) \\ L_f h(q) \\ \vdots \\ T_n(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(q) \\ \frac{\partial h}{\partial q} \dot{q} \\ \vdots \\ T_n(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(q) \\ \Phi_d(q)\nu \\ \vdots \\ T_n(q) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

onde  $\dot{q} = S(q)\nu(t)$ ,  $\Phi_d(q) = J_h(q)S(q)$  é a matriz de desacoplamento, e  $J_h = \frac{\partial h}{\partial q} \in R^{(n-m) \times n}$  é a matriz Jacobiana.

Note-se que as funções  $T_3(q), \dots, T_n(q)$  não foram ainda definidas. Então, neste momento a questão é analisar a dinâmica interna do sistema.

Como se referiu anteriormente, a dinâmica interna é a dinâmica não observável do sistema (5.5). Para se distinguir a dinâmica controlável e observável da dinâmica não-observável, é comum usar-se a seguinte notação (ver (5.6)):

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix},$$

onde

$$\xi = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_\rho \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} z_{\rho+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

Conseqüentemente, o sistema (5.5) é decomposto em duas partes, sendo  $\xi$  a parte da dinâmica observável e  $\eta$  a parte da dinâmica não-observável.



É obtida assim, a chamada *forma normal* do sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\rho-1} \\ \dot{\xi}_\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_\rho \\ a(\xi, \eta) + b(\xi, \eta)u \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\eta}_{n-\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1(\xi, \eta) \\ \vdots \\ q_{n-\rho}(\xi, \eta) \end{bmatrix}$$

$$y = \xi_1$$

onde

$$\begin{aligned} a(\xi, \eta) &= L_f^\rho h(x) \\ b(\xi, \eta) &= L_g L_f^{\rho-1} h(x) \\ q_i(\xi, \eta) &= L_f \eta_i(x) \quad 1 \leq i \leq n - \rho \end{aligned}$$

Neste momento, já é conhecida a transformação de estado, que lineariza parcialmente o sistema, e a lei de controlo. No entanto, é ainda necessário determinar os elementos do vector  $\eta$ :

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{n-\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{\rho+1}(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_3(q) \\ \vdots \\ T_n(q) \end{bmatrix}$$

Sabendo que

$$\dot{\eta}_i = \frac{\partial T_j}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial T_j}{\partial x} (f(x) + g(x)u) = L_f T_j(x) + L_g T_j(x) u, \quad j = \rho+1, \dots, n$$

e de modo a que  $\eta$  não dependa explicitamente de  $u$ , as funções  $T_j$  são escolhidas de modo a verificar

$$L_g T_j = \frac{\partial T_j}{\partial x} g(x) = 0. \quad (5.9)$$

O teorema de Frobenius [95] garante a existência de  $n - 2$  soluções independentes  $T_3, \dots, T_n$  se a distribuição  $\Delta(x) = \text{span}\{g(x)\}$  for involutiva, o que é verdade, uma vez que  $g(x)$  é constante<sup>2</sup> (ver equação (4.40)).

<sup>2</sup>Note que campos de vectores constantes são sempre involutivos. De facto o parêntesis de Lie de dois vectores constantes é simplesmente o vector zero [174].

Para demonstrar que o sistema não-linear representado pelas equações (4.40) e (5.1) pode de facto ser transformado na *forma normal* (5.8), tem de ser provado, não só que tal transformação de coordenadas existe, mas também que é uma transformação de estado “verdadeira”. Por outras palavras, tem de ser mostrado que se pode “construir” um difeomorfismo

$$T(x) = [\xi_1 \dots \xi_\rho \quad \eta_1 \dots \eta_{n-\rho}]^T$$

de modo a que (5.8) seja verificada. Para saber se  $T(x)$  é um difeomorfismo, é suficiente verificar se os seus Jacobianos são invertíveis (i.e. se têm inversa). É então necessário mostrar que existem  $n - \rho$  funções de  $\eta_i$ , que são fundamentais para completar a transformação de coordenadas.

Do ponto de vista prático, encontrar explicitamente o campo de vectores  $\eta$ , necessário para completar a transformação na *forma normal*, obriga a resolver o conjunto das equações diferenciais parciais em  $\eta_i$ , como indicado na equação (5.9).

Considerando-se de novo as suposições atrás referidas (i.e.  $y$  é apenas função da variável de estado  $q$ , e  $\rho = 2$ ) pode-se agora completar a equação (5.7), como a seguir se explica.

Considerando o sistema não-linear (4.40)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\nu} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} S(q)\nu(t) \\ 0 \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}}_{g(x)} u$$

pode-se escrever a equação (5.7) na *forma normal* (5.8).

Primeiro, é óbvio que

$$\begin{aligned} \xi_1 &= h(q) \\ \xi_2 &= L_f h(q) = \Phi_d(q)\nu \end{aligned}$$

Segundo, considerando apenas a variável de estado  $q$ , o sistema não-linear (4.40) satisfaz a equação (5.9), uma vez que

$$L_g T_j = \frac{\partial T_j}{\partial q} g(q) = \frac{\partial T_j}{\partial q_1} \cdot 0 + \dots + \frac{\partial T_j}{\partial q_n} \cdot 0 = 0, \quad \forall j = \rho + 1, \dots, n.$$

Como o resultado desta equação é sempre zero, pode-se escolher uma expressão arbitrária para  $T_j$  (ou  $\eta_i$ ) que satisfaça (confirme) o difeomorfis-

mo. Assim, escolhendo a solução  $\eta_i = \tilde{h}_i \quad \forall \quad i = \rho + 1, \dots, n$ , a equação (5.7) pode ser reescrita como:

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} h(q) \\ L_f h(q) \\ \hline \tilde{h}_1(q) \\ \vdots \\ \tilde{h}_{n-\rho}(q) \end{bmatrix},$$

considerando que  $m = n - \rho$ , pode-se simplificar a equação para

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(q) \\ L_f h(q) \\ \hline \tilde{h}(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(q) \\ \Phi_d(q) \nu \\ \hline \tilde{h}(q) \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

onde  $\tilde{h}(q) \in R^m$  é uma função vectorial tal que a matriz  $\begin{bmatrix} J_h^T & J_{\tilde{h}}^T \end{bmatrix}$  tenha característica completa (i.e. seja regular).

Considerando que  $T(x)$  é um difeomorfismo, o sistema sob a nova variável de estado  $z$  é caracterizado por [161],[48],[137]

$$\dot{z}_1 = \dot{\xi}_1 = \frac{\partial h}{\partial q} \dot{q} = z_2 \quad (5.11)$$

$$\dot{z}_2 = \dot{\xi}_2 = \dot{\Phi}_d(q) \nu + \Phi_d(q) u = v \quad (5.12)$$

$$\dot{z}_3 = \dot{\eta} = J_{\tilde{h}} S \nu = J_{\tilde{h}} S (J_h S)^{-1} z_2 \quad (5.13)$$

A demonstração da obtenção das equações (5.11)-(5.13) encontra-se no apêndice C.

A condição necessária e suficiente para se proceder à linearização por entrada-saída é que a matriz de desacoplamento,  $\Phi_d(x)$ , tenha característica completa [137].  $\Phi_d(x)$  pode ser obtida no momento em que são calculadas as derivadas (em ordem ao tempo) de  $y$ , como é descrito na secção 5.2.  $\Phi_d(x)$  é não-singular se as linhas de  $J_h$  forem independentes das linhas de  $A(q)$ .

De (5.12) determina-se a realimentação de estado

$$u = \Phi_d^{-1}(q) \left( v - \dot{\Phi}_d(q) \nu \right) \quad (5.14)$$

que conduz à linearização e ao desacoplamento por entrada-saída, tendo em consideração apenas a parte observável do sistema:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \dot{\xi}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 &= \dot{\xi}_2 = v \\ y &= h(q) = z_1 .\end{aligned}$$

A dinâmica interna associada com a linearização entrada-saída corresponde às  $(n-\rho)$  últimas equações  $\dot{\eta} = q(\xi, \eta)$  na forma normal (5.8). Geralmente, esta dinâmica depende dos estados de saída  $\xi$ . No entanto, pode ser definida uma propriedade intrínseca do sistema não-linear, considerando a sua dinâmica interna, quando a entrada de controlo é tal que a saída  $y$  é mantida a zero. O estudo desta, assim chamada, *dinâmica-zero*, vai permitir obter algumas conclusões sobre a estabilidade da dinâmica interna.

O facto de se obrigar a que a saída  $y$  seja identicamente zero, implica que todas as suas derivadas em ordem ao tempo sejam também zero. Assim, a dinâmica interna do sistema, ou dinâmica zero, descreve o movimento restringido à superfície (*variedade*<sup>3</sup>) ‘suave’ de dimensão- $(n-\rho)$ ,  $M_0$ , definida por  $\xi = 0$ . De modo a que o sistema funcione (opere) em dinâmica-zero, i.e. que tenha o estado  $X$  na superfície  $M_0$ , o estado inicial do sistema  $X(0)$  tem de estar na superfície, e além disso a entrada  $u$  deve ser tal que  $y$  se mantenha a zero [174],

$$y^{(\rho)}(t) = 0 . \quad (5.15)$$

Substituindo (5.15) em (5.3), pode-se concluir que  $u$  deve adoptar a expressão

$$u_0(x) = -\frac{L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} .$$

Utilizando esta entrada, e assumindo que, de facto, o estado inicial do sistema está na superfície, i.e. que  $\xi = 0$ , a dinâmica do sistema pode ser simplesmente escrita na forma normal como

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= 0 \\ \dot{\eta} &= q(0, \eta) .\end{aligned} \quad (5.16)$$

Por definição, (5.16) é a *dinâmica-zero* do sistema não-linear constituído pelas equações (4.40) e (5.1) [174].

<sup>3</sup>Tradução da palavra inglesa “manifold”.

Finalmente, para o sistema constituído pelas equações (5.11)-(5.13) e por aplicação da definição (5.16), (i.e. substituindo  $z_1 = 0$  e  $z_2 = 0$ ), resulta para a dinâmica zero do sistema

$$\dot{z}_3 = J_{\tilde{h}} S (J_h S)^{-1} \underbrace{z_2}_0 \rightarrow \dot{z}_3 = 0$$

que é estável segundo Lyapunov mas não assintoticamente estável. Isto significa apenas que o WMR não se move se o ponto de referência ( $P_l$ ) se mantiver quieto. É então necessário saber o que acontece com a dinâmica interna quando o ponto de referência (e logo o WMR) está em movimento, mais especificamente quando se move em frente ou em marcha-atrás. Este assunto foi estudado em detalhe por Yun [200], tendo provado que para um WMR com duas rodas motrizes (actuadas) diferenciais (similar à cadeira de rodas robotizada) a dinâmica interna do veículo é estável quando se move em frente, e instável quando se move em marcha-atrás durante um percurso longo.

Baseado no estudo de Yun [200] e para a especificidade da cadeira de rodas, cujo movimento é normalmente em frente sendo escassos e curtos os movimentos em marcha-atrás, pode-se concluir que a dinâmica interna do sistema tem um comportamento estável.

## 5.2 Equações de saída

As variáveis de saída, ao contrário das equações de estado que são unicamente determinadas tendo em consideração as características dinâmicas do sistema, são escolhidas de tal modo que as tarefas a serem realizadas pelo sistema dinâmico possam ser convenientemente especificadas, tornando assim, mais fácil o projecto do controlador.

Uma vez que o sistema tem duas entradas, podem ser escolhidas quaisquer duas variáveis de saída, entre as quais, e.g.: 1)  $y = h(q) = [x_l \ y_l]^T$ ; 2)  $y = h(q) = [y_l \ \phi]^T$ ; 3)  $y = h(q) = [x_l \ \phi]^T$ ; 4)  $y = h(x) = [h_1(q) \ h_2(\nu)]^T$ . É notório que as três primeiras opções correspondem a algoritmos de “seguimento de trajectória” e a quarta opção corresponde a um algoritmo de controlo de “seguimento de caminho”. Algoritmos de seguimento de trajectória foram já bem estudados [8, 157, 161], tendo-se verificado que podem ser essenciais em situações onde o veículo deve seguir, por exemplo, uma

curva em coordenadas de espaço-tempo, ou seja, deve atingir um ponto particular no espaço num dado período de tempo (é de notar que neste tipo de algoritmo as equações de saída são unicamente função da variável de estado de posição,  $q$ ). Por sua vez, o seguimento de caminho [161] demonstra ser mais adequado para a aplicação no controlo da cadeira de rodas robotizada, devido ao facto de ser uma estratégia de controlo mais realística onde o robô necessita de seguir um caminho geométrico com uma velocidade desejada, não existindo grandes variações bruscas de velocidades ao longo do percurso.

### 5.2.1 Seguimento de Caminho

Se se pretender analisar o seguimento de caminho de um robô móvel, as duas condições mais importantes são: seguir o caminho com o menor erro possível, e com uma dada velocidade desejada. Assim, é necessário escolher uma equação de saída que tenha duas variáveis: 1- a menor distância desde o ponto de referência no robô móvel ao caminho desejado, e 2- a velocidade longitudinal.

Consequentemente, para se obter o seguimento de caminho é necessário escolher uma equação de saída com duas variáveis apropriadas  $h_1$  e  $h_2$ .  $h_1$  é definida como sendo a menor distância do ponto de referência (i.e.  $P_l$  na figura 3.8), do robô móvel, ao caminho desejado, e  $h_2$  é definido como a velocidade longitudinal (de  $P_l$  ao longo do eixo dos X), resultando o vector de saída

$$y = h(x) = [ h_1(q) \quad h_2(\nu) ]^T .$$

Neste estudo consideraram-se caminhos constituídos apenas por arcos circulares e linhas rectas. Dubins [63], e mais tarde Reeds e Sheep [153], provaram que entre quaisquer dois pontos existe uma família de caminhos composta apenas por segmentos de linhas rectas e de arcos circulares, se a posição inicial e final, e também a orientação (do robô) forem dadas.

Considerando os trabalhos de Dubins, Reeds e Sheep e mais recentemente os de Bui [38], Scheuer [163, 164], Fraichard [73, 74], pode-se dizer que qualquer caminho pode ser dividido em segmentos de linhas rectas e de arcos circulares. Portanto, se for possível controlar os WMR nestes caminhos básicos ou em caminhos contínuos constituídos por ‘partes’ destes dois, é efectivamente possível o movimento de qualquer posição e orientação para qualquer outra posição e orientação. Logo, neste estudo consideram-se os dois caminhos básicos: arcos circulares e linhas rectas. A expressão da

distância do ponto  $(x_l, y_l)$  ao caminho é facilmente obtida, para ambos os casos.

Considere-se um caminho circular. Seja  $R$  o raio do caminho circular, e seja  $P_g$  o seu centro, cujas coordenadas são designadas por  $(x_g, y_g)$  no referencial inercial (i.e. o sistema de coordenadas do mundo), então  $h_1$  e  $h_2$  podem ser escolhidas como se segue:

$$h_1(q) = h_1(x_c, y_c, \phi) = \sqrt{(x_l - x_g)^2 + (y_l - y_g)^2} - R \quad (5.17)$$

$$h_2(\nu) = \dot{x}_c \cos \phi + \dot{y}_c \sin \phi = \frac{r}{2}(\nu_1 + \nu_2). \quad (5.18)$$

É importante não esquecer que a menor distância do ponto  $P_l$  ao caminho circular é o valor absoluto de  $h_1$ , e que  $x_l$  e  $y_l$  se relacionam com as variáveis de estado,  $x_c$ ,  $y_c$  e  $\phi$ , pelas equações:

$$x_l = x_c + L_a \cos \phi; \quad y_l = y_c + L_a \sin \phi.$$

Considere-se agora um caminho em linha recta descrito por  $Ax + By + C = 0$ . Neste caso

$$h_1(q) = h_1(x_c, y_c, \phi) = \frac{Ax_l + By_l + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (5.19)$$

A menor distância do ponto  $P_l$  ao caminho, é uma vez mais, o valor absoluto de  $h_1$ . O segundo componente da equação de saída,  $h_2$ , é o mesmo que para o caminho circular.

Após obter  $h_1$  e  $h_2$ , o passo seguinte é realizar a linearização entrada-saída do sistema. Assumindo que  $y(x) = [h_1(q) \quad h_2(\nu)]^T$ , é necessário obter os graus relativos separadamente para  $h_1(q)$  e  $h_2(\nu)$ , de modo a ser obtida para cada um deles a nova variável de entrada externa  $v$ . Portanto, cada um dos elementos de  $y(x)$  é diferenciado até que dependa explicitamente da entrada  $u$ . Como tal, a primeira derivada de  $y_1$  produz:

$$\dot{y}_1 = \frac{\partial h_1}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h_1}{\partial x} [f(x) + g(x)u] = L_f h(x) + L_g h(x)u. \quad (5.20)$$

Constata-se a necessidade de aplicar a álgebra de Lie para calcular  $L_f h(x)$  em (5.20). Uma vez que  $h_1$  depende unicamente de  $q$ , e  $L_g h(x) = 0$  (como pode ser verificado pela equação (4.40)), vem

$$\dot{y}_1 = \frac{\partial h_1}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h_1}{\partial q} \dot{q} = \Phi_{d1}(q)\nu(t)$$

onde  $\Phi_{d1}(q) = J_{h1}S(q)$ . Como esta derivada não vem expressa em função de  $u$  é necessário continuar o processo de derivação em função de  $q$ , resultando

$$\ddot{y}_1 = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x) u \quad \rightarrow \quad \ddot{y}_1 = \frac{\partial(J_{h1}S\nu)}{\partial q} S(q)\nu + J_{h1}(q) S(q) u = v_1 .$$

Como  $\ddot{y}_1$  está já em função de  $u$ , pode-se concluir que o grau relativo de  $y_1$  é dois. Do mesmo modo, a primeira derivada de  $y_2$ , tendo em atenção que  $h_2$  é função exclusivamente de  $\nu$ , é expressa por

$$\dot{y}_2 = \frac{\partial h_2}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h_2}{\partial \nu} \dot{\nu} .$$

Considerando de novo a equação (4.40) observa-se que  $\dot{q} = S(q)\nu$  e  $\dot{\nu} = u$ , e conseqüentemente

$$\dot{y}_2 = \frac{\partial h_2}{\partial \nu} u = \Phi_{d2}(\nu) u = v_2$$

onde  $\Phi_{d2}(\nu) = J_{h2}$ . Esta última equação vem expressa em função da entrada  $u$ , então pode-se concluir que o grau relativo de  $y_2$  é um.

Então, resumidamente, todas as derivadas de  $y$  podem ser representadas como se segue:

$$\dot{y}_1 = J_{h1}(q) S(q) \nu(t)$$

$$\ddot{y}_1 = \frac{\partial(J_{h1}S\nu)}{\partial q} S(q)\nu + J_{h1}(q) S(q) u$$

$$\dot{y}_2 = J_{h2} u .$$

Torna-se agora necessário determinar os Jacobianos [161]:

• **Para o caminho circular,**

$$J_{h1}(q) = \frac{\partial h_1}{\partial q} = \frac{1}{d_L} \begin{bmatrix} (x_c - x_g + L_a \cdot \cos \phi) \\ (y_c - y_g + L_a \cdot \sin \phi) \\ L_a [\cos \phi (y_c - y_g) - \sin \phi (x_c - x_g)] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

onde  $d_L = \sqrt{(x_l - x_g)^2 + (y_l - y_g)^2}$ , e

$$J_{h2}(\nu) = \frac{\partial h_2}{\partial \nu} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \end{bmatrix} .$$



E onde a matriz de desacoplamento do sistema é dada por

$$\Phi_d = \begin{bmatrix} \Phi_{d1}(q) \\ \Phi_{d2}(\nu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{h1}(q) S(q) \\ J_{h2} \end{bmatrix}$$

cujo determinante tem a seguinte expressão:

$$\det(\Phi_d) = \frac{r^2(d+L_a)}{2b} \frac{(\sin \phi (x_g - x_c) + \cos \phi (y_c - y_g))}{\sqrt{x_l^2 - 2x_l x_g + x_g^2 + y_l^2 - 2y_l y_g + y_g^2}}.$$

A partir da expressão anterior, pode-se verificar que a matriz de desacoplamento é singular se e só se: a) A direcção de ‘viagem’ do WMR, ou o eixo dos  $X$ , é normal<sup>4</sup> ao caminho circular, i.e.  $\sin \phi (x_g - x_c) = -\cos \phi (y_c - y_g)$ . Esta singularidade ocorre porque, apesar do facto de a velocidade longitudinal ser especificada, a direcção ao longo do caminho (ver a expressão  $h_1$ , equação (5.17)) não está explicitamente especificada; b) O ponto  $P_0$  é coincidente com o ponto  $P_l$  (i.e.  $L_a = -d$ ). Esta singularidade é devida às restrições não-holónomas do WMR, uma vez que o robô não é capaz de se mover instantaneamente ao longo do eixo das rodas.

• *Para o caminho em linha recta,*

$$J_{h1}(q) = \frac{\partial h_1}{\partial q} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \begin{bmatrix} A \\ B \\ BL_a \cos \phi - AL_a \sin \phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

e  $J_{h2}$  é igual ao apresentado para o caminho circular. Do mesmo modo a matriz de desacoplamento exhibe a mesma forma que para o caminho circular, excepto para  $J_{h1}$  que é substituído pela expressão anterior.

Neste caso

$$\det(\Phi_d) = \frac{r^2(d+L_a)}{2b} \frac{(B \cos \phi - A \sin \phi)}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

---

<sup>4</sup>A normal a um caminho circular, num ponto, é a perpendicular à tangente à curva, nesse ponto.

Tal como para o caminho circular, a matriz de desacoplamento é singular se o eixo dos  $X$  for perpendicular ao caminho em linha recta ou  $L_a = -d$ .

Então, a condição necessária e suficiente para que o sistema seja linearizado por entrada-saída e seja controlável é que  $\det(\Phi_d) \neq 0$ . Se esta condição for verificada, por aplicação da realimentação não-linear (equação (5.14)), obtém-se um sistema linearizado e desacoplado (para qualquer um dos dois caminhos básicos ou algum caminho arbitrário) na forma seguinte:

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= v_1 \\ \dot{y}_2 &= v_2\end{aligned}\tag{5.21}$$

Note-se que é necessário projectar uma malha de realimentação linear (i.e. um controlador) de modo a que cada sub-sistema linear se torne estável e adquira o “comportamento desejado”.

### 5.3 Conclusões

A linearização por realimentação foi estudada para o modelo de um robô móvel com rodas. Foi referido que a linearização entrada-estado não é aplicável devido ao facto de o sistema não ser localmente controlável. Calculou-se então uma realimentação não-linear, que garante estabilidade entrada-saída e estabilidade para o sistema global. A linearização entrada-saída foi aplicada com sucesso, transformando o sistema de posição num integrador duplo e o sistema de velocidade num integrador simples. Foi analisada a dinâmica interna não observável resultante deste procedimento.

Na escolha das variáveis de saída foi tido em consideração o tipo de algoritmo de controlo pretendido. Como se pretende que o WMR siga um caminho geométrico com uma velocidade desejada, optou-se pelas variáveis que permitem obter as equações de saída mais adequadas para a implementação do algoritmo seguimento de caminho, pois esta parece ser a estratégia de controlo que mais se coaduna com a realidade. Para os dois caminhos básicos (arco circular e linha recta) foram calculados os Jacobianos e as matrizes de desacoplamento. É de notar que com estes dois caminhos básicos se consegue construir qualquer tipo de caminho geométrico.

# Capítulo 6

## Seguimento de Caminho - Contínuo

Nos capítulos anteriores foram desenvolvidos conceitos e métodos essenciais ao controlo de um sistema mecânico (e.g. cadeira de rodas robotizada), sujeito tanto a restrições holónomas como não-holónomas. Neste capítulo, vai ser considerado o problema do controlo de seguimento de caminho de robôs móveis com rodas. O estudo de Sarkar [161] foi relevante para o desenvolvimento do trabalho apresentado nesta tese. Neste capítulo, apresenta-se de uma forma sintética o esquema de controlo de seguimento de caminho (em tempo contínuo) utilizado na cadeira de rodas robotizada. O seu desempenho será analisado, considerando breves resultados de simulação.

### 6.1 Projecto do Controlador

Após obter as equações de saída, bem como todas as outras condições necessárias à implementação da linearização por realimentação entrada-saída, é possível projectar o controlador. O esquema do controlo de seguimento de caminho (em contínuo), tendo em consideração o modelo dinâmico da cadeira de rodas robotizada, é apresentado na figura 6.1.

Na figura 6.1, verifica-se que  $r_d$  (onde  $r_d = [r_{d1} \ r_{d2}]^T$ ) representa os valores de referência (ou os valores desejados) para as saídas,  $y_1$  e  $y_2$  (onde  $y = [y_1 \ y_2]^T = [h_1(q) \ h_2(\nu)]^T$ ).  $v$  (onde  $v = [v_1 \ v_2]^T$ ) é o erro entre os valores actuais e os de referência. A realimentação não-linear (4.39) vai permitir cancelar a não-linearidade da dinâmica do robô (4.38) simplificando a

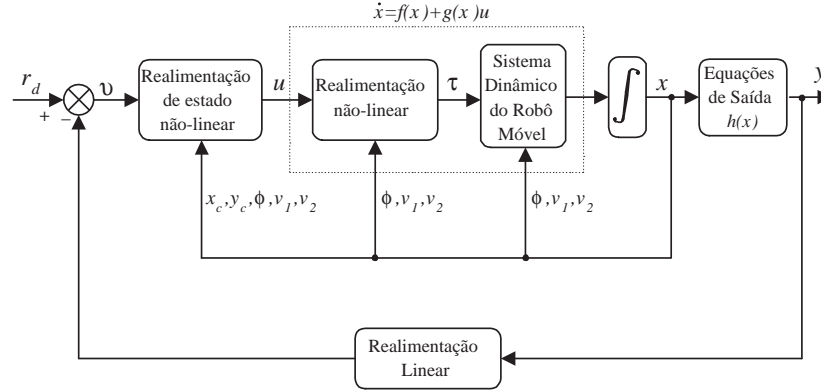


Figura 6.1: Esquema de controlo em contínuo considerando a linearização por entrada-saída.

equação de estado para a forma da equação (4.40). Este processo é representado pelo bloco com linha pontuada na figura 6.1. Uma realimentação de estado não-linear (5.14) lineariza e desacopla o mapeamento entrada-saída. Assim, o sistema global é desacoplado em dois sub-sistemas lineares (5.21), onde o sub-sistema de controlo de posição é de segunda ordem, e o sub-sistema de controlo de velocidade é de primeira ordem. Para estabilizar os sub-sistemas torna-se necessário projectar um controlador para a malha de realimentação linear externa (neste caso o controlador utilizado foi o controlador de colocação de pólos).

## 6.2 Resultados de Simulação

Nesta secção, de modo a verificar a validade do modelo dinâmico e a eficiência do algoritmo de controlo (de seguimento de caminho) em tempo contínuo (figura 6.1), discute-se e apresenta-se resultados de simulação, obtidos usando o ambiente *Matlab*<sup>®</sup> e *Simulink*<sup>®</sup>.

Na tabela 6.1 são apresentados os parâmetros cinemáticos do WMR, de acordo com a notação apresentada na figura 3.8 (capítulo 3).

O ponto de referência virtual  $P_l$  foi escolhido para estar afastado de  $P_c$  ( $L_a = 0.1 m$ ). Os ganhos para a malha externa de realimentação linear foram projectados (por colocação de pólos) de modo a ter um sistema criticamente amortecido ( $\zeta = 1$ ) no controlo de seguimento de caminho.

Tabela 6.1: Parâmetros cinemáticos

$a = 1 [m]$	$m_c = 60 [Kg]$
$b = 0.30 [m]$	$m_w = 1 [Kg]$
$d = 0.05 [m]$	$I_c = 15.625 [Kg.m^2]$
$L_a = 0.1 [m]$	$I_w = 0.005 [Kg.m^2]$
$r = 0.17 [m]$	$I_m = 0.0025 [Kg.m^2]$

Este tipo de sistema é apropriado para o seguimento de um dado caminho (por exemplo uma curva), uma vez que permite que não existam grandes variações de distância e de velocidade.

O parâmetro que apresenta maior influência na ‘trajectória’ do WMR é a sua velocidade inicial, sendo por isso um dos mais importantes a considerar, conjuntamente com o ângulo de direcção inicial,  $\phi$ , na análise do seguimento de caminho.

Nesta análise consideraram-se dois tipos de caminhos. Um caminho em linha recta e um caminho circular:

- O caminho em linha recta é da forma  $y = x$  com os elementos da equação (5.19) dados por  $A = -1$ ,  $B = 1$  e  $C = 0$ . Logo

$$h_1 = \frac{y_l - x_l}{\sqrt{2}} ; \quad h_2 = \frac{r}{2}(\nu_1 + \nu_2) .$$

A posição inicial é dada por  $(x_c, y_c) = (1.0, 0.1)$ . Para todas as simulações a velocidade longitudinal desejada é de  $1.414 m/s$  ( $5 Km/h$ ), e a distância desejada do WMR ao caminho é de  $0 m$ . Logo os valores de referência tomam a forma

$$r_{d1} = 0, \quad r_{d2} = 1.414 \quad .$$

- Para o caminho circular mantêm-se os mesmos valores de referência  $r_{d1}$  e  $r_{d2}$  atrás referidos. No entanto, a posição inicial para este caso é  $(x_c, y_c) = (18, 22)$  e as equações (5.17) e (5.18) são dadas por

$$h_1 = \sqrt{(x_l - 10)^2 + (y_l - 25)^2} - 7.5 , \quad h_2 = \frac{r}{2}(\nu_1 + \nu_2) .$$

Convém mais uma vez recordar que  $x_l$  e  $y_l$  se relacionam com as variáveis de estado,  $x_c$ ,  $y_c$  e  $\phi$ , pelas equações:  $x_l = x_c + L_a \cos \phi$ , e  $y_l = y_c + L_a \sin \phi$ .

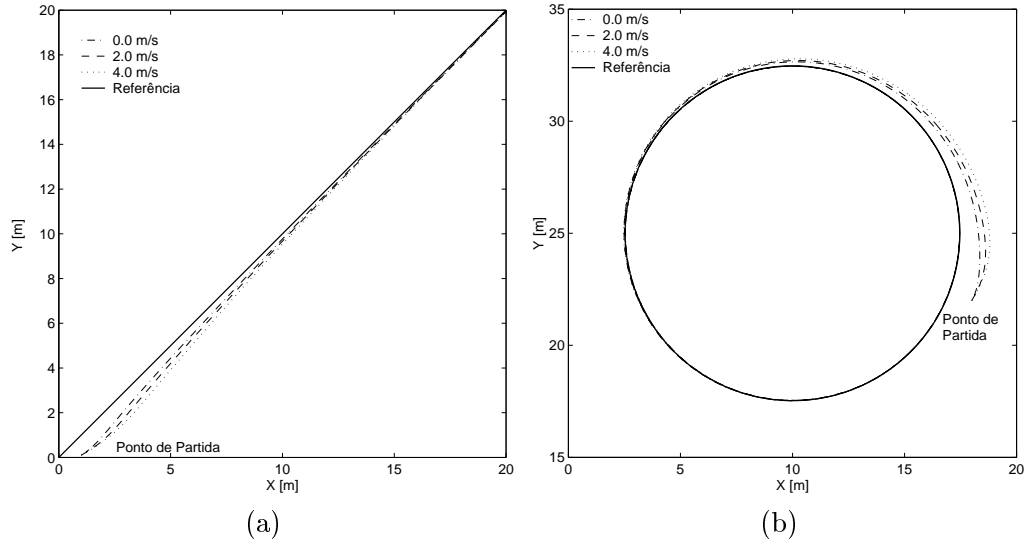


Figura 6.2: Seguimento de caminho com diferentes velocidades longitudinais iniciais: (a) efectuado para um caminho em linha recta; (b) efectuado para um caminho circular.

### 6.2.1 Velocidades Iniciais

Na análise da influência das velocidades iniciais, vão ser considerados os tipos de caminhos atrás referidos bem como as suas posições iniciais. As figuras 6.2 (a) e (b) exibem o seguimento de caminho do WMR quando percorre, quer uma linha recta (com ângulo de direcção inicial de  $\phi = 30^\circ$ ), quer um caminho circular (com ângulo de direcção inicial de  $\phi = 60^\circ$ ), com diferentes valores de velocidades iniciais.

Dado que o WMR inicia o movimento numa posição afastada dos caminhos, com ângulos de direcção (iniciais) constantes, pela observação das figuras 6.2 (a) e (b) pode-se concluir que, para diferentes velocidades iniciais, o sistema exhibe melhor desempenho quando a velocidade inicial é baixa, aproximando-se mais depressa do caminho 'desejado'. Constata-se também que, independentemente do valor da velocidade e do tipo de caminho, o ponto de referência do WMR consegue alcançar o caminho de forma suave e nele permanecer.

É de notar que dependendo dos valores dos ganhos obtidos para a malha externa (aquando da colocação dos pólos), o robô móvel converge mais

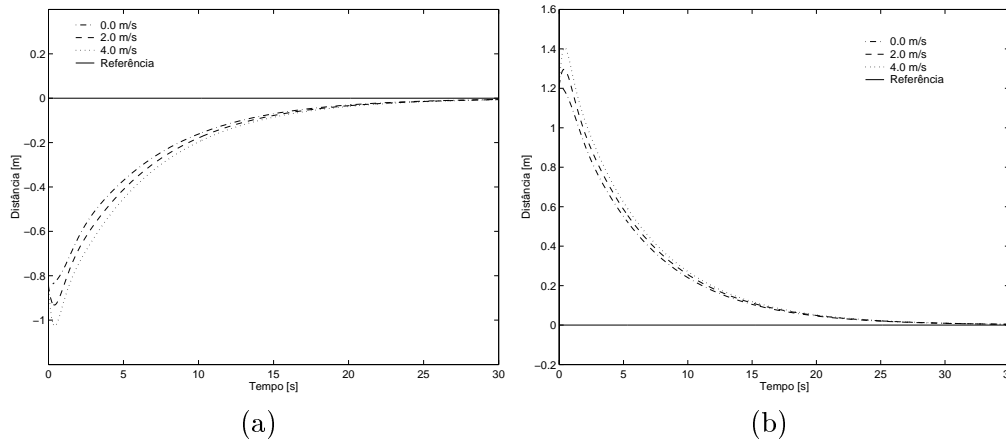


Figura 6.3: Posição relativa do WMR com diferentes velocidades longitudinais iniciais: (a) para o caminho em linha recta; (b) para o caminho circular.

rápida ou mais lentamente para o caminho.

Pelos gráficos da posição relativa<sup>1</sup> do WMR em função do tempo (figuras 6.3 (a) e (b)), verifica-se que nos primeiros 15 segundos o ponto de referência do WMR consegue ficar, aproximadamente, a uma distância de  $6.5\text{ cm}$  do caminho em linha recta e a  $11\text{ cm}$  do caminho circular, acabando por coincidir com o caminho (linha recta ou circular), sensivelmente, ao fim de 30 segundos.

Pelos gráficos das velocidades (figuras 6.4 (a) e (b)) constata-se que, quer para o caminho em linha recta, quer para o caminho circular, apesar de o WMR ter iniciado o movimento com diferentes velocidades consegue convergir de forma suave para a velocidade desejada ( $1.414\text{ m/s}$ ), apresentando, para qualquer uma das velocidades, uma resposta exponencial suave (como esperado), que é típica de um sistema de primeira ordem.

Verifica-se ainda, pela análise das figuras 6.4 (a) e (b), que “a resposta” do sub-sistema de controlo da velocidade é independente do tipo de caminho

<sup>1</sup>Nos gráficos da distância (ou posição relativa), em função do tempo (do WMR ao caminho em linha recta ou ao caminho circular), estabeleceu-se que: - Para o caminho em linha recta, quando o WMR está abaixo da linha recta, o valor da sua posição relativa vem precedido do sinal (-); - Para o caminho circular, quando o WMR está fora do círculo o valor da sua posição relativa vem positivo, e quando está dentro do círculo, o valor da sua posição relativa vem precedido do sinal (-).

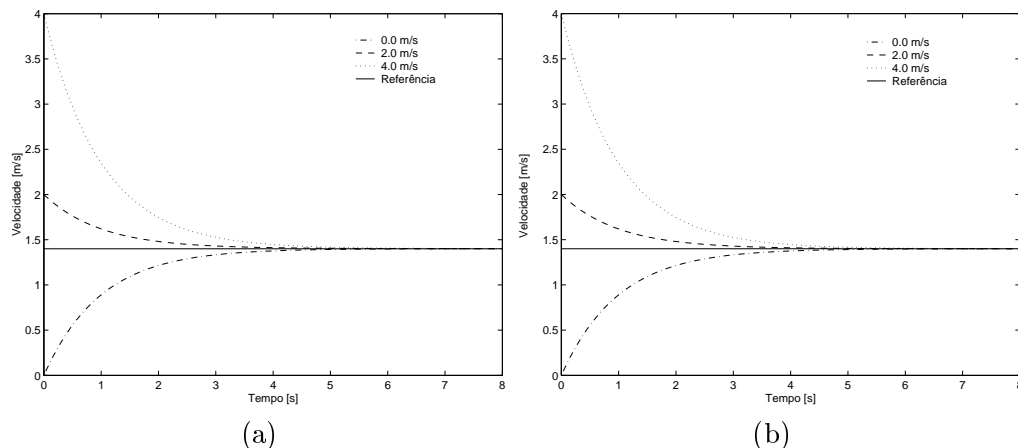


Figura 6.4: Comportamento das velocidades quando o WMR ‘parte’ com diferentes velocidades longitudinais iniciais: (a) para o caminho em linha recta; (b) para o caminho circular.

percorrido, constatando-se que o gráfico das velocidades para o caminho em linha recta (figura 6.4(a)) exhibe as mesmas respostas (para as diferentes velocidades iniciais), que o gráfico para o caminho circular (figura 6.4(b)).

### 6.2.2 Ângulos Iniciais

Considerem-se de novo os caminhos em linha recta e circular atrás referidos<sup>2</sup>, uma velocidade inicial de  $0\text{ m/s}$ , e diferentes ângulos de direcção iniciais,  $\phi$ .

Por observação das figuras 6.5 (a) e (b) pode-se concluir que para ângulos de direcção diferentes (mas com velocidade inicial de  $0\text{ m/s}$ ), a resposta é satisfatória, quer para o caminho em linha recta, quer para o caminho circular, conseguindo o WMR convergir sempre para o caminho ‘desejado’. Como seria ‘fisicamente’ esperado, observa-se que quanto mais direccionado para o caminho estiver o WMR, mais rapidamente ele se aproxima desse caminho. Esta convergência, como já constatado para o estudo das velocidades iniciais (secção 6.2.1), ocorre de forma suave (i.e. sem movimentos bruscos) o que é desejável no caso do WMR em estudo (cadeira de rodas robotizada).

<sup>2</sup>As posições iniciais utilizadas são as mesmas que foram utilizadas na análise do efeito das velocidades iniciais.



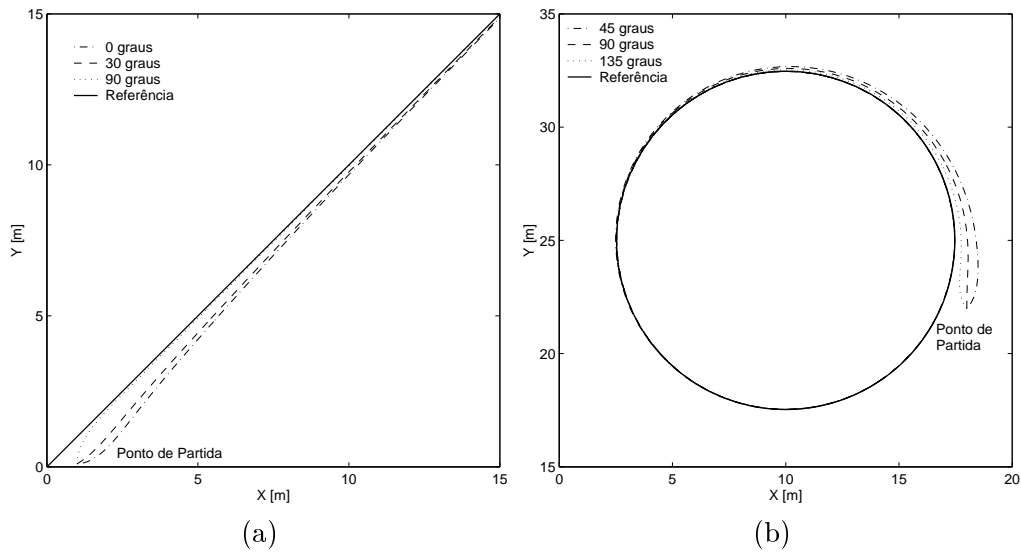


Figura 6.5: Seguimento de caminho com diferentes ângulos de direcção iniciais: (a) efectuado para um caminho em linha recta; (b) efectuado para um caminho circular.

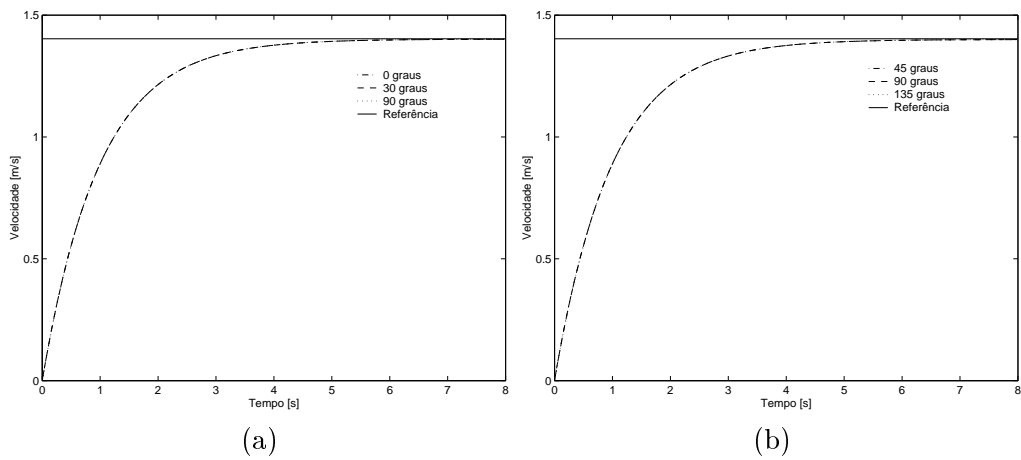


Figura 6.6: Comportamento das velocidades quando o WMR ‘parte’ com diferentes ângulos de direcção iniciais: (a) para um caminho em linha recta; (b) para um caminho circular.

No entanto, convém ter em atenção as possíveis singularidades (ver secção 5.2). Assim, para o caminho em linha recta o algoritmo é singular se o WMR tem uma orientação com  $\phi = -45^\circ$  ou  $\phi = 135^\circ$ . No caso do caminho circular, o algoritmo é singular se o WMR tem uma orientação com  $\phi = -20.6^\circ$  ou  $\phi = 159.4^\circ$ . Logo, é de todo conveniente evitar estas orientações iniciais. Para outros ângulos de direcção, como se constata, pelas figuras 6.5(a) e (b), a resposta é satisfatória.

Pelo gráfico das velocidades (figuras 6.6 (a) e (b)) verifica-se que, independentemente do tipo de caminho a ‘seguir’ (linha recta ou circular) e do ângulo de direcção inicial utilizado, o comportamento das velocidades é o mesmo para diferentes ângulos iniciais. Tal como na secção 6.2.1, constata-se uma certa semelhança entre os resultados obtidos para o caminho em linha recta (figura 6.6(a)) e os obtidos para o caminho circular (figura 6.6(b)).

### 6.3 Controlador do WMR Diferencial

De modo a dar mais realismo à simulação<sup>3</sup>, foi implementado um esquema de controlo em contínuo tendo em consideração os motores da cadeira de rodas (como representado na figura 6.7). Note-se que, algumas características particulares da cadeira de rodas encontram-se descritas no apêndice *D*.

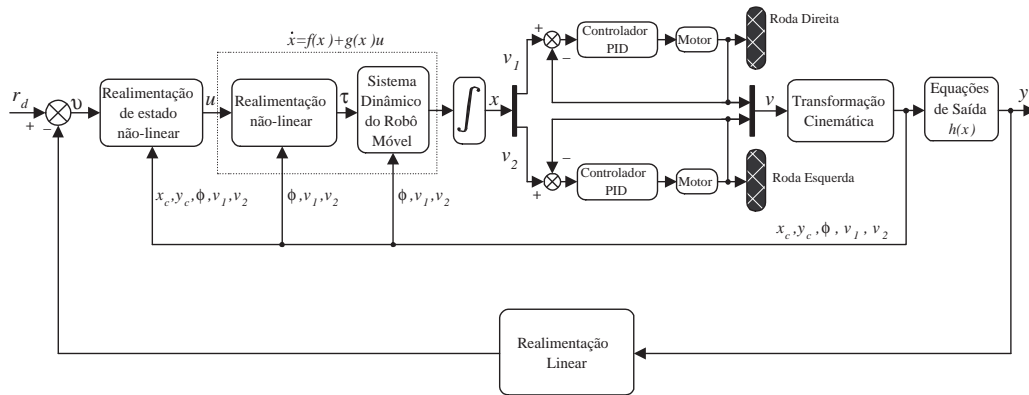


Figura 6.7: Esquema de controlo em contínuo com o WMR diferencial.

Na figura 6.7, tal como já referido na secção 6.1,  $r_d$  representa os valores

<sup>3</sup>Embora com um modelo ainda simplificado.

de referência para as saídas,  $y$ , e  $v$  é o erro entre os valores actuais e os valores de referência. Este erro é a entrada para o bloco de realimentação de estado não-linear. O bloco do sistema dinâmico do robô móvel tem como saídas, entre outras, as velocidades desejadas para a roda direita e esquerda, respectivamente ( $\nu = [\nu_1 \ \nu_2]^T = [\dot{\theta}_r \ \dot{\theta}_l]^T$ ). Estas velocidades são comparadas com as velocidades actuais (medidas) do “sistema físico”. O erro obtido tem uma acção directa no sistema físico. Estes “comandos de condução” são aplicados por meio de um controlador PID ao motor. É de notar que cada roda motriz (direita e esquerda) é actuada por um motor DC. Através do movimento gerado no veio de cada um dos motores é possível calcular as velocidades actuais das rodas, que são as entradas para o bloco de transformação cinemática<sup>4</sup>. Por sua vez, os dados obtidos neste bloco, são usados por diferentes módulos como é mostrado na figura 6.7. A explicação relativa aos restantes blocos, bem como a outras características do controlador foram já expostas na secção 6.1.

### 6.3.1 Simulações

Nas simulações do esquema de controlo apresentado na figura 6.7, consideraram-se os mesmos parâmetros cinemáticos (tabela 6.1) e as mesmas condições de operação (ver secção 6.2) que no caso do esquema de controlo da figura 6.1, nomeadamente em relação aos ganhos da malha externa de realimentação linear, e aos dois tipos de caminhos (linha recta e circular) utilizados no seguimento de caminho.

Uma vez que, na realidade, a cadeira de rodas robotizada inicia sempre a sua ‘marcha’ com velocidade zero, para todas as simulações do esquema de controlo da figura 6.7, a velocidade longitudinal inicial usada foi de  $0 \text{ m/s}$ . Tal como para as simulações da secção 6.2, os valores de referência (desejados) são:

$$r_{d1} = 0 \text{ m}, \quad r_{d2} = 1.414 \text{ m/s} \quad .$$

#### Velocidades Iniciais

As figuras 6.8 (a) e (b) apresentam o comportamento do WMR, no seguimento de caminho de uma linha recta (com ângulo de direcção inicial de

<sup>4</sup>O bloco de transformação cinemática converte as velocidades actuais das rodas  $\nu_1$  e  $\nu_2$  nos valores do vector de estado  $x$ . Esta operação é feita recorrendo à expressão 3.83.

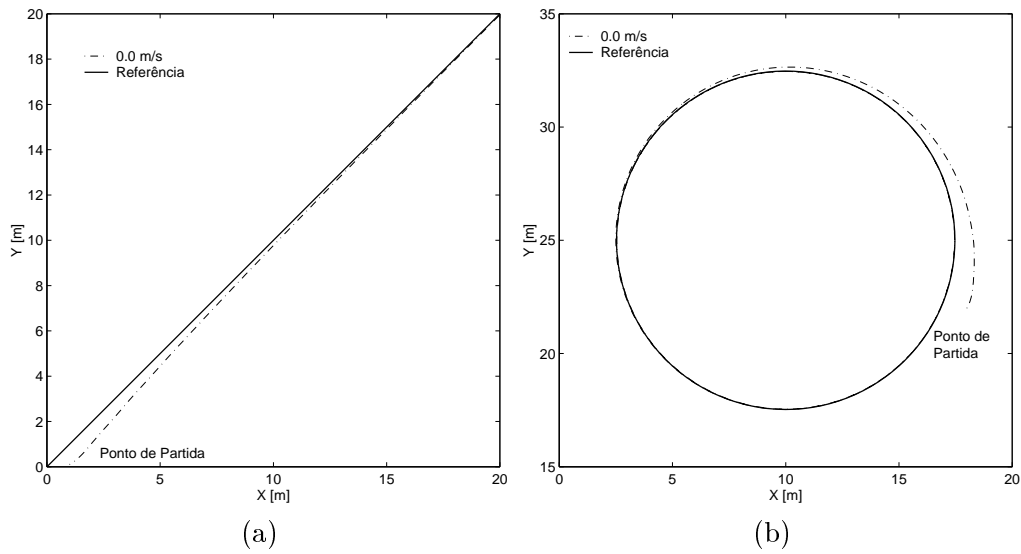


Figura 6.8: Seguimento de caminho com velocidade inicial de  $0\text{ m/s}$ : (a) efectuado para um caminho em linha recta; (b) efectuado para um caminho circular.

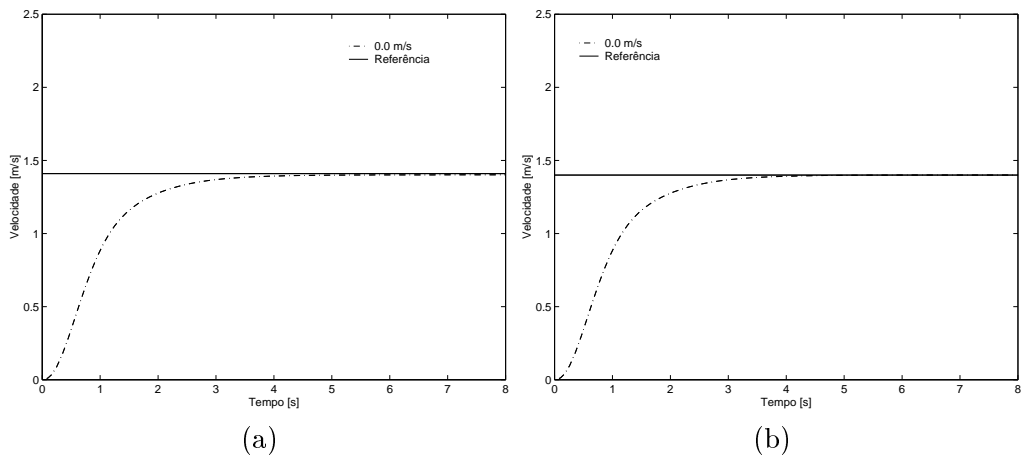


Figura 6.9: Comportamento da velocidade quando o WMR ‘parte’ com velocidade inicial de  $0\text{ m/s}$ : (a) para o caminho em linha recta; (b) para o caminho circular.

$\phi = 30^\circ$ ), e de um caminho circular (com ângulo de direcção inicial de  $\phi = 60^\circ$ ), para uma velocidade inicial de  $0\text{ m/s}$ , tal como já foi anteriormente referido.

Considerando esta velocidade inicial, e por comparação das figuras 6.8 (a) e (b), com as figuras 6.2 (a) e (b), constata-se que os resultados obtidos são semelhantes e que o WMR converge para o caminho de forma suave.

Pelos gráficos das velocidades (figuras 6.9 (a) e (b)), verifica-se que para qualquer um dos caminhos apresentados, a velocidade do WMR consegue convergir para a velocidade desejada ( $1.414\text{ m/s}$ ), apresentando as mesmas respostas que as obtidas nas figuras 6.4 (a) e (b) (para uma velocidade inicial de  $0\text{ m/s}$  e para o esquema de controlo da figura 6.1).

Verifica-se, uma vez mais, que a resposta do sub-sistema de controlo da velocidade é independente do tipo de caminho percorrido, exibindo a figura 6.9(a) o mesmo comportamento que a figura 6.9(b).

### Ângulos Iniciais

Considere-se os mesmos caminhos atrás referidos e uma velocidade inicial de  $0\text{ m/s}$ . Relativamente ao comportamento deste esquema de controlo (figura 6.7), com ângulos iniciais diferentes, observou-se o mesmo comportamento que na secção 6.2.2. Por esse motivo irão ser apresentados gráficos de resultados, não para a totalidade dos ângulos usados nas figuras 6.5 (a) e (b), mas apenas para os ângulos que estão mais direccionados para os caminhos. Assim, para a linha recta utiliza-se um  $\phi = 90^\circ$  e para o caminho circular um  $\phi = 135^\circ$ .

Por observação das figuras 6.10 (a) e (b) pode-se concluir que a resposta do sistema para qualquer um dos caminhos é satisfatória, apresentando os mesmos comportamentos que os obtidos nas figuras 6.5 (a) e (b). É no entanto importante ter em atenção a escolha dos ângulos iniciais, para evitar as possíveis singularidades.

Mais uma vez, para o gráfico das velocidades (figuras 6.11 (a) e (b)), constata-se que independentemente do tipo de caminho a percorrer (linha recta ou circular) e do ângulo de direcção inicial utilizado, o comportamento das velocidades é o mesmo. Isto é, verifica-se uma semelhança entre estes resultados e os obtidos nas figuras 6.6(a) e (b), bem como entre os resultados obtidos para o caminho em linha recta (figura 6.11(a)) e para o caminho circular (figura 6.11(b)).

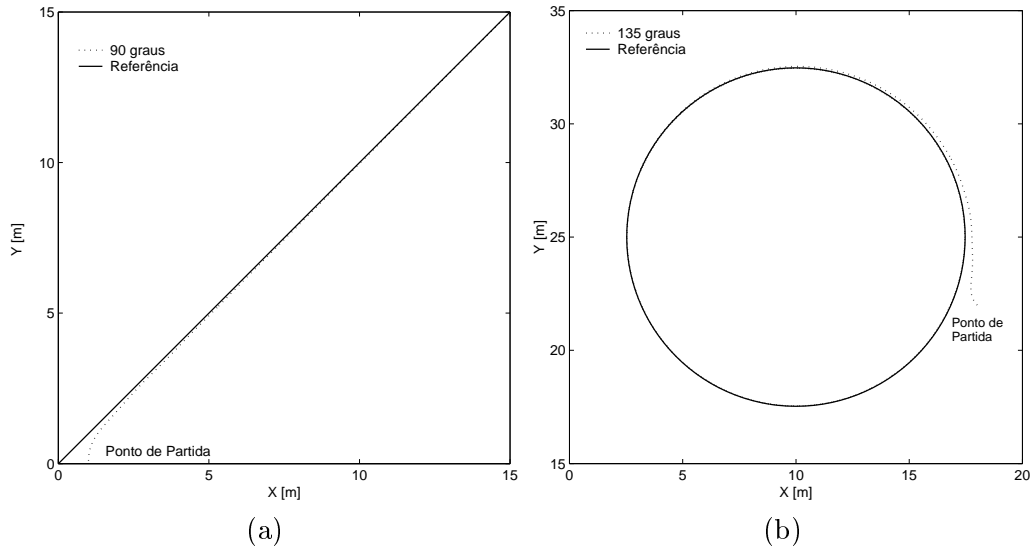


Figura 6.10: Seguimento de caminho: (a) efectuado para um caminho em linha recta com ângulo de direcção inicial de  $90.0^\circ$ ; (b) efectuado para um caminho circular com ângulo de direcção inicial de  $135.0^\circ$ .

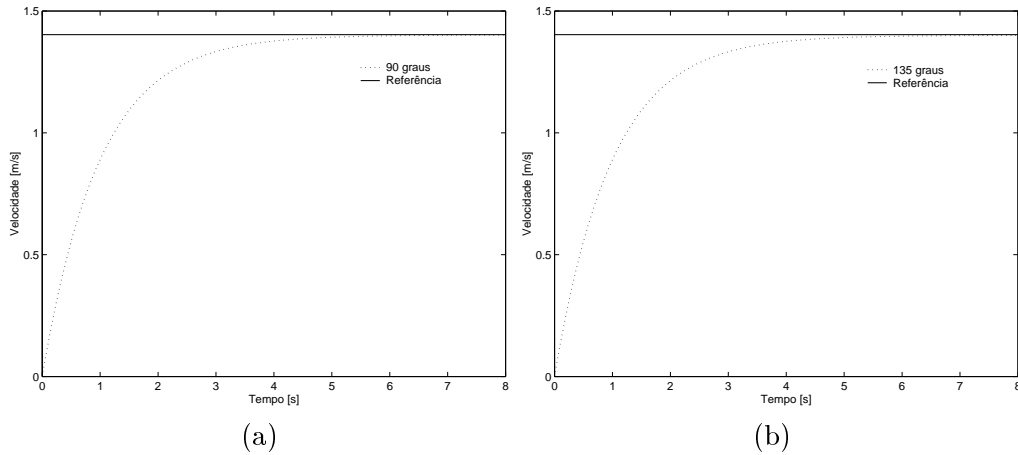


Figura 6.11: Comportamento da velocidade quando o WMR: (a) efectua o caminho em linha recta com ângulo de direcção inicial de  $90.0^\circ$ ; (b) efectua o caminho circular com ângulo de direcção inicial de  $135.0^\circ$ .

Fazendo uma análise dos resultados obtidos para o esquema de controlo apresentado na figura 6.1 e para o esquema de controlo do WMR diferencial (apresentado na figura 6.7), constata-se que o comportamento dinâmico é semelhante e que os resultados obtidos são, também, bastante semelhantes e até por vezes coincidentes.

## 6.4 Conclusões

A cadeira de rodas robotizada é um sistema que se pode enquadrar na área da robótica móvel com rodas (WMR), tendo por isso utilizado grande parte da mesma tecnologia e exibindo um funcionamento semelhante aos dos WMRs. No entanto, é importante não esquecer que este tipo de sistema (cadeira de rodas) tem algumas particularidades que o distinguem dos WMRs convencionais, nomeadamente ao nível da segurança do utilizador e da qualidade do seu movimento, que deve ser suave e sem a presença de arranques súbitos (aspectos que por vezes são negligenciados e recorrentes em algumas aplicações de controlo de WMRs).

Neste capítulo, discutiu-se o controlo de seguimento de caminho, em tempo contínuo, do WMR. Investigou-se, através de simulação computacional, a influência das diferentes escolhas de velocidades iniciais e de ângulos iniciais no comportamento do seguimento de caminho. Através de resultados de simulação, ilustrou-se o desempenho dos esquemas de controlo apresentados, tendo-se concluído, uma vez mais, que o algoritmo de seguimento de caminho demonstra ser uma estratégia de controlo adequada em situações em que um ‘veículo’ necessita seguir um caminho com uma dada velocidade desejada.

Apesar das leis de realimentação serem essenciais no controlo do movimento para neutralizar a presença de perturbações, bem como de inexatidões de modelo, um dos problemas que influencia os vários algoritmos de controlo de seguimento de caminho é a necessidade de robustez contra ruído, incertezas de modelo e não-linearidades.

No capítulo seguinte (capítulo 7) estes problemas vão ser ainda mais evidentes dado que se pretende implementar o seguimento de caminho usando um controlador por computador, i.e. um controlador discreto. Torna-se então necessário discretizar o controlador, bem como tornar robusto o sistema de controlo global, contra incertezas e perturbações, tais como as que

são devidas ao método de linearização por entrada-saída em modo discreto, dado que ele foi desenvolvido para ser utilizado em modo contínuo.

No capítulo 7 será desenvolvida uma estrutura de controlo que seja capaz de lidar com os termos não-modelados, ruídos, incertezas e não-linearidades, de modo a que o sistema global possa apresentar um comportamento desejado.



# Capítulo 7

## Seguimento de Caminho - Discreto

No capítulo 6 foi apresentado o esquema de controlo de seguimento de caminho, em (tempo) contínuo, do WMR em estudo (cadeira de rodas robotizada). Para a sua implementação foram utilizados os conceitos e os métodos desenvolvidos em capítulos anteriores. Neste capítulo vão ser utilizados os mesmos conceitos e métodos presentes no seguimento de caminho em contínuo, mas para um esquema de controlo de seguimento de caminho em discreto. Um dos problemas que tem influenciado os vários algoritmos de controlo de seguimento de caminho, desenvolvidos em diversos estudos, é a necessidade de robustez contra ruído, incertezas do modelo, não-linearidades e vários tipos de perturbações. Estes problemas tornam-se ainda mais evidentes quando se pretende implementar o seguimento de caminho usando um controlador por computador (i.e. um controlador discreto), ou quando se utiliza, como é o caso, o método de linearização por entrada-saída em modo discreto tendo este sido desenvolvido para ser utilizado em modo contínuo. O presente trabalho vem de algum modo contribuir para suavizar estes problemas.

Assim, neste capítulo será apresentado em detalhe, a implementação de uma nova estratégia de controlo para o seguimento de caminho de WMRs sujeitos a restrições não-holónomas. Esta estratégia de controlo é composta por uma malha interna de linearização por realimentação entrada-saída e por uma malha externa de controlo linear onde é usado o controlador com Observador Activo baseado no filtro de Kalman (AOB), proposto por Cor-

tesão [51]. Todavia, esta é a primeira vez que o AOB é aplicado a WMRs.

Esta estratégia de controlo apresenta a particularidade de ser usada em modo discreto, sendo robusta contra incertezas e perturbações, tais como as que são devidas à utilização do método de linearização entrada-saída.

O desempenho do algoritmo de controlo, proposto neste capítulo para o seguimento de caminho, vai ser analisado através de simulação computacional, e será comparado com outras estratégias de controlo usadas na malha de realimentação linear, tais como o Controlador de Colocação de Pólos (PPC) e o Controlador de Colocação de Pólos com Observador por filtro de Kalman (CKF).

## 7.1 Planta do Sistema: Discretização

Dado que o controlador é discreto, torna-se então necessário discretizar<sup>1</sup> o sistema. Após a linearização entrada-saída, foram obtidos dois sistemas SISO desacoplados (ver equação (5.21)): um de segunda ordem e um de primeira ordem. O sistema de segunda ordem representa o modelo de posição e o sistema de primeira ordem representa o modelo de velocidade. Então, obtêm-se, respectivamente:

$$G_P(s) = \frac{1}{s^2} e^{-s T_{dP}} \quad (7.1)$$

$$G_V(s) = \frac{1}{s} e^{-s T_{dV}} \quad (7.2)$$

onde  $T_{dP}$  e  $T_{dV}$  representam os tempos mortos (ou atrasos puros) do modelo de posição e do modelo de velocidade, respectivamente. Estes atrasos são devidos essencialmente ao processamento de sinal do controlador em cascata, e têm um papel chave na dimensão do estado discreto.

### 7.1.1 Discretização do Modelo de Posição

Considerando a equação (7.1) pode-se escrever o sistema SISO desacoplado para o modelo de posição como,

$$G_P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{y_1(s)}{v_1(s)} = \frac{e^{-s T_{dP}}}{s^2} \rightarrow Y(s) s^2 = U(s) \cdot e^{-s T_{dP}} \quad (7.3)$$

<sup>1</sup>A base da teoria do controlo determina que se faça a conversão da equação de estado em tempo contínuo para tempo discreto, permitindo assim o seu uso computacional.

Aplicando a transformada inversa de Laplace a (7.3), e substituindo  $t_d = Td_P$ , a representação temporal equivalente de (7.1) é dada por

$$\ddot{y} = u(t - t_d) \quad (7.4)$$

onde  $y$  é a saída e  $u$  é a entrada. Definindo as variáveis de estado  $x_1 = y$  e  $x_2 = \dot{y}$ , a equação (7.4) pode ser escrita em espaço de estados como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t - t_d)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Na representação em forma compacta vem,

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t - t_d) \\ y = Cx(t) = x_1 \end{cases}. \quad (7.5)$$

No cálculo do equivalente discreto do sistema (7.4) assume-se que é efectuada uma amostragem por ZOH. Devido ao ZOH, o sinal  $u(t)$  para efeitos de integração é considerado constante ao longo do intervalo de amostragem. Por isso, tanto  $u(t)$  como o sinal atrasado  $u(t - t_d)$  são considerados constantes ao longo do intervalo de amostragem.

**Proposição 3.** *Para se proceder à discretização de (7.5), com período de amostragem  $h$ , consideraram-se tempos de atraso arbitrários (ou tempos de atraso longos). Assim, considerando apenas a equação de estado não homogénea (a primeira expressão de (7.5)),  $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t - t_d)$ , aplicando a transformada de Laplace vem,*

$$sIX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s)e^{-st_d},$$

resolvendo em ordem a  $X(s)$ , vem

$$X(s) = (sI - A)^{-1}(x_0 + BU(s)e^{-st_d})$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s)e^{-st_d} \quad (7.6)$$

onde  $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$ , representa a matriz de transição de estados em  $s$ . Aplicando as Transformadas de Laplace (Teorema da Convolução), esta

expressão pode ser transformada para o domínio do tempo. Assim, pela transformada inversa, obtém-se

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} [\Phi(s)] x_0 + \mathcal{L}^{-1} [\Phi(s) B U(s) e^{-st_d}]$$

ou

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} . x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s')} . B . u(s' - t_d) ds'$$

Fazendo  $t_0 = 0$ , vem

$$x(t) = e^{A(t)} . x_0 + \int_0^t e^{A(t-s')} . B . u(s' - t_d) ds'$$

ou

$$x(t) = \Phi(t) . x_0 + \int_0^t \Phi(t - s') . B . u(s' - t_d) ds'$$

■

Continuando com o sistema em  $s$  (equação 7.6),

$$X(s) = \Phi(s)x_0 + \Phi(s)BU(s)e^{-st_d}$$

com  $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$ , é então necessário calcular  $\Phi(s)$ , sabendo que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

logo vem:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \rightarrow \Phi(s) = \left( s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1}$$

através do cálculo da inversa da matriz, obtém-se

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Calculando a transformada inversa de Laplace vem para  $\Phi(s)$ , em ordem ao tempo:

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Discretizando (7.5) com período de amostragem  $h$ , o sistema em tempo discreto equivalente é

$$\begin{cases} x_{r,k} = \Phi_r x_{r,k-1} + \Gamma_r u_{k-1} \\ y_k = C_r x_{r,k} \end{cases} \quad (7.7)$$

onde  $\Phi_r$  e  $\Gamma_r$  são respectivamente as matrizes<sup>2</sup> de estado (ou de ‘transição de estados’) e de comando, e  $C_r$  é a matriz de saída.

Considerando tempos de atraso arbitrários

$$t_d = (d - 1)h + \tau', \quad 0 < \tau' \leq h \quad (7.8)$$

onde  $d$  é inteiro, são obtidas as seguintes equações [18]:

$$x_{r,k} = [x_k \quad u_{k-d} \quad \cdots \quad u_{k-2} \quad u_{k-1}]^T \quad (7.9)$$

$$\Phi_r = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Gamma_1 & \Gamma_0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

$$\Gamma_r = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]^T \quad (7.11)$$

$$C_r = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0] \quad (7.12)$$

Para o modelo de posição, e relativamente a  $x_{r,k}$  (7.9),  $x_k$  tem dois estados que representam a posição e a derivada de posição. Os outros estados de  $x_{r,k}$  aparecem devido aos tempos-mortos.

Deste modo, para tempos de atraso arbitrários, obtém-se a seguinte equação:

$$x_{r,k} = \Phi_1 \cdot x_{r,k-1} + \Gamma_0 \cdot u_{k-(d-1)-1} + \Gamma_1 \cdot u_{k-d-1} \quad (7.13)$$

onde  $\Phi_1$ ,  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$  são dados por (7.14) a (7.16), respectivamente

$$\Phi_1 = e^{Ah} \equiv \Phi(h) \quad (7.14)$$

---

<sup>2</sup>A matriz  $\Phi_r$ , caracteriza a “personalidade do sistema”, porque define como o estado evolui ao longo do tempo. A matriz  $\Gamma_r$ , funciona como “uma fronteira”, dado que relaciona a ‘intervenção do exterior’ com o sistema.

$$\Gamma_0 = \int_0^{h-\tau'} \Phi(\lambda) d\lambda B \quad (7.15)$$

$$\Gamma_1 = \Phi(h - \tau') \int_0^{\tau'} \Phi(\lambda) d\lambda B \quad (7.16)$$

Para o modelo de posição, as matrizes de transição de estado e de comando, em tempo contínuo, são

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (7.17)$$

A partir de (7.17), o cálculo computacional de  $\Phi_1$ ,  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$  é fácil de realizar e de compreender.

Assim, calculando  $\Phi_1$ ,  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$  obtém-se:

$$\Phi_1 = e^{Ah} \equiv \Phi(h) = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

$$\Gamma_0 = \int_0^{h-\tau'} \Phi(\lambda) d\lambda B = \int_0^{h-\tau'} \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} d\lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \int_0^{h-\tau'} \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} d\lambda = \begin{bmatrix} \frac{\lambda^2}{2} \\ \lambda \end{bmatrix}_0^{h-\tau'} = \begin{bmatrix} \frac{(h-\tau')^2}{2} \\ h - \tau' \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \Phi(h - \tau') \int_0^{\tau'} \Phi(\lambda) d\lambda B = \begin{bmatrix} 1 & (h - \tau') \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \int_0^{\tau'} \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} d\lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & (h - \tau') \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\tau'^2}{2} \\ \tau' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\tau' h - \tau'^2}{2} \\ \tau' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.20)$$

Substituindo os valores de  $\Phi_1$ ,  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$  na equação (7.13) obtém-se:

$$x_{r,k} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Phi_1} x_{r,k-1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{(h-\tau')^2}{2} \\ h - \tau' \end{bmatrix}}_{\Gamma_0} u_{k-(d-1)-1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2\tau' h - \tau'^2}{2} \\ \tau' \end{bmatrix}}_{\Gamma_1} u_{k-d-1} \quad (7.21)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} . x_{r,k} = x_{1,k} .$$

Então, para o modelo de posição,  $t_d$  assume o valor de  $t_d = 2h$  (valor obtido experimentalmente). De (7.8),

$$\tau' = h \quad \text{e} \quad d = 2,$$

e substituindo na equação (7.21), vem

$$x_{r,k} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_{r,k-1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{(h-h)^2}{2} \\ h-h \end{bmatrix}}_0 u_{k-2} + \begin{bmatrix} \frac{2hh-h^2}{2} \\ h \end{bmatrix} u_{k-3} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_{r,k-1} + \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} \\ h \end{bmatrix} u_{k-3}.$$

Como duas variáveis de estado extra são introduzidas no modelo discreto, devido ao atraso, o modelo global em espaço de estados pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-2} \\ u_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Gamma_1 & \Gamma_0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ u_{k-3} \\ u_{k-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} u_{k-1}.$$

Como neste caso existem para  $x_k$  dois estados, pode-se escrever finalmente, o modelo discreto como

$$\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ u_{k-2} \\ u_{k-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & h & h^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Phi_r} \cdot \begin{bmatrix} x_{1,k-1} \\ x_{2,k-1} \\ u_{k-3} \\ u_{k-2} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma_r} u_{k-1} \quad (7.22)$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_r} \cdot x_{r,k} = x_{1,k}.$$

### 7.1.2 Discretização do Modelo de Velocidade

Considerando a equação (7.2), pode-se escrever o sistema SISO desacoplado para o modelo de velocidade como,

$$G_V(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{y_2(s)}{v_2(s)} = \frac{e^{-sT_d v}}{s} \quad \rightarrow \quad Y(s) = U(s) \cdot e^{-sT_d v} \quad (7.23)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace a (7.23), e substituindo  $t_d = Td_V$ , a representação temporal equivalente de (7.2) é

$$\dot{y} = u(t - t_d) \quad (7.24)$$

onde  $y$  é a saída e  $u$  é a entrada. Definindo como variável de estado  $x = y$ , (7.24) pode ser escrita na forma compacta em espaço de estados (7.5), como

$$\begin{cases} \dot{x} = 0x(t) + 1u(t - t_d) \\ y = 1x(t) = x_1 \end{cases} \quad (7.25)$$

onde neste caso  $A$ ,  $B$  e  $C$  são escalares.

Tal como no caso anterior, e recorrendo à *Proposição 3*, o sistema em  $s$  pode ser descrito por

$$X(s) = \Phi(s)x_0 + \Phi(s)BU(s)e^{-st_d}$$

com

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \rightarrow \Phi(s) = (s1 - 0)^{-1} = s^{-1} = \frac{1}{s}$$

Calculando a transformada inversa de Laplace vem para  $\Phi(s)$ , em ordem ao tempo:

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \right] \rightarrow \Phi(t) = 1;$$

Procedendo-se à discretização com período de amostragem  $h$ , o sistema em tempo discreto equivalente pode ser escrito como em (7.7). Assim, considerando tempos de atraso arbitrários e as equações (7.14), (7.15) e (7.16) obtêm-se, para o modelo da velocidade, os  $\Phi_1$ ,  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$  seguintes:

$$\Phi_1 = e^{Ah} \equiv \Phi(h) = 1 \quad (7.26)$$

$$\Gamma_0 = \int_0^{h-\tau'} \Phi(\lambda) d\lambda B = \int_0^{h-\tau'} 1 \cdot d\lambda \cdot 1 = \int_0^{h-\tau'} 1 \cdot d\lambda = h - \tau' \quad (7.27)$$

$$\Gamma_1 = \Phi(h - \tau') \int_0^{\tau'} \Phi(\lambda) \cdot d\lambda \cdot B = 1 \int_0^{\tau'} 1 \cdot d\lambda \cdot 1 = \tau' \quad (7.28)$$



Substituindo os valores de  $\Phi_1$ ,  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$  em (7.13), obtém-se a seguinte expressão:

$$x_{r,k} = \underbrace{1}_{\Phi_1} x_{r,k-1} + \underbrace{h - \tau'}_{\Gamma_0} u_{k-(d-1)-1} + \underbrace{\tau'}_{\Gamma_1} u_{k-d-1} \quad (7.29)$$

$$y_k = 1 \cdot x_{r,k} = x_k .$$

Considerando que no modelo de velocidade  $t_d$  assume o valor de  $t_d = h$  (valor obtido experimentalmente). De (7.8),

$$\tau' = h \quad \text{e} \quad d = 1$$

e substituindo na equação (7.29) vem

$$x_{r,k} = 1 \cdot x_{r,k-1} + \underbrace{h - h}_0 u_{k-1} + h \cdot u_{k-2} = \underbrace{1}_{\Phi_1} \cdot x_{r,k-1} + \underbrace{h}_{\Gamma_1} \cdot u_{k-2}$$

O sistema discreto tem uma variável de estado que representa a velocidade,  $x_k$ , e uma variável de estado extra devido ao tempo-morto. Então, o modelo discreto, em espaço de estados, pode ser escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} x_k \\ u_{k-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Phi_r} \cdot \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ u_{k-2} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma_r} u_{k-1} \quad (7.30)$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C_r} \cdot x_{r,k} = x_k .$$

## 7.2 Colocação de Pólos

O controlo de seguimento de caminho (posição), bem como o controlo de velocidade, podem ser considerados simples problemas de regulação. Assumindo que os sistemas estão sujeitos a perturbações “não-nulas”, e como se está perante problemas de regulação, o objectivo dos controladores será ‘conduzir’ os sistemas para os valores de referência. Então, este objectivo é conseguido através da obtenção de leis de controlo, por realimentação das variáveis de estado, da forma

$$u_k = -L x_{r,k} \quad \text{onde} \quad L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & \cdots & L_n \end{bmatrix}$$

de modo a que os sistemas em malha fechada obtenham uma equação característica que permita garantir que as perturbações decaiam, isto é, sejam compensadas.

No seguimento de caminho é indesejável a presença de sobrelevações. Assim, foi escolhido um comportamento criticamente amortecido ( $\zeta = 1$ ) para as malhas de realimentação linear.

### 7.2.1 Modelo de Posição

Verifica-se que, para o modelo discreto de posição (secção 7.1.1), o sistema é de dimensão  $n = 4$  (i.e. dois para o estado  $x_k$ , e dois estados adicionais devidos ao tempo-morto<sup>3</sup> de  $d = 2$ ). Assim, os quatro pólos em malha fechada podem ser mapeados em qualquer parte do plano  $z$ . Se o atraso não for considerado, o polinómio característico do sistema em malha fechada, no domínio contínuo, é:

$$s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2$$

onde  $w_n$  é a frequência natural. A sua representação discreta equivalente é

$$z^2 + a_1 z + a_2$$

com

$$a_1 = -2e^{-\zeta w_n h} \cos\left(\sqrt{1 - \zeta^2} w_n h\right) = -2e^{-w_n h},$$

$$a_2 = e^{-2\zeta w_n h} = e^{-2w_n h}.$$

De modo a proporcionar uma ‘navegação’ suave, aquando da selecção da constante de tempo em malha fechada teve-se em consideração a constante de tempo dos motores, e a necessidade de um perfil de aceleração suave (i.e. sem acelerações bruscas). Deste modo, e considerando um sistema criticamente amortecido, foi escolhida a constante de tempo em malha fechada

$$\tau_c = \frac{1}{w_n} = 2 [s].$$

Os dois pólos adicionais devem ser mapeados longe dos dois pólos dominantes, de modo a que a sua influência no sistema em malha fechada seja

---

<sup>3</sup>O tempo-morto é por vezes referido como atraso puro.

ignorada. Então, os pólos em malha fechada são mapeados na origem, i.e.  $z=0$ , e o polinómio característico, para este caso, é

$$P(z) = (z - 0)^2 \cdot (z^2 + a_1z + a_2) = z^4 + a_1z^3 + a_2z^2. \quad (7.31)$$

Logo, o ganho de realimentação de estado ( $L$ ) pode ser calculado usando a fórmula de Ackermann,

$$L = [ 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 ] W_c^{-1} P(\Phi_r).$$

onde  $W_c$  é a matriz de “alcançabilidade” do sistema,

$$W_c = [ \Gamma_r \quad \Phi_r \Gamma_r \quad \dots \quad \Phi_r^{n-1} \Gamma_r ]$$

e  $P(\Phi_r)$  é o polinómio característico em  $\Phi_r$ ,  $P(\Phi_r) = P(z)|_{z=\Phi_r}$ , donde

$$P(\Phi_r) = \Phi_r^{d+2} + a_1 \Phi_r^{d+1} + a_2 \Phi_r^d.$$

Assim, para este caso, tendo em consideração as expressões anteriores, bem como as obtidas na secção (7.1.1), vem

$$W_c = [ \Gamma_r \quad \Phi_r \Gamma_r \quad \Phi_r^2 \Gamma_r \quad \Phi_r^3 \Gamma_r ] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h^2/2 & 3h^2/2 \\ 0 & 0 & h & h \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$P(\Phi_r) = \Phi_r^4 + a_1 \Phi_r^3 + a_2 \Phi_r^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + a_1 + a_2 & 4h + 3a_1h + 2a_2h & \frac{(7h^2 + 5a_1h^2 + 3a_2h^2)}{2} & \frac{(5h^2 + 3a_1h^2 + a_2h^2)}{2} \\ 0 & 1 + a_1 + a_2 & h + a_1h + a_2h & h + a_1h + a_2h \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$L = [ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 ] W_c^{-1} P(\Phi_r) =$$

$$= \left[ (1 + a_1 + a_2)/h^2 \quad (7 + 5a_1 + 3a_2)/2h \quad 3 + 2a_1 + a_2 \quad 2 + a_1 \right].$$

### 7.2.2 Modelo de Velocidade

Para o modelo discreto de velocidade (7.30), verifica-se que o sistema é de dimensão  $n = 2$  (i.e. um para o estado  $x_k$  e um estado adicional devido ao tempo-morto de  $\mathbf{d} = 1$ ). Assim, os dois pólos em malha fechada podem ser mapeados em qualquer lugar do plano  $z$ . Se o tempo-morto não for considerado, o polinómio característico do sistema em malha fechada, no domínio contínuo, é:

$$s + \frac{1}{\tau_c}$$

onde  $\tau_c$  é a constante de tempo em malha fechada.

A sua representação discreta é  $z - a_1$ , com  $a_1 = e^{-\frac{1}{\tau_c}h}$ . Tal como para o modelo de posição, foi escolhida a constante de tempo em malha fechada  $\tau_c = 2$  [s]. O pólo adicional deve ser mapeado longe do pólo dominante, de modo a que a sua influência no sistema em malha fechada seja ignorada. Escolhendo o mapeamento  $z=0$ , o polinómio característico para este caso é

$$P(z) = (z - 0).(z - a_1) = z^2 - za_1,$$

e o ganho de realimentação de estado é calculado, usando a fórmula de Ackermann, como se segue:

$$L = [ 0 \quad 1 ] W_c^{-1} P(\Phi_r)$$

onde  $W_c = [ \Gamma_r \quad \Phi_r \Gamma_r ]$ , e  $P(\Phi_r) = \Phi_r^2 - a_1 \Phi_r$ .

Logo, para o modelo de velocidade os valores obtidos são:

$$W_c = \begin{bmatrix} 0 & h \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P(\Phi_r) = \begin{bmatrix} 1 - a_1 & h - a_1 h \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \frac{(1-a_1)}{h} & \frac{(h-a_1 h)}{h} \end{bmatrix}.$$

## 7.3 Controlador AOB

Uma realimentação de estado (e.g. controlo adaptativo, controlo de colocação de pólos e controlo óptimo) pode ser usada para controlar um sistema linear representado em espaço de estados por (7.7), que no entanto não representa exactamente o sistema real, uma vez que termos não modelados incluindo perturbações desconhecidas, incompatibilidade de parâmetros, acoplamentos, ruído, entre outros, não são abordados no projecto de controlo.

Perturbações, ruído e não-linearidades estão sempre presentes em sistemas de controlo complexos. A sua presença num modelo dinâmico pode ser devida à natureza intrínseca do sistema ou introduzida por fontes externas. O projecto de controlo em espaço de estados do AOB usa o projecto do filtro de Kalman, numa estrutura de controlo de realimentação não-clássica, para obter um comportamento em malha fechada desejado, negligenciando os termos não modelados. Com este propósito o AOB usa um observador baseado no Kalman de modo a estimar o estado do sistema e as suas perturbações. Para atingir este objectivo, é necessário:

- Uma especificação do sistema, em malha fechada, desejado.
- Uma equação extra, referida à entrada do sistema, para estimar uma perturbação equivalente. Um estado activo  $\hat{p}_k$  (estado-extra) é gerado para eliminar aquela perturbação equivalente, compensando os termos não modelados. Note-se que esta perturbação equivalente existe sempre que o sistema físico seja diferente do modelo desejado.
- O projecto estocástico das matrizes de Kalman  $Q$  e  $R$  para o controlador AOB.

### 7.3.1 Estrutura do AOB - AOB-1

O algoritmo AOB de primeira-ordem (AOB-1), é apresentado de forma resumida nesta secção. Dado um sistema com equações

$$x_{r,k} = \Phi_r x_{r,k-1} + \Gamma_r u_{k-1} + \xi_{x_k} \quad (7.32)$$

e

$$y_k = C_r x_{r,k} + \eta_k \quad (7.33)$$

um observador de estado pode ser escrito como

$$\hat{x}_{r,k} = \Phi_r \hat{x}_{r,k-1} + \Gamma_r u_{k-1} + K_k [y_k - C_r (\Phi_r \hat{x}_{r,k-1} + \Gamma_r u_{k-1})] \quad (7.34)$$

onde  $\xi_{x_k}$  e  $\eta_k$  são variáveis aleatórias Gaussianas, que são fundamentais para o projecto do AOB.  $\xi_{x_k}$  está associado com o sistema e representa as incertezas de modelo,  $\eta_k$  está associado com as medições e representa as incertezas de medida.  $K_k$  é o ganho de Kalman e reflecte a incerteza associada a cada estado, baseado nas incertezas do modelo e das medidas.

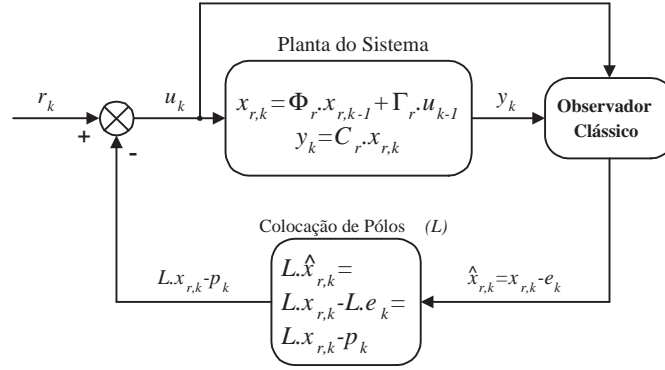


Figura 7.1: Observador Clássico. O erro do observador  $-e_k$  é uma entrada indesejada que entra no sistema.  $L$  representa o ganho (i.e. o controlador).

O erro de reconstrução,  $e_k$ , pode ser definido como

$$e_k = x_{r,k} - \hat{x}_{r,k} \quad \rightarrow \quad \hat{x}_{r,k} = x_{r,k} - e_k. \quad (7.35)$$

Em presença de termos não modelados este erro existe sempre. O erro  $e_k$  do observador (ver a figura 7.1) entra no sistema como uma entrada adicional indesejada,  $p_k$ .

$$p_k = L.e_k,$$

onde  $L$  é o ganho de realimentação de estado do controlador, que pode ou não variar com o tempo. O observador recebe a entrada  $u_k$  dada por

$$u_k = r_k - L(x_{r,k} - e_k) = r_k - L.x_{r,k} + p_k$$

onde  $r_k$  é a referência. O observador clássico não é capaz de distinguir  $p_k$  de  $r_k$ , uma vez que ele não conhece o comportamento em malha fechada desejado. Para ultrapassar esta dificuldade, é necessário que o observador conheça a referência  $r_k$ . O comportamento em malha fechada desejado (que não deveria ser afectado pelas perturbações, o que significa que o efeito de  $p_k$  deveria ser anulado) é expresso por

$$x_{r,k} = \Phi_r x_{r,k-1} + \Gamma_r (r_{k-1} - L.x_{r,k-1}) + \xi_{x_k} \quad (7.36)$$

Definindo a matriz da malha fechada  $\Phi_c = \Phi_r - \Gamma_r L$ , (7.36) pode ser escrita como

$$x_{r,k} = \Phi_c x_{r,k-1} + \Gamma_r.r_{k-1} + \xi_{x_k}. \quad (7.37)$$

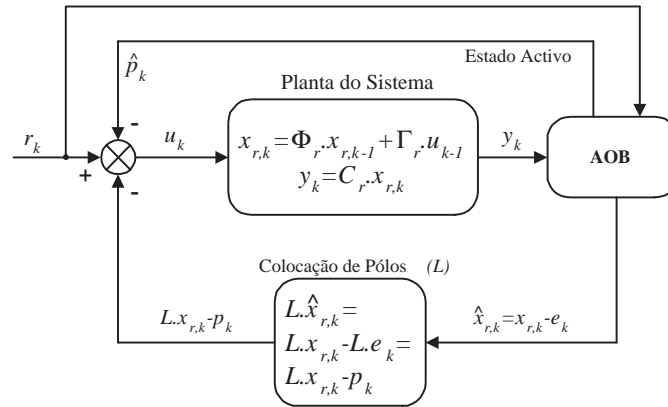


Figura 7.2: Controlador AOB.  $L$  representa o ganho (i.e. o controlador) e o estado activo  $\hat{p}_k$  compensa o erro  $e_k$  referente à entrada do sistema.

Para a estrutura do AOB representada na figura 7.2 verifica-se, para o sistema em malha fechada apresentado, que a acção do estado activo,  $\hat{p}_k$ , permite compensar o erro  $e_k$ . O observador, apesar de ter como entrada  $r_k$  em vez de  $u_k$ , “vê” o sistema em malha aberta<sup>4</sup> [51]. Então, se for usado um observador activo baseado no Kalman, as matrizes do sistema em malha aberta são usadas no cálculo do ganho  $K_k$ . Como se tornará claro mais adiante no texto, para obter o estado estimado  $\hat{x}_{r,k}$ , o sistema em malha fechada (7.37), na sua versão aumentada, é usado em vez do sistema em malha aberta (7.32), de modo a que o comportamento em malha fechada desejado seja imposto. Na figura 7.2, verifica-se que a perturbação equivalente indesejada  $p_k$  é cancelada pelo estado activo  $\hat{p}_k$ , permitindo que o sistema global tenha o comportamento desejado.

Seguidamente, vão ser apresentadas sucintamente as equações usadas na abordagem AOB. Uma equação em espaço de estados deve ser encontrada para caracterizar a entrada indesejada  $p_k$ , conduzindo o sistema a uma representação de estados estendida. Para o AOB-1, a equação de espaço de estados de  $p_k$  é

$$p_k = p_{k-1} + w_k, \quad (7.38)$$

onde  $w_k$  está associado com  $p_k$  e representa as incertezas no modelo da

<sup>4</sup>Neste contexto, malha aberta significa que a matriz de estado não considera a influência da realimentação de estado.

perturbação.  $w_k$  é uma variável aleatória Gaussiana com média zero. A equação (7.38) representa a primeira derivada (ou evolução de primeira ordem) de  $p_k$ . Logo, pode concluir-se que,  $w_k$  descreve a evolução de primeira ordem de  $p_k$ . Definindo  ${}^N w_k$  como sendo a evolução de ordem<sup>5</sup>  $N$  de  $w_k$  (ou a evolução de ordem  $(N + 1)$  de  $p_k$ ) como [51],

$${}^N w_k = {}^{N-1} w_k - {}^{N-1} w_{k-1}, \quad \text{com} \quad {}^0 w_k = w_k \quad (7.39)$$

a forma geral de (7.38) é dada por

$$p_k = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} \frac{N!}{j!(N-j)!} p_{k-j} + {}^{N-1} w_k. \quad (7.40)$$

A cada intervalo de tempo, existe uma variável aleatória  $w_k$  com uma distribuição Gaussiana de média zero e variância  $\sigma_{w_k}^2$ . Para o AOB-1, apenas a variância de  $w_k$ ,  $\sigma_{w_k}^2$ , é necessária para estimar  $p_k$ . Se  $w_k$  aumenta, consequentemente a incerteza na derivada  $p_k$  aumenta também (isto significa que a confiança no modelo do sistema diminui) [51].

Inserindo  $p_k$ , o sistema global pode ser descrito por

$$\begin{bmatrix} x_{r,k} \\ p_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_r & \Gamma_r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{r,k-1} \\ p_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_r \\ 0 \end{bmatrix} u_{k-1} + \begin{bmatrix} \xi_{x_k} \\ w_k \end{bmatrix} \quad (7.41)$$

onde

$$u_{k-1} = r_{k-1} - \begin{bmatrix} L & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{r,k-1} \\ \hat{p}_{k-1} \end{bmatrix} \quad (7.42)$$

e

$$y_k = C_a \begin{bmatrix} x_{r,k} & p_k \end{bmatrix}^T + \eta_k \quad (7.43)$$

com a matriz de saída estendida (ou aumentada)  $C_a$  dada por

$$C_a = \begin{bmatrix} C_r & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.44)$$

O sistema em malha fechada desejado de (7.41) é

$$\begin{bmatrix} x_{r,k} \\ p_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_r - \Gamma_r L & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{r,k-1} \\ p_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_r \\ 0 \end{bmatrix} r_{k-1} + \begin{bmatrix} \xi_{x_k} \\ w_k \end{bmatrix}. \quad (7.45)$$

<sup>5</sup> $N$  representa também a ordem do AOB.



O valor de  $\xi_{x_k}$  deve ser baixo, reflectindo desta forma grande confiança no modelo, permitindo que todos os erros de modelação do sistema sejam compensados em  $p_k$ .

No AOB, comparativamente com a estrutura do observador clássico, ocorrem duas alterações fundamentais: 1) Na equação do observador são utilizadas as matrizes do sistema em malha-fechada, existindo também a variável de estado-extra referente à perturbação equivalente; 2) Nas equações de Kalman (ou ganho de Kalman), utilizam-se as matrizes aumentadas do sistema em malha-aberta ( $\Phi_a$  e  $C_a$ ). Este novo observador-controlador tem a característica de impor o comportamento desejado (projectado) ao sistema global. Assim, a estimação de estado considera: a) a influência da incerteza  $\xi_{x_k}$  nas variáveis de estado; b) o valor da entrada de referência; c) a representação de estados estendida, e d) a resposta desejada em malha fechada.

O estado estimado de (7.41), é baseado no sistema em malha-fechada desejado (7.45) (i.e.  $\hat{p}_k = p_k$  e  $\hat{x}_{r,k} = x_{r,k}$ ), e é dado por

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{r,k} \\ \hat{p}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_r - \Gamma_r L & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{r,k-1} \\ \hat{p}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_r \\ 0 \end{bmatrix} r_{k-1} + K_k (y_k - \hat{y}_k) \quad (7.46)$$

com

$$\hat{y}_k = C_a \left( \begin{bmatrix} \Phi_r - \Gamma_r L & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{r,k-1} \\ \hat{p}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_r \\ 0 \end{bmatrix} r_{k-1} \right).$$

O estado activo<sup>6</sup>  $\hat{p}_k$  é uma estimativa da perturbação equivalente  $p_k$ , permitindo cancelar a influência desta perturbação na entrada do sistema e obter o comportamento desejado do sistema global.

$K_k$  é calculado a partir de

$$K_k = P_{1k} C_a^T [C_a P_{1k} C_a^T + R_k]^{-1} \quad (7.47)$$

com

$$P_{1k} = \Phi_a P_{k-1} \Phi_a^T + Q_k \quad (7.48)$$

e

$$P_k = P_{1k} - K_k C_a P_{1k} \quad (7.49)$$

---

<sup>6</sup>O estado activo só actua quando não é seguido o “modelo” desejado.

onde  $P_k$  é a matriz de erro quadrático médio<sup>7</sup>, e o seu valor inicial deve reflectir pelo menos a incerteza na estimação de estado.  $\Phi_a$  é a matriz aumentada do sistema em malha aberta,

$$\Phi_a = \begin{bmatrix} \Phi_r & \Gamma_r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.50)$$

$Q_k$  é a matriz do ruído do sistema (representa a incerteza do modelo, para os estados  $x_{r,k}$ ), e é dada por

$$Q_k = \begin{bmatrix} Q_{x_{r,k}} & 0 \\ 0 & Q_{p_k} \end{bmatrix}. \quad (7.51)$$

A matriz  $Q_k$  para o estado  $x_{r,k}$  é definida como  $Q_{x_{r,k}} = E \{ \xi_{x_k} \xi_{x_k}^T \}$ , e para o estado activo como  $Q_{p_k} = E \{ w_k^2 \} = \sigma_{w_k}^2$ .

$R_k$  é a matriz do ruído de medição<sup>8</sup>,

$$R_k = E \{ \eta_k \eta_k^T \}$$

e representa a incerteza da medição. Note que  $P_k$  não deve ser inferior à matriz inicial  $Q_k$ .

### 7.3.2 AOB-N

Se a perturbação equivalente modelada por  $p_k$  tiver uma forma constante, a sua derivada tem o valor zero, sendo bem descrita por (7.38), logo utiliza-se o AOB-1. No entanto se  $p_k$  tiver uma forma em rampa, uma forma quadrática ou qualquer outra forma não-linear, a sua primeira derivada não é bem definida pelas propriedades estatísticas de  $w_k$ . É necessário então, “ir até” à derivada de ordem  $N$  de  $p_k$  para encontrar uma boa semelhança com uma variável Gaussiana de média zero. Torna-se então necessário utilizar o AOB-N.

---

<sup>7</sup>Para a implementação computacional do algoritmo é necessário fornecer uma estimativa inicial  $\hat{x}_0$  e a respectiva qualidade dessa estimativa, i.e. de  $P_0$ . Quanto maior for  $Q_0$ , maior deve ser  $P_0$ .  $P_0$  não deve ser mais pequeno que  $Q_0$  de modo a prevenir sobrelevações na convergência de  $P_k$  [51].

<sup>8</sup>Neste caso, dado que o sistema é completamente observável, apenas a “saída” (depois de corrompida por ruído branco) é lida para reconstruir o vector de estado. Assim,  $R_k$  será um escalar.

Após a obtenção do algoritmo para o AOB-1 (secção 7.3.1), a generalização para o AOB-N (algoritmo AOB geral) é fácil de compreender. O aumento da ordem do AOB, vai permitir que não-linearidades mais ‘fortes’ sejam seguidas com um erro de estado estacionário zero. O AOB-N usa (7.40) para descrever  $p_k$ .

### Algoritmo AOB-N

O algoritmo de AOB-1 tem de ser ligeiramente modificado para obter o algoritmo de AOB-N. Apenas a equação de estado activo vai ser sujeita a alterações, obrigando a ligeiras modificações no projecto global do AOB-1.

A equação (7.40) tem a seguinte representação em espaço de estados

$$\begin{bmatrix} p_{k-(N-1)} \\ p_{k-(N-2)} \\ \vdots \\ p_{k-1} \\ p_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_N & a_{N-1} & a_{N-2} & \cdots & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{k-N} \\ p_{k-(N-1)} \\ \vdots \\ p_{k-2} \\ p_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ {}^{N-1}w_k \end{bmatrix} \quad (7.52)$$

com

$$a_i = (-1)^{i+1} \frac{N!}{i!(N-i)!} \quad i = 1, \dots, N$$

Escrevendo (7.52) como

$${}^N p_k = \Phi_{2,2} {}^N p_{k-1} + {}^N \xi_k, \quad (7.53)$$

a equação (7.41), tendo em consideração (7.7), (7.10), (7.11) e (7.53), é agora representada por

$$\begin{bmatrix} x_{r,k} \\ {}^N p_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_r & \Phi_{1,2} \\ 0 & \Phi_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{r,k-1} \\ {}^N p_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_r \\ 0 \end{bmatrix} u_{k-1} + \begin{bmatrix} \xi_k \\ {}^N \xi_k \end{bmatrix}$$

onde  $x_{r,k}$  é dado pela equação (7.9), e

$${}^N p_k = [ p_{k-(N-1)} \quad p_{k-(N-2)} \quad \cdots \quad p_{k-1} \quad p_k ]^T,$$

$\Phi_{2,2}$  é a matriz de ‘estados’ de (7.52) e

$$\Phi_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

$\xi_k$ , tal como já referido, representa a incerteza associada ao modelo (estados) de  $x_{r,k}$ , e

$${}^N \xi_k = [ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ {}^{N-1}w_k ]^T . \quad (7.54)$$

O sistema em malha fechada desejado (7.45) é alterado para

$$\begin{bmatrix} x_{r,k} \\ {}^N p_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_L & 0 \\ 0 & \Phi_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{r,k-1} \\ {}^N p_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_r \\ 0 \end{bmatrix} r_{k-1} + \begin{bmatrix} \xi_k \\ {}^N \xi_k \end{bmatrix}$$

com

$$\Phi_L = \Phi_r - \Phi_{1,2} \cdot L = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Gamma_1 & \Gamma_0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -L_1 & -L_2 & -L_3 & \cdots & -L_n \end{bmatrix}$$

os componentes<sup>9</sup>  $L(L_1, \dots, L_n)$  podem ser obtidos pela fórmula de Ackermann

$$L = [ 0 \ \cdots \ 0 \ 1 ] W_c^{-1} P(\Phi_r) ,$$

onde  $W_c$  é a matriz de “alcançabilidade” do sistema,

$$W_c = [ \Gamma_r \ \Phi_r \Gamma_r \ \cdots \ \Phi_r^{n-1} \Gamma_r ]$$

e  $P(\Phi_r)$  é o polinómio característico desejado. A estimação de estados é agora para o AOB-N dada por:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{r,k} \\ {}^N \hat{p}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_L & 0 \\ 0 & \Phi_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{r,k-1} \\ {}^N \hat{p}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_r \\ 0 \end{bmatrix} r_{k-1} + K_k (y_k - \hat{y}_k) \quad (7.55)$$

com

$$\hat{y}_k = C_a \left( \begin{bmatrix} \Phi_L & 0 \\ 0 & \Phi_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{r,k-1} \\ {}^N \hat{p}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_r \\ 0 \end{bmatrix} r_{k-1} \right) .$$

$K_k$  é calculado a partir de (7.47) até (7.49), considerando neste caso

$$\Phi_a = \begin{bmatrix} \Phi_r & \Phi_{1,2} \\ 0 & \Phi_{2,2} \end{bmatrix} .$$

---

<sup>9</sup> $n$  é a dimensão do sistema (i.e. representa o número de estados).

### Matrizes de Covariâncias do AOB-N

$Q_k$  é uma matriz muito importante no AOB-N, como será verificado na secção 7.3.3. Uma vez projectado  $Q_k$ , o valor inicial de  $P_k$  é facilmente calculado computacionalmente (tendo em atenção que  $P_0 \geq Q_0$ ) e  $R_k$  é apenas função das características dos sensores. A forma de  $Q_k$  é

$$Q_k = \begin{bmatrix} Q_{x_{r,k}} & 0 \\ 0 & Q_{N_{p_k}} \end{bmatrix}. \quad (7.56)$$

$Q_{x_{r,k}}$  é uma matriz diagonal e depende da estratégia dos estados  $x_{r,k}$ . A incerteza associada com  $x_{r,k}$  deve ser baixa, uma vez que todas as perturbações do sistema devem ser compensadas por  $N_{p_k}$ . Por isso,  $Q_{x_{r,k}}$  deve ter valores baixos quando comparados com  $Q_{N_{p_k}}$ .  $Q_{N_{p_k}}$  é definido como

$$Q_{N_{p_k}} = E \{ {}^N \xi_k \cdot {}^N \xi_k^T \}.$$

De (7.54)

$$Q_{N_{p_k}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{N-1w_k}^2 \end{bmatrix},$$

onde  $\sigma_{N-1w_k}^2$  representa a variância da derivada de ordem  $N$  de  $p_k$ , e está relacionada com  $\sigma_{w_k}^2$  pelo teorema seguinte:

**Teorema 2.** *Se as variáveis  $w_k$  são independentes e com média zero, a relação entre  $\sigma_{Nw_k}^2$  e  $\sigma_{w_k}^2$  é dada por*

$$\sigma_{Nw_k}^2 = \sigma_{w_k}^2 \sum_{j=0}^N \left( \frac{N!}{j!(N-j)!} \right)^2 \cdot \gamma^N \quad (7.57)$$

onde  $\gamma$  ( $0 < \gamma < 1$ ) é um factor que reduz  $\sigma_{Nw_k}^2$  à medida que a ordem do AOB aumenta, tendo assim, como objectivo, reduzir a actividade do estado activo e consequentemente melhorar a estabilidade relativa do AOB.

**Prova:** Ver Cortesão [51].

■

### 7.3.3 Estratégias de Estimação e de Estabilidade do AOB

Uma propriedade importante do ganho de Kalman é a possibilidade de permitir definir diferentes estratégias de estimação, variando apenas os valores de  $Q_k$  e  $R_k$ .

Os valores das matrizes<sup>10</sup>  $Q_k$  e  $R_k$  por si só não têm significado, apesar de poder ser feita uma interpretação qualitativa que facilite o projecto [51],[26]. Assim, se se multiplicar tanto  $Q_k$  como  $R_k$  por um escalar  $\alpha$  ( $\alpha.Q_k$ ,  $\alpha.R_k$ ), o ganho  $K_k$  obtido é o mesmo que no caso de ser usado apenas  $Q_k$  e  $R_k$ . Como tal, o que define o ganho de Kalman, ou a estratégia de estimação, são as relações entre os valores de  $Q_k$ , os valores de  $R_k$ , e ainda a relação entre os valores de  $Q_k$  e de  $R_k$ .

A matriz  $Q_k$  é muito importante no AOB [51], [53]. Em  $Q_k$  (equações (7.51) e/ou (7.56)),  $Q_{x_{r,k}}$  é uma matriz diagonal e depende da estratégia de estimação para o estado  $x_{r,k}$ . A incerteza associada com  $x_{r,k}$  é baixa, uma vez que todas as perturbações do sistema devem ser compensadas por  $p_k$ . Por esse motivo, os valores de  $Q_{x_{r,k}}$  devem ser baixos quando comparados com  $Q_{p_k}$  (ou  $Q_{N_{p_k}}$ ). Neste caso, a estimação para o estado do sistema segue o modelo de referência. Tudo o que não se “ajuste” no modelo de  $x_{r,k}$  vai ser compensado por  $p_k$ .

Para o AOB,  $R_k$  é também muito importante no processo de estimação. O equilíbrio entre as incertezas de modelo e de medição ( $Q_k$  e  $R_k$ , respectivamente), tal como já referido, define o ganho de Kalman para o estado estacionário, o qual influencia a razão de convergência das estimativas. Se a estrutura de  $Q_k$  é conhecida, a relação entre  $R_k$  e  $Q_k$  torna as estimativas mais ( $R_k$  baixo) ou menos ( $R_k$  alto) sensíveis às medições. Então, se  $R_k \gg Q_k$  (significa que o ruído das medidas é muito maior que o do modelo) logo a estimação ‘segue’ o modelo, i.e. Abordagem Baseada no Modelo (MBA). Nesta abordagem a exactidão do modelo deve ser muito boa, quando comparada com a exactidão da medida. Então, a estimação de  $\hat{x}_{r,k}$  é principalmente baseada no modelo, dando pouca importância às medidas. O ganho Kalman tem portanto valores baixos ( $K_k \rightarrow 0$ ).

Por outro lado, se as medidas são muito exactas quando comparadas com

---

<sup>10</sup>Em geral,  $Q_k$  e  $R_k$  não têm as mesmas dimensões tornando as notações  $Q_k \gg R_k$  ou  $R_k \gg Q_k$  matematicamente inconsistentes. Portanto,  $Q_k \gg R_k$  significa que pelo menos um valor de  $Q_k$  é muito maior que os valores  $R_k$ .

a exactidão do modelo, então  $Q_k \gg R_k$  e a estimação ‘segue’ as medições, i.e. Abordagem Baseada nos Sensores (SBA). As estimativas são então muito sensíveis às medidas, e o ganho Kalman tem valores elevados ( $K_k \rightarrow 1$ ).

A estratégia de controlo ideal é obtida através de um compromisso entre o modelo e as medições, i.e. Abordagem Híbrida (HBA). No AOB, a forma geral seguida é o HBA, e permite a troca entre SBA e MBA, isto é, faz o balanço entre as estimativas baseadas na informação dos sensores, e no modelo. Para manter a mesma estratégia à medida que a ordem do AOB muda, alguns ajustes em  $Q_k$  e  $R_k$  podem ser necessários, dado que a matriz do sistema estendido  $\Phi_a$  muda, afectando os valores de  $K_k$ .

Com base nas inúmeras simulações do esquema de controlo AOB, que foram realizadas, pode-se concluir que o esquema de controlo é robusto e estável segundo Lyapunov. A estabilidade é também assegurada pelo facto de todos os valores próprios da matriz de estado ( $\Phi_r - \Gamma_r.L$  ou  $\Phi_L$ ) pertencerem ao círculo de raio unitário. Além disso, Cortesão [51] analisou a estabilidade relativa do AOB usando métodos de Nyquist, tendo provado que à medida que a ordem do AOB aumenta a estabilidade relativa diminui<sup>11</sup>. É possível calcular a ordem máxima do AOB, para um dado sistema, antes de ser atingida a instabilidade. Como esperado, a estabilidade relativa é alta para MBA, média para HBA e baixa para SBA.

## 7.4 Estrutura ‘Experimental’

### 7.4.1 Projecto do Controlador

O esquema do controlo de seguimento de caminho é apresentado na figura 7.3. Nesta,  $r_k$  (onde  $r_k = [r_{1,k} \ r_{2,k}]^T$ ) representa os valores de referência (ou os valores desejados) para as saídas,  $y_{1,k}$  e  $y_{2,k}$  (onde  $y_k = [y_{1,k} \ y_{2,k}]^T = [h_{1,k}(q) \ h_{2,k}(\nu)]^T$ ).  $v_k$  (onde  $v_k = [v_{1,k} \ v_{2,k}]^T$ ) é o erro existente entre os valores actuais e os de referência. Este erro é a entrada para o bloco de realimentação de estado não-linear. O bloco do sistema dinâmico do robô móvel tem como saída, entre outros, as velocidades desejadas para a roda

---

<sup>11</sup>À medida que a ordem do AOB aumenta, a função de transferência da malha introduz um integrador adicional. Fazendo analogia com o domínio- $s$ , mais um pólo em  $s = 0$  desloca a localização do pólo para o semiplano direito, diminuindo a estabilidade relativa.

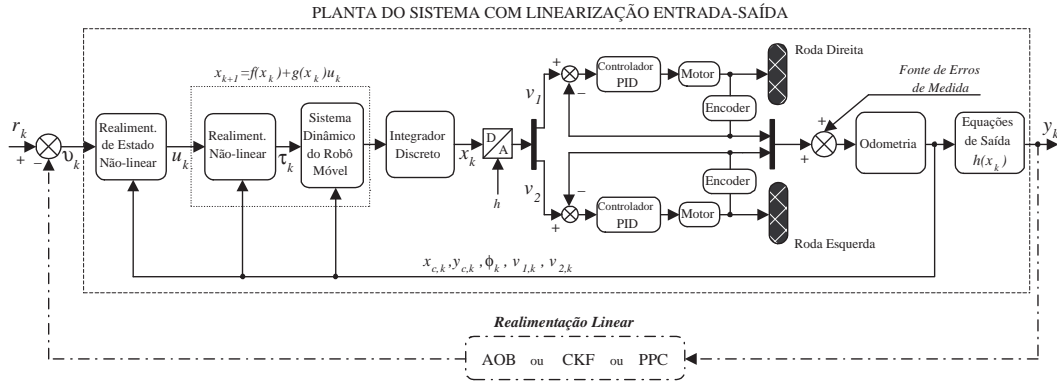


Figura 7.3: Planta detalhada do sistema com linearização por entrada-saída, e alternativas possíveis a colocar na malha de realimentação linear, de modo a realizar o sistema de controle.

direita e esquerda, respectivamente. Estas são comparadas com as velocidades actuais (medidas) do “sistema físico”. O erro obtido tem uma acção directa no sistema físico. Estes “comandos de condução” são aplicados por meio de um controlador PID aos motores. Cada roda (direita e esquerda) é actuada por um motor DC. Os dados proporcionados pelos *encoders* associados aos motores, permitem calcular as velocidades actuais das rodas, e são as entradas para o bloco de odometria. Os dados da odometria são usados por diferentes módulos como é mostrado na figura 7.3. A realimentação não-linear (4.39) permite cancelar a não-linearidade da dinâmica do robô (4.38) de modo a que a equação de estado seja simplificada para a forma da equação (4.40). Este processo é representado pelo bloco com linha pontuada na figura 7.3. Uma realimentação de estado não-linear (5.14), lineariza e desacopla o sistema global em dois sub-sistemas lineares (ver equação 5.21), onde o sub-sistema de controlo de posição é de segunda ordem, e o sub-sistema de controlo de velocidade é de primeira ordem. O bloco com linha tracejada na figura 7.3 representa a “planta do sistema global com linearização entrada-saída” (nas próximas figuras este bloco é identificado pelo seu nome). Por aplicação da linearização entrada-saída obtêm-se dois sistemas lineares desacoplados, que são controlados pela introdução de duas malhas de realimentação linear externas, como é mostrado nas figuras 7.4, 7.5 e 7.6.

Algumas abordagens de controlo, referentes a esta área de estudo, foram desenvolvidas no domínio contínuo. No entanto, quando os sistemas de



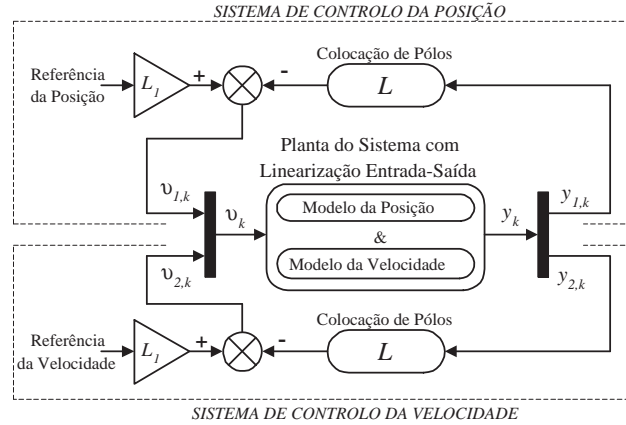


Figura 7.4: Controle de seguimento de caminho com controlador por colocação de pólos.  $L_1$  representa o primeiro elemento dos ganhos  $L$ , calculado para cada um dos modelos.

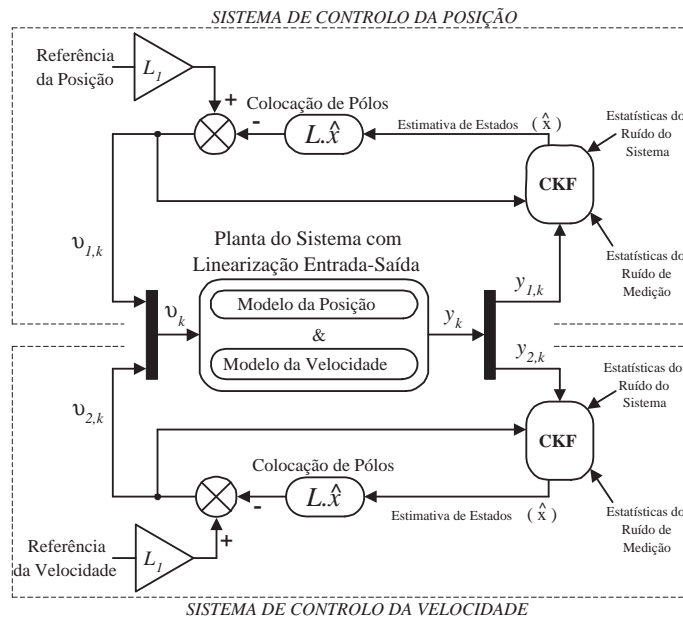


Figura 7.5: Controle do seguimento de caminho com o CKF.  $L_1$  representa o primeiro elemento dos ganhos  $L$ , calculados para cada um dos modelos.

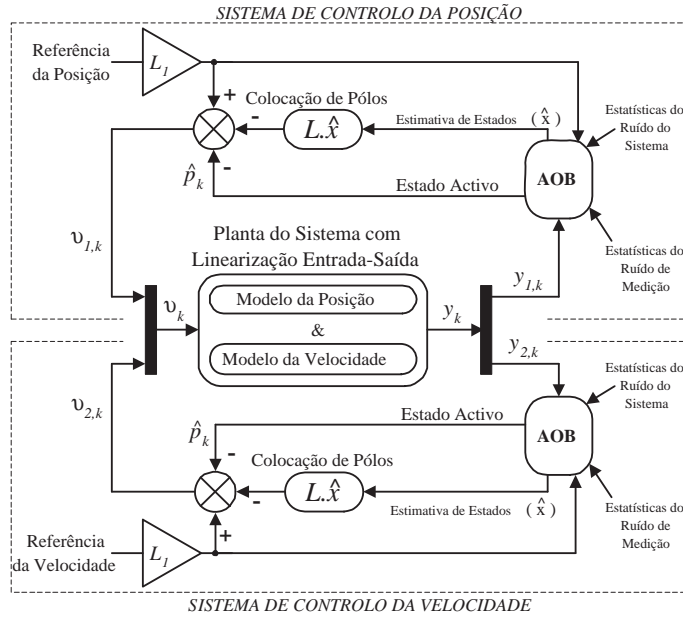


Figura 7.6: Controlo do seguimento de caminho com o AOB.  $L_1$  representa o primeiro elemento dos ganhos  $L$ , calculados para cada um dos modelos.

controlo se tornam discretos, tal como é necessário em aplicações práticas, várias incertezas vão surgir. É necessário utilizar uma estrutura de controlo robusta a variações de parâmetros, ruído de medição, perturbações não previstas e termos não-lineares não-modelados. Além disso, a linearização de realimentação por entrada-saída foi desenvolvida para o domínio de tempo-contínuo, mas, na prática, é implementada como um processo discreto no tempo. Esta abordagem é uma fonte de incertezas adicionais, que necessita de uma malha externa de realimentação linear robusta, capaz de lidar com uma larga gama de incertezas. A necessidade de preencher este requisito, foi a principal motivação para usar a estrutura AOB na malha de controlo de realimentação linear (ver figura 7.6). Este tipo de observador, contrariamente aos clássicos, não estima passivamente o estado do sistema. A figura 7.6 mostra que os valores de referência são fornecidos ao AOB, e que um estado activo  $\hat{p}_k$  (estado-extra) é gerado para eliminar quaisquer perturbações equivalentes, e compensar termos não modelados, permitindo que o sistema em malha fechada apresente a dinâmica desejada.

Neste estudo, os resultados obtidos no seguimento de caminho usando AOB, vão ser comparados com os de outras estratégias de controlo usadas na malha de realimentação linear: CKF (figura 7.5), e PPC (figura 7.4).

### 7.4.2 Matrizes Estocásticas do Modelo de Posição

As matrizes estocásticas do AOB são

$$Q_k = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-4} \end{bmatrix}, \quad (7.58)$$

$R_k = 10^{-3}$  e  $P_0 = Q_0$ . Este projecto origina os seguintes ganhos para o estado estacionário de Kalman:

$$K_k \approx [0.1407 \quad 0.3018 \quad 0.2931 \quad 0.2931 \quad 0.2931]^T \quad (7.59)$$

### 7.4.3 Matrizes Estocásticas do Modelo de Velocidade

As matrizes estocásticas para o AOB são

$$Q_k = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-5} \end{bmatrix}, \quad (7.60)$$

$R_k = 10^{-3}$  e  $P_0 = Q_0$ . Este projecto origina os seguintes ganhos para o estado estacionário de Kalman:

$$K_k \approx [0.0683 \quad 0.0965 \quad 0.0965]^T. \quad (7.61)$$

### 7.4.4 Ruído de Medida

Em veículos com rodas, não há uma via directa para obter uma realimentação de posição. A posição (e orientação) do veículo pode ser ‘estimada’ a partir das posições ou velocidades das rodas. No caso da cadeira de rodas robotizada, as velocidades angulares das rodas motrizes são ‘estimadas’ a partir das leituras dos *encoders*, a cada período de amostragem,  $h$ . Pode,

porém, haver erros nas ‘estimativas’, quer devido a deslizamentos e arrastamentos, quer devido a erros nos sensores das rodas.

De modo a simular erros nos sensores das rodas, isto é, nos codificadores ópticos das rodas (*encoders*), foi injectado ruído branco (ver figura 7.3) ao *encoder*, que está associado a cada roda motriz. Este ruído aditivo tem uma distribuição Gaussiana, com média nula e tem uma variância de 0.001. Este ruído branco está então associado às medidas e tem a forma representada na figura 7.7.

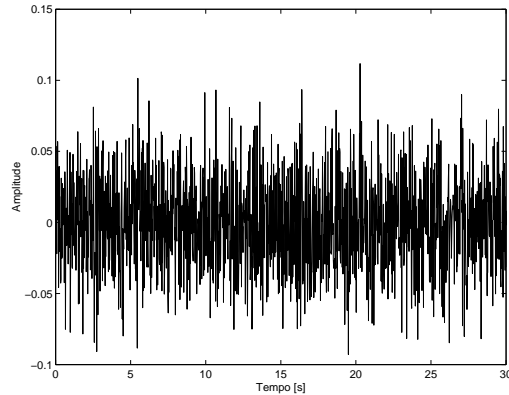


Figura 7.7: Ruído de medida.

## 7.5 Resultados de Simulação

Analisando as manobras efectuadas por um veículo num ambiente sem obstáculos, verifica-se que as duas condições fundamentais são: 1) seguir o caminho ficando o mais perto possível deste; e 2) manter a velocidade desejada. Com isto em mente, é óbvio que a escolha das variáveis para a equação de saída (tal como descrito na secção 5.2) têm de ser: 1) a menor distância de um ponto do robô ao caminho desejado e 2) a velocidade longitudinal. Deste modo, formula-se o problema de controlo de seguimento de caminho. Num problema de seguimento de trajectória, a condição temporal é especificada. Portanto, neste caso, a tarefa não é só atingir um ponto, mas também atingi-lo num determinado instante de tempo. Pelo contrário, no problema de seguimento de caminho, apesar da geometria do caminho ter sido especificada, é mais importante conseguir seguir o caminho do que atingir

pontos no caminho em instantes de tempo especificados. De algum modo, especificando a velocidade longitudinal desejada, assegura-se (embora indirectamente) que o veículo atinja os pontos desejados no caminho. Com esta abordagem o seguimento de caminho apresenta um comportamento mais suave que o seguimento de trajectória.

Com base no teorema de Dubins, neste estudo (tal como já no capítulo 6) consideram-se dois caminhos básicos: um caminho em linha recta e um caminho circular. Portanto, se se conseguir controlar o WMR em tais caminhos básicos ou em caminhos compostos por estes dois, pode-se efectivamente mover o WMR a partir de qualquer posição e orientação para qualquer outra posição ou orientação. As equações de saída para estes dois caminhos básicos são dadas pelas equações (5.17) e (5.18) para o caso do caminho circular, e pelas equações (5.19) e (5.18) para o caso de um caminho em linha recta.

Nesta secção são apresentados alguns resultados de simulação computacional, relativamente ao controlo de seguimento de caminho do WMR, e à estratégia do AOB. De modo a verificar a robustez da estratégia do AOB, é comparado o desempenho do AOB *versus* CKF *versus* PPC.

A ausência de um completo conhecimento dos componentes do sistema, bem como a dificuldade em medir ou estimar os parâmetros geométricos, cinemáticos ou inerciais, pode ser a causa de erros de modelo. Portanto, simularam-se erros de modelação nos valores de referência de posição e de velocidade (ver figura 7.8) e ainda nos parâmetros inerciais (nomeadamente a massa). De acordo com a notação apresentada anteriormente (ver figura 3.8), os parâmetros cinemáticos do WMR usados nas simulações são:  $a = 1\text{ m}$ ,  $b = 0.30\text{ m}$ ,  $d = 0.05\text{ m}$ ,  $L_a = 0.1\text{ m}$ ,  $r = 0.17\text{ m}$ ,  $m_c = 60\text{ Kg}$ ,  $m_w = 1\text{ Kg}$ ,  $I_c = 15.625\text{ Kg.m}^2$ ,  $I_w = 0.005\text{ Kg.m}^2$ , e  $I_m = 0.0025\text{ Kg.m}^2$ .

Para todas as simulações, são usados os seguintes valores: velocidade inicial é de  $0\text{ m/s}$ ; a velocidade longitudinal desejada é de  $r_{2,k} = 1.414\text{ m/s}$  (excepto para as simulações que envolvam diferentes velocidades desejadas); a menor distância desejada (do WMR ao caminho) é de  $r_{1,k} = 0$ ; e o tempo de amostragem é  $h = 0.02\text{ s}$  ( $f_s = 50\text{ Hz}$ ).

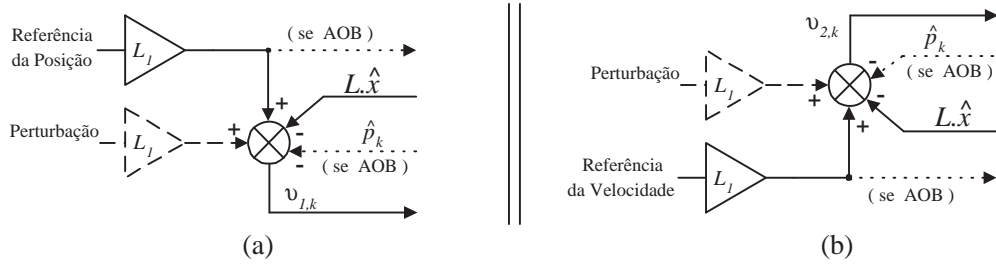


Figura 7.8: Vista em detalhe da perturbação: (a) na referência da posição; (b) na referência da velocidade.

### 7.5.1 Seguimento de Caminho com AOB

Considere-se um caminho em linha recta e outro circular. Para o caminho em linha recta,  $y = x$ , os valores de  $h_{1,k}$  e  $h_{2,k}$  são dados pelas equações (5.19) e (5.18), respectivamente, onde  $A = -1$ ,  $B = 1$ , e  $C = 0$ ; o ponto de partida em  $P_c$  é  $(x_c, y_c) = (1.0, 0.1)$  e o ângulo de direcção é  $\phi = 90^\circ$ . Para o caminho circular os valores de  $h_{1,k}$  e  $h_{2,k}$  são dados pelas equações (5.17) e (5.18), respectivamente, o centro do caminho circular é  $(x_g, y_g) = (10.0, 25.0)$  e o seu raio é  $R = 7.5 \text{ m}$ ; o ponto de partida em  $P_c$  é  $(x_c, y_c) = (18.0, 22.0)$  e o ângulo de direcção é  $\phi = 135^\circ$ .

Para ambos os caminhos, como é mostrado nas figuras 7.9(a) e (b) o ponto de referência do WMR é capaz de atingir o caminho e nele permanecer. O algoritmo de seguimento de caminho exhibe uma convergência gradual permitindo, desta forma, uma convergência para o caminho de forma suave. Relativamente à velocidade longitudinal, representada nas figuras 7.9(c) e (d) verifica-se que esta apresenta, como esperado, uma resposta exponencial suave que é típica de um sistema de primeira ordem. Verifica-se ainda que, independentemente do tipo de caminho seguido, o comportamento das velocidades é o mesmo.

Considere-se agora o comportamento, do WMR no seguimento de caminho, para as seguintes velocidades desejadas:  $0.2778 \text{ m/s}$  ( $1 \text{ Km/h}$ );  $0.7070 \text{ m/s}$  ( $2.5 \text{ Km/h}$ );  $1.414 \text{ m/s}$  ( $5 \text{ Km/h}$ ); e  $2.083 \text{ m/s}$  ( $7.5 \text{ Km/h}$ ). Pela figura 7.10, verifica-se que o algoritmo de controlo AOB, tanto para o caminho em linha recta como para o caminho circular, permite uma convergência

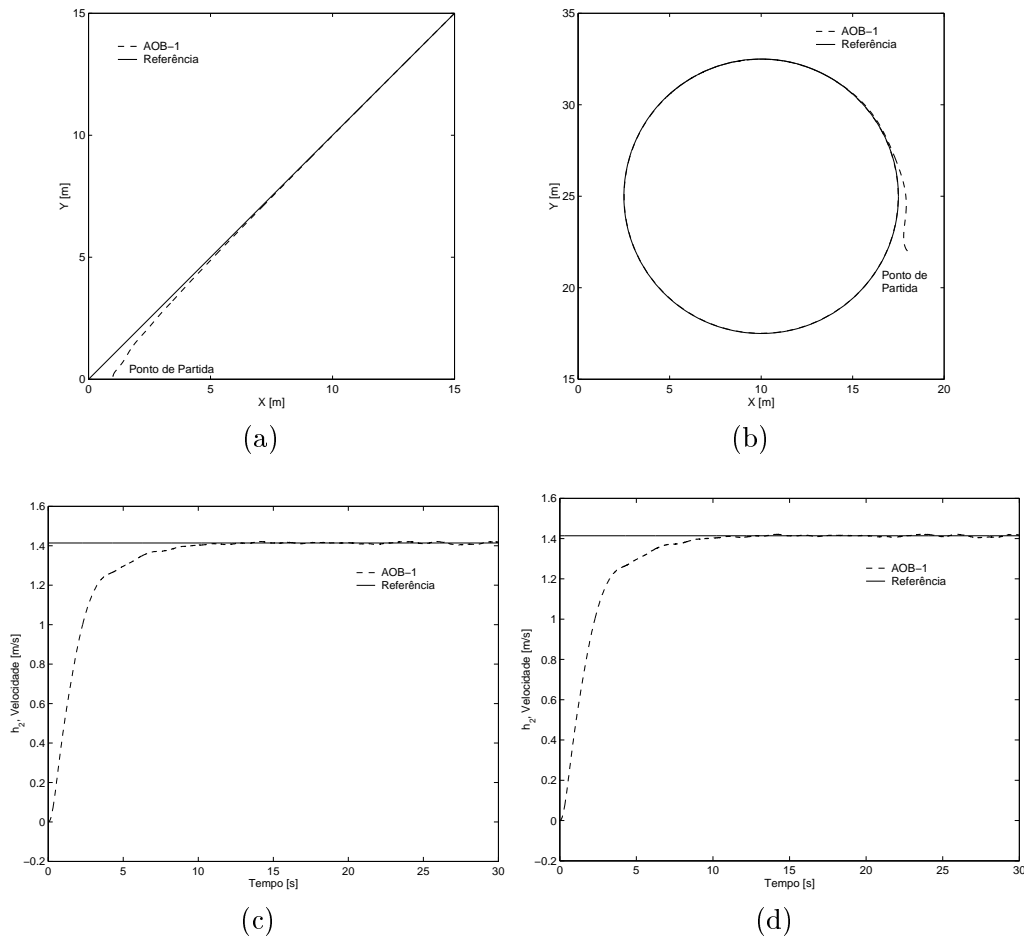


Figura 7.9: Comportamento do WMR usando AOB e sem perturbações. (a) Seguimento de caminho em linha recta. (b) Seguimento de caminho em círculo. (c) Velocidade longitudinal no seguimento de caminho em linha recta. (d) Velocidade longitudinal no seguimento de caminho em círculo.

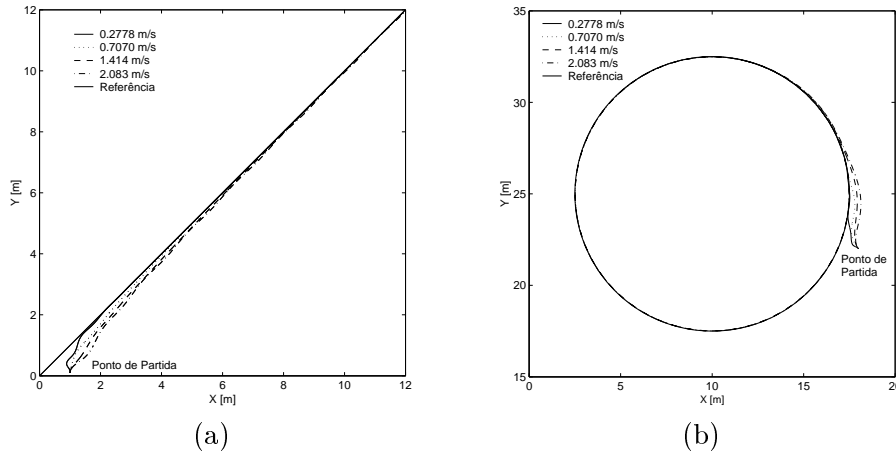


Figura 7.10: Comportamento do WMR usando AOB para várias velocidades desejadas. (a) Caminho em linha recta. (b) Caminho circular.

mais rápida para o caminho quando a velocidade desejada exhibe valores mais baixos.

A escolha das velocidades desejadas demonstra ser ainda mais crítica em situações em que o robô em estudo esteja restringido a locais habitacionais ou a corredores ‘estretos’. Portanto, nestas situações a velocidade deve ser ‘restringida’ nos seus valores, pois velocidades elevadas em caminhos em linha recta podem não afectar muito a trajectória, mas ‘seguir’ curvas apertadas a velocidades ‘elevadas’, vai de facto provocar desvios de trajectória, mesmo que estes sejam de pequena amplitude.

Assim, considerando um caminho circular com o centro em  $(x_g, y_g) = (5.0, 12.5)$  e raio de  $R = 1.0\text{ m}$ , partindo de duas posições iniciais diferentes  $((x_c, y_c) = (6.0, 12.5)$  e  $(x_c, y_c) = (6.5, 12.5)$ ) e ângulo de direcção  $\phi = 90^\circ$ , foi simulado o comportamento do WMR em curvas apertadas e com velocidades de  $1.414\text{ m/s}$  e de  $0.2778\text{ m/s}$  (figura 7.11). O facto de se considerar um círculo com raio de  $1\text{ m}$ , permite de algum modo exemplificar curvas apertadas, tão frequentes em espaços interiores. Pelos gráficos verifica-se que o WMR com uma velocidade de  $0.2778\text{ m/s}$  converge mais rapidamente para o caminho e nele permanece, demonstrando por este facto que esta velocidade é a mais adequada para espaços residenciais ou de dimensões reduzidas. Pela figura 7.11(a) verifica-se que o WMR com uma velocidade de



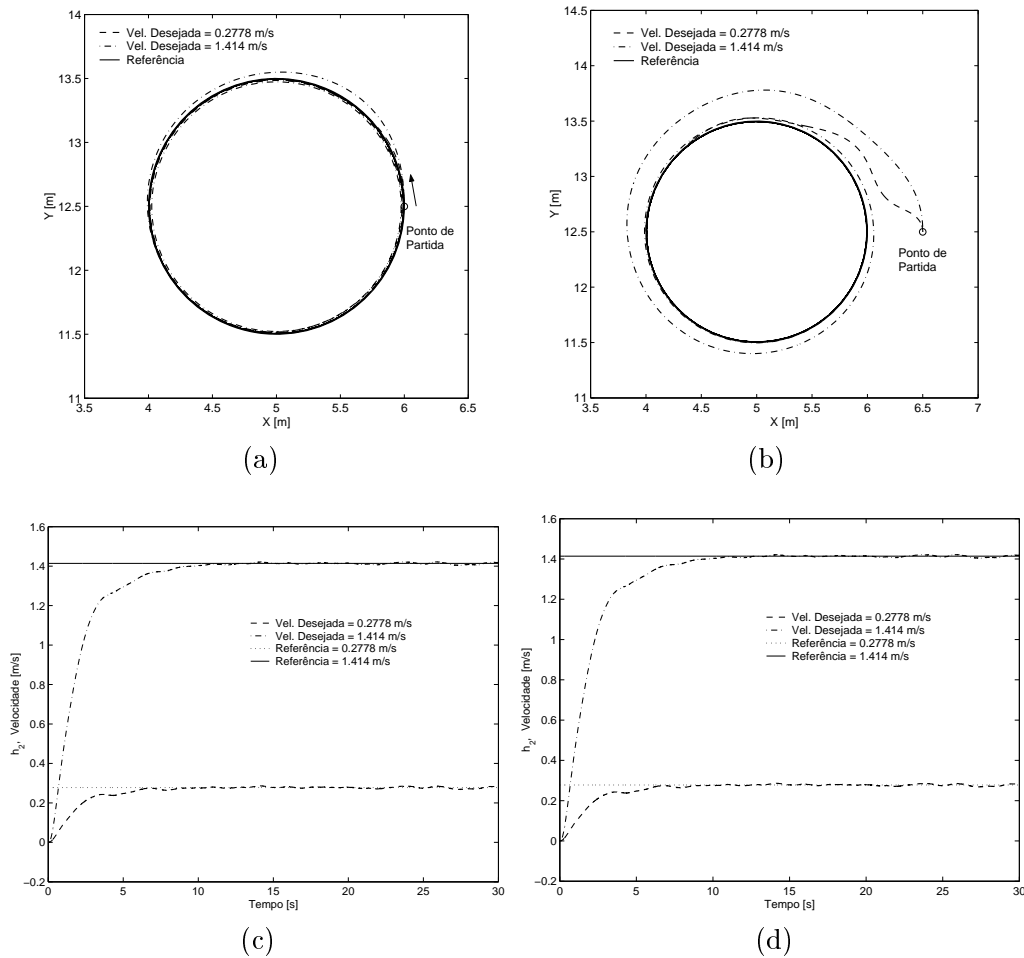


Figura 7.11: Comportamento do WMR usando AOB, sem perturbações e para um caminho circular com raio=1m. (a) Seguimento de caminho partindo de posição no caminho. (b) Seguimento de caminho partindo de posição fora do caminho. (c) Velocidade longitudinal quando o WMR parte de posição no caminho. (d) Velocidade longitudinal quando o WMR parte de posição fora do caminho.

1.414  $m/s$ , mesmo partindo de uma posição inicial correcta exhibe algumas dificuldades na convergência para o caminho.

É de notar que para além da velocidade desejada, tanto a velocidade inicial como o ângulo inicial afectam a capacidade de convergência para o caminho, como foi demonstrado no capítulo 6.

Nas próximas simulações, a velocidade desejada a utilizar no controlo da velocidade do WMR é de 1.414  $m/s$ . A escolha desta velocidade, teve como objectivo adequar o algoritmo de velocidade ao controlo do robô em estudo, de modo a permitir a sua utilização quer em espaços interiores, quer em espaços exteriores.

Nas secções 7.5.2 a 7.5.5, é realizado um estudo comparativo dos resultados obtidos no seguimento de caminho quando são utilizados os controladores AOB, CKF e PPC.

### 7.5.2 Seguimento de Caminho sem Perturbação

Nesta secção, o caminho utilizado foi o circular, pelo facto de ser este o tipo de caminho que apresenta maiores dificuldades no seu seguimento. Neste caso, os valores de  $h_{1,k}$  e  $h_{2,k}$  são dados pelas equações (5.17) e (5.18), respectivamente. O centro do caminho circular é  $(x_g, y_g) = (10.0, 25.0)$  e o seu raio é  $R = 7.5 m$ . O ponto de partida em  $P_c$  é  $(x_c, y_c) = (5.0, 30.6)$  e o ângulo de direcção é  $\phi = 225^\circ$ .

Assim, vão ser comparados os resultados obtidos no seguimento de caminho com os controladores AOB, CKF e PPC, quando se inicia o movimento a partir de uma posição correcta (i.e. uma posição no caminho). O sistema não é sujeito a qualquer tipo de perturbação.

Por observação da figura 7.12 não é evidente a diferença entre os resultados obtidos no seguimento de caminho com os diferentes controladores. No entanto, pelo gráfico da posição relativa (figura 7.13(c)) a diferença de ‘comportamento’ observado quando se usam os três controladores é mais evidente, verificando-se que na fase inicial do percurso o controlador que permite melhor ‘comportamento’ é o AOB, afastando-se no máximo 2  $cm$

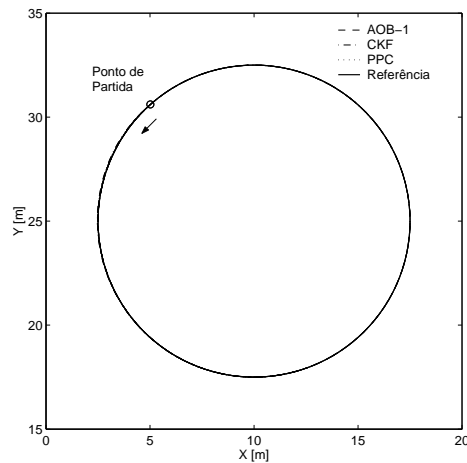


Figura 7.12: Seguimento de caminho para o caso de um caminho circular, usando AOB, CKF e PPC.

do caminho contra os, aproximadamente,  $4\text{ cm}$  com o CKF e os  $3\text{ cm}$  com o PPC. Apesar disso, todos eles permitem atingir o valor de referência sensivelmente aos  $20\text{ s}$ . A variação inicial deve-se, essencialmente, ao valor inicial de  $\phi$  que não se encontra devidamente orientado no sentido do caminho (o  $\phi$  mais aconselhável seria entre  $230^\circ - 240^\circ$ ).

Na figura 7.13(d) encontra-se representado o comportamento do estado activo, referente ao modelo de posição. O estado activo compensa as pequenas ‘perturbações’ existentes, possibilitando ao AOB apresentar o melhor desempenho.

Relativamente à velocidade (figura 7.13(a)), verifica-se que não existe grande diferença nos resultados obtidos pelos vários controladores. A diferença mínima existente é apresentada pelo AOB e é devida à actuação do estado activo, referente ao modelo de velocidade (7.13(b)).

Nas simulações seguintes a actuação/desempenho do AOB será mais evidente, dado que o sistema será sujeito a perturbações.

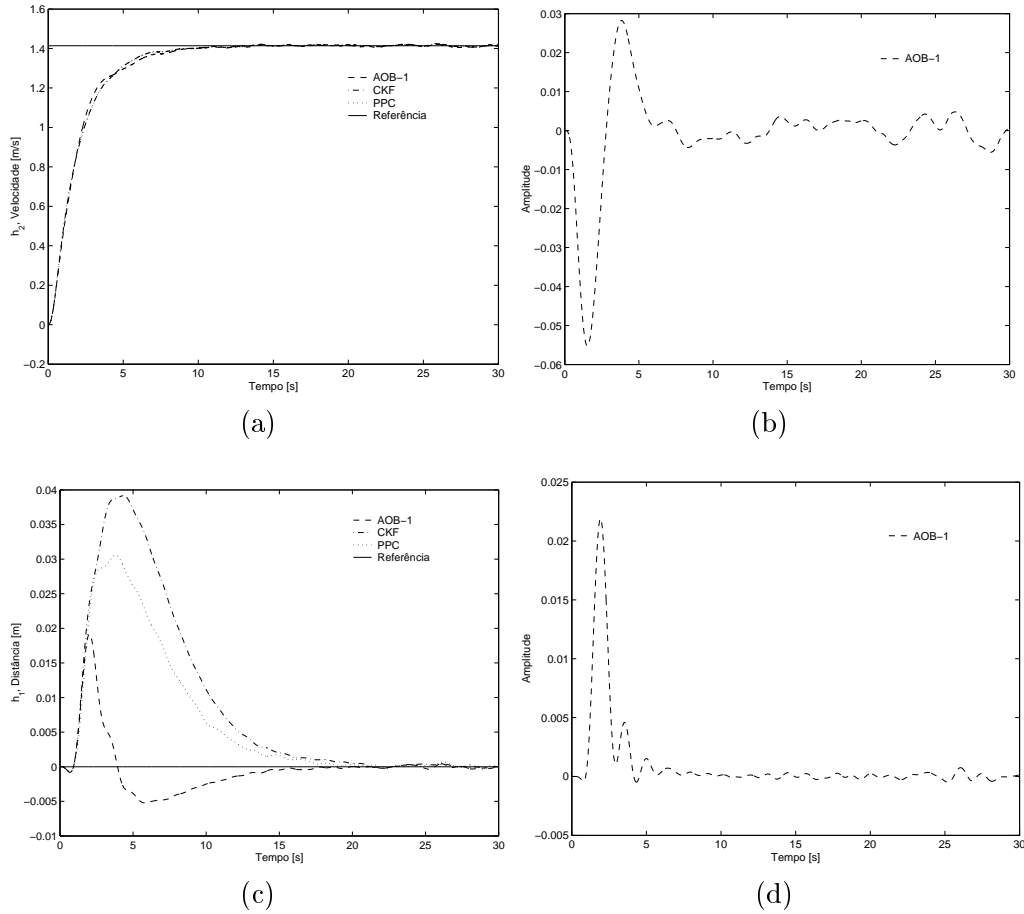


Figura 7.13: Comportamento do WMR usando AOB, CKF e PPC sem perturbações e para um caminho circular. (a) Velocidade do WMR. (b) Estado activo para o modelo de velocidade. (c) Posição relativa do WMR. (d) Estado activo para o modelo de posição.

### 7.5.3 Seguimento de Caminho com Perturbação na Posição

Considere-se o mesmo caminho circular apresentado na secção 7.5.2. Nesta secção o sistema vai ser sujeito a uma perturbação em degrau na referência de posição (figura 7.8(a)), e investiga-se o desempenho do AOB, CKF e PPC nestas condições.

A ideia de introduzir uma perturbação na referência (ou à saída do bloco de colocação de pólos) tem como objectivo simular um erro constante  $e_k$  (que é importante para perceber o funcionamento intrínseco do AOB). Este erro do observador entra no sistema como uma entrada adicional indesejável  $p_k$  ( $p_k = L.e_k$ ), alterando completamente o valor de  $u_k$  (ver figuras 7.1 e 7.2). O constante e elevado valor da perturbação foi escolhido intencionalmente, de modo a dar ênfase à actuação do AOB quando comparado com as outras estratégias de controlo. O AOB conhece o valor de referência e portanto consegue distinguir o componente do erro, causado pelas diversas perturbações, no sinal de realimentação injectado.

A figura 7.14(a) mostra um robô seguindo um caminho circular, começando com uma velocidade inicial de  $0\text{ m/s}$ , até atingir a velocidade desejada de  $1.414\text{ m/s}$ . Cinco segundos após o início da simulação uma perturbação em degrau (figura 7.14(d)), na referência de posição, é imposta ao sistema. Esta perturbação em degrau força o robô a divergir da trajectória desejada. Observando as figuras 7.14(a) e 7.14(c), verifica-se que o robô apresenta uma estabilização gradual numa trajectória que não é a desejada, quando as estratégias do CKF e PPC são usadas no sistema de controlo. O controlador PPC, no entanto, consegue melhores resultados que o CKF uma vez que em CKF o erro do estado estacionário é função do ganho de Kalman (malha aberta) e nenhuma acção de compensação em avanço é realizada. É de notar que o CKF é de ganho constante, tendo por isso tendência a apresentar um erro estacionário, que poderia ser reduzido se as matrizes  $Q_k$  e  $R_k$  fossem redimensionadas. No entanto, se o AOB é usado como controlador, o estado activo (figura 7.14(d)) estima a perturbação levando a cabo uma acção de compensação apropriada. O estado activo  $\hat{p}_k$  realiza uma acção de compensação em avanço. Com o AOB verifica-se (figura 7.14(c)) que o erro estacionário desaparece e o erro transitório diminui. No que diz respeito à velocidade do robô, como não sofre perturbação, verifica-se o comportamento esperado (figura 7.14(b)), e não houve diferenças significativas nos

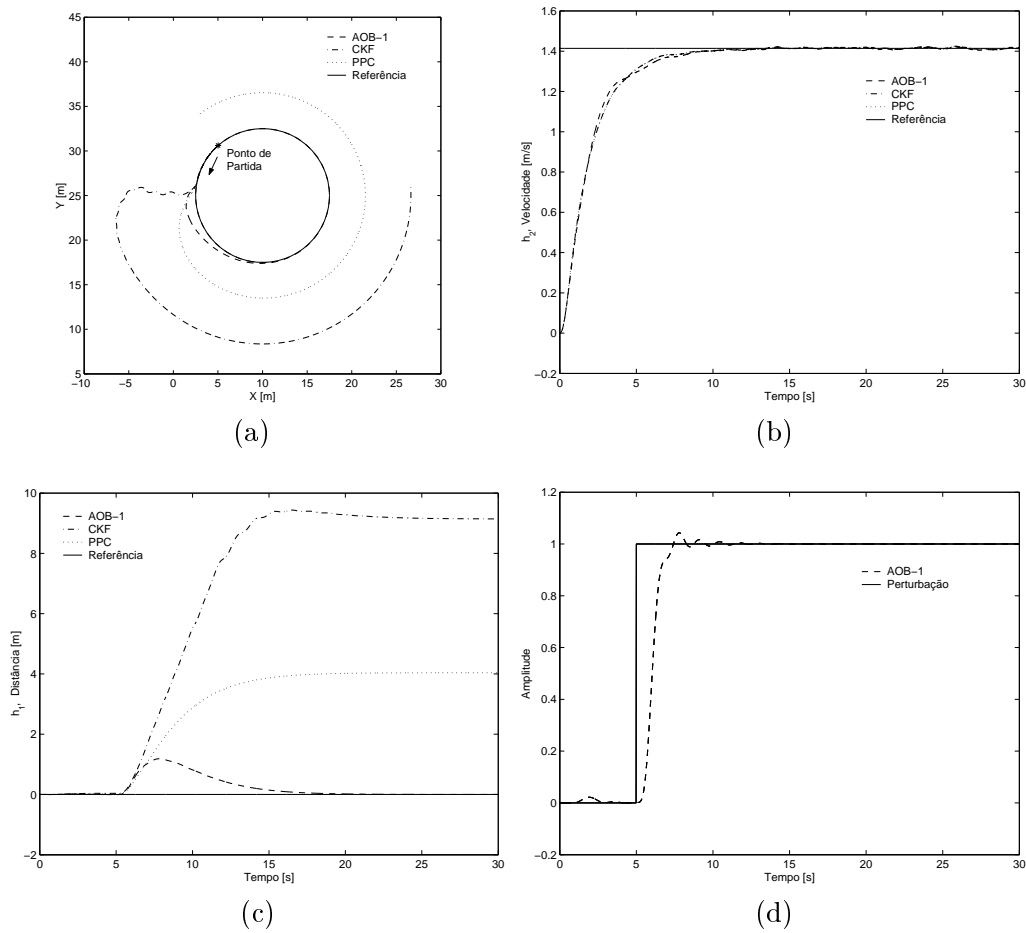


Figura 7.14: Comportamento do WMR para o caso de um caminho circular usando AOB, CKF e PPC, na presença de perturbações. (a) Seguimento de caminho. (b) Velocidade longitudinal no seguimento de caminho. (c) Distância entre o caminho actual e o desejado, realizado pelo robô (i.e. posição relativa do WMR). (d) Estado Activo  $\hat{p}_k$  para o AOB e perturbação.

resultados obtidos com os vários tipos de controladores. Note-se que relativamente às velocidades, este é o comportamento que também seria esperado se nenhuma perturbação fosse imposta ao sistema, como se pode constatar na figura 7.13(a).

#### 7.5.4 Seguimento de Caminho com Perturbação na Velocidade

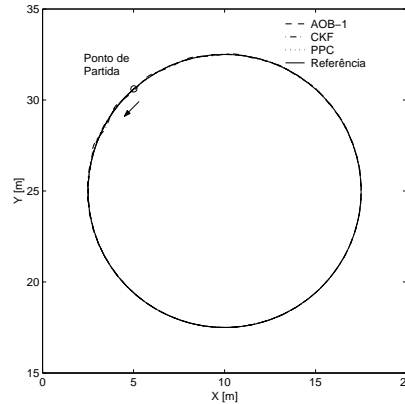


Figura 7.15: Seguimento de caminho para o caso de um caminho circular, usando AOB, CKF e PPC.

Considere-se o mesmo caminho circular e o mesmo ponto de partida utilizado nas secções anteriores (secção 7.5.2 e 7.5.3). Neste caso, em vez de uma perturbação na posição é introduzida uma perturbação em degrau na referência da velocidade (figura 7.8(b)).

Na figura 7.15 é representado o comportamento de um robô seguindo um caminho circular, começando com uma velocidade inicial de  $0\text{ m/s}$ , até atingir a velocidade desejada de  $1.414\text{ m/s}$ . Vinte segundos após o início da simulação, é imposta ao sistema uma perturbação em degrau (figura 7.16(d)) na referência de velocidade. Esta perturbação em degrau força o robô a aumentar o valor da velocidade. Por observação das figuras 7.15 e 7.16(a), verifica-se que o robô apresenta uma boa convergência para o caminho desejado, apesar de apresentar ligeiras oscilações quando usa PPC e CKF. O AOB é mais uma vez o que permite melhores resultados, devido à acção de compensação introduzida pelo estado activo referente à posição

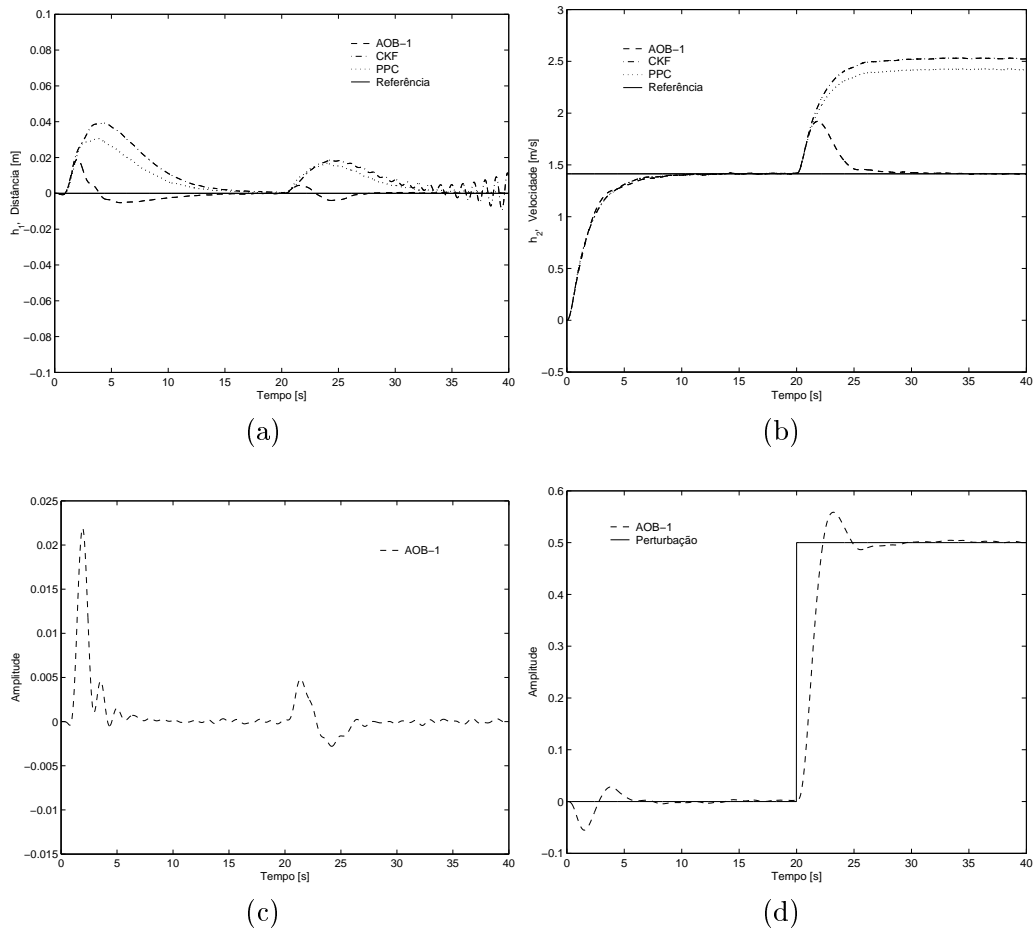


Figura 7.16: Comportamento do WMR para o caso de um caminho circular usando AOB, CKF e PPC, na presença de perturbações na velocidade. (a) Posição Relativa do WMR. (b) Velocidade longitudinal no seguimento de caminho. (c) Estado Activo  $\hat{p}_k$  para a posição. (d) Estado Activo  $\hat{p}_k$  para a velocidade e perturbação.



(figura 7.16(c)). Verifica-se ainda que, por volta dos 20 s, a perturbação na velocidade afecta, mesmo que de forma ligeira, a posição relativa (figura 7.16(a)), sendo rapidamente ‘compensada’ no caso do controlador AOB devido à actuação do seu estado activo (figura 7.16(c)). O mesmo não se verifica com o CKF e o PPC, pois apesar de permitirem que o robô ‘tenda’, ao longo do tempo, para a referência, o seu comportamento apresenta alguma oscilação (mais evidente com o CKF).

Relativamente à velocidade verifica-se, pela figura 7.16(b), que na fase inicial todos os controladores permitem a convergência para o valor desejado. Contudo, sensivelmente a partir dos 20 s devido à perturbação imposta, tanto o PPC como o CKF ‘conduzem’ a uma estabilização gradual num valor que não é o desejado. No entanto, se o AOB é usado como controlador, o estado activo (figura 7.16(d)) estima a perturbação, levando a cabo uma acção de compensação apropriada, isto é, o estado activo  $\hat{p}_k$  realiza uma acção de compensação em ‘avanço’. Com o AOB verifica-se (figura 7.16(b)) que o erro estacionário desaparece.

### 7.5.5 Incertezas de Modelação nos Parâmetros Inerciais $m_c$ e $m_w$

Nesta secção são discutidos os resultados de simulação relativamente a erros de modelação de +130% em  $m_c$  e  $m_w$  (quase 80 Kg para além do peso inicial), e investiga-se o desempenho do sistema num caminho em linha recta, bem como num caminho circular. As características do caminho circular (centro e raio do caminho, bem como o ponto de partida) são os mesmos que nos casos anteriores (ver secção 7.5.2). Para um caminho em linha recta,  $y = x$ , os valores de  $h_{1,k}$  e  $h_{2,k}$  são dados pelas equações (5.19) e (5.18), respectivamente, onde  $A = -1$ ,  $B = 1$ , e  $C = 0$ . O ponto de partida em  $P_c$  é  $(x_c, y_c) = (0.0, 0.0)$  e o ângulo de direcção é  $\phi = 90^\circ$ .

A perturbação devida a erros de modelação obriga o robô a divergir da trajectória desejada. A figura 7.17(a) apresenta a resposta do sistema no caminho em linha recta, onde se verifica que todos os controladores (AOB, CKF, PPC) permitem (como é “fisicamente” esperado) que o robô convirja para o caminho desejado, no entanto, os controladores CKF e PPC, levam ligeiramente mais tempo que o AOB. Do mesmo modo todos eles permitem uma convergência para a velocidade desejada (figura 7.17(c)). Contudo, foi verificado que com CKF e PPC o tempo de convergência é maior, quando

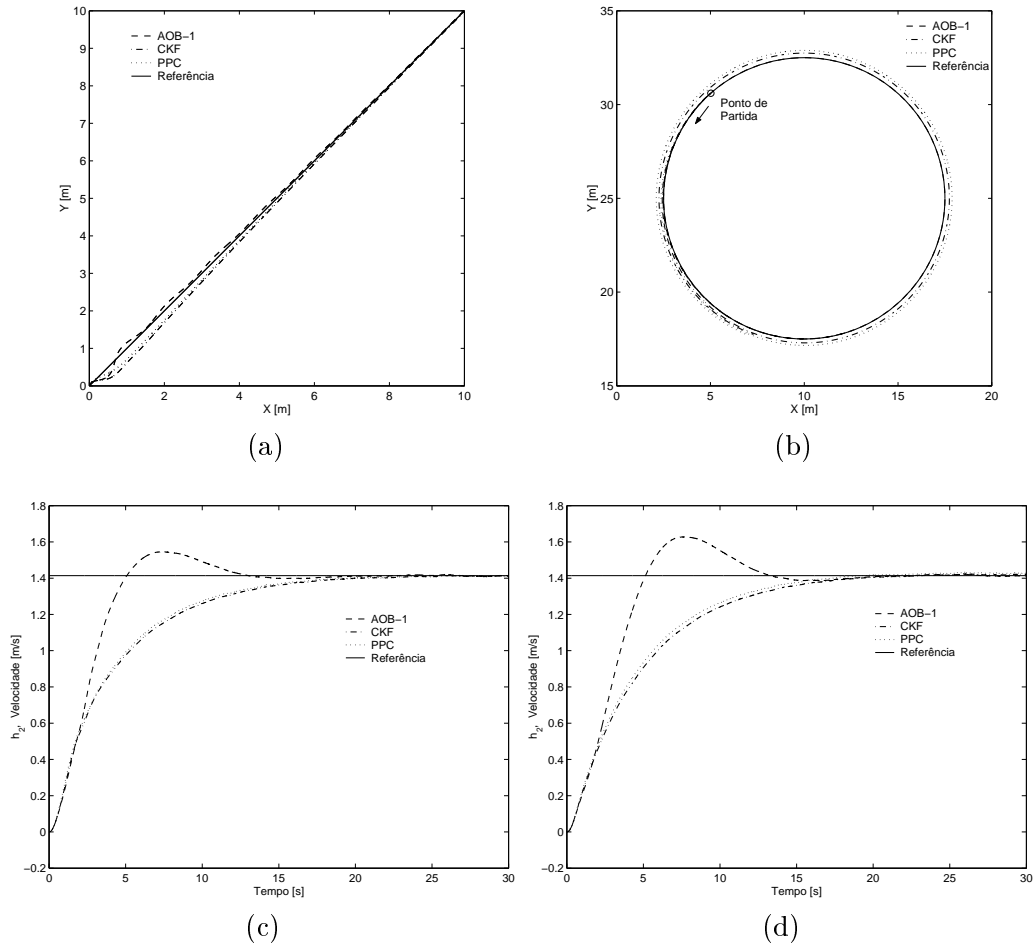


Figura 7.17: Comportamento do WMR quando há um erro de modelação em  $m_c$  e  $m_w$  para o caso de uma linha recta e um caminho circular usando AOB, CKF e PPC. (a) Seguimento de caminho para um caminho em linha recta. (b) Seguimento de caminho para um caminho circular. (c) Velocidade longitudinal no seguimento de caminho de um caminho em linha recta. (d) Velocidade longitudinal no seguimento de um caminho circular.

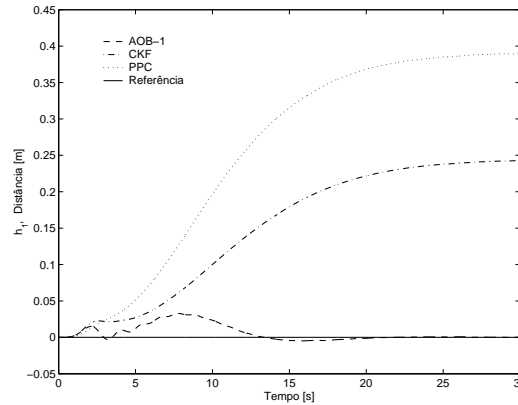


Figura 7.18: Distância entre o caminho actual e o desejado realizado pelo robô (posição relativa), quando há um erro de modelação em  $m_c$  e  $m_w$  para o caso de um caminho circular, usando AOB, CKF e PPC.

a perturbação é imposta aos parâmetros inerciais, do que quando nenhuma perturbação é imposta ao sistema (figura 7.13(a)). Com o AOB obtêm-se melhores resultados tanto na convergência para a posição desejada, como para a velocidade desejada (i.e. o AOB permite uma convergência mais rápida para os valores desejados). Isto deve-se ao facto de o estado activo do AOB actuar em concordância, compensando a perturbação imposta ao sistema. Note-se, no entanto, que com o AOB se verifica uma sobrelevação na velocidade (figura 7.17(c)), devido ao facto de o estado activo do modelo de velocidade (figura 7.19(a)) ser muito actuante (uma vez que está ajustado para grandes perturbações). Assim, torna-se necessária uma ‘sintonia fina’ do AOB para o modelo de velocidade de modo a reduzir a actividade do estado activo, e, conseqüentemente, permitir que a sobrelevação diminua ou desapareça. Constata-se, que esta perturbação afecta o sistema, principalmente para o caso de um caminho circular. Neste caso, verifica-se que no seguimento do caminho circular (figura 7.17(b) e 7.18) apenas com o AOB é possível seguir, sem erro, o caminho desejado. Tanto com CKF como com PPC o caminho circular é ‘seguido’ mas com um erro estacionário (figura 7.18), que pode constituir um problema, dependendo do tipo de tarefa a ser realizada pelo robô. No caso específico da cadeira de rodas robotizada o erro estacionário apresentado com os controladores PPC e CKF, apesar de pequeno, não é razoável, devido a razões de segurança do utilizador. Um

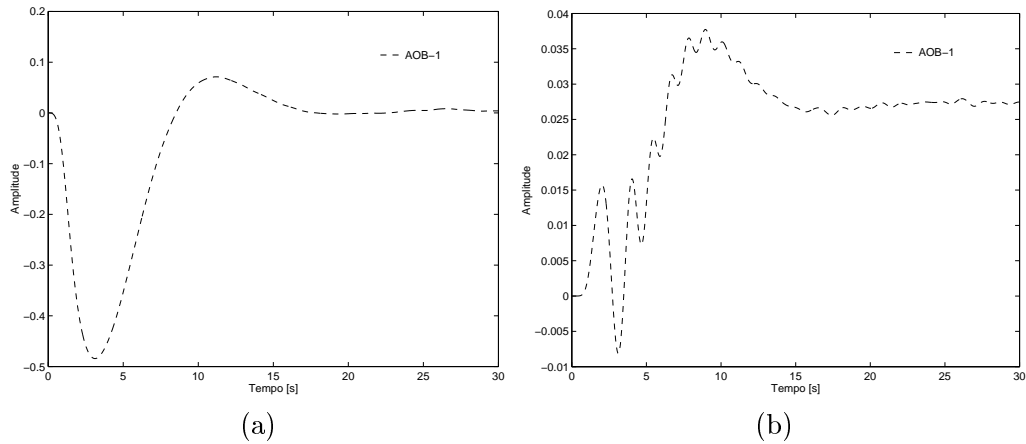


Figura 7.19: Comportamento do estado activo quando há um erro de modelação em  $m_c$  e  $m_w$  para o caso de um caminho circular, usando o AOB. (a) Estado activo  $\hat{p}_k$  para o modelo de velocidade. (b) Estado activo  $\hat{p}_k$  para o modelo de posição.

desvio de  $0.4\text{ m}$  pode fazer a diferença entre descer uma rampa ou cair de umas escadas. Deste modo, verificou-se que com o AOB se atingem melhores resultados. É de notar que uma cadeira de rodas está preparada para ser usada em ambientes interiores (com portas, corredores, curvas, etc.) onde um erro de  $0.4\text{ m}$  não é aceitável. O erro aceitável é de poucos centímetros. Relativamente à velocidade (figura 7.17(d)) verifica-se (tal como para a posição) que o único controlador que permite a convergência para a velocidade desejada é o AOB, os outros dão origem a um ligeiro erro estacionário (ligeiro aumento da velocidade). Baseado nos gráficos dos estados activos  $\hat{p}_k$ , para a velocidade (figura 7.19(a)) e para a posição (figura 7.19(b)) verifica-se que o estado activo “injectado” ao sistema pelo AOB realiza uma acção de compensação em avanço, levando o sistema a seguir os valores de referência. Com o AOB foi verificado que o erro estacionário desaparece e que o erro transiente diminui (figura 7.18).

### 7.5.6 Perturbação em Degrau e Rampa na Posição

Considere-se de novo o mesmo caminho circular, o mesmo ponto de partida e a mesma perturbação na referência de posição, utilizada na secção 7.5.3.

Nesta secção é analisado o desempenho dos AOBs de ordem mais elevada na detecção de funções não-lineares.

Como já referido neste capítulo, se a perturbação equivalente modelada por  $p_k$  tem uma forma constante como é o caso de uma perturbação em degrau, a sua derivada tem o valor zero, sendo bem descrita por (7.38), logo usa-se o AOB-1. No entanto se  $p_k$  tiver uma forma em rampa, uma forma quadrática ou qualquer outra forma não-linear, a sua primeira derivada não é bem definida pelas propriedades estatísticas de  $w_k$ . Deverá, então, ser utilizado um AOB de ordem superior (AOB-2, AOB-3,...,AOB-N). Nas simulações foi considerada a equação (7.57) com  $\sigma_{w_k}^2 = 10^{-4}$ ,  $\gamma = 1/500$  (para o modelo de posição).

Tabela 7.1: Ganhos de Kalman,  $K_k$ , para o modelo de posição

Ganhos de Kalman, $K_k$	
AOB-1	$K_k \approx [ 0.1407 \quad 0.3018 \quad 0.2931 \quad 0.2931 \quad 0.2931 ]^T$
AOB-2	$K_k \approx [ 0.1703 \quad 0.5666 \quad 1.0251 \quad 1.0433 \quad 1.0433 \quad 1.0615 ]^T$

No caso da perturbação em degrau (figura 7.23(a)) verifica-se pelas figuras 7.20(a) e 7.22(b), que com o AOB-1 a convergência é suave, tendendo para um erro estacionário zero, isto é conseguido devido à actuação do estado activo (figura 7.23(a)).

No caso de se usar a mesma perturbação, mas agora utilizando o AOB-2 verifica-se pelas figuras 7.21(a) e 7.22(b), que apesar do WMR convergir mais rapidamente para o caminho, devido ao facto do estado activo ser mais actuante (figura 7.23(c)), apresenta uma maior oscilação, sendo esta bastante evidente nos gráficos da posição relativa (figura 7.22(b)). Esta oscilação é devida, essencialmente, a um decréscimo de rejeição de ruído (devido ao facto do  $K_k$  ter aumentado) e a uma maior acção do estado activo. Assim, para este tipo de perturbação o AOB-1 é suficiente, pois permite obter resultados bastante satisfatórios.

No caso do sistema ser sujeito a uma perturbação em rampa (ver figura 7.23(b)), verifica-se que quando se utiliza o AOB-1, a perturbação em rampa faz com que o WMR se desvie da trajectória desejada, seguindo o caminho

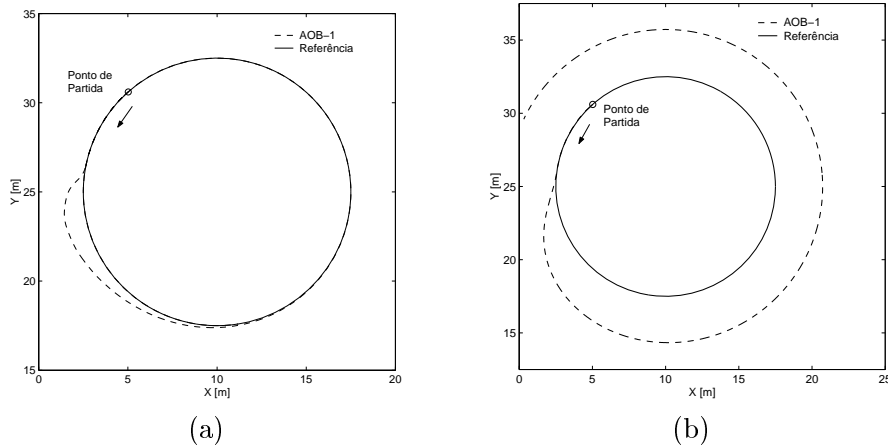


Figura 7.20: Comportamento do WMR, com AOB e na presença de perturbações na posição. (a) Seguimento de caminho com perturbação em degrau e com AOB-1. (b) Seguimento de caminho com perturbação em rampa e com AOB-1.

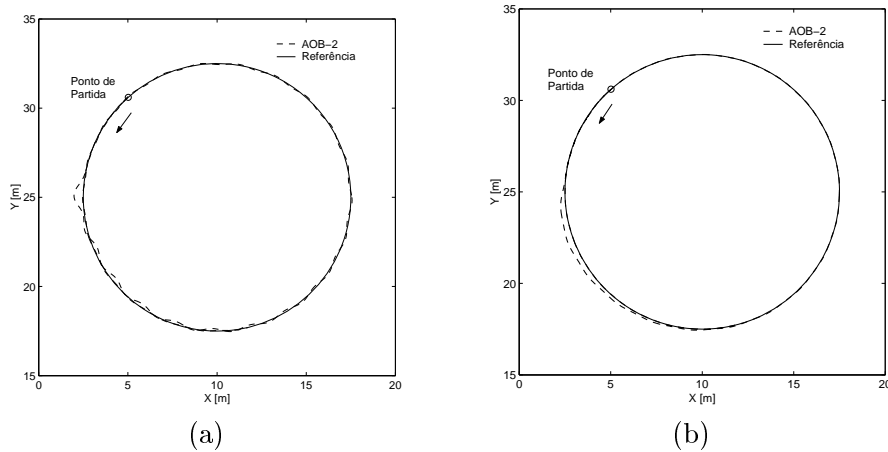


Figura 7.21: Comportamento do WMR, com AOB e na presença de perturbações na posição. (a) Seguimento de caminho com perturbação em degrau e com AOB-2. (b) Seguimento de caminho com perturbação em rampa e com AOB-2.

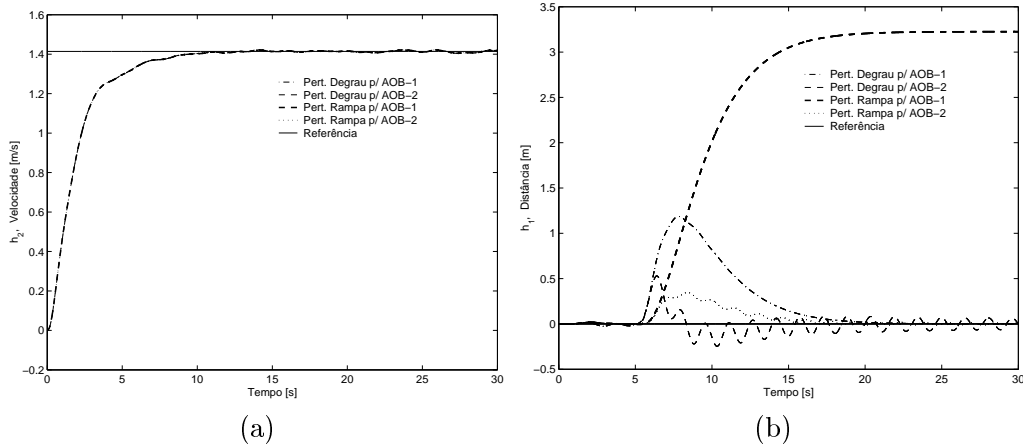


Figura 7.22: Comportamento do WMR, com AOB e na presença de perturbações na posição. (a) Velocidade longitudinal com diferentes perturbações e ordens de AOB. (b) Posição Relativa do WMR quando se usa diferentes perturbações e ordens de AOB.

com um erro estacionário (ver figuras 7.20(b) e 7.22(b)). Isto deve-se ao facto do estado activo não conseguir compensar completamente a perturbação, como se constata na figura 7.23(b). Aumentando a ordem do AOB (i.e. AOB-2), o resultado obtido é bastante melhor, constatando-se, pelas figuras 7.21(b) e 7.22(b), que o WMR já consegue convergir para o caminho e o estado activo (figura 7.23(d)) já consegue compensar completamente a perturbação. Assim, para este tipo de perturbação é aconselhável o uso do AOB-2. Esta melhoria nos resultados é devida, essencialmente, ao aumento do ganho de Kalman,  $K_k$ , que ocorre quando se aumenta a ordem do AOB. Note-se que o ganho do estado activo (último elemento de  $K_k$ ) usado para o AOB-2 tem um valor superior ao usado para o AOB-1 (ver tabela 7.1). Este aumento de  $K_k$  melhora a convergência para o caminho, mas diminui a capacidade de rejeição ao ruído, tornando assim o comportamento oscilatório.

Para o modelo de velocidade foi utilizado o AOB de ordem 1 (AOB-1), verificando-se o comportamento esperado para a velocidade (figura 7.22(a)).

Nesta simulação as perturbações foram introduzidas na referência de posição, visto ter sido nesta que o seguimento de caminho demonstrou ser

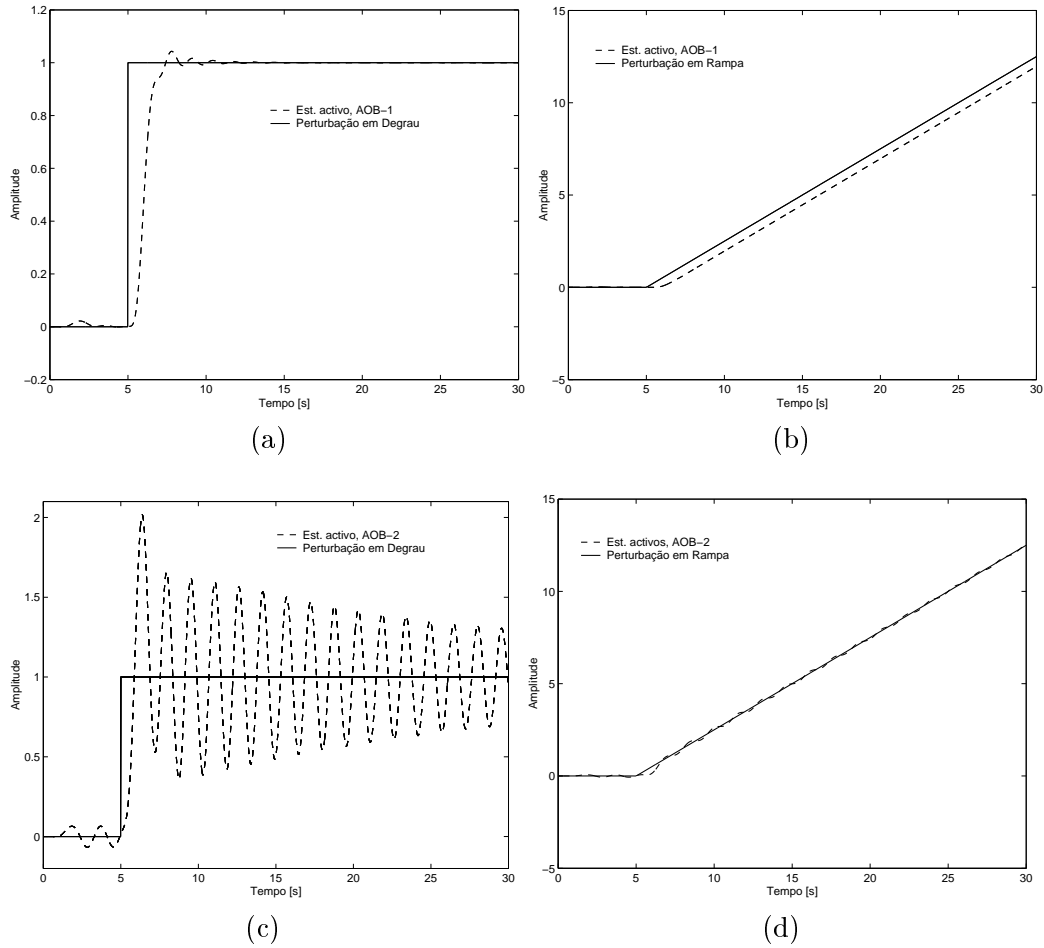


Figura 7.23: Comportamento do WMR, com AOB e na presença de perturbações na posição. (a) Estado Activo do AOB-1 para a posição e perturbação em degrau. (b) Estado Activo do AOB-1 para a posição e perturbação em rampa. (c) Estado Activo do AOB-2 para a posição e perturbação em degrau. (d) Estado Activo do AOB-2 para a posição e perturbação em rampa.



mais afectado, como foi verificado em simulações anteriores. No entanto, as conclusões que se tiram para as perturbações introduzidas no modelo de posição são extensivas ao caso em que se utilizam perturbações na referência de velocidade. Logo, quando se tem uma perturbação em rampa é necessário usar o AOB-2. Todavia, para a maioria das perturbações reais a que os sistemas físicos são sujeitos o AOB-1 é suficiente, permitindo resultados satisfatórios.

### 7.5.7 Influência dos Elementos da Matriz $Q_k$

Nesta secção é analisada a importância dos elementos da matriz  $Q_k$ , ou seja os valores de  $Q_{p_x}$  e  $Q_{x_{r,k}}$ , na obtenção dos valores de  $K_k$  e conseqüentemente na boa ou má convergência para a referência. Para tal, o caminho circular utilizado anteriormente (secção 7.5.3 e/ou 7.5.6), vai ser sujeito de novo a uma perturbação na referência da posição. Utiliza-se o AOB-1 no modelo de posição, quando a perturbação for em degrau e o AOB-2 (no modelo de posição) quando a perturbação utilizada for em rampa. O modelo de velocidade usa sempre o AOB-1. Os valores utilizados, tal como já referido na secção 7.4, para o modelo de posição nas simulações foram os seguintes:  $R_k = 10^{-3}$ ,  $Q_{x_{r,k}} = 10^{-5}$ , e  $Q_{p_x} = 10^{-4}$ .

Numa primeira simulação, o sistema vai ser sujeito a uma perturbação em degrau na referência da posição e utiliza-se o AOB-1. Nesta simulação mantêm-se os valores de  $R_k = 10^{-3}$  e  $Q_{x_{r,k}} = 10^{-5}$ , e variam-se os valores de  $Q_{p_x}$ . Mantendo-se as mesmas condições da simulação anterior, será implementada uma segunda simulação onde se mantêm os valores de  $R_k = 10^{-3}$ ,  $Q_{p_x} = 10^{-4}$ , e variam-se os valores de  $Q_{x_{r,k}}$ . Numa terceira simulação agora com AOB-2, e uma perturbação em rampa, irá ser mantido unicamente o valor de  $R_k = 10^{-3}$  e variam-se os valores de  $Q_{p_x}$  e  $Q_{x_{r,k}}$  simultaneamente.

#### **AOB-1 com perturbação em degrau e $Q_{p_x}$ diferentes**

Convém, desde já referir, que os gráficos da velocidade longitudinal para qualquer uma das simulações desta secção se mantêm constantes, dado que o modelo da velocidade não está a ser alvo de ‘modificações’ nem de perturbações. Exibe, assim, o comportamento desejado.

Pela figura 7.24, verifica-se que o seguimento de caminho (ver figuras

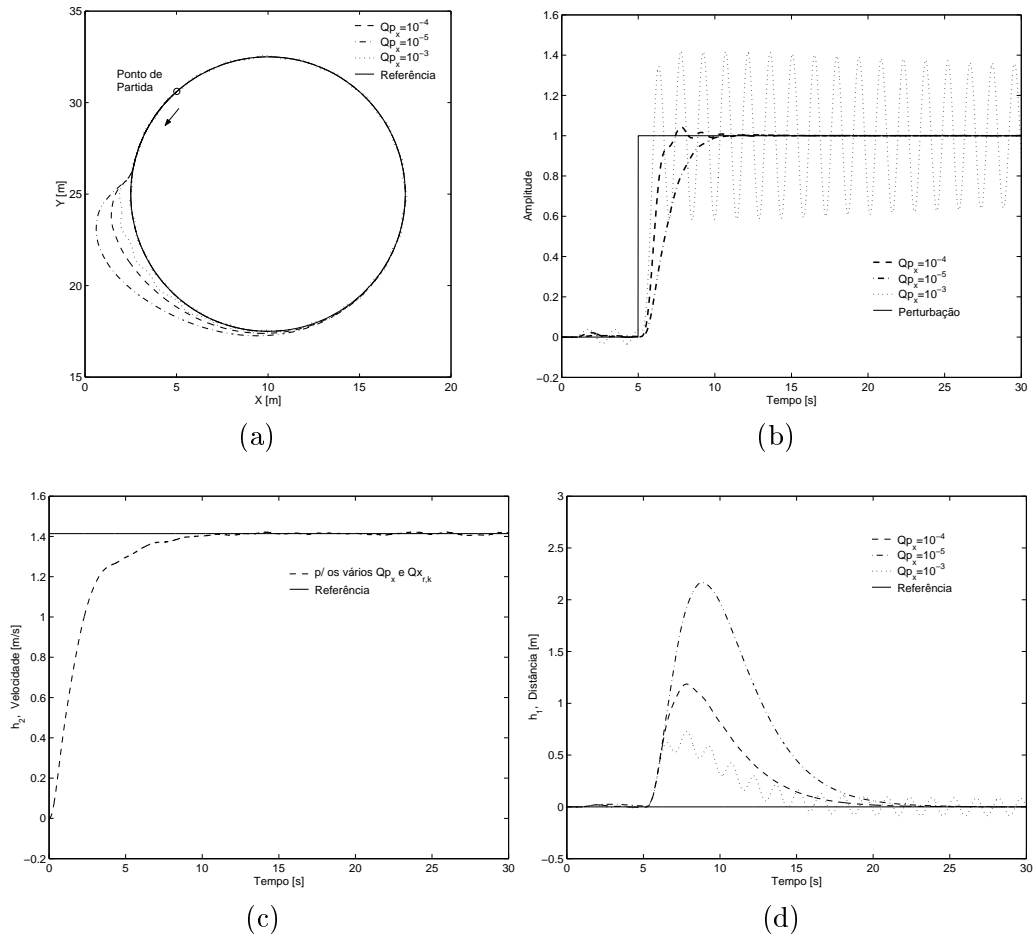


Figura 7.24: Caminho circular com AOB-1 no modelo de posição, e diferentes  $Q_{p_x}$ . (a) Seguimento de caminho. (b) Estado Activo do AOB-1 para a posição e perturbação em degrau. (c) Velocidade longitudinal. (d) Posição relativa.

Tabela 7.2: Ganhos de Kalman, para o AOB-1

Ganhos de Kalman, $K_k$	
$Q_{x_{r,k}} = 10^{-5}$ $Q_{p_x} = 10^{-4}$	$K_k \approx [ 0.1407 \quad 0.3018 \quad 0.2931 \quad 0.2931 \quad 0.2931 ]^T$
$Q_{x_{r,k}} = 10^{-5}$ $Q_{p_x} = 10^{-5}$	$K_k \approx [ 0.1244 \quad 0.1790 \quad 0.0936 \quad 0.0936 \quad 0.0936 ]^T$
$Q_{x_{r,k}} = 10^{-5}$ $Q_{p_x} = 10^{-3}$	$K_k \approx [ 0.1700 \quad 0.5640 \quad 0.9110 \quad 0.9110 \quad 0.9110 ]^T$
$Q_{x_{r,k}} = 10^{-6}$ $Q_{p_x} = 10^{-4}$	$K_k \approx [ 0.1017 \quad 0.2487 \quad 0.2997 \quad 0.2997 \quad 0.2997 ]^T$

7.24(a) e (d)) melhora quando a diferença entre  $Q_{x_{r,k}}$  e  $Q_{p_x}$  aumenta, ou seja quando  $Q_{p_x}$  aumenta. No entanto, é necessário alguma precaução quando se efectua a sintonia de  $Q_{p_x}$ , dado que, como se verifica pela figura 7.24, quando se utiliza  $Q_{p_x} = 10^{-3}$  (que é 100 vezes maior que  $Q_{x_{r,k}}$ ), apesar de ocorrer uma convergência mais rápida para o caminho desejado, apresenta um movimento oscilatório. Este movimento oscilatório é devido, em parte, ao aumento do valor absoluto dos elementos de  $K_k$  o que provoca maior sensibilidade ao ruído. Note-se que o estado activo também apresenta muita oscilação (figura 7.24(b)), com tendência a diminuir ao longo do tempo.

Quando se utiliza  $Q_{x_{r,k}} = Q_{p_x} = 10^{-5}$ , verifica-se que o estado activo ‘responde’ à perturbação mas não tão rapidamente como o desejado, fazendo com que o WMR se afaste mais do caminho, do que nos restantes casos. É de notar que neste caso  $K_k$  tem os valores mais baixos de todas as combinações (ver tabela 7.2).

Por fim com  $Q_{p_x} = 10^{-4}$  ( $Q_{p_x}$  é 10 vezes maior que  $Q_{x_{r,k}}$ ), obtém-se uma situação de compromisso que demonstra ser a mais adequada, como se pode verificar pela figura 7.24. Pois o WMR é ‘conduzido’ de forma suave e sem oscilações. Neste caso o estado activo não apresenta oscilações, compensando a perturbação de forma eficaz.

**AOB-1 com perturbação em degrau e  $Q_{x_{r,k}}$  diferentes**

Quando se mantém o valor de  $Q_{p_x}=10^{-4}$  e se variam os valores dos elementos de  $Q_{x_{r,k}}$ , verifica-se (ver figura 7.25) que com a diminuição dos valores de  $Q_{x_{r,k}}$  ( $Q_{x_{r,k}}=10^{-6}$ ), o sistema fica menos vulnerável ao ruído. Neste caso com a descida dos valores de  $Q_{x_{r,k}}$ , aumenta a diferença para o valor de  $Q_{p_x}$  (tornando-se este 100 vezes maior que  $Q_{x_{r,k}}$ ). Verifica-se assim, uma melhor actuação do estado activo e conseqüentemente um melhor resultado no seguimento de caminho, que o obtido com  $Q_{x_{r,k}}=10^{-5}$ .

Note-se que o ganho do estado activo (último elemento de  $K_k$ ) quando se utiliza  $Q_{x_{r,k}}=10^{-6}$ , apresenta um valor ligeiramente superior do que quando se utiliza  $Q_{x_{r,k}}=10^{-5}$  (ver tabela 7.2).

**AOB-2 com perturbação em rampa e  $Q_{p_x}$  e  $Q_{x_{r,k}}$  diferentes**

Tabela 7.3: Ganhos de Kalman, para o AOB-2

	Ganhos de Kalman, $K_k$
$Q_{x_{r,k}} = 10^{-5}$ $Q_{p_x} = 10^{-4}$	$K_k \approx [ 0.1703 \quad 0.5666 \quad 1.0251 \quad 1.0433 \quad 1.0433 \quad 1.0615 ]^T$
$Q_{x_{r,k}} = 10^{-5}$ $Q_{p_x} = 10^{-5}$	$K_k \approx [ 0.1488 \quad 0.3683 \quad 0.4665 \quad 0.4724 \quad 0.4724 \quad 0.4782 ]^T$
$Q_{x_{r,k}} = 10^{-6}$ $Q_{p_x} = 10^{-5}$	$K_k \approx [ 0.1064 \quad 0.2756 \quad 0.4089 \quad 0.4149 \quad 0.4149 \quad 0.4209 ]^T$
$Q_{x_{r,k}} = 10^{-6}$ $Q_{p_x} = 10^{-6}$	$K_k \approx [ 0.0854 \quad 0.1665 \quad 0.1794 \quad 0.1813 \quad 0.1813 \quad 0.1832 ]^T$

Na figura 7.26 apresentam-se os resultados de simulação, para uma perturbação em rampa, usando o AOB-2 e com várias combinações de  $Q_{x_{r,k}}$  e  $Q_{p_x}$ . Pela análise da figura 7.26 constata-se que a combinação que ‘mostra’ ser mais eficaz a compensar a perturbação, levando o WMR a convergir para o caminho mais rapidamente, é  $Q_{x_{r,k}} = 10^{-5}$ ,  $Q_{p_x} = 10^{-4}$ . No entanto

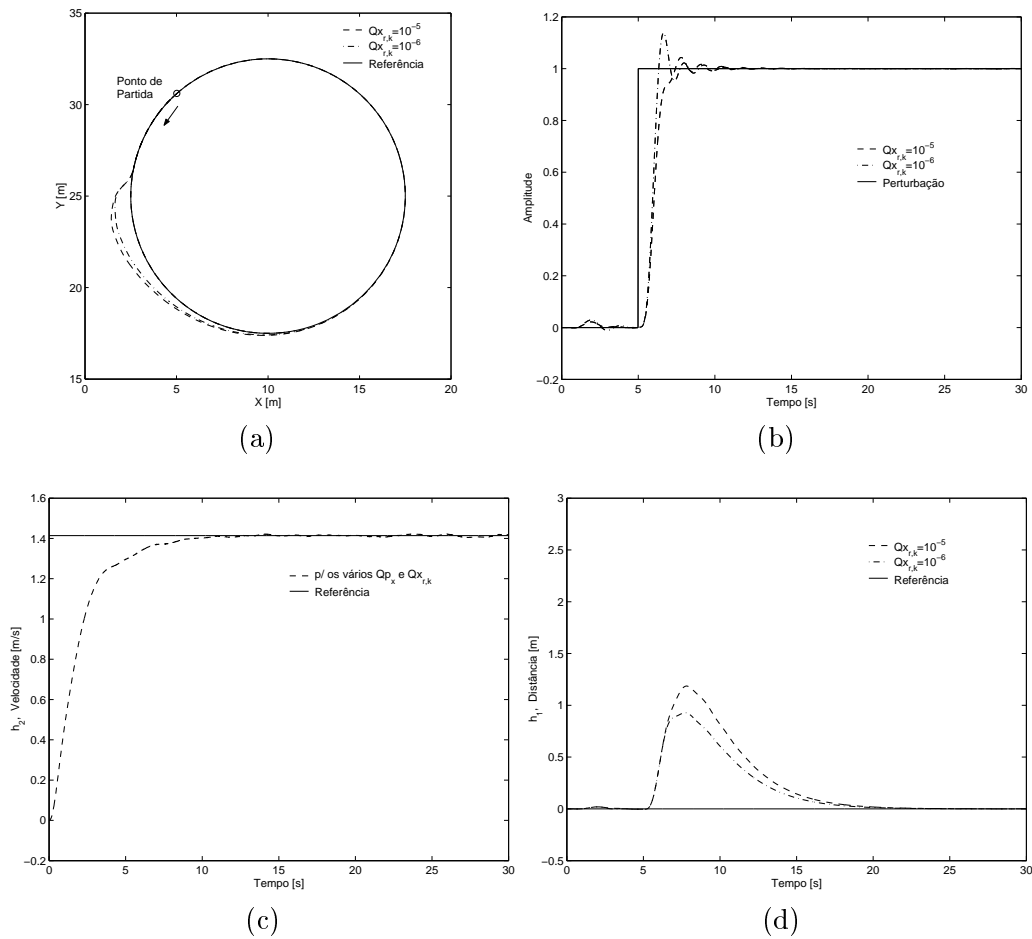


Figura 7.25: Caminho circular com AOB-1 no modelo de posição, e diferentes  $Q_{x_{r,k}}$ . (a) Seguimento de caminho. (b) Estado Activo do AOB-1 para a posição e perturbação em degrau. (c) Velocidade longitudinal. (d) Posição relativa.

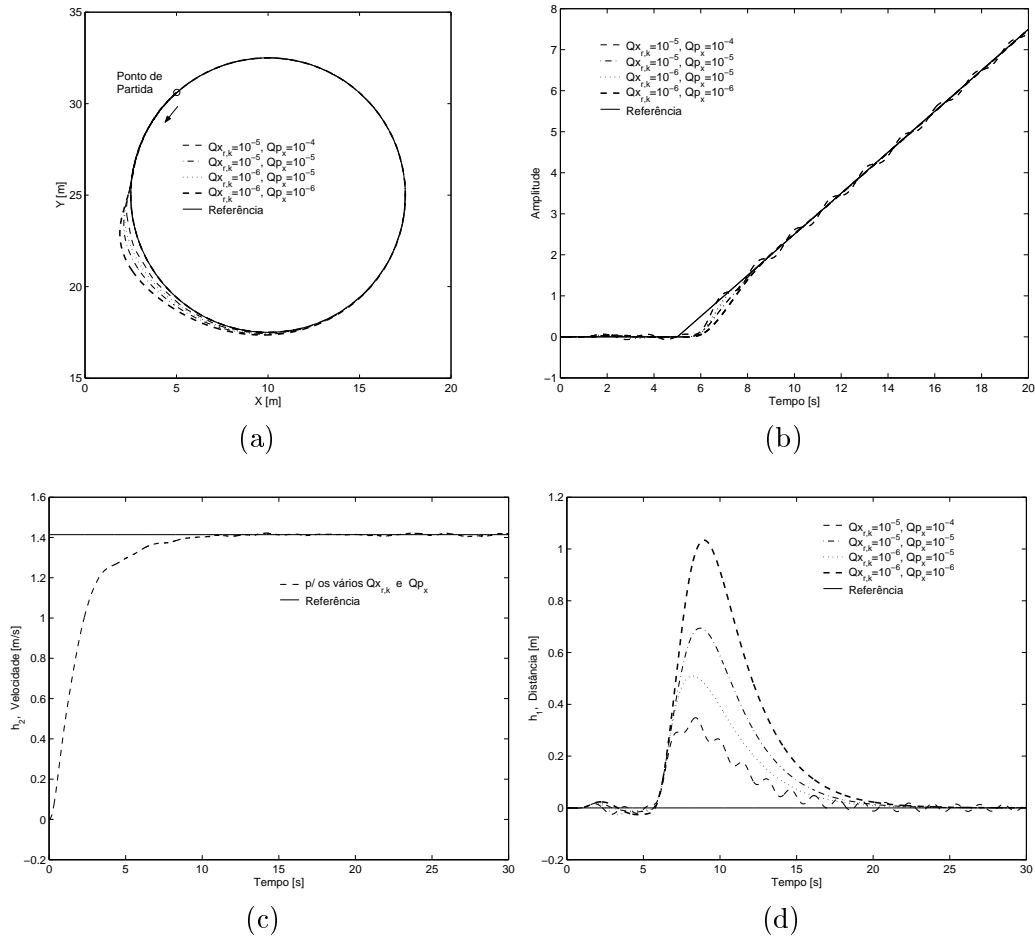


Figura 7.26: Caminho circular com AOB-2 no modelo de posição, e diferentes  $Q_{x_{r,k}}$  e  $Q_{p_x}$ . (a) Seguimento de caminho. (b) Estado activo do AOB-1 para a posição e perturbação em rampa. (c) Velocidade longitudinal. (d) Posição relativa.

esta combinação origina alguma oscilação (ver figuras 7.26(b) e (d)), nomeadamente na fase inicial da perturbação acabando esta oscilação por se desvanecer ao longo do tempo. Esta oscilação deve-se, tal como já referido nesta secção, ao aumento do valor absoluto dos elementos de  $K_k$  (ver tabela 7.3), o que provoca maior sensibilidade ao ruído.

Assim, de modo a ser mantida a mesma estratégia de controlo definida para o AOB-1, podem ser necessários alguns ajustes em  $Q_k$  e  $R_k$  à medida que aumenta a ordem do AOB. É de notar que, com o aumento da ordem do AOB a matriz do sistema estendido  $\Phi_a$  é alterada, afectando o ganho de Kalman, e consequentemente a estabilidade do AOB. A melhoria da estabilidade do AOB é feita à custa da diminuição da “actividade” de  $\hat{p}_k$  [51].

### 7.5.8 Influência de MBA, SBA, HBA

O caminho circular apresentado na secção 7.5.3 continua a ser utilizado nesta secção, e o WMR vai também ser sujeito a uma perturbação em degrau na referência de posição.

Esta secção apresenta resultados de simulação de um dos aspectos fundamentais do projecto do AOB, que são as estratégias de estimação. Na secção anterior foi discutida a importância da escolha dos valores de  $Q_{p_x}$  e  $Q_{x_r,k}$  de modo a obter os valores mais adequados para os elementos da matriz  $Q_k$ . Assim, exemplificou-se a forma de efectuar a ‘sintonia fina’ dos elementos de  $Q_k$ , de modo a obter-se o melhor acerto para o sistema de controlo, mas considerando sempre HBA. Pelo contrário, nesta secção discute-se a importância e as diferenças entre MBA, SBA e HBA. Nestas simulações o sistema é sujeito a uma perturbação em degrau, na referência do modelo de posição, aplicada aos 5 s, e os elementos da matriz  $Q_k$  não irão ser alterados. Todas as alterações serão efectuadas unicamente na matriz de ruído de medição  $R_k$ , sendo para o efeito utilizado uma matriz virtual<sup>12</sup> de ruído de medição,  $R_{virtual}$ .

No AOB, como já referido, a forma geral seguida é o HBA, permitindo desta forma um compromisso (negociação) entre estratégias de controlo baseadas no modelo e baseadas na informação dos sensores (nas medidas). Assim, a estimação de estados faz o balanço entre a informação das medidas e do modelo. Para as abordagens baseadas no modelo e nos sensores (MBA

<sup>12</sup> $R$  é o ruído real e  $R_{virtual}$  é o ruído dado ao projecto do AOB.

e SBA), a estimação é apenas conduzida pelo modelo e apenas conduzida pelos sensores, respectivamente.

Na figura 7.27, encontram-se os resultados obtidos com as diferentes abordagens (MBA, SBA e HBA), considerando que o  $R_{virtual}$  assume os seguintes valores:

$$\text{MBA} \rightarrow R_{virtual} = 10^{10} R$$

$$\text{SBA} \rightarrow R_{virtual} = 10^{-10} R$$

$$\text{HBA} \rightarrow R_{virtual} = R$$

Para MBA, ( $R_{virtual} = 10^{10} R$ ), verifica-se que o WMR não consegue seguir o caminho, acabando por se “perder” (ver figuras 7.27(a) e (b)). Tal acontece porque a estimativa da perturbação é sensivelmente zero. Isto sucede porque o estado activo (figura 7.27(d)) “não vê” a perturbação, uma vez que ele confia demasiado no modelo, negligenciando as medidas. Para o MBA, como esperado, todos os valores do ganho de Kalman,  $K_k$ , convergem para zero:

$$K_k \approx [0.0019 \quad 0.0001 \quad 0.0000 \quad 0.0000 \quad 0.0000]^T.$$

Ao contrário de MBA, para SBA ( $R_{virtual} = 10^{-10} R$ ), a dinâmica da estimativa da perturbação (i.e. o estado activo) é alta tornando o estado activo mais actuante (figura 7.27(d)), mas também mais sensível ao ruído. Por este facto o WMR consegue convergir para o caminho, após ser sujeito à perturbação, no entanto o seu movimento torna-se um pouco oscilatório (figuras 7.27(a) e (b)). É de notar que a sensibilidade ao ruído de  $\hat{p}_k$  aumenta com a diminuição de  $R_{virtual}$ . Para o SBA, como esperado  $K_k$  converge, para o estado medido, para o valor um:

$$K_k \approx [1.0000 \quad 2.6653 \quad 3.0778 \quad 3.0778 \quad 3.0778]^T.$$

Para o HBA, ( $R_{virtual} = R$ ), a estimativa da perturbação é menos ruidosa/oscilatória (figura 7.27(d)), do que para SBA. O WMR consegue convergir para o caminho desejado após a perturbação, apesar de não ser tão rápido como o verificado para o SBA (figuras 7.27(a) e (b)). Para o HBA, o  $K_k$  assume os seguintes valores:

$$K_k \approx [0.1407 \quad 0.3018 \quad 0.2931 \quad 0.2931 \quad 0.2931]^T.$$



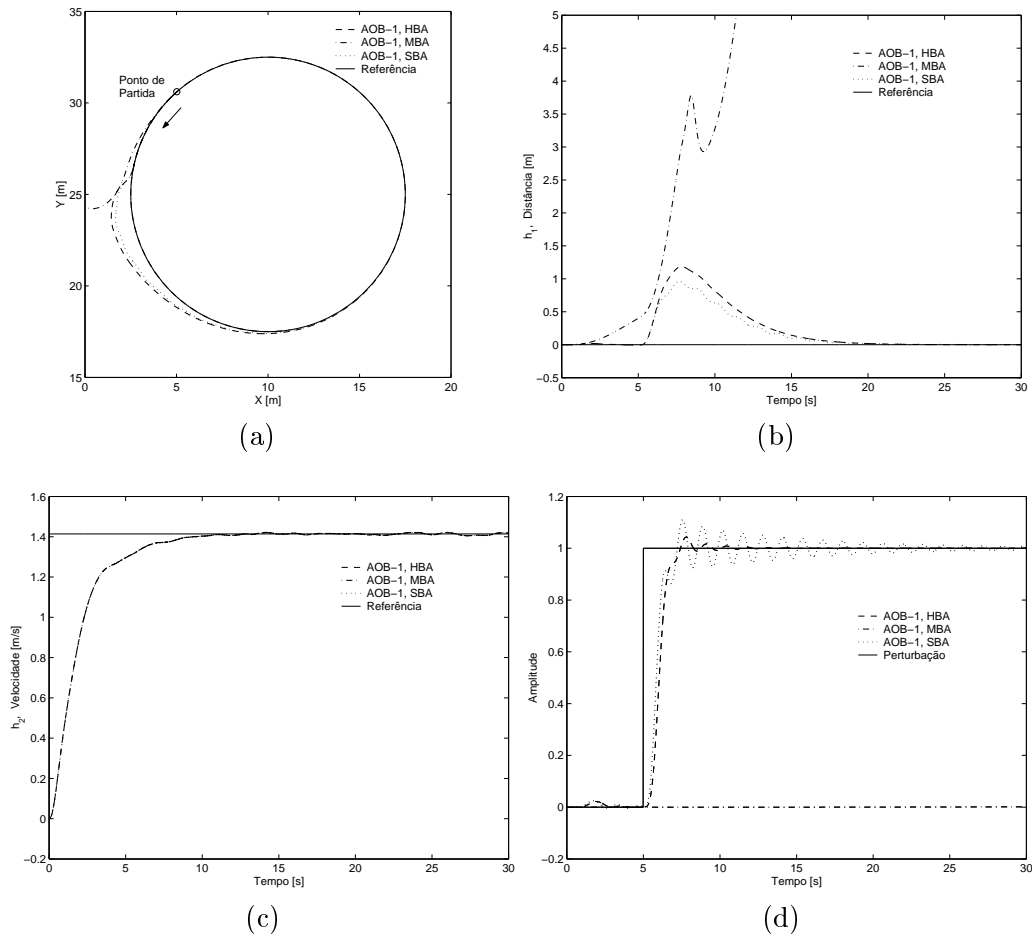


Figura 7.27: Análise do comportamento com HBA, MBA e SBA. (a) Seguimento de caminho. (b) Posição relativa. (c) Velocidade longitudinal. (d) Estado Activo do AOB-1 para a posição e perturbação em degrau.

Resultados análogos aos obtidos deverão ser conseguidos “escalando”  $Q_k$  em vez de  $R_k$ . Relativamente à velocidade longitudinal, como seria de esperar, não houve qualquer tipo de alteração dado que os valores de  $R_{virtual}$  foram ‘introduzidos’ apenas no modelo/controlador de posição.

No apêndice *E* encontram-se gráficos que apresentam os valores estimados e os valores reais, bem como a sua diferença, para as abordagens MBA, SBA e HBA.

### 7.5.9 Influência do Valor de $\tau_c$ no AOB-1 e no CKF

Nesta secção, são analisados os factores que envolveram a escolha da constante de tempo em malha-fechada,  $\tau_c$ , e simultaneamente é realizada uma comparação entre AOB-1(HBA) e CKF(HBA). O caminho utilizado continua a ser o caminho circular utilizado nas secções anteriores.

Foram inúmeros os ensaios elaborados, neste estudo, com vários valores de  $\tau_c$ . No entanto, para o caso do robô em estudo e para o tipo de movimento pretendido (movimento suave), os ensaios que obtiveram o desempenho mais adequado, e que aqui se apresentam, foram obtidos para  $\tau_c = 1 s$  e  $\tau_c = 2 s$ .

Assim, ambos os modelos de posição e de velocidade, foram simulados com estas constantes de tempo. A perturbação, continua a ser a utilizada em secções anteriores, isto é uma perturbação em degrau na referência do sistema de posição. Nas simulações utilizam-se ainda os valores das matrizes estocásticas referidos nas secções 7.4.2 e 7.4.3.

Por observação das figuras<sup>13</sup> 7.28(a),(b) e (d), verifica-se que para ambos os controladores o melhor resultado é conseguido quando se utiliza  $\tau_c = 1 s$ . Como esperado, o WMR com o AOB-1 segue bem a referência, pelo contrário com o CKF é completamente alterado pela perturbação, estabilizando numa trajectória que não é a desejada. A acção do estado activo é fundamental para o AOB-1, pois permite compensar a perturbação (figura 7.29(b)), conduzindo o WMR para o caminho desejado.

Se o estado activo  $\hat{p}_k$  estiver ‘desligado’, o algoritmo do AOB ‘perde’ as equações de estado activo, sendo então equivalente ao CKF e consequentemente não consegue compensar a perturbação. O AOB de ordem zero (AOB-0) pode então ser visto como um CKF. Assim, conclui-se que se o controlador AOB é usado, o estado activo estima a perturbação proporcionando

---

<sup>13</sup>Nas figuras  $\tau_c$  é representado simplesmente por  $\tau$ .

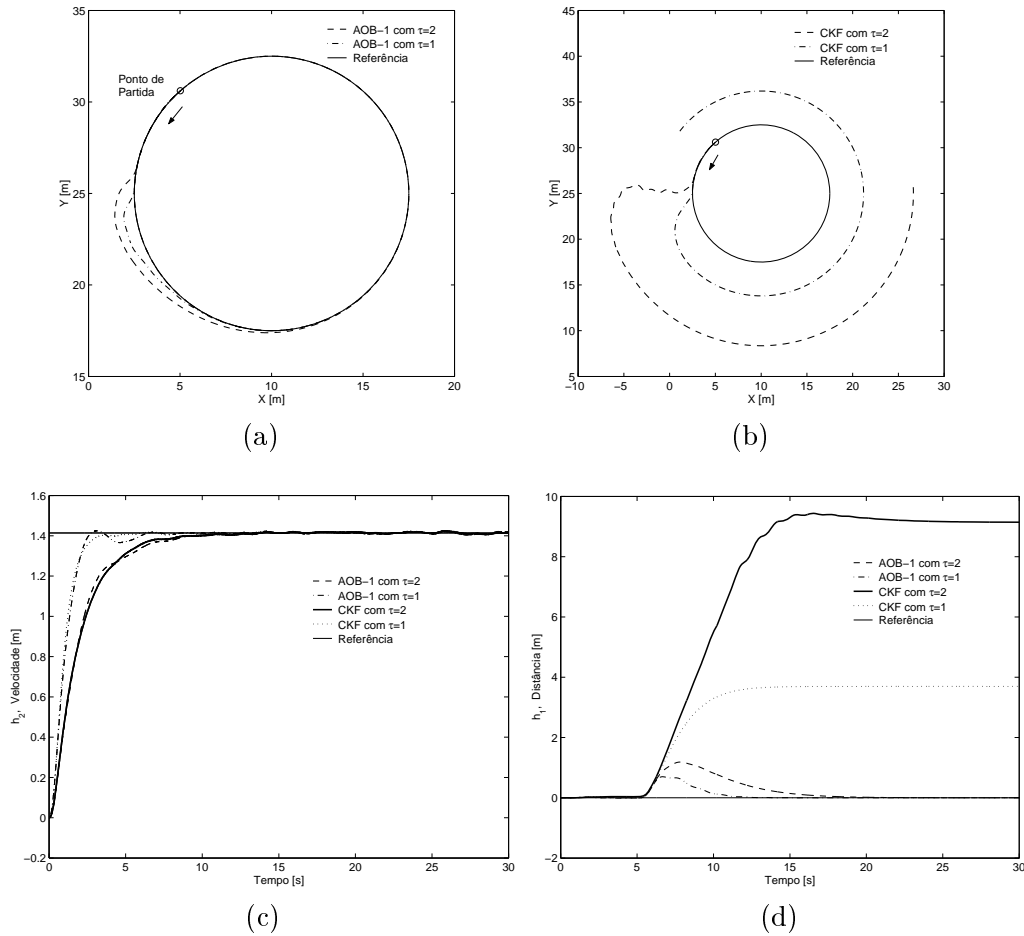


Figura 7.28: Comportamento do WMR com diferentes  $\tau_c$ . (a) Seguimento de caminho com AOB-1. (b) Seguimento de caminho com CKF. (c) Velocidade longitudinal. (d) Posição relativa.

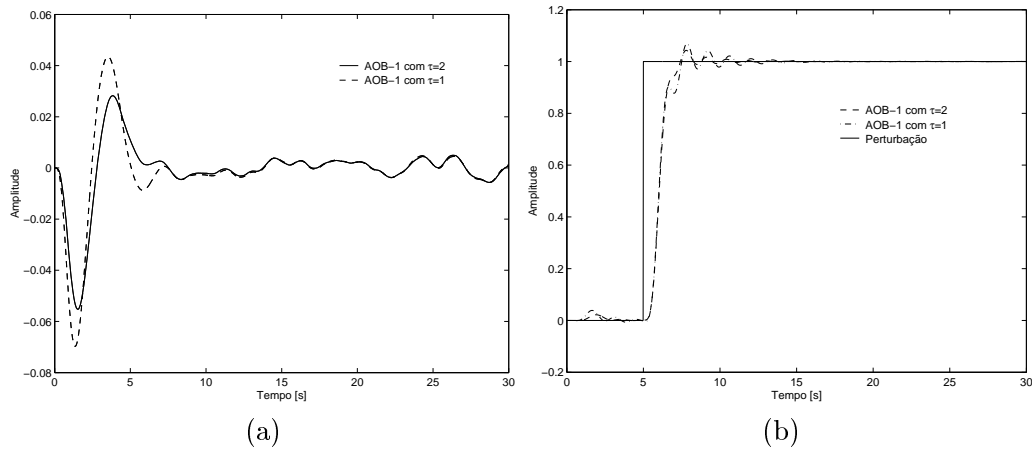


Figura 7.29: Comportamento do WMR com diferentes  $\tau_c$  para AOB-1. (a) Estado activo para a velocidade. (b) Estado activo para a posição e perturbação.

uma acção de compensação apropriada. Por outro lado, se o controlador tem um observador sem estado activo (logo sem acção de compensação), como o CKF, o erro do estado estacionário é função do ganho de Kalman.

O erro de estado estacionário verificado, quando se utiliza o CKF, deve-se ao facto de, para esta perturbação os valores utilizados para  $Q_k$  e  $R_k$  (especificamente para o CKF), não serem os mais adequados. No entanto, provavelmente este problema voltaria a existir se o sistema fosse sujeito a outro tipo de perturbação que não a actual. É de notar, que o CKF é de ganho constante, tendo por isso tendência a originar um erro estacionário. Se o controlador fosse de ganho variável este erro estacionário teria tendência a diminuir/desaparecer havendo uma melhor convergência para os valores de referência, mas não tão rápida como a que se obtém com o AOB.

A grande virtude do AOB é a sua capacidade de adaptação e compensação aos vários tipos de perturbações.

Relativamente à velocidade (figura 7.28(c)), verifica-se que o WMR tende mais rapidamente para a velocidade no caso de se usar  $\tau_c = 1$  s, independentemente de se usar AOB-1 ou CKF. No entanto, é de notar que nesta simulação, o modelo (sistema) da velocidade não está sujeito a qualquer tipo de perturbação.

O estado activo do AOB-1, quer para a velocidade (figura 7.29(a)), quer

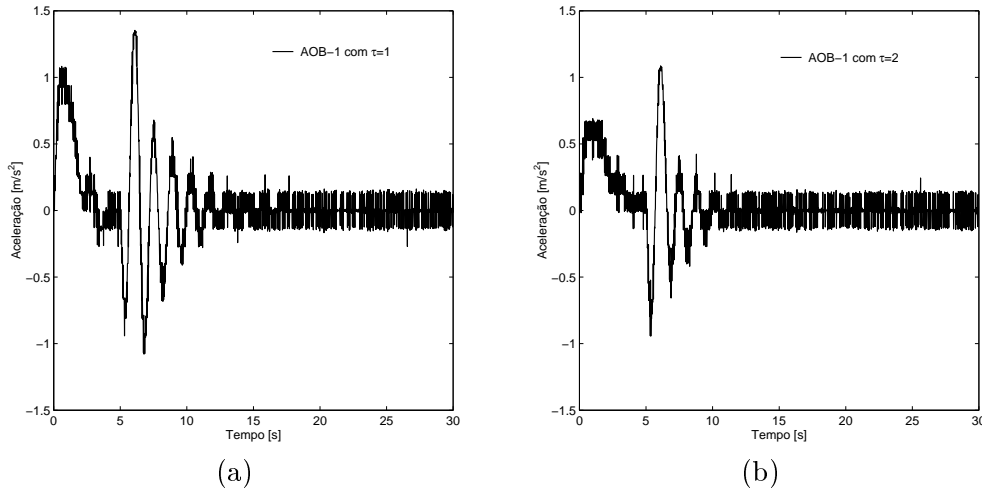


Figura 7.30: Acelerações presentes no WMR com AOB-1. (a) Aceleração com  $\tau_c = 1$  s. (b) Aceleração com  $\tau_c = 2$  s.

para a posição (figura 7.29(b)), demonstra ser ligeiramente mais actuante quando se utiliza  $\tau_c = 1$  s. Como era esperado, este incremento de actuação implica um ligeiro aumento do esforço de comando, dado que este aumenta à medida que o valor de  $\tau_c$  diminui [51].

O valor da constante de tempo,  $\tau_c$ , pode ser diminuído, mas deve ser acompanhado de um redimensionamento dos valores de  $Q_k$  e  $R_k$ , de modo a não permitir a saturação do esforço de comando [51].

Apesar de  $\tau_c = 1$  s obter melhores resultados (ser mais rápido), não foi este o valor de  $\tau_c$  utilizado na generalidade das simulações apresentadas neste capítulo, mas sim  $\tau_c = 2$  s. Tal, deve-se ao facto de que para  $\tau_c = 1$  s o sistema (i.e. a cadeira de rodas robotizada) apresentar maiores valores de aceleração, logo reacções mais rápidas, do que as obtidas com  $\tau_c = 2$  s, principalmente quando sujeito a perturbações. Assim, e dadas as circunstâncias em que a cadeira de rodas é utilizada, a escolha de  $\tau_c = 1$  s implicaria um menor conforto do utilizador deste tipo de veículo, devido, como já referido, às acelerações mais acentuadas e reacções mais bruscas (ver figuras 7.30(a) e (b)).

Segundo Felipe e Navin [71], a aceleração e desaceleração lateral de conforto máxima permitida, em pequenas curvas, para os automóveis comuns é de  $0.35g - 0.40g$  o que corresponde a  $3.43 \text{ m s}^{-2} - 3.92 \text{ m s}^{-2}$ . Assim, dado

que se utiliza uma cadeira de rodas robotizada, que não possui o conforto de um automóvel, optou-se por valores de aceleração relativamente mais baixos. Portanto, a opção recaiu sobre o  $\tau_c = 2 s$  (figura 7.30(b)) em detrimento de  $\tau_c = 1 s$  (figura 7.30(a)), dado que apresenta acelerações mais baixas, possibilitando maior conforto ao utilizador.

### 7.5.10 Seguimento de um Caminho ‘Composto’

Foi mostrado por Dubins [63] e Reeds [153] e mais tarde em [38],[164],[74], que todos os caminhos, mesmo os mais pequenos, podem ser divididos em arcos circulares e linhas rectas. O resultado é um caminho contínuo dividido em ‘parcelas’ com descontinuidade na ligação entre os segmentos (arcos circulares e linhas rectas). Um exemplo deste tipo de caminho, composto por arcos circulares e linhas rectas, é apresentado na figura 7.31(a).

De modo a realizar o seguimento de caminho deste caminho “composto” é usado exclusivamente o controlador AOB, uma vez que tanto com o CKF como com o PPC verificam-se dificuldades (quando o sistema é sujeito a perturbações) no seguimento de caminho e não se consegue atingir o fim do caminho. De modo a ser verificada a robustez do controlador AOB (bem como o funcionamento intrínseco do AOB) quando sujeito a diferentes perturbações, o sistema será sujeito, como na secção 7.5.3, a uma perturbação em degrau na referência de posição (ver figura 7.32(b)). A figura 7.31(b) mostra o excelente desempenho do sistema de controlo. Quando a perturbação é introduzida, o robô desvia-se no máximo  $1.2 m$  do caminho desejado (figura 7.31(d)), contudo este erro estacionário é rapidamente compensado pelo estado activo (figura 7.32(b)) do AOB. A partir da observação, do eixo do tempo, da figura 7.31(d) verifica-se que aproximadamente aos  $22s$ ,  $38s$ ,  $53s$  e  $70s$  o sistema apresenta pequenos erros transitórios, que são devidos às transições entre segmentos (caminhos em linha recta ou circulares). Note-se que o ponto final  $(x, y)$  de um segmento não é necessariamente coincidente com o ponto inicial do segmento seguinte. Por esse motivo existem, necessariamente, sempre descontinuidades e desvios. No entanto, devido à utilização do AOB as descontinuidades são “negociadas” sem qualquer dificuldade, uma vez que o estado activo (figura 7.32(b)) faz a sua compensação. Como resultado, o desvio do caminho actual ao caminho desejado quase não existe, e os erros transitórios (devido às transições entre segmentos) exibem no máximo uma amplitude de  $0.03 m$  (ver figura 7.31(d)).

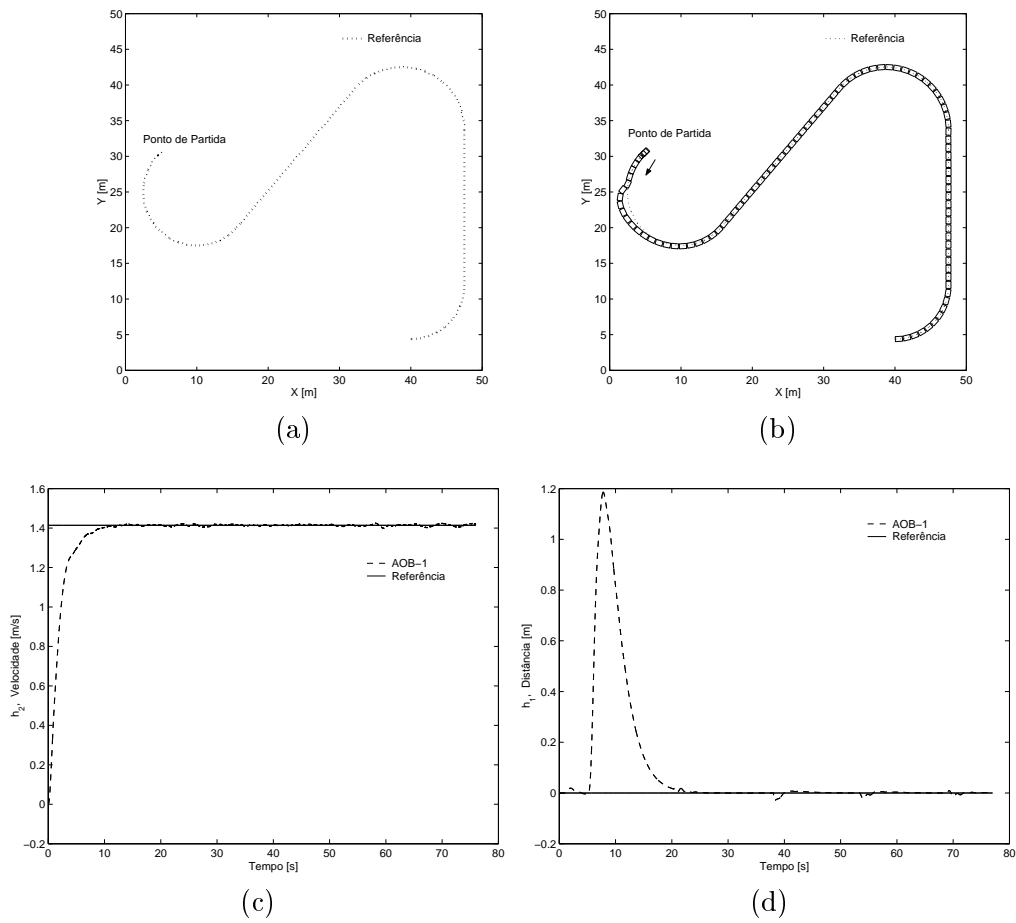


Figura 7.31: Comportamento do WMR para o caso de um caminho “composto” na presença de uma perturbação na referência de posição, usando o AOB. (a) Caminho “composto” desejado. (b) Seguimento de caminho para um caminho “composto”. (c) Velocidade longitudinal no seguimento de caminho. (d) Distância entre o caminho actual e o desejado, realizado pelo robô (posição relativa).

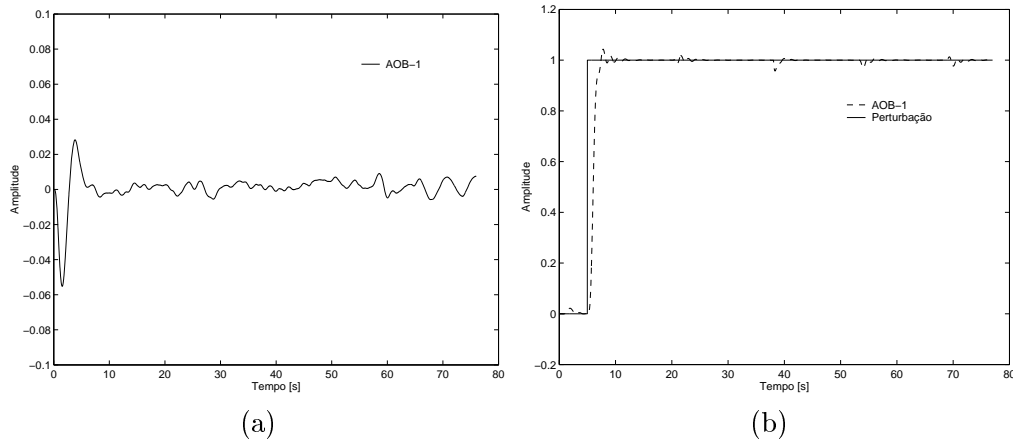


Figura 7.32: Comportamento dos estados activos quando há uma perturbação na referência de posição, para o caso de um caminho “composto”, usando AOB. (a) Estado activo  $\hat{p}_k$  para o modelo de velocidade. (b) Estado activo  $\hat{p}_k$  para o modelo de posição e Perturbação.

No que diz respeito à velocidade (como não sofre perturbação), observa-se que ela converge para o valor desejado (figura 7.31(c)) e o estado activo para o modelo de velocidade (figura 7.32(a)) mantém-se perto de zero, excepto no tempo inicial, como esperado (onde a velocidade aumenta de  $0 \text{ m/s}$  até  $1.414 \text{ m/s}$ ).

Para este tipo de caminho (figura 7.31(a)), são apresentadas no apêndice E, outras simulações, que vêm mais uma vez comprovar a robustez e eficiência do AOB no seguimento de caminho, com ou sem perturbações e partindo, ou não, de uma posição correcta.

## 7.6 Conclusões

Neste capítulo foi discutida a implementação do controlo, em discreto, da cadeira de rodas robotizada, tendo em atenção que este ‘WMR’, possui algumas particularidades muito próprias, nomeadamente no que respeita à segurança do utilizador, à necessidade de ter uma navegação suave e sem acelerações bruscas. Após a discretização e a colocação de pólos para os



modelos de posição e velocidade, foi apresentada e discutida a estrutura (e algoritmo) do AOB, bem como as suas diversas estratégias de estimação. O objectivo principal do AOB é conseguir um comportamento em malha fechada desejado sem ter em consideração as imperfeições dos modelos usados em projectos de controlo. Para atingir este objectivo é necessário: 1) uma especificação do sistema, em malha fechada, desejado; 2) uma equação extra, referida à entrada do sistema de modo a estimar uma perturbação equivalente. Esta perturbação equivalente é descrita por um estado activo  $\hat{p}_k$ . As evoluções  $\hat{p}_k$  são quantificadas de um modo estatístico. Os métodos probabilísticos são essenciais no projecto do AOB. A teoria estocástica presente no AOB está ligada ao conceito do filtro de Kalman. Propriedades do ganho de Kalman permitem definir três diferentes estratégias de estimação: MBA, SBA e HBA [51].

Tanto o controlador AOB como o CKF baseiam-se no filtro de Kalman. A diferença entre estes controladores é a sua estrutura. O controlador AOB usa o filtro de Kalman numa estrutura de controlo por realimentação não-clássica, tendo como entrada os ‘sinais’ de referência e de saída  $(r_k, y_k)$  em vez de  $(u_k, y_k)$ . Deste modo e por introdução de uma variável de estado extra, como discutido na secção 7.3.1, é possível estimar a perturbação equivalente que irá “actuar” no sistema, permitindo cancelar a sua influência. Com esta estratégia é possível impor o comportamento em malha-fechada desejado a todo o sistema de controlo.

Foram ainda, neste capítulo, apresentados e analisados, através de simulação computacional, os resultados obtidos com o AOB, quando o sistema é sujeito a diversas perturbações. Com base nestas simulações realizou-se uma análise comparativa entre AOB *versus* CKF *versus* PPC. Nas diversas simulações efectuadas, discutiu-se a influência da escolha das velocidades desejadas no seguimento de caminho, bem como da constante de tempo em malha fechada,  $\tau_c$ . Analisou-se, também, o efeito das incertezas de modelação nos parâmetros inerciais (massa), tendo o AOB mostrado boa capacidade de compensação a esta “perturbação” quando comparado com os controladores PPC e CKF. O mesmo foi verificado quando sujeitos a outros tipos de perturbação. Assim, pelo que foi observado neste estudo, pode-se concluir que o AOB, comparativamente às estratégias de controlo clássicas (PPC e CKF), apresenta melhores resultados no seguimento de caminho.

Extensas simulações foram realizadas de modo a evidenciar, quer a flexibilidade do AOB para diferentes estratégias de controlo (MBA, SBA e

HBA), quer a influência dos elementos da matriz  $Q_k$  na sintonia do AOB. Mostrou-se ainda que aumentando a ordem do AOB aumenta a capacidade para ‘seguir’ perturbações não-lineares mais elevadas, mas a sensibilidade ao ruído aumenta e a estabilidade relativa e a robustez diminuem. Reprojectando os parâmetros estocásticos para AOBs de ordens mais elevadas pode-se melhorar a estabilidade relativa [51].

É de notar que esta é a primeira vez que o projecto do controlador AOB é aplicado a seguimento de caminho de WMRs. Os resultados obtidos mostraram a validade e a eficiência do projecto de controlo do AOB no seguimento de caminho, mesmo quando os parâmetros físicos do WMR (e.g. a massa) foram alterados.

# Capítulo 8

## Conclusões

Planear o movimento (comportamento) para manobras automatizadas de veículos, como por exemplo um WMR, um carro ou uma cadeira de rodas eléctrica, é uma tarefa complexa. Uma das possíveis abordagens é aproximar o comportamento do ‘veículo automatizado’, ao comportamento que teria um humano que se deparasse com o problema da “condução” desse veículo, entre obstáculos, num ambiente complexo.

Um sistema robótico, que é capaz de executar tarefas de um modo semelhante a um humano, é chamado um sistema robótico inteligente [51]. Segundo Antsaklis [12] um sistema de controlo inteligente deve ser capaz de realizar, pelo menos, uma das seguintes funções: planeamento de acções, aprendizagem com base na experiência passada, detecção de erros e sua correcção. Tais sistemas reúnem sinergias em várias áreas disciplinares (tais como o controlo clássico, controlo estocástico, lógica difusa, redes neurais, aprendizagem), com o objectivo de actuarem em conformidade com o problema com que se deparam. Portanto, os sistemas de controlo inteligentes expandem as potencialidades do controlo clássico, através da inclusão de outras estruturas de conhecimento, de modo a obter comportamentos inteligentes.

O controlo clássico permite resolver, muitos problemas de sistemas baseados no modelo de referência, e a teoria estocástica quantifica de modo robusto incertezas de modelo, ruídos, não-linearidades, e diversos tipos de perturbações. Assim, para se obterem sistemas de controlo robustos a vários tipos de incertezas, pode-se recorrer a técnicas estocásticas para complementar as determinísticas (e.g. controlo clássico).

Nos últimos anos, a dinâmica e o controlo de sistemas mecânicos não-holónomos receberam grande atenção por parte dos investigadores, na área da robótica. No trabalho descrito nesta tese foram também considerados tais sistemas, bem como sistemas mecânicos sujeitos a restrições rolantes (sistemas que são frequentemente encontrados na robótica).

A evolução dos projectos mecânicos e de sistemas de controlo de movimento tem vindo a permitir, quer uma melhor aplicação dos robôs móveis com rodas (WMR) a tarefas em ambientes não estruturados, quer a um controlo mais eficiente dos WMRs. Um dos problemas que tem influenciado os vários algoritmos de controlo de seguimento de caminho, apresentados na literatura, é a necessidade da existência de robustez contra ruído, perturbações, incertezas do modelo e não-linearidades.

Este trabalho, apresentou metodologias para construir sistemas de controlo inteligentes. A maior parte das análises recorrem aos conceitos do filtro de Kalman, expandindo-lhe as suas potencialidades a vários domínios, tais como o controlo adaptativo robusto.

Assim, nesta tese foi apresentada em detalhe, a implementação de uma nova estratégia de controlo para o seguimento de caminho de WMRs sujeitos a restrições não-holónomas. Esta estratégia de controlo é composta por uma malha interna de linearização por realimentação entrada-saída e por uma malha externa de controlo linear com o controlador com Observador Activo baseado no filtro de Kalman (AOB), proposto por Cortesão [51]. No entanto, esta foi a primeira vez que o AOB foi aplicado a WMRs. Esta estratégia de controlo apresenta a particularidade de ser usada em modo discreto. Além disso, é robusta contra incertezas e perturbações.

Nesta tese, foram abordados aspectos envolvidos no projecto e implementação de controladores para sistemas com restrições não-holónomas. As restrições não-holónomas são basicamente restrições à manobrabilidade do sistema (i.e. do WMR). Este capítulo resume o esforço de pesquisa apresentado nesta tese.

## 8.1 Considerações Finais

Apresentam-se nesta secção, de forma sucinta, os ‘pontos-chave’ discutidos nos capítulos desta tese.

## Cinemática de Robôs Móveis

No capítulo 3, foram apresentados de forma aprofundada e sistemática, os conceitos teóricos necessários ao cálculo do modelo cinemático de qualquer WMR, e foi ilustrada a aplicação desta metodologia para o modelo cinemático do WMR em estudo (cadeira de rodas robotizada).

No desenvolvimento deste capítulo, após uma breve consideração teórica sobre o tipo de rodas existentes nos WMRs, abordou-se a atribuição de sistemas de coordenadas através da convenção de Sheth-Uicker. Os sistemas de coordenadas instantaneamente coincidentes, são uma das pedras chave na obtenção do modelo cinemático. Sistemas de coordenadas instantaneamente coincidentes, conduzem directamente ao Jacobiano da Roda, que relaciona as velocidades de uma roda com as velocidades do corpo do WMR. Calcularam-se, através da aplicação da solução dos mínimos quadrados, as duas soluções da equação composta do robô: a solução da velocidade inversa actuada e a solução da velocidade avançada detectada. Na solução de velocidade inversa actuada, calcularam-se as velocidades actuadas das rodas a partir das velocidades do corpo do WMR. Por sua vez, no cálculo da solução de velocidade avançada detectada calcularam-se as velocidades do corpo do WMR, apenas a partir das velocidades detectadas (medidas com sensores) das rodas. Constatou-se que, a solução de velocidade avançada detectada pode ser simplificada, eliminando as equações de movimento das rodas com três DOFs e que não são medidas (e.g. ‘castores’), uma vez que elas não afectam a solução.

Pode-se, ainda, concluir que para seguir uma trajectória (para aplicações de âmbito geral), necessita-se apenas de um robô com dois graus de liberdade. Um WMR com dois graus de liberdade permite um projecto mecânico mais simples, reduzindo tanto os custos de ‘hardware’ como de construção. O modelo cinemático torna-se, também, mais simples de projectar e de implementar.

Por fim, foi realizada a transformação das velocidades do robô em estudo, do sistema de coordenadas do robô para o sistema de coordenadas do mundo (chão), e obtiveram-se as suas restrições cinemáticas.

O capítulo 3 contribuiu, através das metodologias apresentadas, para elucidar e obter uma boa prática de engenharia no cálculo do modelo cinemático de um WMR.

### **Dinâmica de Robôs Móveis**

No capítulo 4, foi sistematizada e clarificada a dinâmica de robôs móveis com rodas. Ao longo do capítulo foram abordados vários conceitos necessários à compreensão da dinâmica dos WMRs, nomeadamente a formulação de Lagrange, a classificação de sistemas não-holónomos (recorrendo à álgebra de Lie), e a representação em espaço de estados do sistema. A ‘base de trabalho’ apresentada é muito geral e permite tratar tanto as restrições holónomas como não-holónomas de um modo unificado. Então, transformou-se o problema do controlo de um sistema dinâmico com restrições, num problema padrão, equivalente, de controlo não-linear. A aplicação destas metodologias foi ilustrada na obtenção do modelo dinâmico do WMR em estudo (cadeira de rodas robotizada). A dinâmica de robôs móveis é bastante importante no controlo de seguimento de caminhos, uma vez que os robôs móveis têm uma mobilidade restrita, traduzida em restrições não-holónomas. Por isso, um bom modelo dinâmico é fundamental na caracterização do robô, com o objectivo de obter um bom desempenho ao nível do seu controlo. Dado que as rodas motrizes (actuadas) são as únicas que estão ligadas a motores, desprezaram-se, na obtenção do modelo dinâmico, as rodas tipo “castor”, cabendo a estas, apenas, manter o equilíbrio do robô. Convém referir que, as rodas tipo “castor” permitem três graus de liberdade, não impondo portanto nenhuma restrição cinemática ao movimento do WMR. No entanto, o sistema de controlo deve ser suficientemente robusto para minimizar as perturbações ao movimento, causadas pela existência destas rodas, cujo efeito é particularmente sensível em mudanças não suaves de direcção e/ou de sentido. O facto de se proceder ao estudo dinâmico, permite ter modelos de simulação mais realistas, e permite testar e ajustar os controladores em ambiente simulado sem ser necessário recorrer constantemente ao protótipo. Por outro lado, a inclusão do modelo dinâmico na malha de controlo, e não apenas do modelo cinemático, conduz à construção de controladores mais robustos. O capítulo 4 contribuiu para elucidar o modo de obtenção do grau de holonomia de um sistema, a obtenção do modelo dinâmico de um WMR e a representação em espaço de estados do sistema.

### **Linearização por Realimentação**

Uma vez que no capítulo 4 se obteve um sistema não-linear, tornou-se necessário proceder à sua linearização, de modo a possibilitar o seu controlo li-

near. Assim, no capítulo 5 considerou-se este problema, tendo sido aplicada uma transformação não-linear de estado. A linearização por realimentação foi estudada para o modelo de um robô móvel com rodas, tendo-se concluído que a linearização entrada-estado não é aplicável devido ao facto de o sistema não ser localmente controlável. Calculou-se, então, uma realimentação não-linear, que garante estabilidade entrada-saída e estabilidade para o sistema global. Apresentou-se então, de forma sistematizada e detalhada, a linearização por realimentação entrada-saída. A linearização entrada-saída foi aplicada com sucesso tendo desacoplado e linearizado o sistema. Foi analisada a dinâmica interna não observável resultante deste procedimento. Na escolha das variáveis de saída teve-se em consideração o tipo de algoritmo pretendido, i.e. “algoritmo de seguimento de caminho”, tendo-se escolhido como variáveis de saída: - a menor distância desde o ponto de referência no WMR ao caminho desejado, e - a velocidade longitudinal. Foram calculados os Jacobianos e as matrizes de desacoplamento para os dois caminhos básicos (arco circular e linha recta). Então, a condição necessária e suficiente para que o sistema seja linearizado por entrada-saída é que  $\det(\Phi_d) \neq 0$ . Se esta condição se verificar, por aplicação da realimentação não-linear (equação (5.14)), obtém-se um sistema linearizado e desacoplado.

### **Seguimento de Caminho - Contínuo**

No capítulo 6, foram apresentados dois esquemas de controlo de seguimento de caminho, em tempo contínuo, do WMR (um considerou apenas o modelo do sistema dinâmico do robô móvel, o outro, semelhante ao anterior, considerou também os motores da cadeira de rodas). Ambos os esquemas de controlo permitiram caracterizar de um modo intrínseco um controlador de seguimento de caminho. O controlador utilizado na malha de realimentação linear foi um controlador por colocação de pólos (PPC). Investigou-se, através de simulação computacional, a influência das diferentes escolhas de velocidades iniciais e de ângulos iniciais no comportamento do seguimento de caminho, tendo-se concluído, para ambos os esquemas de controlo, que o WMR, partindo de uma distância afastada do caminho, converge mais depressa para o caminho desejado quando a velocidade inicial é baixa. Do mesmo modo, verificou-se que quanto mais direccionado para o caminho estiver o WMR, mais rapidamente ele se aproxima desse caminho. É de notar que, quer para as velocidades iniciais, quer para os ângulos iniciais, o

WMR converge para o caminho de forma suave (i.e. sem movimentos bruscos), o que é desejável para o caso da cadeira de rodas robotizada. Através de resultados de simulação, ilustrou-se o desempenho dos esquemas de controlo apresentados, tendo-se concluído, que o algoritmo de seguimento de caminho mostrou ser uma estratégia de controlo realística em situações em que um ‘veículo’ necessita seguir um caminho com uma dada velocidade desejada.

### Seguimento de Caminho - Discreto

As contribuições principais desta tese, foram implementadas no capítulo 7, e são aqui resumidas. Nesse capítulo foram descritas as metodologias respeitantes à discretização, e à colocação de pólos em malha fechada para os modelos de posição e velocidade, e foi discutida e apresentada uma nova estratégia de controlo para o seguimento de caminho, em tempo discreto, de WMRs sujeitos a restrições não-holónomas. Este algoritmo de controlo de seguimento de caminho da cadeira de rodas robotizada, obedeceu a algumas particularidades muito próprias, nomeadamente no que respeitou à segurança do utilizador, e à necessidade de ter uma navegação suave e sem acelerações bruscas. Este novo algoritmo foi implementado em tempo discreto, sendo robusto contra ruído, incertezas de modelo, perturbações e outras não-linearidades. Esta estratégia de controlo é composta por uma malha interna de linearização por realimentação entrada-saída e por uma malha externa de controlo linear onde usou o Controlador com Observador Activo baseado no filtro de Kalman (AOB). O filtro de Kalman teve portanto um papel fundamental neste algoritmo. Foi apresentado o algoritmo geral do AOB e os teoremas básicos que lhe servem de base. O objectivo principal do AOB é conseguir um comportamento em malha fechada desejado, independentemente das imperfeições dos modelos usados em projectos de controlo. Para atingir este objectivo foi necessário: 1) uma especificação do sistema, em malha fechada, desejado; 2) uma equação extra, referida à entrada do sistema de modo a estimar uma perturbação equivalente; 3) O projecto estocástico das matrizes de Kalman  $Q$  e  $R$  para o controlador AOB. Os parâmetros estocásticos foram considerados no contexto do estado do sistema. Estes parâmetros,  $\xi_{x_k}$ , definem a incerteza do modelo do sistema. O valor desta incerteza deve ser baixo, reflectindo desta forma confiança no modelo; tudo que não se ‘enquadre’ nesta incerteza é consi-



derado perturbação e a sua influência deve ser atenuada/cancelada. Esta perturbação equivalente, referida à entrada do sistema, é descrita por um estado activo  $\hat{p}_k$ . As evoluções  $\hat{p}_k$  são quantificadas de um modo estatístico. A estrutura estocástica nas matrizes de Kalman é constante (fixa), o que implica que o ganho de Kalman seja também constante. A relação entre a matriz de ruído do sistema,  $Q$ , e a matriz de ruído de medição,  $R$ , define o ganho de Kalman e conseqüentemente a estratégia de estimação. Três estratégias de estimação foram testadas com base na informação do modelo e dos sensores [51]. Tanto o controlador AOB, como o controlador de colocação de pólos com observador por filtro de Kalman (CKF), usam o filtro de Kalman. A diferença entre estes controladores é a sua estrutura. O controlador AOB usa o projecto de Kalman numa estrutura de controlo por realimentação não-clássica, tendo como entrada os ‘sinais’ de referência e de saída  $(r_k, y_k)$  em vez de  $(u_k, y_k)$ . Deste modo, e por introdução de uma variável de estado extra foi possível estimar a perturbação equivalente que “actuou” no sistema, permitindo cancelar a sua influência. Com esta estratégia foi possível impor o comportamento em malha-fechada desejado a todo o sistema de controlo.

As potencialidades do AOB foram testadas, no seguimento de caminho de WMRs, através de simulação computacional, quando sujeito a diversas perturbações e estratégias. Baseado nestas simulações realizou-se uma análise comparativa entre AOB *versus* CKF *versus* PPC, tendo-se observado que o AOB permitiu obter melhores resultados no seguimento de caminho. Nas diversas simulações efectuadas, foi ainda discutida a influência da escolha, das velocidades desejadas no seguimento de caminho, bem como da constante de tempo em malha fechada,  $\tau_c$ . Analisou-se, também, o efeito das incertezas de modelação nos parâmetros inerciais (massa), i.e. foi simulado o transporte de um passageiro com cerca de 80Kg na cadeira de rodas, tendo o AOB mostrado boa capacidade de compensação a esta “perturbação”, quando comparado com os resultados obtidos pelos controladores PPC e CKF. O mesmo foi verificado quando expostos a outros tipos de perturbação. Extensas simulações foram, ainda, realizadas de modo a evidenciar, quer a flexibilidade do AOB para diferentes estratégias de controlo (MBA, SBA e HBA), quer a influência dos elementos da matriz  $Q_k$  na ‘sintonia’ do AOB. Confirmou-se também neste estudo que, aumentando a ordem do AOB aumenta a capacidade para ‘seguir’ perturbações não-lineares mais elevadas, mas a sensibilidade ao ruído aumenta e a estabilidade relativa e

a robustez diminuam [51]. Reajustando os parâmetros estocásticos para AOBs de ordens mais elevadas pode-se melhorar a estabilidade relativa.

É de notar que esta foi a primeira vez que o projecto do controlador AOB foi aplicado a seguimento de caminho de WMRs. Os resultados obtidos mostraram a validade, a eficiência e robustez do projecto de controlo do AOB no seguimento de caminho, mesmo quando os parâmetros físicos do WMR (e.g. a massa) foram alterados.

## 8.2 Trabalho Futuro

Este trabalho serve como base a diferentes áreas de investigação em robótica e pode ser estendido em várias direcções. Algumas direcções importantes para futura investigação são apresentadas.

Uma direcção futura de fundamental importância, é a validação experimental, e a generalização para outros WMRs, da estratégia de controlo de seguimento de caminho apresentada. A sua aplicação ao mundo real, permitirá abordar algumas técnicas de controlo complementares para, por exemplo, diminuir o erro da odometria existente, pois na realidade podem existir escorregamentos e erros de arredondamento durante as medições. Seria, ainda, interessante fazer o seguimento de caminho fazendo uso de modelos, mais precisos, da dinâmica dos motores, bem como utilizando a identificação *em linha* de parâmetros (e.g. de massas, e de inércias).

Na estratégia de controlo apresentada nesta tese, a velocidade longitudinal foi considerada constante, e o seu valor foi escolhido após uma análise prévia da cinemática e da dinâmica do WMR, e ainda do tipo de tarefa a que este se destina. No entanto, esta análise não é isenta de imperfeições que possam conduzir a uma especificação inadequada de um perfil de velocidade. A interacção das rodas do WMR com o solo, foi sempre considerado de difícil modelação originando desvios de trajectória/caminho, no caso de se utilizar uma velocidade que não se coaduna, quer com o tipo de solo (e.g. liso/rugoso, seco/molhado), quer com o tipo de percurso (e.g. com curvas acentuadas). Então, relativamente ao seguimento de caminho, seria interessante que o controlo de velocidade fosse realizado de modo adaptativo em que a velocidade fosse ajustada em tempo-real, i.e. conseguir adequar a velocidade automaticamente quer ao raio de curvatura, quer ao tipo e

estado do piso. Isto iria permitir que o WMR seguisse com maior precisão o caminho desejado, particularmente nas curvas mais acentuadas. Uma abordagem para resolver este desvio de caminho seria a utilização de algoritmos que aumentassem a velocidade do WMR (até ao valor máximo desejado) durante os períodos em que os erros de desvio de caminho fossem pequenos, e diminuíssem a velocidade do WMR durante os períodos em que os erros de desvio de caminho fossem grandes.

Qualquer método usado na resolução de um problema apresenta sempre aspectos que podem ser melhorados e/ou desenvolvidos. Como foi discutido neste trabalho, os sistemas de controlo adaptativo são projectados para modificar o sinal de controlo à medida que o “meio ambiente” muda, de modo a apresentarem um desempenho óptimo. Um sistema sujeito a incertezas tem uma certa dificuldade em manter esse desempenho óptimo, apresentando por vezes instabilidade. Uma abordagem interessante para resolver este problema seria a aplicação de métodos de aprendizagem que permitissem reconhecer características e padrões familiares nas incertezas, ou perturbações, a que o sistema fosse sujeito, e que permitissem escolher as “matrizes” mais adequadas ao tipo de perturbação. Melhorando assim, significativamente, os resultados e a estabilidade do sistema.

Uma área importante para aplicação deste estudo, será a implementação do seguimento de caminho em arquitecturas mistas de controlo. Nesta abordagem, a condução do robô poderá ser efectuada usando procedimentos estratégicos (planeamento de caminho) e reactivos (uso de sensores), bem como o controlador de seguimento de caminho como elemento auxiliar na condução. Este projecto poderá proporcionar ao WMR a capacidade de adaptar o seu movimento a ambientes desconhecidos e dinâmicos a partir de um “controlador” estratégico.



# Apêndice A

## Definições e Teoremas

As definições que em seguida se apresentam são úteis para compreender alguns conceitos introduzidos nos diversos capítulos, tendo sido já descritas em [95, 123, 137, 174, 1, 135, 70, 69].

Assim, e para um melhor entendimento destas definições e teoremas, apresentam-se de novo as equações do sistema não-linear:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (\text{A.1})$$

$$y = h(x) \quad (\text{A.2})$$

Tendo em atenção que, em geral, o espaço de estados consiste numa variedade  $M$  na qual se definem os campos de vectores  $f$  e  $g$ . Neste apêndice, vai ser considerado  $R^n$  como o espaço de estados do sistema, ou seja,  $M = R^n$ .

**Definição 4.** *A qualquer conjunto de coordenadas que especificam unicamente a configuração de um sistema chamamos coordenadas de Lagrange.*

Se o número de coordenadas de Lagrange é maior que o número de graus de liberdade do sistema, por exemplo  $F$  graus de liberdade, então pode-se especificar  $F$  das coordenadas de Lagrange como sendo *coordenadas primárias*. As restantes coordenadas são chamadas *coordenadas secundárias*. Em mecânica clássica, as coordenadas primárias são chamadas *coordenadas generalizadas*.

**Definição 5.** A forma geral das restrições consideradas na mecânica clássica é

$$\sum_{s=1}^n A_{rs} dq_s + A_r dt = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m) \quad (\text{A.3})$$

na qual  $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$  são as coordenadas generalizadas dos sistemas dinâmicos,  $t$  é o tempo e  $A_{rs}$  e  $A_r$  são funções de  $q$  diferenciáveis parcialmente, pelo menos uma vez. Estas ‘ $m$ ’ formas diferenciais lineares são chamadas forma Pfaffian. Se  $A_r$ , na equação (A.3) é zero, então o conjunto de restrições é chamado catastático e o sistema dinâmico resultante é chamado um sistema catastático. De outro modo a restrição é chamada acatastática.

**Teorema 3.** Na maior parte dos casos, as Restrições são Pfaffian, e são apresentadas na forma

$$a_i^T(q) \dot{q} = 0 \quad \text{ou} \quad A^T(q) \dot{q} = 0$$

onde se constata que são lineares nas velocidades.

**Definição 6.** Qualquer restrição que possa ser reduzida à forma  $f(q,t)=0$  é chamada restrição holónoma, onde  $q$  é o conjunto de coordenadas de Lagrange do sistema e  $t$  é o tempo.

**Definição 7.** Qualquer restrição que não pode ser reduzida à forma  $f(q,t)=0$  é chamada restrição não-holónoma.

**Definição 8.** Uma coordenada que não é definida como uma função de  $q$  e de  $t$ , mas a sua derivada é uma forma de Pfaffian em  $q$  e  $t$ , é denominada de quasi-coordenadas.

O conceito de quasi-coordenadas é muito útil no estudo de sistemas não holónomos onde as restrições são definidas ao nível da velocidade, mas não são definidas ao nível da posição devido à não integrabilidade das equações de restrição.

**Definição 9.** Seja  $A$  um subconjunto aberto de  $R^n$  e  $f : A \rightarrow R^m$ . Diz-se que a função  $f$  é suave se todas as derivadas parciais de qualquer ordem existirem e forem contínuas.

**Definição 10.** *Seja  $A$  um subconjunto aberto de  $R^n$ , a  $f: A \rightarrow R^n$  é chamada de difeomorfismo se é suave, e se a sua inversa  $f^{-1}$  existe e é suave.*

**Definição 11.** *Seja  $A$  um subconjunto aberto de  $R^n$ . Um mapeamento é uma colecção  $F = (f_1, \dots, f_m)$  de funções  $f_i: A \rightarrow R$ . O mapeamento  $F: A \rightarrow R^m$  é suave se todas as funções  $f_i$  são suaves.*

**Teorema 4.** *Sejam  $U$  e  $V$  subconjuntos abertos de  $R^n$ . Um mapeamento  $F: U \rightarrow V$  é um difeomorfismo se é bijectivo (injectivo e sobrejectivo), e se  $F$  e  $F^{-1}$  são suaves.*

**Definição 12.** *Um subconjunto  $M \subset R^k$  é chamado variedade suave de dimensão  $n$ , se para cada  $x \in M$  existe uma vizinhança aberta de  $x$ ,  $W \cap M (W \subset R^k)$  que é difeomorfo a um subconjunto aberto  $U \subset R^n$ .*

No que se segue  $M$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ . (Para mais detalhes consultar [95, 137, 162]).

**Definição 13.** *Uma distribuição  $\Delta$  de dimensão  $k$  na variedade  $M$  (de dimensão  $n$ ) é um mapeamento que atribui, a cada  $x \in M$ , um sub-espaço de dimensão  $k$  de  $R^n$  de modo que as seguintes condições de suavidade sejam satisfeitas: Para cada  $x_0 \in M$  existe um conjunto aberto  $U \subseteq M$  contendo  $x_0$  e  $k$  campos de vectores  $f_1, \dots, f_k$  tais que*

(i)  $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$  é um conjunto linearmente independente em  $U$ , isto é  $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\}$  é um conjunto de vectores linearmente independentes,  $\forall x \in U$ , e

(ii)  $\Delta(x) = \text{span} \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\}$ ,  $\forall x \in U$ .

**Definição 14.** *A matriz Jacobiana de  $F: A \subset R^n \rightarrow R^m$  é a matriz*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

**Definição 15.** *Seja  $f$  um campo de vectores suave em  $U \subset R^n$  e  $\lambda: U \rightarrow R$  uma função suave em  $U$ . A derivada de Lie de  $\lambda$  na direcção  $f$  é uma função  $U \rightarrow R$ , denotada por  $L_f \lambda$  e definida por*

$$(L_f \lambda)(x) = \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial x_1}(x) \quad \dots \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_n}(x) \right] \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

O uso repetido do operador  $L_f$  resulta em  $L_f^k \lambda = L_f(L_f^{k-1} \lambda)$ , com  $L_f^0 \lambda = \lambda$ .

**Definição 16.** Sejam  $f$  e  $g$  campos de vectores, o produto  $[f, g]$  é definido por

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g .$$

Ao produto  $[\cdot, \cdot]$  é usual chamar produto de Lie ou parêntesis de Lie.

É óbvio que  $[f, g] = -[g, f]$  e  $[f, g] = 0$  para campos de vectores constantes 'f' e 'g'. Igualmente, a identidade Jacobi vem,

$$[h, [f, g]] + [f, [g, h]] + [g, [h, f]] = 0$$

A seguinte notação é comumente usada na representação dos parêntesis de Lie:

$$\begin{aligned} ad_f^0 g(q) &= g(q) \\ ad_f g(q) &= [f, g](q) \\ ad_f^k g(q) &= [f, ad_f^{k-1} g](q), \quad k > 1 \end{aligned}$$

**Definição 17.** O conjunto de campos de vectores suaves em  $R^n$  com a operação de parêntesis de Lie é uma álgebra de Lie.

**Definição 18.** Um conjunto linearmente independente de campos de vectores  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  diz-se involutivo se e só se, existirem funções escalares  $\alpha_{ijk} : R^n \rightarrow R$  tais que

$$[f_i, f_j](x) = \sum_{k=1}^n \alpha_{ijk}(x) f_k(x) \quad \forall i, j$$

onde  $x$  pertence a  $R^n$ .

Involutividade significa que se forem formados os parêntesis de Lie de quaisquer pares de campos de vectores a partir do conjunto  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ , então o campo de vectores resultante pode ser expresso como uma combinação linear do conjunto original de campos de vectores.

**Definição 19.** A mais pequena distribuição involutiva que contém  $\Delta$  é chamado o fecho involutivo de  $\Delta$  e é denotado por  $\Delta^*$ .



**Teorema 5.** Segundo o Teorema de Frobenius, uma distribuição regular<sup>1</sup>  $\Delta$  é completamente integrável se e só se é involutiva.

- Uma distribuição de dimensão 1 (isto é, associada a um único campo de vectores) é sempre integrável.

A demonstração deste teorema pode encontrar-se em [95].

**Definição 20.** Considere o sistema não-linear (A.1), onde  $x$  é o estado e  $u$  é a entrada. O sistema (A.1) designa-se controlável se para quaisquer dois pontos  $x_1, x_2$  em  $M$  (a variedade em espaços de estados) existe um controlo  $u$  tal que o sistema (A.1) com a condição inicial  $x_1$  atinge o ponto  $x_2$  ao fim de um intervalo de tempo finito  $T$ , i.e.  $u : [0, T] \rightarrow U$  tal que  $x(T) = x_2$ .

A controlabilidade é um conceito básico na teoria de controlo. No entanto, provar a controlabilidade de um sistema não linear não é, em geral, simples.

**Definição 21.** No caso particular da controlabilidade de sistemas não-holónomos, considere-se um sistema de controlo não-linear

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)u_j$$

que é controlável se  $\forall x_1, x_2 \in M$

$$\exists T < \infty, \exists u : [0, T] \rightarrow U : x(T, 0, x_1, u) = x_2$$

**Teorema 6.** No caso linear

$$\dot{x} = Ax + \sum_{j=1}^m b_j u_j = Ax + Bu$$

todas as definições de controlabilidade são equivalentes e os testes associados reduzem-se à condição ordem de Kalman:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = n$$

---

<sup>1</sup>Uma distribuição é regular se  $\dim \Delta(q) = \text{constante}$ ,  $\forall q$ .

**Teorema 7.** *Um teste de controlabilidade é um teste de não-holonomia. Um conjunto de  $k$  restrições de Pfaffian*

$$A(q)\dot{q} = 0$$

*é (completamente) não-holónimo se e só se o modelo cinemático associado é controlável, isto é  $\dim \Delta^* = n$ , sendo  $\Delta^*$  o “fecho involutivo”. Conclui-se que a controlabilidade, no seu espaço de configuração global, é equivalente a não-holonomia (completa) das restrições cinemáticas originais.*

**Definição 22.** *O sistema (A.1) com  $f$  e  $g$  campos de vectores suaves em  $R^n$ , diz-se ser linearizável por entrada-estado se existir um aberto  $\Omega$  em  $R^n$ , um difeomorfismo  $T: \Omega \rightarrow R^n$ , e uma lei de controlo de realimentação não-linear*

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

*tal que as novas variáveis de estado  $z = T(x)$  e a nova entrada  $v$  satisfaz uma relação linear invariante no tempo*

$$\dot{z} = Az + Bv$$

$$\text{onde } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1]^T.$$

*em que  $A \in R^{n \times n}$  e  $B \in R^n$ , satisfazem  $\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$ .*

**Teorema 8.** *O sistema  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  é linearizável entrada-estado se e só se satisfizer as seguintes condições:*

1. *Os campos de vectores  $\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{n-1} g\}$  são linearmente independentes em  $\Omega$ ;*
2. *A distribuição  $\Delta := \text{span}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{n-2} g\}$  é involutiva em  $\Omega$ .*

**Definição 23.** *O sistema (A.1) com a equação de saída (A.2) diz-se linearizável entrada-saída se é possível gerar uma relação diferencial linear entre a saída  $y$  e uma nova entrada  $v$  (onde  $v$  é definido de modo similar à definição de linearização entrada-estado).*

Definições de linearização entrada-saída e linearização entrada-estado generalizam-se naturalmente para casos de múltipla entrada-múltipla saída.

**Definição 24.** A dinâmica interna é a parte da dinâmica do sistema que é dada como não-observável pelo processo de linearização entrada-saída.

É chamada dinâmica interna porque não pode ser vista a partir da relação entrada-saída.

**Definição 25.** A dinâmica zero, do sistema não linear (A.1) e (A.2), é definida como sendo a dinâmica interna do sistema quando a saída do sistema é mantida a zero pela entrada.

**Definição 26.** Para toda a matriz  $A \in R^{m \times n}$ , existe uma matriz única  $A^+ \in R^{n \times m}$ , que é chamada inversa generalizada, e que satisfaz:

$$(i) AA^+A=A \quad (ii)A^+AA^+=A^+ \quad (iii)(AA^+)^T=AA^+ \quad (iv)(A^+A)^T=A^+A$$

onde  $A^T$  representa a transposta de  $A$ . No caso especial em que a matriz  $A$  é uma matriz não-singular quadrada, a inversa generalizada de  $A$  é simplesmente a sua inversa, i.e.  $A^+ = A^{-1}$ .

Quando  $m \geq n$  e  $\text{rank}(A) = n$  a inversa generalizada de  $A$  é dada por  $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ . Quando  $m \leq n$  e  $\text{rank}(A) = m$  a inversa generalizada de  $A$  é dada por  $A^+ = A^T (A A^T)^{-1}$ .

**Definição 27.** Para qualquer deslocamento virtual o trabalho virtual realizado por uma força  $F$ , considerando  $\delta s$  como um deslocamento virtual, é dado por:

$$\delta W = F \delta s \cos(F, \delta s) = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z$$

e considerando um sistema, com  $p$  partículas, actuado por forças  $F_1, F_2, \dots, F_p$ , e considerando os deslocamentos,  $\delta s_1, \delta s_2, \dots, \delta s_p$ , o trabalho virtual total é

$$\delta W = \sum_{i=1}^p F_{x_i} \delta x_i + F_{y_i} \delta y_i + F_{z_i} \delta z_i$$

**Definição 28.** O estado de equilíbrio  $x=0$  do sistema dinâmico (A.1) diz-se estável se, para cada  $R > 0$ , existe um  $r > 0$ , tal que se  $\|x(0)\| < r$ , então  $\|x(t)\| < R$  para todo o  $t > 0$ . De outro modo, o ponto de equilíbrio é instável.

A definição de estabilidade acima é também chamada estabilidade de Lagrange ou Estabilidade de Lyapunov.

**Definição 29.** O ponto de equilíbrio  $0$  é assimptoticamente estável, se for estável e se para além disso, existe algum  $r > 0$  tal que  $\|x(0)\| < r$  implique que  $x(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Estabilidade assintótica significa que o equilíbrio é estável, e que além disso, os estados que começam perto de  $0$  convergem para  $0$  à medida que o tempo tende para infinito. Qualquer ponto de equilíbrio que é estável segundo Lagrange mas não assintoticamente estável é chamado marginalmente estável.

Para uma melhor compreensão das definições anteriores deve-se ter em consideração a seguinte figura [174]:

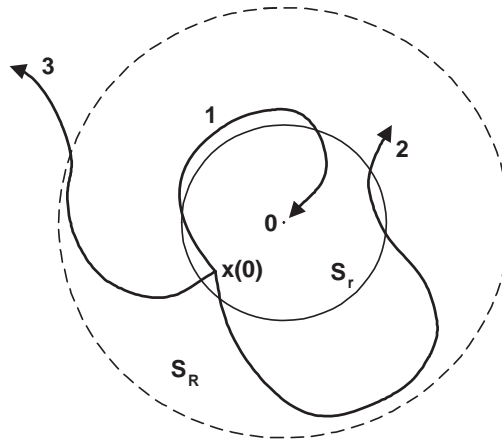


Figura A.1: Diagrama de conceitos de estabilidade.

Na figura anterior  $R$  representa o raio da circunferência maior,  $r$  é o raio da circunferência menor,  $S_R$  é a superfície do círculo maior,  $S_r$  é a superfície do círculo mais pequeno e  $0$  é o centro das circunferências. Por observação da Figura pode-se concluir, tendo em atenção a estabilidade dos sistemas, que:

- *Estável*-  $x(0)$  deve estar sempre perto de  $0$  e a sua norma deve ser menor que  $r$ ;
- *Assimptoticamente estável*- Curva 1;
- *Marginalmente estável*- Curva 2;
- *Instável*- Curva 3.

# Apêndice B

## Aplicação do Método de Lagrange

Neste apêndice pretende-se elucidar a aplicação do método de Lagrange a outros WMRs, em que o centro de massa seja colocado em posição diferente da do robô em estudo (capítulo 4), ou quando, de acordo com outras coordenadas generalizadas, os cálculos são realizados em relação a  $P_0$  em vez de  $P_c$ .

### B.1 Centro Geométrico = Centro de Massa.

Considere a dinâmica de um robô móvel com duas rodas motrizes que pode mover-se na direcção na qual ‘aponta’, e roda sobre o seu centro geométrico, como representado na figura B.1 (Murray, 1997), [134].

Este robô é actuado por duas rodas,  $2b$  é o comprimento do eixo entre rodas do robô móvel e  $r$  é o raio das rodas.  $o-xy$  é o sistema de coordenadas do mundo e  $P_0 - XY$  é o sistema de coordenadas do robô móvel.  $P_0$  é a origem de coordenadas do sistema  $P_0 - XY$  e situa-se no meio do eixo das rodas de direcção/tracção. Os ângulos de rotação das duas rodas são representados por  $\theta_r, \theta_l$ . A posição do robô é determinada pelos valores de  $xy$  do seu centro e pelo seu ângulo de direcção  $\phi$ . O equilíbrio do robô é mantido por rodas tipo ‘castor’ cujo efeito, salvo caso contrário, se vai ignorar. Assim,  $q = [x_0 \ y_0 \ \phi \ \theta_r \ \theta_l]^T$  representa a configuração do sistema (i.e. as cinco coordenadas generalizadas). Neste exemplo, o centro de massa é coincidente com o centro geométrico, i.e. situa-se em  $P_0$ , logo  $d = 0$ .

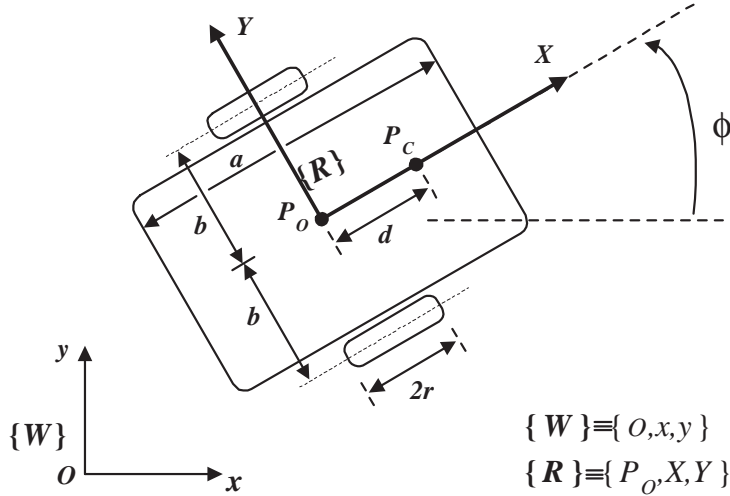


Figura B.1: Esboço de um robô móvel de duas rodas motrizes.

Na modelação de cada contacto usa-se a suposição que em cada contacto existe um movimento ‘rolante’ puro, i.e. cada roda pode rolar na direcção da orientação da roda, e girar sobre o seu eixo vertical, mas não desliza.

Um as deduções simples mostram que esta suposição produz as seguintes restrições (diferentes das calculadas no capítulo 4):

**Proposição 4.** *Admitindo-se somente a existência de movimento da plataforma na direcção do sentido de deslocamento, obtém-se:*

$$w^1(q)\dot{q} = -\dot{x}_0 \sin \phi + \dot{y}_0 \cos \phi = 0 \quad (\text{B.1})$$

*Demonstração:* Da cinemática de um robô móvel com rodas (ver figura B.1) observa-se que:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \nu_{Rx} \cos \phi \\ \dot{y}_0 = \nu_{Rx} \sin \phi \\ \dot{\phi} = w_R \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

onde  $\nu_{Rx}$  representa a velocidade linear segundo o eixo  $x$  no referencial do robô, e  $w_R$  é a velocidade angular.

Na forma matricial vem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 \\ \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{Rx} \\ w_R \end{bmatrix}$$

ou seja  $\dot{p}_W = R(\phi)\dot{p}_R$ , onde  $\dot{p}_W$  é a velocidade no referencial do mundo,  $\dot{p}_R$  é a velocidade no referencial do robô e  $R(\phi)$  é a matriz de transformação.

Da equação (B.2) resulta:

$$\begin{cases} -\dot{x}_0 \sin \phi = -\nu_{Rx} \cos \phi \sin \phi \\ \dot{y}_0 \cos \phi = \nu_{Rx} \sin \phi \cos \phi \end{cases} \text{ somando membro-a-membro as equações:}$$

$$-\dot{x}_0 \sin \phi + \dot{y}_0 \cos \phi = 0$$

Obtém-se assim a **primeira restrição cinemática**:

$$w^1(q)\dot{q} \equiv -\dot{x}_0 \sin \phi + \dot{y}_0 \cos \phi = 0$$

■

**Proposição 5.** *Considerando que as rodas do veículo não escorregam, resulta:*

$$w^2(q)\dot{q} = \dot{x}_0 \cos \phi + \dot{y}_0 \sin \phi + b\dot{\phi} - r\dot{\theta}_r = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$w^3(q)\dot{q} = \dot{x}_0 \cos \phi + \dot{y}_0 \sin \phi - b\dot{\phi} - r\dot{\theta}_l = 0 \quad (\text{B.4})$$

*Demonstração:* Ainda da cinemática obtém-se

$$2b\dot{\phi} = r\dot{\theta}_r - r\dot{\theta}_l \quad (\text{B.5})$$

$$2\nu_{Rx} = r\dot{\theta}_r + r\dot{\theta}_l \quad (\text{B.6})$$

Esta última equação (B.6) pode dar origem a:

$$r\dot{\theta}_r = 2\nu_{Rx} - r\dot{\theta}_l \quad (\text{B.7})$$

$$r\dot{\theta}_l = 2\nu_{Rx} - r\dot{\theta}_r \quad (\text{B.8})$$

Da equação (B.2) obtém-se

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \nu_{Rx} \cos \phi \\ \dot{y}_0 = \nu_{Rx} \sin \phi \end{cases}$$

e conseqüentemente

$$\dot{x}_0 \cos \phi = \nu_{Rx} \cos^2 \phi \quad (\text{B.9})$$

$$\dot{y}_0 \sin \phi = \nu_{Rx} \sin^2 \phi \quad (\text{B.10})$$

Adicionando (B.9) a (B.10):

$$\dot{x}_0 \cos \phi + \dot{y}_0 \sin \phi = \nu_{Rx} \quad (\text{B.11})$$

Regressando à equação (B.5), pode-se reescrevê-la da seguinte forma:

$$2b\dot{\phi} - r\dot{\theta}_r + r\dot{\theta}_l = 0 \quad (\text{B.12})$$

De (B.8) e (B.12) e eliminando  $\dot{\theta}_l$ , resulta:

$$2b\dot{\phi} - r\dot{\theta}_r + 2\nu_{Rx} - r\dot{\theta}_r = 0, \quad \text{simplificando vem} \quad b\dot{\phi} - r\dot{\theta}_r + \nu_{Rx} = 0$$

e tendo em consideração a equação (B.11), obtém-se a **segunda restrição cinemática**:

$$w^2(q)\dot{q} \equiv \dot{x}_0 \cos \phi + \dot{y}_0 \sin \phi + b\dot{\phi} - r\dot{\theta}_r = 0$$

Para a obtenção da terceira restrição multiplica-se a equação (B.12) por “-1” e vem:

$$-2b\dot{\phi} + r\dot{\theta}_r - r\dot{\theta}_l = 0 \quad (\text{B.13})$$

De (B.7) e (B.13) e eliminando  $\dot{\theta}_r$ , resulta:

$$-2b\dot{\phi} + 2\nu_{Rx} - r\dot{\theta}_l - r\dot{\theta}_l = 0, \quad \text{simplificando vem} \quad -b\dot{\phi} + \nu_{Rx} - r\dot{\theta}_l = 0$$

e tendo em consideração a equação (B.11), obtém-se a **terceira restrição cinemática**:

$$w^3(q)\dot{q} \equiv \dot{x}_0 \cos \phi + \dot{y}_0 \sin \phi - b\dot{\phi} - r\dot{\theta}_l = 0$$

■

Estas restrições podem ser reescritas na forma matricial  $A(q)\dot{q} = 0$ , obtendo-se

$$A(q) = \begin{bmatrix} -\sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 & 0 \\ \cos \phi & \sin \phi & b & -r & 0 \\ \cos \phi & \sin \phi & -b & 0 & -r \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

Para este exemplo, as equações (3.83) e (4.20) podem ser escritas como se segue:



- Equações Cinemáticas:

$$\dot{q} = S(q)\nu(t) \quad (\text{B.15})$$

que tendo em consideração a cinemática do robô pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \phi & \frac{r}{2} \cos \phi \\ \frac{r}{2} \sin \phi & \frac{r}{2} \sin \phi \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

- Equações Dinâmicas:

$$\overline{M}(q)\dot{\nu} + \overline{C}(q, \dot{q})\nu = \overline{B}(q)\tau \quad (\text{B.17})$$

onde  $\nu$  pode ser considerado uma entrada de controlo e representa o vector das velocidades angulares das rodas  $(\dot{\theta}_r, \dot{\theta}_l)$ . A equação (B.17) foi obtida a partir da equação (4.36) considerando que a energia potencial é constante pois não há variação de altura do robô ao solo.  $\overline{M}$ ,  $\overline{C}$ , e  $\overline{B}$  representam, respectivamente:

$$\overline{M} = S^T M S \quad (\text{B.18})$$

$$\overline{C} = S^T (M\dot{S} + CS) \quad (\text{B.19})$$

$$\overline{B} = S^T B \quad (\text{B.20})$$

Assim, é necessário calcular o Lagrangiano, para obter  $M$ ,  $C$ , e  $B$ , e conseguir posteriormente calcular  $\overline{M}$ ,  $\overline{C}$ , e  $\overline{B}$ . Torna-se, então, necessário proceder ao cálculo das energias cinéticas presentes no robô.

Dado que neste exemplo  $d = 0$ , ou seja, o centro geométrico coincide com o centro de massa (em  $P_0$ ), a energia cinética no ponto  $P_0$  do robô é dada por:

### 1. Energia cinética da Plataforma:

-Movimento linear:

$$T_{lin} = \frac{1}{2}m_c(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)$$

-Movimento Rotacional:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}I_c\dot{\phi}^2$$

-Energia cinética Global:

Para obter a energia cinética total da plataforma, basta somar as energias referentes aos movimentos linear e rotacional, donde resulta

$$T_P = T_{lin} + T_{rot} = \frac{1}{2}m_c(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2}I_c\dot{\phi}^2 \quad (\text{B.21})$$

## 2. Energia cinética das Rodas:

A energia cinética das rodas em relação a  $P_0$  já foi calculada no capítulo 4. Logo, para se obter a energia cinética total das rodas, basta somar as contribuições de cada uma das rodas, para tal basta somar as equações (4.27) e (4.28), obtendo-se então

$$T_R = T_r + T_l = \frac{1}{2}(2m_w)(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2}(2m_w)(b^2\dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}(2I_m)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_w(\dot{\theta}_r^2 + \dot{\theta}_l^2) \quad (\text{B.22})$$

## 3. Energia cinética Total:

Agora, para se determinar a energia total do robô basta simplesmente somar as energias cinéticas da plataforma e das rodas, ou seja, as equações (B.21) e (B.22), donde resulta

$$T = T_P + T_R = \frac{1}{2}(m_c + 2m_w)(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2(I_c + 2m_w b^2 + 2I_m) + \frac{1}{2}I_w(\dot{\theta}_r^2 + \dot{\theta}_l^2)$$

Para este sistema, o Lagrangiano é então:

$$L_{ge}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m_t(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_w(\dot{\theta}_r^2 + \dot{\theta}_l^2) - m_t g r \quad (\text{B.23})$$

onde,  $I = I_c + 2m_w b^2 + 2I_m$ , e  $m_t = m_c + 2m_w$ .

Como o último termo (energia potencial) desta equação é constante e não depende das coordenadas generalizadas, nos cálculos que se seguem, em que é usada a equação de Lagrange, a sua contribuição vai ser nula (i.e.

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0).$$

Pela Equação de Lagrange, resulta:

1)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{\theta}_r} \right) - \frac{\partial L_{ge}}{\partial \theta_r} = \tau_r \quad , \text{ logo calculando as derivadas:}$$

$$\frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{\theta}_r} = I_w \dot{\theta}_r ; \quad \frac{d}{dt}(I_w \dot{\theta}_r) = I_w \ddot{\theta}_r ; \quad \frac{\partial L_{ge}}{\partial \theta_r} = 0, \quad \text{obtem-se: } I_w \ddot{\theta}_r = \tau_r.$$

2)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{\theta}_l} \right) - \frac{\partial L_{ge}}{\partial \theta_l} = \tau_l \quad , \text{ utilizando o raciocínio anterior: } I_w \ddot{\theta}_l = \tau_l.$$

3)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{x}_0} \right) - \frac{\partial L_{ge}}{\partial x_0} = 0 \quad , \text{ calculando as derivadas:}$$

$$\frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{x}_0} = m_t \dot{x}_0 ; \quad \frac{d}{dt}(m_t \dot{x}_0) = m_t \ddot{x}_0 ; \quad \frac{\partial L_{ge}}{\partial x_0} = 0, \quad \text{então: } m_t \ddot{x}_0 = 0.$$

4)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{y}_0} \right) - \frac{\partial L_{ge}}{\partial y_0} = 0 \quad , \text{ utilizando o raciocínio anterior: } m_t \ddot{y}_0 = 0.$$

5)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L_{ge}}{\partial \phi} = 0 \quad , \text{ pelo cálculo das derivadas:}$$

$$\frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{\phi}} = I \dot{\phi} ; \quad \frac{d}{dt}(I \dot{\phi}) = I \ddot{\phi} ; \quad \frac{\partial L_{ge}}{\partial \phi} = 0, \quad \text{obtem-se: } I \ddot{\phi} = 0.$$

Finalmente pode-se colocar, na forma matricial:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} m_t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_w \end{bmatrix}}^{M(q)} \overbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta}_r \\ \ddot{\theta}_l \end{bmatrix}}^{\ddot{q}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix}}^F,$$

obteve-se assim a matriz  $M$ , onde  $M \in R^{5 \times 5}$ , e constatou-se que não tem forças de Coriolis.

A equação (B.17) pode ser de novo reescrita como  $\overline{M}(q)\dot{\nu} = \overline{B}(q)\tau$ , para este caso. Assim, é necessário obter  $\overline{M}(q)$  e  $\overline{B}(q)$ .

Agora é só aplicar a equação (B.18), vem então:

$$\begin{aligned} \overline{M} &= \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \phi & \frac{r}{2} \sin \phi & \frac{r}{2b} & 1 & 0 \\ \frac{r}{2} \cos \phi & \frac{r}{2} \sin \phi & -\frac{r}{2b} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \phi & \frac{r}{2} \cos \phi \\ \frac{r}{2} \sin \phi & \frac{r}{2} \sin \phi \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \phi & \frac{r}{2} \sin \phi & \frac{r}{2b} & 1 & 0 \\ \frac{r}{2} \cos \phi & \frac{r}{2} \sin \phi & -\frac{r}{2b} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_t \frac{r}{2} \cos \phi & m_t \frac{r}{2} \cos \phi \\ m_t \frac{r}{2} \sin \phi & m_t \frac{r}{2} \sin \phi \\ I \frac{r}{2b} & -I \frac{r}{2b} \\ I_w & 0 \\ 0 & I_w \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde resulta

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} m_t \frac{r^2}{4} + I \frac{r^2}{4b^2} + I_w & m_t \frac{r^2}{4} - I \frac{r^2}{4b^2} \\ m_t \frac{r^2}{4} - I \frac{r^2}{4b^2} & m_t \frac{r^2}{4} + I \frac{r^2}{4b^2} + I_w \end{bmatrix}$$

Do mesmo modo calcula-se a matriz  $\overline{B}$ , onde  $B \in R^{5 \times 2}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^B \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix}, \quad \text{agora que se obteve a matriz } B, \text{ calcula-se } \overline{B},$$

então, através da equação (B.20), vem:

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \phi & \frac{r}{2} \sin \phi & \frac{r}{2b} & 1 & 0 \\ \frac{r}{2} \cos \phi & \frac{r}{2} \sin \phi & -\frac{r}{2b} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, pode-se apresentar as **equações dinâmicas**  $\overline{M}(q)\dot{\nu} = \overline{B}(q)\tau$  do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} m_t \frac{r^2}{4} + I \frac{r^2}{4b^2} + I_w & m_t \frac{r^2}{4} - I \frac{r^2}{4b^2} \\ m_t \frac{r^2}{4} - I \frac{r^2}{4b^2} & m_t \frac{r^2}{4} + I \frac{r^2}{4b^2} + I_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_r \\ \ddot{\theta}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix}$$

## B.2 Centro Geométrico $\neq$ Centro de Massa.

Neste exemplo [77] considera-se o mesmo robô que na secção B.1 (ver figura B.1), o que muda em relação ao exemplo anterior é a localização do centro de massa do robô móvel, que neste caso é em  $P_c$  em vez de em  $P_0$  (ou seja,  $P_c$  situa-se no eixo  $X$  e a uma distância “ $d$ ” de  $P_0$ ).

A configuração deste robô pode ser descrita por cinco coordenadas generalizadas (diferentes das utilizadas no capítulo 4):

$$q = [x_0 \quad y_0 \quad \phi \quad \theta_r \quad \theta_l]^T.$$

Assume-se que as rodas rolam e não escorregam. Então existem três restrições (tal como já exposto na secção B.1). Tem-se então em relação a  $P_0$ :

$$\dot{y}_0 \cos \phi - \dot{x}_0 \sin \phi = 0 \quad (\text{B.24})$$

$$\dot{x}_0 \cos \phi + \dot{y}_0 \sin \phi + b\dot{\phi} - r\dot{\theta}_r = 0 \quad (\text{B.25})$$

$$\dot{x}_0 \cos \phi + \dot{y}_0 \sin \phi - b\dot{\phi} - r\dot{\theta}_l = 0 \quad (\text{B.26})$$

estas restrições podem ser reescritas na forma

$$A(q)\dot{q} = 0$$

com

$$A(q) = \begin{bmatrix} -\sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 & 0 \\ \cos \phi & \sin \phi & b & -r & 0 \\ \cos \phi & \sin \phi & -b & 0 & -r \end{bmatrix} \quad (\text{B.27})$$

As equações da cinemática e da dinâmica podem ser reescritas (tal como na secção B.1) como:

$$\dot{q} = S(q)\nu(t) \quad (\text{B.28})$$

$$\overline{M}(q)\dot{\nu} + \overline{C}(q, \dot{q})\nu = \overline{B}(q)\tau \quad (\text{B.29})$$

Tendo em consideração as equações de restrição (e consequentemente a cinemática) do robô móvel, vem para  $S(q)$  (em relação a  $P_0$ ):

$$S(q) = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \phi & \frac{r}{2} \cos \phi \\ \frac{r}{2} \sin \phi & \frac{r}{2} \sin \phi \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.30})$$

O passo seguinte é calcular o Lagrangiano, para obter  $M$ ,  $C$ , e  $B$ , para este sistema.

Neste caso, como no anterior exemplo,  $G(q) = 0$  (ver equação (4.18)), porque a trajectória da base móvel está restrita ao plano horizontal, i.e. o sistema não pode mudar a sua posição vertical, o que implica que a energia potencial,  $V$ , permaneça constante.

Assim, para se calcular a “Energia Cinética” em  $P_c$  vem:

### 1. Energia cinética da Plataforma:

-Movimento linear:

Começa-se por calcular a velocidade no ponto  $P_c$ , logo

$$\begin{cases} x_c = x_0 + d \cos \phi \\ y_c = y_0 + d \sin \phi \end{cases} \quad \text{derivando vem} \quad \begin{cases} \dot{x}_c = \dot{x}_0 - d \sin \phi \dot{\phi} \\ \dot{y}_c = \dot{y}_0 + d \cos \phi \dot{\phi} \end{cases}$$

O quadrado de cada uma das expressões é:

$$\begin{cases} \dot{x}_c^2 = \dot{x}_0^2 + d^2 \sin^2 \phi \dot{\phi}^2 - 2\dot{x}_0 d \sin \phi \dot{\phi} \\ \dot{y}_c^2 = \dot{y}_0^2 + d^2 \cos^2 \phi \dot{\phi}^2 + 2\dot{y}_0 d \cos \phi \dot{\phi} \end{cases}$$

e conseqüentemente:

$$\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + d^2 \dot{\phi}^2 + 2d\dot{\phi}(\dot{y}_0 \cos \phi - \dot{x}_0 \sin \phi)$$

Finalmente obtém-se a energia cinética relativa ao movimento linear:

$$T_{lin} = \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) = \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2} m_c (d^2 \dot{\phi}^2) + m_c d \dot{\phi} (\dot{y}_0 \cos \phi - \dot{x}_0 \sin \phi)$$

-Movimento Rotacional:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I_c \dot{\phi}^2$$

-Energia cinética Global:

Para obter a energia cinética total da plataforma, basta somar as energias referentes aos movimentos linear e rotacional, donde resulta

$$T_P = \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2} m_c (d^2 \dot{\phi}^2) + m_c d \dot{\phi} (\dot{y}_0 \cos \phi - \dot{x}_0 \sin \phi) + \frac{1}{2} I_c \dot{\phi}^2 \quad (\text{B.31})$$

## 2. Energia cinética das Rodas:

O cálculo da energia cinética das rodas para o exemplo 2, é precisamente igual ao do exemplo 1. Logo, obtém-se:

$$T_R = \frac{1}{2} (2m_w) (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2} (2m_w) (b^2 \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2} (2I_m) \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_w (\dot{\theta}_r^2 + \dot{\theta}_l^2) \quad (\text{B.32})$$

### 3. Energia cinética Total:

Agora, para se determinar a energia total do robô, basta simplesmente somar as energias cinéticas da plataforma e das rodas, ou seja as equações (B.31) e (B.32), donde resulta

$$T = T_P + T_R = \frac{1}{2}m_t(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 I + \frac{1}{2}I_w(\dot{\theta}_r^2 + \dot{\theta}_l^2) + m_c d \dot{\phi} (\dot{y}_0 \cos \phi - \dot{x}_0 \sin \phi)$$

$$\text{onde } m_t = m_c + 2m_w \quad \text{e} \quad I = m_c d^2 + 2m_w b^2 + I_c + 2I_m.$$

Assim, para o Lagrangiano, obtém-se :

$$L_{ge}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m_t(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_w(\dot{\theta}_r^2 + \dot{\theta}_l^2) + m_c d \dot{\phi} (\dot{y}_0 \cos \phi - \dot{x}_0 \sin \phi) - m_t g r \quad (\text{B.33})$$

Sendo a energia potencial,  $V(q) = m_t g r$ , constante (pois considera-se que a altura do robô ao solo não varia) e dado que não depende de qualquer uma das coordenadas generalizadas, nos cálculos que se seguem, em que é usada a equação de Lagrange, a sua contribuição vai ser nula (i.e.  $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$ ).

Pela Equação de Lagrange, vem então:

1)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{x}_0} \right) - \frac{\partial L_{ge}}{\partial x_0} = 0 \quad , \text{ calculando as derivadas:}$$

$$\frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{x}_0} = m_t \dot{x}_0 - m_c d \dot{\phi} \sin \phi ;$$

$$\frac{d}{dt} (m_t \dot{x}_0 - m_c d \dot{\phi} \sin \phi) = m_t \ddot{x}_0 - m_c d (\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi) ;$$

$$\frac{\partial L_{ge}}{\partial x_0} = 0, \quad \text{obtem-se,} \quad m_t \ddot{x}_0 - m_c d (\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi) = 0.$$

2)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{y}_0} \right) - \frac{\partial L_{ge}}{\partial y_0} = 0 \quad , \text{ calculando as derivadas:}$$



$$\frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{y}_0} = m_t \dot{y}_0 + m_c d \dot{\phi} \cos \phi ;$$

$$\frac{d}{dt}(m_t \dot{y}_0 + m_c d \dot{\phi} \cos \phi) = m_t \ddot{y}_0 + m_c d(\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi) ;$$

$$\frac{\partial L_{ge}}{\partial y_0} = 0, \quad \text{vem então,} \quad m_t \ddot{y}_0 + m_c d(\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi) = 0.$$

3)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L_{ge}}{\partial \phi} = 0 \quad , \text{ calculando as derivadas:}$$

$$\frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{\phi}} = I \dot{\phi} + m_c d(\dot{y}_0 \cos \phi - \dot{x}_0 \sin \phi) ;$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{\phi}} \right) = I \ddot{\phi} + m_c d(\ddot{y}_0 \cos \phi - \dot{y}_0 \sin \phi - \ddot{x}_0 \sin \phi - \dot{x}_0 \cos \phi \dot{\phi}) ;$$

$$\frac{\partial L_{ge}}{\partial \phi} = m_c d \dot{\phi}(-\dot{y}_0 \sin \phi - \dot{x}_0 \cos \phi);$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L_{ge}}{\partial \phi} = I \ddot{\phi} + m_c d \ddot{y}_0 \cos \phi - m_c d \ddot{x}_0 \sin \phi,$$

$$\text{obtem-se,} \quad I \ddot{\phi} + m_c d \ddot{y}_0 \cos \phi - m_c d \ddot{x}_0 \sin \phi = 0.$$

4)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{\theta}_r} \right) - \frac{\partial L_{ge}}{\partial \theta_r} = \tau_r \quad , \text{ calculando as derivadas:}$$

$$\frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{\theta}_r} = I_w \dot{\theta}_r ; \quad \frac{d}{dt}(I_w \dot{\theta}_r) = I_w \ddot{\theta}_r ; \quad \frac{\partial L_{ge}}{\partial \theta_r} = 0, \quad \text{vem então} \quad I_w \ddot{\theta}_r = \tau_r.$$

5)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{ge}}{\partial \dot{\theta}_l} \right) - \frac{\partial L_{ge}}{\partial \theta_l} = \tau_l, \quad \text{utilizando o raciocínio anterior:} \quad I_w \ddot{\theta}_l = \tau_l.$$

As equações dinâmicas são então:

$$\begin{cases} m_t \ddot{x}_0 - m_c d (\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi) = 0 \\ m_t \ddot{y}_0 + m_c d (\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi) = 0 \\ I \ddot{\phi} + m_c d \ddot{y}_0 \cos \phi - m_c d \ddot{x}_0 \sin \phi = 0 \\ I_w \ddot{\theta}_r = \tau_r \\ I_w \ddot{\theta}_l = \tau_l \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial, considerando  $M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = B(q)\tau$ , vem

$$\begin{aligned} & \overbrace{\begin{bmatrix} m_t & 0 & -m_c d \sin \phi & 0 & 0 \\ 0 & m_t & m_c d \cos \phi & 0 & 0 \\ -m_c d \sin \phi & m_c d \cos \phi & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_w \end{bmatrix}}^{M(q)} \overbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta}_r \\ \ddot{\theta}_l \end{bmatrix}}^{\ddot{q}} + \\ & + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_c d \dot{\phi} \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_c d \dot{\phi} \sin \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{C(q, \dot{q})} \overbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix}}^{\dot{q}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{B(q)} \overbrace{\begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix}}^{\tau}. \end{aligned}$$

De modo a obterem-se equações dinâmicas “simplificadas”, é necessário reescrever o sistema como apresentado na equação (B.17). Assim, é preciso obter  $\overline{M}(q)$ ,  $\overline{C}(q, \dot{q})$  e  $\overline{B}(q)$ .

Aplicando a expressão  $\overline{M}$  (B.18), vem

$$MS = \begin{bmatrix} m_t & 0 & -m_c d \sin \phi & 0 & 0 \\ 0 & m_t & m_c d \cos \phi & 0 & 0 \\ -m_c d \sin \phi & m_c d \cos \phi & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \phi & \frac{r}{2} \cos \phi \\ \frac{r}{2} \sin \phi & \frac{r}{2} \sin \phi \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \phi & \frac{r}{2} \sin \phi & \frac{r}{2b} & 1 & 0 \\ \frac{r}{2} \cos \phi & \frac{r}{2} \sin \phi & -\frac{r}{2b} & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} m_t \frac{r}{2} \cos \phi - m_c d \frac{r}{2b} \sin \phi & m_t \frac{r}{2} \cos \phi + m_c d \frac{r}{2b} \sin \phi \\ m_t \frac{r}{2} \sin \phi + m_c d \frac{r}{2b} \cos \phi & m_t \frac{r}{2} \sin \phi - m_c d \frac{r}{2b} \cos \phi \\ I \frac{r}{2b} & -I \frac{r}{2b} \\ I_w & 0 \\ 0 & I_w \end{bmatrix}$$

donde resulta

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} \frac{r^2}{4b^2}(m_t b^2 + I) + I_w & \frac{r^2}{4b^2}(m_t b^2 - I) \\ \frac{r^2}{4b^2}(m_t b^2 - I) & \frac{r^2}{4b^2}(m_t b^2 + I) + I_w \end{bmatrix}$$

Do mesmo modo calcula-se a matriz  $\overline{C}$  (B.19),

$$M\dot{S} = \begin{bmatrix} m_t & 0 & -m_c d \sin \phi & 0 & 0 \\ 0 & m_t & m_c d \cos \phi & 0 & 0 \\ -m_c d \sin \phi & m_c d \cos \phi & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{r}{2} \sin \phi \dot{\phi} & -\frac{r}{2} \sin \phi \dot{\phi} \\ \frac{r}{2} \cos \phi \dot{\phi} & \frac{r}{2} \cos \phi \dot{\phi} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -m_t \frac{r}{2} \sin \phi \dot{\phi} & -m_t \frac{r}{2} \sin \phi \dot{\phi} \\ m_t \frac{r}{2} \cos \phi \dot{\phi} & m_t \frac{r}{2} \cos \phi \dot{\phi} \\ \frac{r}{2} m_c d \dot{\phi} & \frac{r}{2} m_c d \dot{\phi} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CS = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_c d \cos \phi \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_c d \sin \phi \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \phi & \frac{r}{2} \cos \phi \\ \frac{r}{2} \sin \phi & \frac{r}{2} \sin \phi \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{rm_c d}{2b} \cos \phi \dot{\phi} & \frac{rm_c d}{2b} \cos \phi \dot{\phi} \\ -\frac{rm_c d}{2b} \sin \phi \dot{\phi} & \frac{rm_c d}{2b} \sin \phi \dot{\phi} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Somando ( $M\dot{S}$ ) e ( $CS$ ),

$$M\dot{S} + CS = \begin{bmatrix} -m_t \frac{r}{2} \sin \phi \dot{\phi} - \frac{rm_c d}{2b} \cos \phi \dot{\phi} & -m_t \frac{r}{2} \sin \phi \dot{\phi} + \frac{rm_c d}{2b} \cos \phi \dot{\phi} \\ m_t \frac{r}{2} \cos \phi \dot{\phi} - \frac{rm_c d}{2b} \sin \phi \dot{\phi} & m_t \frac{r}{2} \cos \phi \dot{\phi} + \frac{rm_c d}{2b} \sin \phi \dot{\phi} \\ \frac{r}{2} m_c d \dot{\phi} & \frac{r}{2} m_c d \dot{\phi} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente aplicando a equação (B.19), obtém-se a matriz

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \phi & \frac{r}{2} \sin \phi & \frac{r}{2b} & 1 & 0 \\ \frac{r}{2} \cos \phi & \frac{r}{2} \sin \phi & -\frac{r}{2b} & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} -m_t \frac{r}{2} \sin \phi \dot{\phi} - \frac{rm_c d}{2b} \cos \phi \dot{\phi} & -m_t \frac{r}{2} \sin \phi \dot{\phi} + \frac{rm_c d}{2b} \cos \phi \dot{\phi} \\ m_t \frac{r}{2} \cos \phi \dot{\phi} - \frac{rm_c d}{2b} \sin \phi \dot{\phi} & m_t \frac{r}{2} \cos \phi \dot{\phi} + \frac{rm_c d}{2b} \sin \phi \dot{\phi} \\ \frac{r}{2} m_c d \dot{\phi} & \frac{r}{2} m_c d \dot{\phi} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{C} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{r^2}{2b} m_c d \dot{\phi} \\ -\frac{r^2}{2b} m_c d \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Falta ainda calcular a matriz  $\bar{B}$  (B.20), vem então:

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \phi & \frac{r}{2} \sin \phi & \frac{r}{2b} & 1 & 0 \\ \frac{r}{2} \cos \phi & \frac{r}{2} \sin \phi & -\frac{r}{2b} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, podem-se apresentar as equações dinâmicas (B.17) do seguinte modo:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{r^2}{4b^2}(m_t b^2 + I) + I_w & \frac{r^2}{4b^2}(m_t b^2 - I) \\ \frac{r^2}{4b^2}(m_t b^2 - I) & \frac{r^2}{4b^2}(m_t b^2 + I) + I_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_r \\ \ddot{\theta}_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{r^2}{2b} m_c d \dot{\phi} \\ -\frac{r^2}{2b} m_c d \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde  $\tau_r$  e  $\tau_l$  são os binários que actuam nas rodas direita e esquerda, respectivamente.



# Apêndice C

## Dedução de Equações

### C.1 Cálculo das Derivadas de $z$

Nesta secção apresenta-se o cálculo detalhado da obtenção das equações (5.11)-(5.13), apresentadas no capítulo 5.

Sabendo que

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(q) \\ L_f h(q) \\ \tilde{h}(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(q) \\ \Phi_d(q)\nu \\ \tilde{h}(q) \end{bmatrix},$$

e que

$$\dot{q} = S(q)\nu(t) \quad \text{e} \quad J_h = \frac{\partial h}{\partial q}$$

pode começar-se a demonstração do cálculo das equações (ou seja, o cálculo das derivadas de  $z$ ):

- Processo de obtenção de  $\dot{z}_1$ :

$$z_1 = h(q) \rightarrow \dot{z}_1 = \frac{\partial h}{\partial q} \dot{q} = J_h S(q)\nu$$

sabendo que  $\Phi_d(q) = J_h(q)S(q)$ , vem

$$\rightarrow \dot{z}_1 = \Phi_d(q)\nu = z_2$$

- Processo de obtenção de  $\dot{z}_2$ :

$$z_2 = \Phi_d(q)\nu \rightarrow \dot{z}_2 = \dot{\Phi}_d(q)\nu + \Phi_d(q)\dot{\nu}$$

pela equação (4.40) verifica-se que  $\dot{\nu} = u$ , logo resulta

$$\rightarrow \dot{z}_2 = \dot{\Phi}_d(q)\nu + \Phi_d(q)u = v$$

- Processo de obtenção de  $\dot{z}_3$ :

$$z_3 = \tilde{h}(q) \rightarrow \dot{z}_3 = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial q} \dot{q} \rightarrow \dot{z}_3 = J_{\tilde{h}} S(q)\nu(t)$$

De modo a eliminar  $\nu$  na equação de  $\dot{z}_3$ , sabendo que

$$z_2 = \Phi_d(q)\nu \rightarrow \nu = z_2 \Phi_d^{-1}(q)$$

e considerando que  $\dot{z}_3$  é apresentado em termos de Jacobiano, é necessário eliminar  $\Phi_d(q)$ . Vem então

$$\dot{z}_3 = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial q} \dot{q} \rightarrow \dot{z}_3 = J_{\tilde{h}} S \nu \rightarrow \dot{z}_3 = J_{\tilde{h}} S \Phi_d^{-1}(q) z_2 .$$

Como  $\Phi_d(q) = J_h S$ , vem

$$\rightarrow \dot{z}_3 = J_{\tilde{h}} S (J_h S)^{-1} z_2 .$$

É de notar que neste caso  $z_3$  e  $\dot{z}_3$  representam a parte da dinâmica interna do sistema, que é a parte não observável.



## Apêndice D

# Especificações do Sistema Físico “Real”

A cadeira de rodas robotizada é um sistema que se pode enquadrar na área da robótica móvel com rodas, apresentando, no entanto, a particularidade de ser um sistema que possui um utilizador humano.



(a)



(b)

Figura D.1: Cadeira de rodas: (a) Vista de perfil. (b) vista de lado.

## D.1 Cadeira de Rodas

A figura D.1 ilustra a cadeira de rodas, preparada para uso exterior e interior, existente no Instituto de Sistemas e Robótica (ISR) pólo de Coimbra. Esta cadeira de rodas foi fabricada pela empresa Vector Mobility e foi adquirida pelo ISR ao instituto americano KIPR (*Kiss Institute for Practical Robots*).

É uma cadeira de rodas motorizada convencional que pode ser comandada por meio de um *joystick*. Como se pode constatar pela figura D.1 a cadeira possui duas rodas actuadas e três rodas livres tipo “castor”, a roda livre traseira encontra-se ligada a um amortecedor, conferindo-lhe maior estabilidade e segurança.

As características cinemáticas e dinâmicas da cadeira de rodas foram já expostas de forma detalhada nos capítulos 3 e 4, respectivamente.

A cadeira de rodas, desde que foi adquirida pelo ISR, tem vindo progressivamente a ser melhorada no seu equipamento e funcionalidades. Na figura D.1(a) observa-se a presença de um computador portátil que se encontra ligado à rede Ethernet do ISR permitindo comunicação TCP/IP, e uma cadeia de sensores de ultra-sons (sonares), entre outros.

### Especificações de Potência:

- A autonomia da cadeira, é garantida por duas baterias de 12 Volts, e é de algumas horas;
- A caixa de velocidades (ou de engrenagens) tem um factor de 1 : 10;
- A velocidade máxima (de fábrica) é de  $\pm 9 \text{ Km/h}$ ;
- A cadeira é dotada de 2 motores DC de 24V.

**Nota:** O controlo dos motores é conseguido por intermédio dos sinais de velocidade ( $\nu_1$  e  $\nu_2$ ) que entram nos controladores PID, sendo enviados ao módulo de potência que gera os sinais de comando (sinais PWM de 24V) para os motores DC.

### Codificadores Ópticos das Rodas:

A capacidade de auto-localização é essencial para o seguimento de caminho, deste modo colocaram-se *encoders* (codificadores ópticos), nas rodas

actuadas da cadeira de rodas, que proporcionam informação sobre os deslocamentos de cada roda. Os codificadores utilizados na cadeira de rodas são de quadratura, possibilitando a detecção do sentido de rotação do motor, e estão ‘ajustados’ para uma resolução de 2000 pulsos, o que permite 20000 pulsos por cada revolução da roda, uma vez que o factor de desmultiplicação da engrenagem do motor é de 10.

Uma vez que o número de pulsos é directamente proporcional ao deslocamento das rodas, para se obter uma relação entre o deslocamento linear de cada roda e o número de pulsos, torna-se necessário relacionar o raio da roda,  $r$ , com o número de pulsos por cada revolução da roda,  $N_{rev}$ , de modo a que:

$$\frac{2\pi r}{N_{rev}} = 1\text{pulso} . \quad (\text{D.1})$$

Dado que o raio ‘efectivo’ da roda é  $r = 0.17m$ , e  $N_{rev} = 20000$ , por substituição em (D.1) obtém-se a correspondência de um deslocamento de  $0.0534mm$  para cada pulso.

Em cada uma das rodas actuadas encontra-se um codificador óptico que permite calcular a velocidade angular de cada uma das rodas. São codificadores de elevada resolução que permitem obter informação precisa do deslocamento das rodas, permitindo calcular a posição da cadeira no ponto  $P_c, (x_c, y_c, \phi)$ .

## D.2 Odometria

A odometria permite actualizar a posição da cadeira. Os cálculos odométricos aqui realizados foram desenvolvidos para a posição da cadeira no ponto  $P_c$ .

Os deslocamentos de cada uma das rodas obtêm-se a partir das medidas dos codificadores das rodas, através de:

$$\Delta s_r = \frac{2\pi r N_r}{N_{rev}} ; \quad (\text{D.2})$$

$$\Delta s_l = \frac{2\pi r N_l}{N_{rev}} ; \quad (\text{D.3})$$

onde  $\Delta s_r$  é o deslocamento da roda direita e  $\Delta s_l$  é o deslocamento da roda esquerda,  $N_r$  e  $N_l$  são o número de pulsos medidos (através dos encoders) na roda direita e esquerda, respectivamente, e  $N_{rev}$  é o número de pulsos por cada revolução da roda.

Considerando o caminho percorrido pela cadeira obtêm-se a distância percorrida (deslocamento),  $\Delta S$ , e a variação da orientação da cadeira,  $\Delta\phi$ , em função dos deslocamentos percorridos pelas rodas no plano cartesiano:

$$\Delta S = \frac{\Delta s_r + \Delta s_l}{2} ;$$

$$\Delta\phi = \frac{\Delta s_r - \Delta s_l}{2b} .$$

A actualização da posição da cadeira,  $(x_c, y_c, \phi)$ , é então dada por:

$$\begin{bmatrix} x_{c,k} \\ y_{c,k} \\ \phi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{c,k-1} + \Delta S_{k-1} \cos(\phi_{k-1} + \frac{\Delta\phi_{k-1}}{2}) - d.\Delta\phi_{k-1} \sin(\phi_{k-1} + \frac{\Delta\phi_{k-1}}{2}) \\ y_{c,k-1} + \Delta S_{k-1} \sin(\phi_{k-1} + \frac{\Delta\phi_{k-1}}{2}) + d.\Delta\phi_{k-1} \cos(\phi_{k-1} + \frac{\Delta\phi_{k-1}}{2}) \\ \phi_{k-1} + \Delta\phi_{k-1} \end{bmatrix} .$$

Por sua vez, a actualização da velocidade (em  $m/s$ ) para cada uma das rodas é obtida, respectivamente, por:

$$\vartheta_1 = \frac{\Delta s_r}{h} ;$$

$$\vartheta_2 = \frac{\Delta s_l}{h} ;$$

onde  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$ , são as velocidades das rodas direita e esquerda, respectivamente, e  $h$  é o período de amostragem, que neste caso é  $h = 0.020 s$ .

# Apêndice E

## Complemento das Simulações

Neste apêndice encontram-se alguns gráficos que permitem, de algum modo, complementar as simulações apresentadas no capítulo 7.

### E.1 MBA, SBA e HBA

Nesta secção são apresentados os gráficos dos valores estimados e reais, bem como da sua diferença para as abordagens MBA, SBA e HBA.

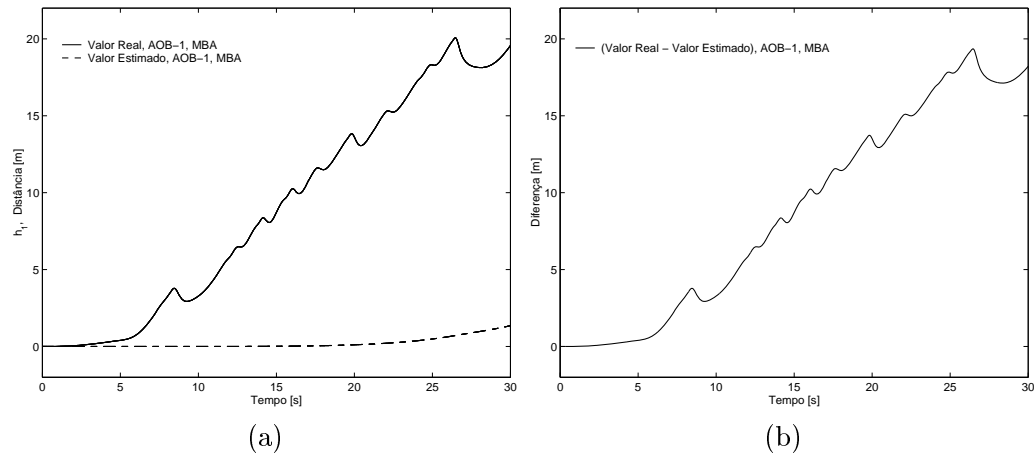


Figura E.1: Análise do comportamento com MBA. (a) Posição relativa do valor real e do valor estimado, para MBA. (b) Diferença entre o valor real e o valor estimado, para MBA.

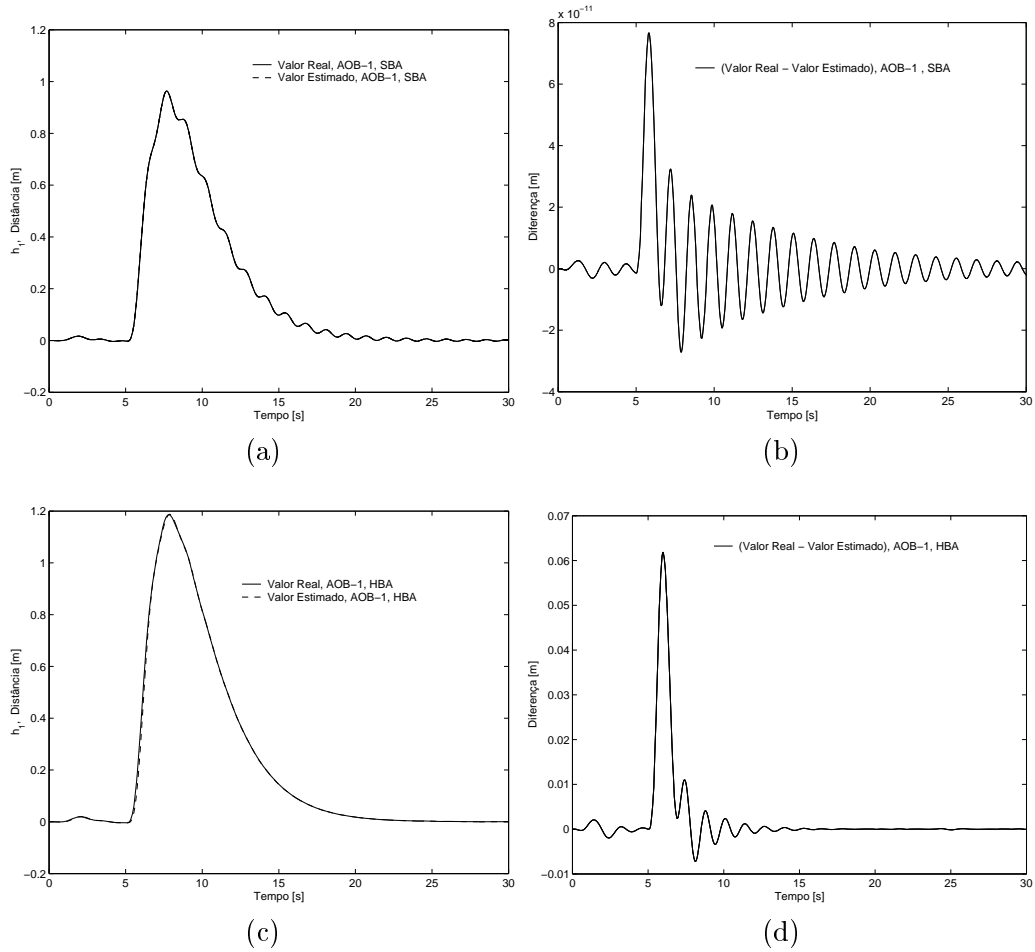


Figura E.2: Análise do comportamento com SBA e HBA. (a) Posição relativa do valor real e do valor estimado, para SBA. (b) Diferença entre o valor real e o valor estimado, para SBA. (c) Posição relativa do valor real e do valor estimado, para HBA. (d) Diferença entre o valor real e o valor estimado, para HBA.

## E.2 Caminho Completo

Nesta secção são apresentadas diversas simulações para um caminho “composto”, i.e. constituído por arcos circulares e linhas rectas.

### E.2.1 Posição Inicial Correcta e Sem Perturbação

Ponto de partida em  $P_c$ , é  $(x_c, y_c) = (5.0, 30.6)$ , com  $\phi = 225^\circ$ .

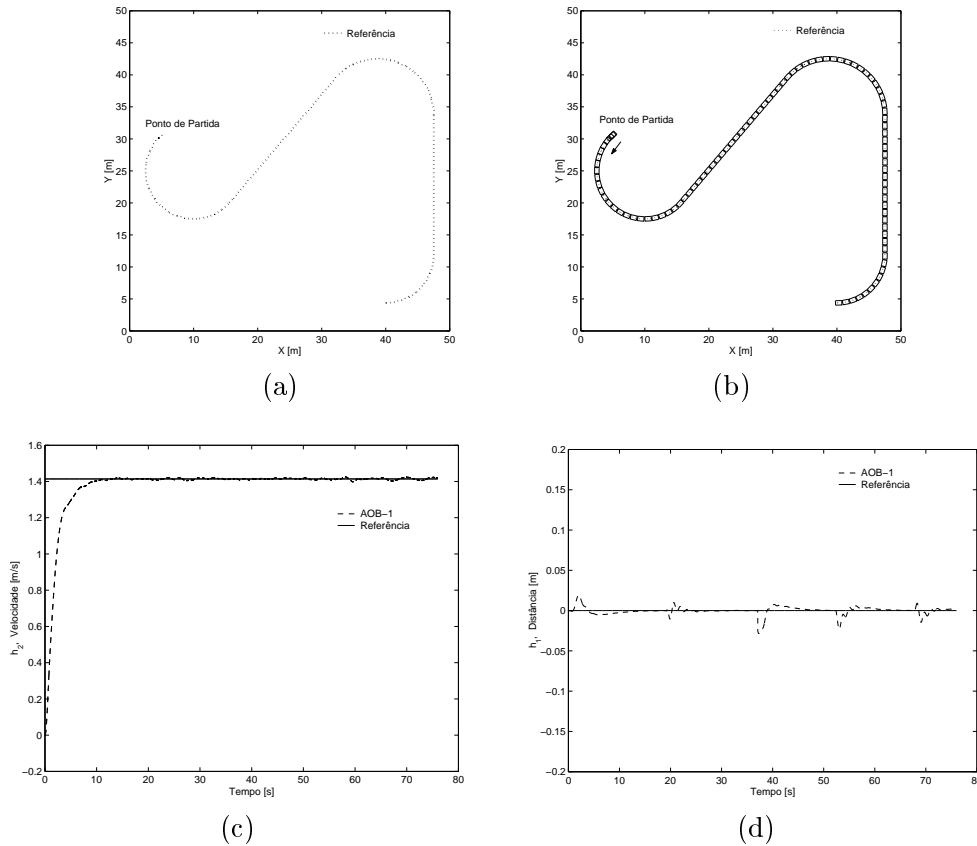


Figura E.3: Caminho “composto” partindo de posição correcta, usando o AOB. (a) Caminho desejado. (b) Seguimento de caminho. (c) Velocidade longitudinal no seguimento de caminho. (d) Distância entre o caminho actual e o desejado, realizado pelo robô.

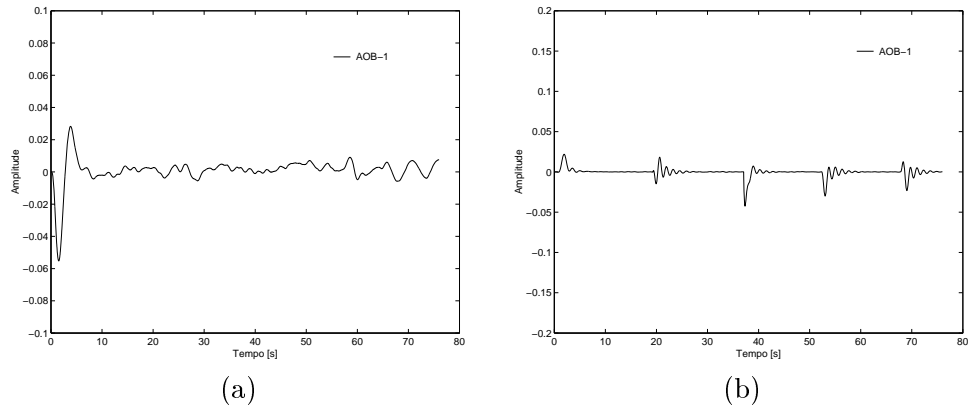


Figura E.4: Estados activos quando não há perturbação. (a) Estado activo para o modelo de velocidade. (b) Estado activo para o modelo de posição.

## E.2.2 Posição Inicial Distante e Sem Perturbação

Ponto de partida em  $P_c$ , é  $(x_c, y_c) = (3.5, 31.0)$ , com  $\phi = 225^\circ$ .

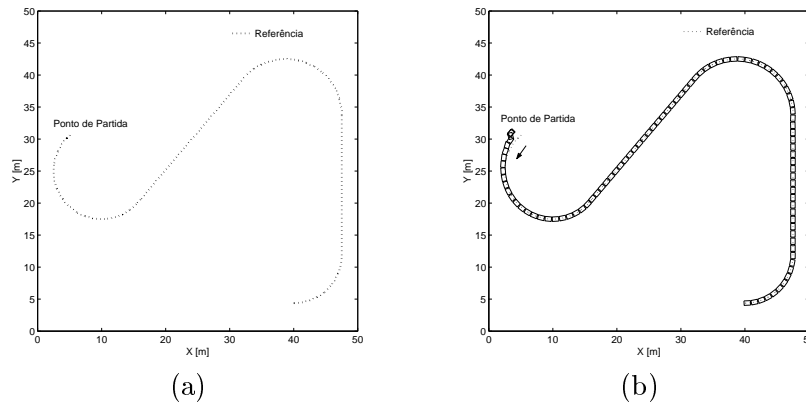


Figura E.5: Caminho “composto” partindo de uma posição distante, usando o AOB. (a) Caminho desejado. (b) Seguimento de caminho.



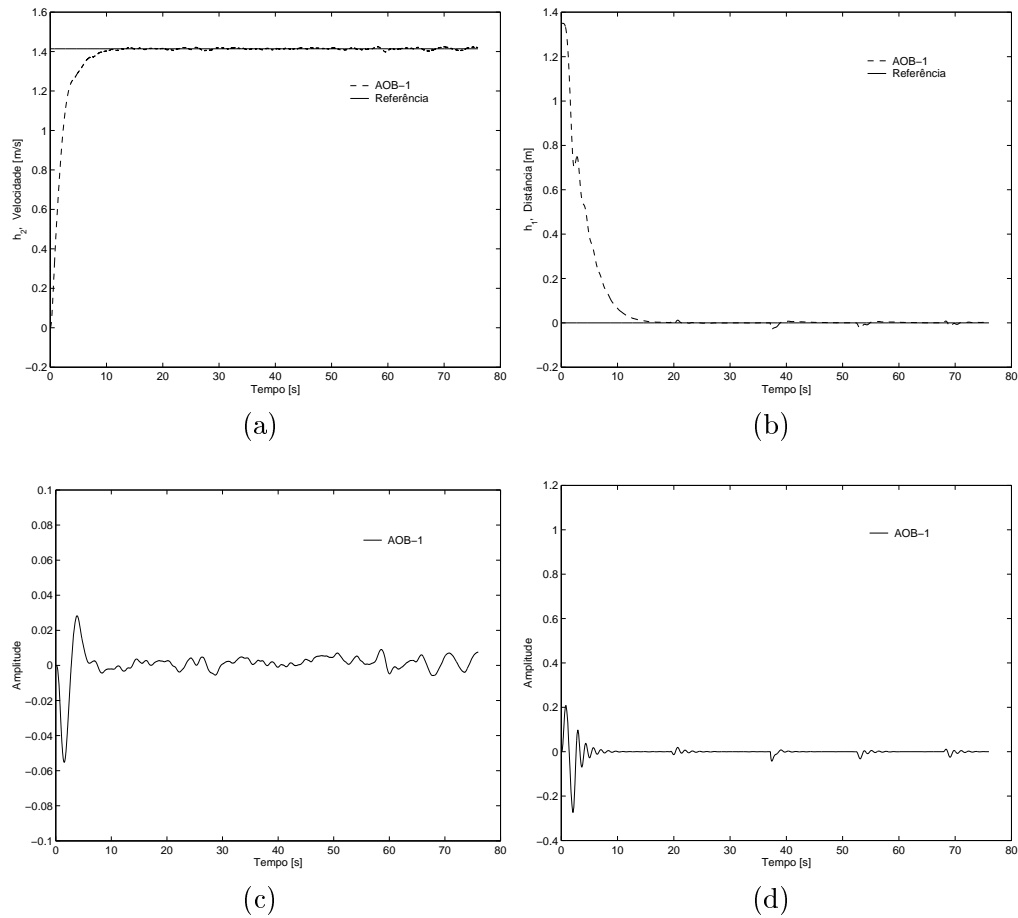


Figura E.6: Caminho “composto” sem perturbação, usando AOB. (a) Velocidade longitudinal no seguimento de caminho. (b) Distância entre o caminho actual e o desejado realizado pelo robô. (c) Estado activo para o modelo de velocidade. (d) Estado activo para o modelo de posição.

### E.2.3 Posição Inicial Distante e Com Perturbação

Ponto de partida em  $P_c$ , é  $(x_c, y_c) = (3.5, 31.0)$ , com  $\phi = 225^\circ$ .

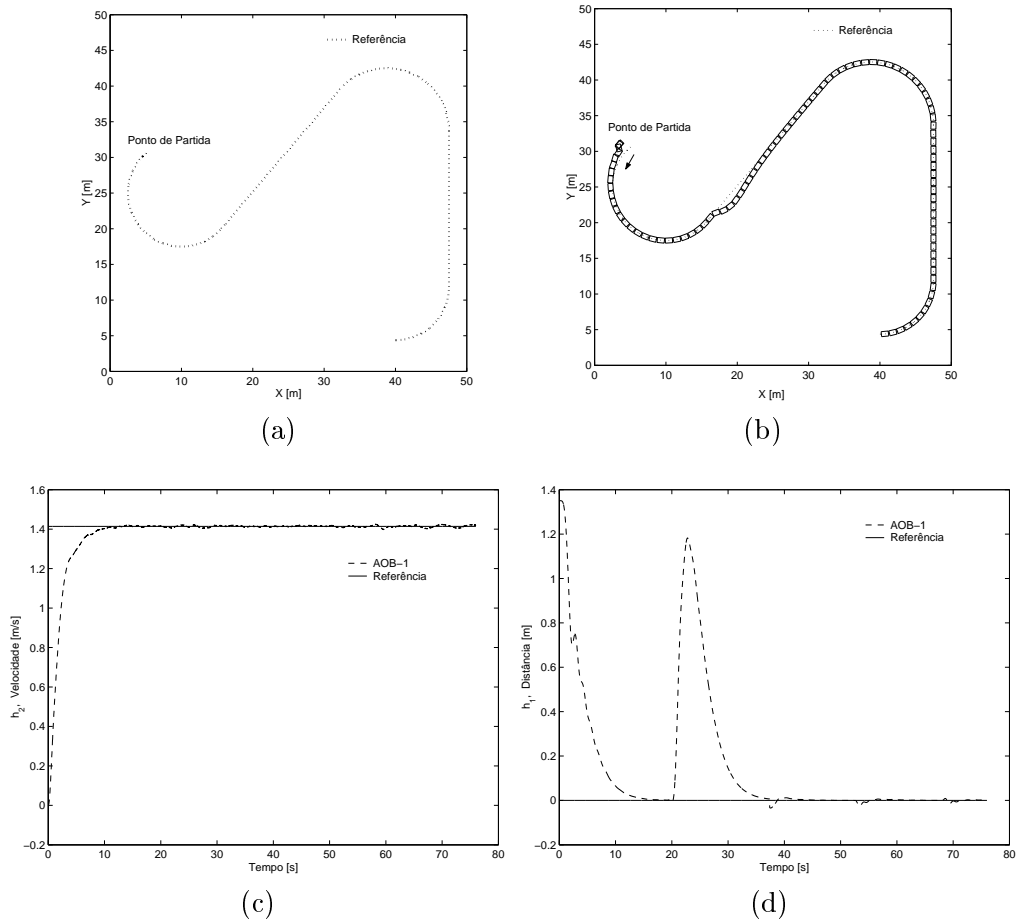


Figura E.7: Caminho “composto” na presença de uma perturbação na referência de posição, usando o AOB. (a) Caminho desejado. (b) Seguimento de caminho. (c) Velocidade longitudinal no seguimento de caminho. (d) Distância entre o caminho actual e o desejado realizado pelo robô.

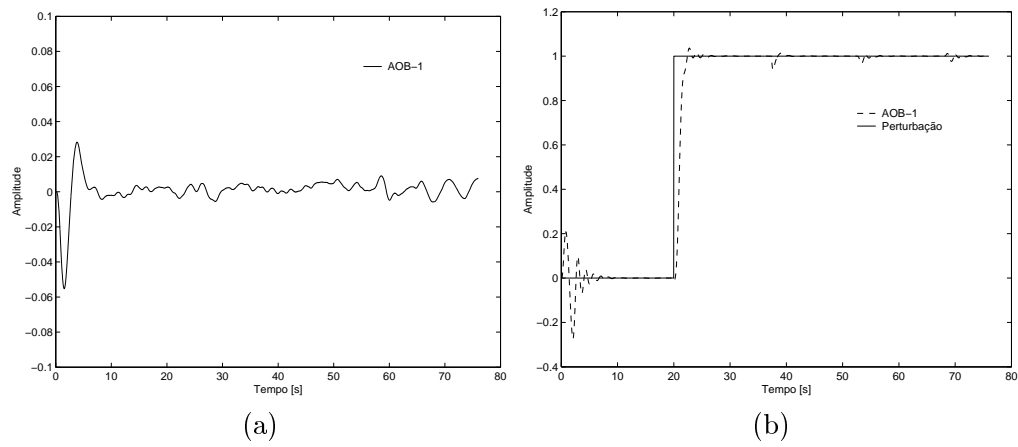


Figura E.8: Estados activos quando há uma perturbação na referência de posição. (a) Estado activo para o modelo de velocidade. (b) Estado activo para o modelo de posição e Perturbação.



# Bibliografia

- [1] J. Ackermann, *Robust control: The parameter space approach*, 2<sup>nd</sup> ed., London: Springer-Verlag, 2002.
- [2] L. Aguilar, T. Hamel and P. Souères, “Robust path following control for wheeled robots via sliding mode techniques,” in *Proc. of the IEEE/RSJ International Conference Intelligent Robotot and Systems (IROS'97)*, Belgium, pp. 1389-1395, 1997.
- [3] L. Aguilar, P. Souères, M. Courdesses and S. Fleury, “Robust path-following control with exponential stability for mobile robots,” in *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Belgium, pp. 3279-3284, 1998.
- [4] L. Aguilar and P. Souères, “A discrete feedback linearization method for path following for wheeled robots,” in *Proc. of the 4th European Conference (ECC'97)*, Bruxelles, 1997.
- [5] J. Alexander and J. Maddocks, “On the kinematics of wheeled mobile robots,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 8, no. 5, pp. 15-27, 1989.
- [6] J. Alexander, J. Maddocks and B. Michalowski, “Shortest distance paths for wheeled mobile robots,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 14, no. 5, pp. 657-662, 1998.
- [7] G. Andersen, “Modelling and control of a mobile robot,” Ph.D. Thesis, Institute of Automation, Technical University of Denmark, Denmark, 1995.

- [8] B. D'Andrea-Novel, G. Bastin and G. Campion, "Modelling and control of nonholonomic wheeled mobile robots," in *Proc. of the International Conference on Robotics and Automation*, Sacramento, CA, pp. 1130-1135, 1991.
- [9] B. D'Andrea-Novel, G. Bastin and G. Campion, "Dynamic feedback linearization of nonholonomic wheeled mobile robots," in *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, France, pp. 2527-2532, 1992.
- [10] B. D'Andrea Novel, G. Campion and G. Bastin, "Control of nonholonomic wheeled mobile robots by state feedback linearization," *International Journal of Robotics Research*, vol. 14, no. 6, pp. 543-559, 1995.
- [11] J. Angeles, *Spatial kinematic chains, analysis, synthesis, optimization*, Berlin: Springer-Verlag, 1982.
- [12] P. Antsaklis and L. Passino, Eds, *An introduction to intelligent and autonomous control*, Kluwer Academic, G. Saridis' preface, 1993.
- [13] J. Asensio and L. Montano, "A kinematic and dynamic model-based motion controller for mobile robots," in *Proc. of the 15th Triennial World Congress IFAC*, Barcelona, Spain, 2002.
- [14] A. Astolfi, "Exponential Stabilization of a Car-Like Vehicle," in *Proc. of the IEEE International Conference of Robotics and Automation*, pp. 1391-1396, 1995.
- [15] A. Astolfi, "Discontinuous control of nonholonomic systems," *Systems Control Letters*, vol. 27, pp. 37-45, 1996.
- [16] A. Astolfi, P. Bolzern and A. Locatelli, "Path-tracking of tractor-trailer vehicle via Lyapunov techniques," in *Proc. of the European Control Conference*, 2001.
- [17] K. J. Åström and B. Wittenmark, *Adaptive control*, USA: Addison-Wesley, Reading, 1989.
- [18] K. J. Åström and B. Wittenmark, *Computer controlled Systems: theory and design*, New Jersey: Prentice Hall, 1997.

- [19] M. Bak, N. Poulsen and O. Raven, "Receding horizon approach to path following mobile robot in the presence of velocity constraints," in *Proc. of the European Control Conference*, pp. 1151-1156, 2001.
- [20] J.S. Beggs, *Advanced mechanism*, New York: Macmillan, 1966.
- [21] M. Belhocine, M. Hamerlain and F. Meraoubi, "Robust control for wheeled mobile robot," in *Proc. of the 11th International Conference on Advanced Robotics (ICAR)*, Portugal, pp. 1731-1736, 2003.
- [22] J. Bengtsson, "Adaptive cruise control and driver modeling," Ph.D. Thesis, Dep. of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Lund, 2001.
- [23] M. Bannani and P. Rouchon, "Robust stabilization of flat and chained systems," in *Proc. of the 3rd European Control Conference*, Rome, pp. 2642-2646, 1995.
- [24] S. Bentalba, A. Hajjaji and A. Rachid, "Fuzzy path tracking control of a vehicle," in *Proc. of the IEEE International Conference on Intelligent Vehicles*, pp. 195-200, 1998.
- [25] R. Biewald, "A neural network controller for the navigation and obstacle avoidance of a mobile robot," in *Neural Networks for Robotic Control*, A. Zalzala and A. Morris, Eds, Prentice Hall, 1996.
- [26] S. Bittanti and S. Savaresi, "On the parametrization and design of an extended Kalman filter frequency tracker," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 9, pp. 1718-1724, 2000.
- [27] A. Bloch and N. McClamroch, "Control of mechanical systems with classical non-holonomic constraints," in *Proc. of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, pp. 201-205, 1989.
- [28] A. Bloch, M. Reyhanoglu and N. McClamroch, "Control and stabilization of nonholonomic caplygin dynamic systems," in *Proc. of the IEEE International Conference on Decision and Control*, Brighton, U.K., pp. 1127-1132, 1991.

- [29] A. Bloch, N. Mclamroch and M. Reyhanoglu, "Controlability and stabilization of properties of a nonholonomic control system," in *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control*, Honolulu, pp. 1312-1314, 1990.
- [30] A. Bloch and S. Drakunov, "Stabilization of a nonholonomic system via sliding modes," in *Proc. of the IEEE International Conference on Decision Control*, pp. 2961-2963, 1994.
- [31] A. Bloch, P. Krishnaprasad, J. Marsden and R. Murray, "Nonholonomic mechanical systems with symmetry," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 136, no. 1, pp. 21-99, 1996.
- [32] A. Bloch, *Nonholonomic mechanics and control*, New-York: Springer-Verlag, 2003.
- [33] L. Boissier, "IARES-L: A ground demonstrator of planetary rover technologies," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 23, pp. 89-97, 1998.
- [34] J. Borges, M. Botto and J. Costa, "Approximate input-output feedback linearization for the swinging crane system using a state observer," in *Proc. of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Lisbon, Portugal, 2002.
- [35] G. Bourihis, K. Moumen, P. Pino, S. Rohmer and A. Pruski, "Assisted navigation for a powered wheelchair," in *Proc. of the IEEE International Conference Systems, Man and Cybernetic*, pp. 553-558, 1993.
- [36] R. Brockett, "Asymptotic stability and feedback stabilization," in *Differential Geometric Control Theory*, R. Brockett, R. Millman, and H. Sussmann, Eds., Berlin: Birkhauser, pp. 181-191, 1983.
- [37] A. Broggi, M. Bertozzi, A. Fascioli, C. Bianco and A. Piazzini, "Visual perception of obstacles and vehicles for platooning," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 1, no. 3, pp. 164-176, 2000.
- [38] X. Bui, P. Souères, J. Boissonnat and J. Laumond, "Shortest path synthesis for Dubins non-holonomic robot," in *Proc. of the IEEE International Conference on Advanced Robotics*, San Diego, USA, vol. 1, pp. 2-7, 1994.



- [39] G. Campion, B. d'Andrea-Novel and G. Bastin, "Controllability and state feedback stabilization of nonholonomic mechanical systems," in *Lecture Notes in Control and Information Science*, C. Canudas de Wit, Ed, New-York: Springer-Verlag, no. 162, pp. 106-124, 1991.
- [40] G. Campion, G. Bastin and B. D'Andréa-Novel, "Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 12, no. 1, pp. 47-62, 1996.
- [41] C. Canudas de Wit and O. Sordalen, "Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, no. 11, pp. 1791-1797, 1992.
- [42] C. Canudas de Wit, H. Khenoufand and O. Sordalen, "Nonlinear control design for mobile robots," in *World Scientific Series in Robotics and Automated Systems. Recent trends in mobile robotica*, Yuan F. Zheng, Eds, vol. 11, pp. 121-156, 1993.
- [43] C. Canudas de Wit and H. Khenouf, "Quasi-continuous stabilizing controllers for nonholonomic systems: design and robustness considerations," in *Proc. of the European Control Conference*, Rome, pp. 2630-2635, 1995.
- [44] C. Canudas de Wit, "Trends in mobile robot and vehicle control," in *Control Problems in Robotics. Lecture Notes in Control and Information Science*, B. Siciliano and K.P. Valavanis, Eds, London: Springer-Verlag, vol. 230, pp. 151-176, 1998.
- [45] A. Civit-Balcells, F. Río, J. Sevillano and G. Jiménez, "SIRIUS: A low cost high performance computerized wheelchair," in *Proc. of the International Workshop on Medical Robots*, Vienna, pp. 23-30, 1997.
- [46] A. Civit-Balcells, F. Río, J. Sevillano and G. Jiménez, "A proposal for a low cost advanced wheelchair architecture," in *Proc. of the 4th European Conference for the Advanc. Techn.*, Greece, 1996.
- [47] P. Coelho, "Aplicação de Lagrangianos na dinâmica de robôs móveis com rodas," Instituto de Sistemas e Robótica, Universidade de Coimbra, Portugal, Technical Report ISR-LCIR-2001/01, 2001.

- [48] P. Coelho and U. Nunes, "Lie algebra application to mobile robot control: a tutorial," *Robotica*, Cambridge University Press, vol. 21, no. 5, pp. 483-493, 2003.
- [49] P. Cohn, *Linear equations, library of mathematics*, London: Routledge and Kegan Paul, 1958.
- [50] L. Consolini, A. Piazzzi and M. Tosques. "Motion planning for steering car-like vehicles," in *Proc. of the European Control Conference*, pp. 1834-1839, 2001.
- [51] R. Cortesão, "Kalman techniques for intelligent control systems: theory and robotic experiments," Ph.D. Thesis, University of Coimbra, Coimbra, 2003.
- [52] R. Cortesão, R. Koeppe, U. Nunes and G. Hirzinger, "Explicit force control for manipulators with active observers," in *Proc. of the International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'00)*, Takamatsu, Japan, vol. 2, pp. 1075-1080, 2000.
- [53] R. Cortesão, R. Koeppe, U. Nunes and G. Hirzinger, "Compliant motion control with stochastic active observers," in *Proc. of the International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'01)*, Maui, Hawaii, USA, pp. 1876-1881, 2001.
- [54] R. Cortesão, J. Park and O. Khatib, "Real-time adaptive control for haptic manipulation with active observers," in *Proc. of the International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'03)*, Las Vegas, Nevada, USA, pp. 2938-2943, 2003.
- [55] R. Decarlo, S. Zak and S. Drakunov, "Variable structure, sliding-mode controller design," in *The control handbook*, CRC press, Inc., pp. 941-951, 1996.
- [56] J. Denavit and R. Hartenberg, "A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 77, no. 2, pp. 215-221, 1955.
- [57] T. Denmeade, "A pioneer's journey into the sarcophagus," *Nuclear Engineering International*, vol. 43, no. 524, pp. 18-20, 1998.

- [58] R. DeSantis, "Modeling and path-tracking control of a mobile wheeled robot with a differential drive," *Robotica*, vol. 13, pp. 401-410, 1995.
- [59] E. Dickmanns and A. Zapp, "Autonomous high speed road vehicle guidance by computer vision," in *Proc. of the 10th IFAC World Congress*, Munchen, Germany, vol. 4, pp. 232-237, 1987.
- [60] A. Divelbiss and J. Wen, "Trajectory tracking control of a car-trailer system," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 5, no. 3, pp. 269-278, 1997.
- [61] W. Dixon, D. Dawson, E. Zergeroglu and A. Behal, *Nonlinear control of wheeled mobile robots*, vol. 262, London: Springer-Verlag, 2001.
- [62] S. Drakunov and R. Decarlo, "Sliding mode control design for automated steering via Lyapunov approach," in *Proc. of the 34th conference on Decision and Control*, New Orleans, pp. 4086-4088, 1995.
- [63] L. Dubins, "On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents," *American Journal of Mathematics*, vol. 79, pp. 497-516, 1957.
- [64] M. Egerstedt, X. Hu and A. Stotsky, "Control of a car-like robot using a virtual vehicle approach," in *Proc. of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, USA, pp. 1502-1507, 1998.
- [65] M. Egerstedt, X. Hu and A. Stotsky, "Control of mobile platforms using a virtual vehicle approach," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 11, 2001.
- [66] M. Egerstedt and X. Hu, "An hybrid control approach to action coordination of mobile robots," *Automatica*, vol. 38, pp. 125-130, 2002.
- [67] P. Encarnação and A. Pascoal, "3D path following of autonomous underwater vehicles," in *Proc. of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, 2000.
- [68] F. Espinosa, E. Lopez, R. Mateos, M. Mazo and R. Garcia, "Advanced and intelligent control techniques applied to the drive control and path tracking systems on a robotic wheelchair," *Autonomous Robots*, vol. 11, pp. 137-148, 2001.

- [69] S.G. Fabri and V. Kadiramanathan, *Functional adaptive control: an intelligent systems approach*, London: Springer-Verlag, 2001.
- [70] I. Fantoni and R. Lozano, *Non-linear control for underactuated mechanical systems*, London: Springer-Verlag, 2002.
- [71] E. Felipe and F. Navin, "Canadian researchers test driver response to horizontal curves," *Road Management & Engineering Journal*, TranSafety, Inc., 1998.
- [72] R. Fierro and F. Lewis, "Control of a nonholonomic mobile robot: backstepping kinematics into dynamics," *Journal of Robotic Systems*, vol. 14, no. 3, pp. 149-163, 1997.
- [73] Th. Fraichard, A. Scheuer and R. Desvigne, "From Reeds and Shepp's to continuous-curvature paths," in *Proc. of the IEEE International Conference on Advanced Robotics*, Tokyo, Japan, pp. 585-590, 1999.
- [74] Th. Fraichard and J.M. Ahuactzin, "Smooth path planning for cars," in *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Seoul, 2001.
- [75] Th. Fraichard and P. Garnier, "Fuzzy control to drive car-like vehicles," *Journal of Robotics and Autonomous Systems*, vol. 34, no. 1, pp. 1-22, 2001.
- [76] E. Freund and R. Mayr, "Nonlinear path control in automated vehicle guidance," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 13, no. 1, pp. 49-60, 1997.
- [77] T. Fukao, H. Nakagawa and N. Adachi, "Adaptive tracking control of a nonholonomic mobile robot," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 16, no. 5, pp. 609-615, 2000.
- [78] D. Green, J. Sasiadek and G. Vukovich, "Guidance and control of an autonomous planetary rover," in *Proc. of the IEEE-IEE Vehicle Navigation and Information Systems Conference*, Ottawa, Canada, pp. 539-542, 1993.

- [79] D. Green, J. Sasiadek and G. Vukovich, "Path tracking, obstacle avoidance and position estimation by an autonomous wheeled planetary rover," in *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Diego, CA, pp. 1300-1305, 1994.
- [80] J. Guldner and V. Utkin, "Stabilization of nonholonomic mobile robots using Lyapunov functions for navigation and sliding mode control," in *Proc. of the 33rd Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista, FL, pp. 2967-2972, 1994.
- [81] J. Guldner and V. Utkin, "Sliding mode control for gradient tracking and robot navigation using artificial potential fields," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 11, pp. 247-254, 1995.
- [82] N. Hager, A. Cypher and D. Smith, "Cocoa at the visual programming challenge 1997," *Computing*, vol. 9, no. 2, pp. 151-169, 1998.
- [83] M. Hall, *The theory of groups*, New York: Macmillan, 1959.
- [84] T. Hamel and D. Meizel, "Robust control laws for wheeled mobile robots," *International Journal on Systems and Science*, vol. 27, no. 8, pp. 695-704, 1996.
- [85] C. Han, K. Law, J.-C. Latombe and J. Knuz, "A performance-based approach to wheelchair accessible route analysis," *Advanced Engineering Informatics*, 2002.
- [86] J. Hauser, S. Sastry and P. Kokotović, "Nonlinear control via approximate input-output linearization: the ball and beam example," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, no. 3, pp. 392-398, 1992.
- [87] S. Hayati, R. Volpe, P. Backes, J. Balaram and R. Welch, "Micro-rover research for exploration of Mars," in *Proc. of the AIAA Forum on Advanced Developments in Space Robotics*, University of Wisconsin, Madison, 1996.
- [88] A. Hemami, M. Mehrabi and R. Cheng, "A new control strategy for tracking in mobile robots and AGVs," in *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Ohio, pp. 1122-1127, 1990.

- [89] R. Hindman and J. Hauser, "Manoeuvre modified trajectory tracking," in *Proc. of the International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS'96)*, St. Louis, USA, 1992.
- [90] P. Hingwe and M Tomizuka, "Experimental evaluation of a chatter free sliding mode control for lateral control in AHS," in *Proc. of the American Control Conference*, Albuquerque, New Mexico, pp. 3365- 3369, 1997.
- [91] A. Howard and H. Seraji, "An intelligent terrain-based navigation system for planetary rovers," *IEEE Robotics and Automation Magazine*, vol. 8, no. 4, pp. 9-17, 2001.
- [92] H. Hu and D. Gu, "Generalised predictive control of an industrial mobile robot," in *Proc. of the IASTED International Conference Intelligent Systems and Control*, California, USA, pp. 235-240, 1999.
- [93] R. Hui and A. Goldenberg, "Stability of non-holonomic systems," in *Proc. of the International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, New York, USA, pp. 1260-1265, 1991.
- [94] S. Ishikawa, "A method of indoor mobile robots navigation by using fuzzy control," in *Proc. of the IEEE/RSJ Workshop on Intelligent Robots and Systems*, pp. 1013-1018, 1991.
- [95] A. Isidori, *Nonlinear control systems, 3<sup>rd</sup> ed.*, London: Springer-Verlag, 1995.
- [96] A. Isidori, *Nonlinear control systems II*, London: Springer-Verlag, 1999.
- [97] K. Jaewon, L. Kicheol and P. Mignon, "Trajectory controller design of mobile robot based on backstepping procedure," in *Proc. of the 15th Triennial World Congress*, Barcelona, Spain, 2002.
- [98] Z. Jiang and J. Pomet, "Combining backstepping and time-varying techniques for a new set of adaptive controllers," in *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista, FL, vol. 3, pp. 2207-2212, 1994.
- [99] Z.P. Jiang and H. Nijmeijer, "Tracking control of mobile robots: a case study in backstepping," *Automatica*, vol. 33, no. 7, pp. 1393-1399, 1997.

- [100] Z. Jiang and H. Nijmeijer, "A recursive technique for tracking control of nonholonomic systems in chained form," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 2, pp. 265-279, 1999.
- [101] J. Jones and A. Flynn, *Mobile robots: inspiration to implementation*, A. Peters, Ltd: Wellesley, MA 1993.
- [102] R. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *International J. of Basic Engineering, Transactions of the ASME*, vol. 82, pp. 35-45, 1960.
- [103] R. Kalman, "New results in linear filtering and prediction theory," *International J. of Basic Engineering, Transactions of the ASME*, vol. 83, pp. 95-108, 1961.
- [104] Y. Kanayama, A. Nilipour and C. Lelm, "A locomotion control method for autonomous vehicles," in *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Philadelphia, pp. 1315-1317, 1988.
- [105] Y. Kanayama, Y. Kimura, F. Miyazaki and T. Noguchi, "A stable tracking control method for an autonomous mobile robot," in *Proc. of the IEEE International Conference Robotics and Automation*, Ohio, pp. 384-389, 1990.
- [106] Y. Kanayama, Y. Kimura, F. Miyazaki and T. Noguchi, "A stable tracking control method for a non-holonomic mobile robot," in *Proc. of the IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems (IROS'91)*, Osaka, pp. 1236-1241, 1991.
- [107] Y. Kanayama and F. Fahroo, "A new line tracking method for nonholonomic vehicles," in *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Albuquerque, NM, pp. 2908-2913, Apr 1997.
- [108] H. Khalil, *Nonlinear systems*, 3<sup>rd</sup> ed., Prentice Hall, 2002.
- [109] M. Khatib, H. Jaouni, R. Chatila and J. Laumond, "Dynamic path modification for car-like nonholonomic mobile robots," in *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Albuquerque, pp. 2920-2925, 1997.

- [110] B. Kim and P. Tsiotras, "Controllers for unicycle-type wheeled robots: theoretical results and experimental validation," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 18, no. 3, 2002.
- [111] I. Kolmanovsky and N. McClamroch, "Developments in nonholonomic control problems," *IEEE Control Systems Magazine*, pp. 20-36, 1995.
- [112] A. Krener, "Feedback linearization," in *Mathematical control theory*, J. Baillieul and J. Willems, Eds, Springer-Verlag, 1998.
- [113] M. Krstic, I. Kanellakopoulos and P. Kokotovic, *Nonlinear and adaptive control design*, New York: John Wiley & Sons, 1995.
- [114] C. Kwan and F. Lewis, "Robust backstepping control of nonlinear systems using neural networks," in *Proc. of the European Control Conference*, Rome, pp. 2772-2777, 1995.
- [115] F. Lamiroux and J. Laumond, "Smooth motion planning for car-like vehicles," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 17, no. 4, pp. 498-502, 2001.
- [116] J.-C. Latombe, "Robot motions planning," *Kluwer Academic Publishers*, Boston, 1991.
- [117] T. Lee, K. Song, C. Lee and C. Teng, "Tracking control of unicycle-modeled mobile robots using a saturation feedback controller," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 9, no. 2, 2001.
- [118] F. Leite, "Control systems on matrix Lie groups," in *Proc. of the Meeting on Matrix Analysis and Applications*, Sevilha, Spain, pp. 295-306, 1997.
- [119] A. De Luca and G. Oriolo, "Modelling and control of nonholonomic mechanical systems," in *Kinematics and Dynamics of Multi-Body Systems*, J. Angeles and Kecskemethy, Eds, Wien: Springer-Verlag, pp. 277-342, 1995.
- [120] A. De Luca and G. Oriolo, "Feedback control of a nonholonomic car-like robot," in *Robot Motion Planning and Control, Lecture Notes in Computer and Information Sciences*, J.-P. Laumond Ed, London: Springer-Verlag, vol. 229, pp. 171-153, 1998.



- [121] P. Lucibello and G. Oriolo, "Robust stabilization via iterative state steering with an application to chained-form systems," *Automatica*, vol. 37, no. 1, pp. 71-79, 2001.
- [122] J. Marchant, T. Hague and N. Tillet, "Row-following accuracy of an autonomous vision-guided agricultural vehicle," *Computers and Electronics in Agriculture*, vol. 16, no. 2, pp. 165-175, 1997.
- [123] R. Marino and P. Tomei, *Nonlinear control design*, Prentice Hall, 1995.
- [124] J. Martinez, M. Paz and A. Garcia-Cerezo, "Path tracking for mobile robots with a trailer," in *Proc. of the 15th Triennial World Congress (IFAC)*, Spain, 2002.
- [125] P. McKerrow, *Introduction to robotics*, Addison-Wesley, 1991.
- [126] R. M'Closkey and R. Murray, "Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, no. 5, pp. 614-628, 1997.
- [127] A. Micaelli and C. Samson, "Trajectory-tracking for unicycle-type and two-steering-wheels mobile robots," INRIA. Sophia-Antipolis, Technical Report No. 2097, 1993.
- [128] S. Monaco and D. Normand-Cyrot, "An introduction to motion planning under multirate digital control," in *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control*, Arizona, pp. 1780-1785, 1992.
- [129] E. Moret, "Dynamic modeling and control of a car-like robot," M.S. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia, 2003.
- [130] P.F. Muir, "Kinematic and dynamic modeling and control of wheeled mobile robots," Ph.D. Thesis, Electrical and Computer Engineering Department, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, Pa., 1988.
- [131] R. Murray, G. Walsh and S. Sastry, "Stabilization and tracking for nonholonomic control systems using time-varying state feedback," in *Proc. of the IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium*, Bordeaux, France, pp. 109-114, 1992.

- [132] R. Murray and S. Sastry, "Nonholonomic motion planning: steering using sinusoids," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, no. 5, pp. 700-716, 1993.
- [133] R. Murray, Z. Li and S. Sastry, *A mathematical introduction to robotic manipulation*, CRC Press, 1994.
- [134] R. Murray, *Nonlinear control of mechanical systems: A Lagrangian perspective*, Annual Reviews in Control, 1997.
- [135] O. Nelles, *Nonlinear system identification*, Berlin: Springer-Verlag, 2001.
- [136] W. Nelson and I. Cox, "Local path control for autonomous vehicle," in *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Philadelphia, pp. 1504-1510, 1988.
- [137] H. Nijmeijer and A. Schaft, *Nonlinear dynamic control systems*, New York: Springer-Verlag, 1990.
- [138] M. Norgaard, N. Poulsen and O. Ravn, "Advances in derivative-free state estimation for nonlinear systems," Technical University of Denmark, Denmark, Technical Report, 2000.
- [139] K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 2<sup>a</sup> ed., Brasil: Prentice-Hall, 1993.
- [140] S.-Y. Oh, W. Chung and I. Suh, "Disturbance observer based robust impedance control of redundant manipulators," in *Proc. of the International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Korea, vol. 2, pp. 647-652, 1999.
- [141] A. Ollero and G. Heredia, "Stability analysis of mobile robot path tracking," in *Proc. of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Pittsburgh, PA, pp. 461-466, 1995.
- [142] D. Orin and S.-Y. Oh, "Control of force distribution in robotic mechanisms containing closed kinematic chains," *Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control*, vol. 103, no. 2, pp. 134-141, 1981.

- [143] G. Oriolo, A. De Luca and M. Vendittelli, "WMR control via dynamic feedback linearization: Design, implementation and experimental validation," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 10, no. 6, pp. 835-852, 2002.
- [144] G. Oriolo, S. Panzieri and G. Ulivi, "An iterative learning controller for nonholonomic robots," *International Journal on Robotics Research*, vol. 17, no. 9, pp. 954-970, 1998.
- [145] K. Park, H. Chung and J. Lee, "Point stabilization of mobile robots via state-space exact feedback linearization," *Robotics and Computer Integrated Manufacturing*, vol. 16, pp. 353-363, 2000.
- [146] A. Pascoal, P. Oliveira, C. Silvestre, A. Bjerrum, A. Ishoy, J.-P. Pgnon, G. Ayela and C. Petzeltt, "MARIUS: An autonomous underwater vehicle for coastal oceanography," *IEEE Robotics and Automation Magazine*, vol. 4, no. 4, pp. 46-59, 1997.
- [147] R. Paul, *Robot manipulators: mathematics, programming and control*, Cambridge: MIT Press, 1981.
- [148] H. Pham, K. Hedrick and M. Tomizuka, "Combined lateral and longitudinal control of vehicles for IVHS," in *Proc. of the American Control Conference*, Baltimore Maryland, pp. 1205-1206, 1994.
- [149] G. Pires and U. Nunes, "A wheelchair steered through voice commands and assisted by a reactive fuzzy-logic controller," *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 34, no. 3, pp. 301-314, 2002.
- [150] D. Pomerleau, *Neural network perception for mobile robot guidance*, Boston: Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [151] J. Pomet, "Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift," *Systems and Control Letters*, vol. 18, no. 2, pp. 147-158, 1992.
- [152] J. Pomet, B. Thuilot, G. Bastin and G. Campion, "A hybrid strategy for the feedback stabilization of nonholonomic mobile robots," in *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Nice, pp. 129-134, 1992.

- [153] J. Reeds and L. Shepp, "Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards," *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 145, no. 2, pp. 367-393, 1990.
- [154] F. Río, G. Jim enez, J. Sevillano, S. Vicente and A. Balcells, "A generalization of path following for mobile robots," in *Proc. of the International Conference on Robotics and Automation*, Detroit, Michigan, pp. 7-12, 1999.
- [155] F. Río, "Analysis and evaluation of mobile robot control: application to electric wheelchairs," Ph.D. Thesis, University of Seville, Spain, 1997.
- [156] T. Rofer, "Strategies for using a simulation in the development of the Bremen autonomous wheelchair," in *Simulation-past, present and future*, Zobel and D. Moeller, Eds, Society for Computer Simulation International, pp. 460-464, 1998.
- [157] C. Samson and K. Ait-Abderrahim, "Feedback control of nonholonomic wheeled cart in cartesian space," in *Proc. of the International Conference on Robotics and Automation*, Sacramento, CA, pp. 1136-1141, 1991.
- [158] C. Samson, "Path following and time-varying feedback stabilization of a wheeled mobile robot," in *Proc. of the 2nd International Conference on Automation, Robotics and Computer Vision*, Singapore, 1992.
- [159] C. Samson, "Time-varying feedback stabilization of car-like wheeled mobile robots," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 12, no. 1, pp. 55-64, 1993.
- [160] C. Samson, "Control of chained systems application to path-following and time-varying point stabilization of mobile robots," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.40, pp. 64-70, 1995.
- [161] N. Sarkar, X. Yun and V. Kumar, "Control of mechanical systems with rolling constraints: application to dynamic control of mobile robots," *International Journal of Robotics Research*, vol. 13, no. 1, pp. 55-69, 1994.
- [162] S. Sastry, *Nonlinear systems: analysis, stability and control*, New York: Springer-Verlag, 1999.

- [163] A. Scheuer and Th. Fraichard, "Continuous-curvature path planning for car-like vehicles," in *Proc. of the IEEE-RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Grenoble, France, vol. 2, pp. 997-1003, 1997.
- [164] A. Scheuer and Ch. Laugier, "Planning sub-optimal and continuous-curvature paths for car-like robots," in *Proc. of the IEEE-RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Victoria, CA, vol. 1, pp. 25-31, 1998.
- [165] E. Scholz and P. Fiorini, "Navigating a robotic wheelchair in a railway station during rush hour," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 18, no. 7, pp. 711-727, 1999.
- [166] R. Schraft and G. Schmierer, *Serviceroboter*, Berlin: Springer-Verlag, 1998.
- [167] P. Sheth and J. Uicker, "A generalized symbolic notation for mechanisms," *Journal of Engineering for Industry*, Series B, vol. 93, pp. 102-112, 1971.
- [168] J. Shigley, *Kinematic analysis of mechanisms*, New York: McGraw-Hill, 1969.
- [169] J. Shigley and J. Uicker, *Theory of machines and mechanisms*, New York: McGraw-Hill, 1980.
- [170] H. Sira-Ramírez, "On the dynamical sliding mode control of nonlinear systems," *International Journal of Control*, vol. 57, no. 5, pp. 1039-1061, 1993.
- [171] G. Ramírez and S. Zeghloul "A new local path planner for nonholonomic mobile robot navigation in cluttered environments," in *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2058-2063, 2000.
- [172] J. Slotine and S. Sastry, "Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators," *International Journal of Control*, vol. 38, no. 2, pp. 465-492, 1983.

- [173] J. Slotine and W. Li, "On adaptative control of robot manipulators," *International Journal of Robotics Research*, vol. 6, pp. 49-59, 1987.
- [174] J. Slotine and W. Li, *Applied nonlinear control*, New Jersey: Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1991.
- [175] D. Soetanto, L. Lapierre and A. Pascoal, "Adaptative, non-singular path-following, control of a dynamic wheeled robots," in *Proc. of the International Conference on Advanced Robotics (ICAR)*, Portugal, pp. 1387-1392, 2003.
- [176] O. Sordalen and C. de Wit, "Exponential control law for a mobile robot: extension to path following," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 9, no. 6, pp. 837-842, 1993.
- [177] O. Sordalen and O. Egeland, "Exponential stabilization of nonholonomic chained systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, no. 1, pp. 35-49, 1995.
- [178] P. Souères, T. Hamel and V. Cadenat, "Path following for wheeled robots which allows to avoid obstacles during transition phase," in *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Belgium, 1998.
- [179] C.-Y. Su and Y. Stepanenko, "Robust motion/force control of mechanical systems with classical nonholonomic constraints," *IEEE Transactions Automatic Control*, vol. 39, no. 3, pp. 609-614, 1994.
- [180] H. Sussman, "Local controllability and motion planning for some classes of systems with drift," in *Proc. of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, New York, USA, pp. 1110-1114, 1991.
- [181] S. Tan, "Dynamics of a single particle," Classical Mechanics Course, University of Auckland, 1999.
- [182] S. Thrun, M. Bennewitz, W. Burgard, A. Cremers, F. Dellaert, D. Fox, D. Hhnel, C. Rosenberg, N. Roy, J. Schulte and D. Shulz, "Minerva: A second-generation museum tour-guide robot," in *Proc. of the IEEE International Conference in Robotics and Automation*, Detroit, MI, pp. 1999-2005, 1999.

- [183] T. Tsumura, "Survey of autonomous guided vehicle in Japanese factory," in *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Francisco, CA, USA, pp. 1329-1334, 1986.
- [184] V. Utkin, *Sliding mode control in electromechanical systems*, Taylor & Francis, 1999.
- [185] V. Varadarajan, *Lie groups, and their representations*, New York: Springer-Verlag, 1984.
- [186] M Venditteli, J.-P. Laumond and C. Nissoux, "Obstacle distance for car-like robots," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 15, no. 4, pp. 678-691, 1999.
- [187] M. Wada and H. Asada, "Design and control of a variable footprint mechanism for holonomic omnidirectional vehicles and its application to wheelchairs," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 15, no. 6, pp. 978-989, 1999.
- [188] G. Walsh, D. Tilbury, S. Sastry, R. Murray and J. Laumond, "Stabilization of trajectories for systems with non-holonomic constraints," *IEEE Transactions Automatic Control*, vol. 39, no. 1, pp. 216-222, 1994.
- [189] J.-Y. Wang and M. Tomizuka, "Dynamical analyses and robust steering controller design for automated lane guidance of heavy-duty vehicles," *Asian Journal of Control*, vol. 2, no. 3, pp. 140-154, 2000.
- [190] D. Wang and G. Xu, "Full-state tracking and internal dynamics of nonholonomic wheeled mobile robots," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 8, no. 2, 2003.
- [191] D. Wells, *Theory and problems of Lagrangian dynamics*, McGraw-Hill, 1967.
- [192] D. Wettergreen, H. Pangels and J. Bares, "Behavior-based gait execution for the Dante II walking robot," in *Proc. of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Pittsburgh, PA, vol. 3, pp. 274-279, 1995.

- [193] T. Yamada, K. Watanabe, and K. Kiguchi, "Dynamic model and control for a holonomic omnidirectional mobile robot," *Journal of Autonomous Robots*, vol. 11, pp. 173-189, 2001.
- [194] J.-M. Yang and J.-H. Kim, "Sliding mode control for trajectory tracking of nonholonomic wheeled mobile robots," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 15, no. 3, pp. 578-587, 1999.
- [195] X. Yang, K. He, M. Guo and B. Zhang, "An intelligent predictive control approach to path tracking problem of autonomous mobile robot," in *Proc. of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, San Diego, vol. 4, pp. 3301-3306, 1998.
- [196] K. Yeung and Y. Chen, "A new controller design for manipulators using the theory of variable structure systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33, pp. 200-206, 1988.
- [197] J-D. Yoder, E. Baumgartner and S. Skaar, "Initial results in the development of a guidance system for a powered wheelchair," *IEEE Transactions on Rehabilitation Engineering*, vol. 4, no. 3, 1996.
- [198] X. Yun and V. Kumar, "An approach to simultaneous control of trajectory and interaction forces in dual arm configuration," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 7, no. 5, pp. 618-625, 1991.
- [199] X. Yun, V. Kumar, N. Sarkar and E. Paljug, "Control of multiple arms with rolling constraints," in *Proc. of the International Conference on Robotics and Automation*, Nice, France, pp. 2193-2198, 1992.
- [200] X. Yun and Y. Yamamoto, "Stability analysis of the internal dynamics of a wheeled mobile robot," *Journal of Robotic System*, vol. 14, no. 10, pp. 697-709, 1997.
- [201] R. Zhang, Y. Chen and Z. Sun, "Path control of a surface ship in restricted waters using sliding mode," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 8, no. 4, 2000.