

## OPTIMIZAÇÃO DE PONTES DE TIRANTES UTILIZANDO DADOS INCERTOS

Luis M. C. Simões\*, João H. O. Negrão

\* Departamento de Engenharia Civil,  
Universidade de Coimbra, 3030 Coimbra, PORTUGAL  
e-mail: lcsimoes@dec.uc.pt, web <http://www.dec.uc.pt/labest/polo.html>

**Palavras chave:** Optimização, Multi-critério, Fuzzy, Pontes, Tirantes, Estruturas.

**Resumo.** Neste trabalho é apresentado o método das duas fases para a optimização de pontes de tirantes, admitido incerteza do tipo fuzzy em parametros de dimensionamento. O método dos elementos finitos, utilizado na análise, dispõe de um módulo para análise de sensibilidades das respostas da estrutura a modificações dos valores das variáveis de decisão. O problema de optimização, que consiste na minimização das tensões, deslocamentos e custo da ponte, é do tipo não-linear e não-diferenciável, sendo difícil de resolver. Por esse motivo foi adoptada uma metodologia multicritério para o transformar na minimização sequencial de funções convexas escalares, a partir das quais se obtem um óptimo de Pareto. Ao introduzir incerteza no modelo, obtem-se soluções fuzzy através do método dos níveis de corte. Em seguida obtem-se uma solução que maximiza a função de pertença do decisor fuzzy, através do método da pesquisa de limites. Por último são resolvidos exemplos numéricos, que ilustram o procedimento adoptado.

## 1. INTRODUÇÃO

Pontes de tirantes são estruturas grandes e dispendiosas, que tem sido projectadas com mais frequência nos últimos anos. A tendência de aumentar o comprimento dos vãos e o advento de técnicas construtivas inovadoras tem conduzido ao desenvolvimento de programas, que auxiliam na fase preliminar de projecto e ao controlo das fases construtivas. A optimização de pontes de tirantes pode ser representada pela minimização do custo ou volume da estrutura e das tensões máximas. Outros objectivos incluem deslocamentos e a garantia que as variáveis de decisão não são menores que limites inferiores especificados.

O trabalho dos autores iniciou-se com a optimização das dimensões utilizando um modelo 2-D para análise da estrutura sujeita a carregamento estático. O problema foi então generalizado para análise tridimensional e consideraram-se fases construtivas [1]. Mais tarde foram acrescentados efeitos sísmicos na optimização, utilizando o método de sobreposição modal espectral e integração passo a passo [2]. Como na maior parte dos estudos anteriores se utilizou para modelar o tabuleiro uma solução com as grelhas apoiando vigas na direcção transversal, foi também proposta a utilização de secções em caixão [3]. Para corrigir as forças nos cabos durante as fases construtivas, foram introduzidas variáveis de dimensionamento de pré-esforço no modelo de optimização [4].

Em projecto e optimização as constantes dos materiais, carregamentos e geometria da estrutura são os dados destes problemas. Contudo, no mundo real, esses valores estão associados a alguma incerteza. Por esse motivo utilizam-se factores de segurança que amplificam a intensidade de carga ou reduzem a resistência dos materiais, conduzindo normalmente a estruturas bastante mais seguras que o necessário. Em lugar de se utilizarem factores de segurança, podem tratar-se os dados como incertos e utilizar essa informação na optimização da estrutura. As descrições probabilísticas são hoje em dia comuns e têm sido utilizadas funções de distribuição probabilísticas desde muito simples às mais complexas, sendo porém difícil implementar esses procedimentos em aplicações práticas. Em alternativa, pode adoptar-se uma descrição não probabilística de incerteza, em particular a análise baseada em “fuzzy sets” ou na busca de situações mais desfavoráveis de carregamento e/ou resistência também designados anti-optimização [5]. Estas metodologias em lugar de definirem as funções de probabilidade, fixam limites para as variáveis incertas, necessitando de muito menos informação que os métodos probabilísticos.

O método das duas fases para a optimização “fuzzy” da estrutura é baseada na análise de conjuntos difusos inicialmente proposta por Zadeh. Na primeira fase a solução “fuzzy” sequencial é obtida a partir do método dos cortes de nível, segundo o qual se transforma o problema de optimização fuzzy num conjunto de problemas de optimização normais [6]. Na segunda fase a solução “crisp” é determinada utilizando o método da pesquisa dos limites. Este método decorre de uma interpretação alternativa do critério de optimalidade de Belman–Zadeh, não requeendo uma função objectiva artificial. Foi resolvido neste trabalho um exemplo numérico respeitante ao dimensionamento das secções de uma ponte de tirantes de três vãos, sem entrar com as fases construtivas. Os objectivos fuzzy foram gerados tendo em atenção o módulo de elasticidade, tensão limites e carregamento.

## 2. OPTIMIZAÇÃO COM INFORMAÇÃO FUZZY

Num problema de optimização fuzzy pretende determinar-se o vector  $\underline{x}$  que minimiza a função objectivo  $W(\underline{x})$  sujeita a restrições fuzzy nas características de desempenho e dimensões. Este problema tem a seguinte formulação matemática (MP1):

$$\begin{aligned} & \min W(\underline{x}) && (1a) \\ \text{sujeito a} & \quad g_j(\underline{x}) \leq \overline{b}_j^U && j = 1, 2, \dots, m-1 && (1b) \\ & \quad g_j(\underline{x}) \geq \underline{b}_j^L && j = m, \dots, p && (1c) \end{aligned}$$

em que os símbolos “ $\overline{\phantom{x}}$ ” e “ $\underline{\phantom{x}}$ ” indicam que as restrições contêm informação fuzzy e  $b_j^U, b_j^L$  são respectivamente os limites admissíveis superiores e inferiores para a restrição  $j$ .

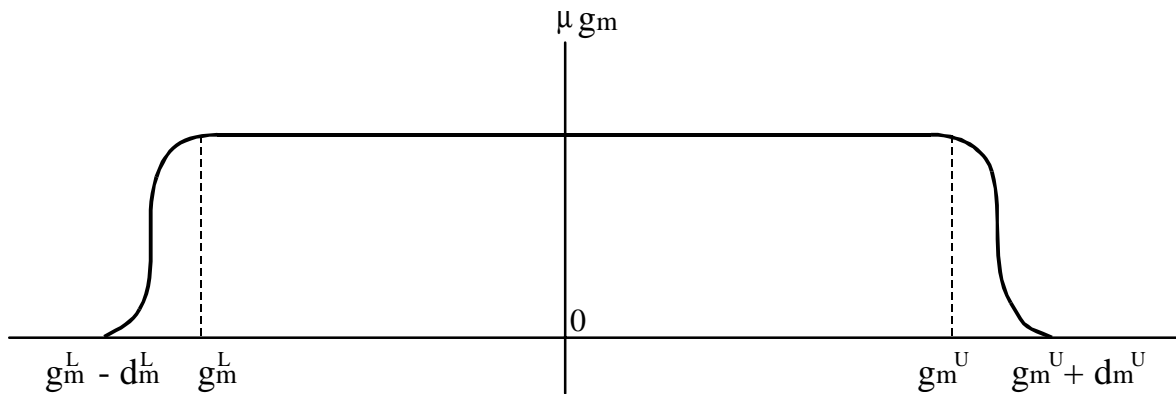


Figura 1

A função de pertinência  $\mu_j(\underline{x})$  do intervalo fuzzy admissível está representado na figura 1, em que  $g_j^L$  and  $g_j^U$  são respectivamente os limites inferiores e superiores do intervalo admissível para a situação mais desfavorável de projecto. Estes valores podem ser mais restritivos que os especificados pela regulamentação.  $d_j^L$  e  $d_j^U$  são os comprimentos dos estágios de transição, designadamente os desvios admissíveis ou tolerâncias para os limites inferiores e superiores. Deste modo o programa MP1 pode ser reescrito na forma seguinte (MP2):

$$\begin{aligned} & \min W(\underline{x}) && (2a) \\ \text{sujeito a} & \quad g_j(\underline{x}) \leq b_j^U + d_j^U && j = 1, 2, \dots, m-1 && (2b) \\ & \quad g_j(\underline{x}) \geq b_j^L - d_j^L && j = m, \dots, p && (2c) \end{aligned}$$

Ao ter em atenção o comportamento físico da variável  $g_j$ , pode escolher-se uma função apropriada para as curvas dos estágios de transição da função de pertinência. Normalmente adoptam-se rectas inclinadas para simplificar. O grau de pertinência  $\mu_j(\underline{x})$  pode definir-se como sendo o grau de satisfação da restrição fuzzy. Quando  $\mu_j(\underline{x}) = 1$  a restrição é totalmente satisfeita; quando  $\mu_j(\underline{x}) = 0$  não o é; para os valores intermédios entre 0 e 1 a restrição é satisfeita até certo ponto.

Uma formulação alternativa consiste em exprimir a função objectivo e as restrições como objectos normalizados. Definindo um custo referência  $W_0$ , os objectivos serão:

$$g_o(\underline{\mathbf{x}}) = W(\underline{\mathbf{x}})/W_o - 1 \leq 0 \quad (3a)$$

$$g_j(\underline{\mathbf{x}})/(b_j^U + d_j^U) - 1 \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m-1 \quad (3b)$$

$$1 - g_j(\underline{\mathbf{x}})/(b_j^L - d_j^L) \leq 0 \quad j = m, \dots, p \quad (3c)$$

Como se pretende minimizar todos os objectivos que por sua vez dependem das variáveis  $\underline{\mathbf{x}}$ , define-se o problema da optimização minimax (MP3):

$$\text{Min}_{\underline{\mathbf{x}}} \text{Max}_j \langle g_o(\underline{\mathbf{x}}), \dots, g_j(\underline{\mathbf{x}}), \dots, g_p(\underline{\mathbf{x}}) \rangle \quad (4)$$

### 3. MÉTODO DAS DUAS FASES

#### 3.1. Primeira Fase (Método dos Cortes de Nível)

Para simplificar a exposição, só se apresenta neste trabalho a metodologia para resolver problemas com restrições fuzzy. Ao adoptar as rectas inclinadas indicadas na figura 2, o problema MP2 pode ser transformado num programa matemático não-fuzzy especificando o nível  $\alpha$  (MP4):

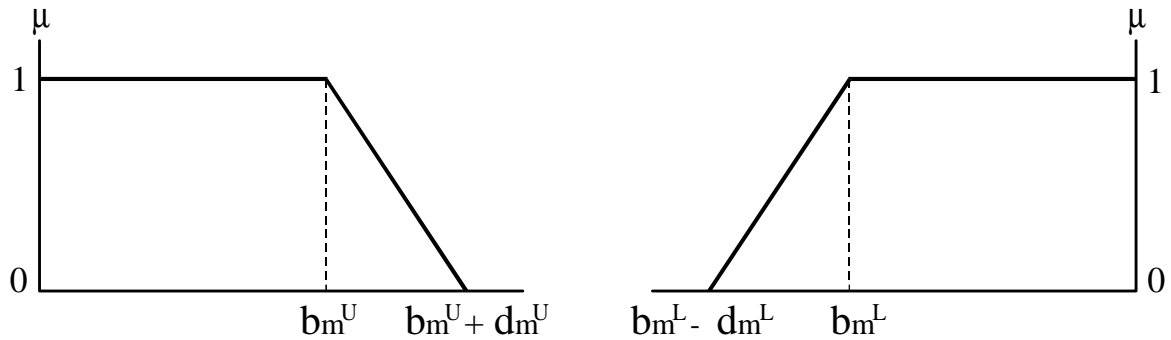


Figura 2: Função de pertença

$$\begin{aligned} & \min W(\underline{\mathbf{x}}) && (5a) \\ \text{sujeito a} & \quad g_j(\underline{\mathbf{x}}) \leq b_j^U + d_j^U (1-\alpha) && j = 1, 2, \dots, m-1 && (5b) \\ & \quad g_j(\underline{\mathbf{x}}) \geq b_j^L - d_j^L (1-\alpha) && j = m, \dots, p && (5c) \\ & \quad \alpha \in [0,1] && && (5d) \end{aligned}$$

Este programa paramétrico com  $\alpha \in [0,1]$  pode ser resolvido através de um algoritmo de optimização para determinar a solução fuzzy óptima  $\underline{\mathbf{x}}^*(\alpha)$  e  $W(\underline{\mathbf{x}}^*(\alpha))$  para diferentes valores de  $\alpha$ . De notar que num problema de optimização fuzzy podem coexistir restrições fuzzy e precisas. Estas têm que ser integralmente satisfeitas, enquanto que se aceitam imprecisões nas restantes restrições. De acordo com a figura 3, a curva  $W(\underline{\mathbf{x}}^*(\alpha))$  define uma solução fuzzy para o problema de optimização fuzzy de estruturas que é uma função monotónica crescente em ordem a  $\alpha$ .

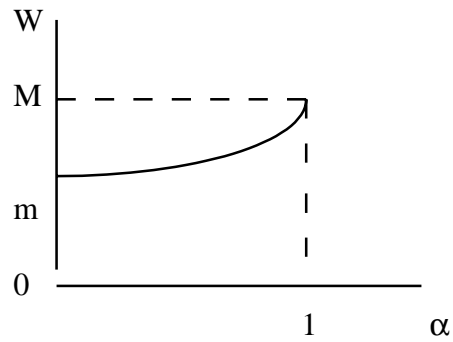


Figura 3: Solução Fuzzy

### 3.2. Segunda fase (Método de Pesquisa de Limite)

Segundo o critério de Belman-Zadeh para tomar decisões num ambiente de incerteza, o grau de pertença de uma decisão especificada pelas variáveis  $x$  é dado por:

$$\mu_d(\underline{x}) = \text{Min}_i \mu_i(\underline{x}) \quad (6)$$

em que o índice  $i$  representa o conjunto de restrições. As restrições incertas  $C$  e o objectivo incerto  $G$  no MP4 definem-se como conjuntos incertos no espaço das alternativas caracterizadas pelas funções de pertença  $\mu_C$  e  $\mu_D$ . A decisão fuzzy  $D$  caracterizada pela sua função de pertença  $\mu_D$ , pode ser interpretada como sendo a intersecção das restrições incertas e do objectivo incerto.

A decisão óptima consiste em seleccionar a melhor das alternativas de entre as contidas no espaço das variáveis fuzzy, a qual maximiza a função de pertença da decisão fuzzy:

$$\mu_D(\underline{x}^*) = \max_{x \in R^n} \mu_D(\underline{x}) \quad (7)$$

Para ilustrar este princípio considere-se apenas um objectivo fuzzy  $G$  e uma restrição fuzzy  $C$ . A função de pertença  $\mu_G$ ,  $\mu_C$  e a sua intersecção  $\mu_D$  estão representadas neste caso pela figura 4. Esta figura mostra que o ponto  $A$  representa a decisão óptima, tendo o grau de pertença mais elevado do conjunto de decisões fuzzy.

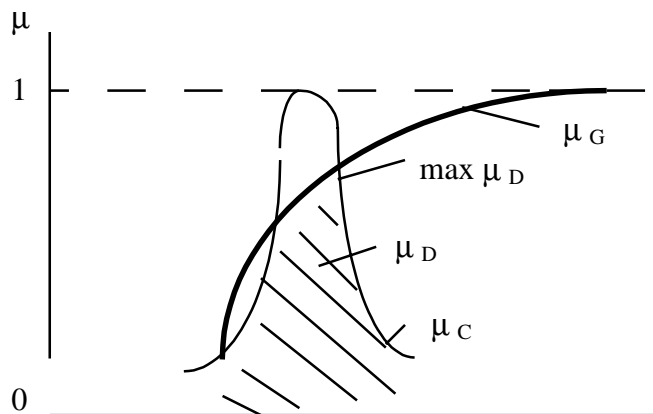


Figura 4 – Intersecções de funções de pertença

Da equação (7) conclui-se que o nível óptimo  $\alpha^*$  e o valor  $\underline{x}^*$  a ele associado cumprem:

$$\mu_G(\underline{x}^*) = \max_{x \in C_\alpha} \mu_G(\underline{x}) \quad (8)$$

em que  $C_\alpha$  e o corte de nível  $\alpha^*$  do conjunto das restrições incertas C.

Em seguida é necessário escolher o objectivo fuzzy  $\mu_G(\underline{x})$  e os limites superiores e inferiores. Da figura 3 retira-se que o supremo e o infimo na solução fuzzy sequencial são dados por:

$$M = W(\underline{x}^*(1)) = \min_{x \in C_1} W(\underline{x}) \quad (9a)$$

$$m = W(\underline{x}^*(0)) = \min_{x \in C_0} W(\underline{x}) \quad (9b)$$

em que  $C_1, C_0$  são os cortes de nível para  $\alpha=1$  e 0 do conjunto de restrições fuzzy C.

Para o problema da determinação das variáveis de decisão  $\underline{x}$  que maximizam a função objectivo  $W(\underline{x})$  sujeita às restrições fuzzy, o objectivo fuzzy será  $\mu_G(\underline{x}) = W(\underline{x})/M$ . Do mesmo modo, obter o valor de  $\underline{x}$  que minimiza a função objectivo  $W(\underline{x})$  sujeita às restrições fuzzy num problema de optimização fuzzy de estruturas consiste em:

$$\mu_G(\underline{x}) = m/W(\underline{x}) \quad (10)$$

Como esperado, este objectivo fuzzy mostra que se obtém total pertença ( $\mu_G=1$ ), quando W atinge o seu ínfimo m. À medida que W aumenta,  $\mu_G$  aproxima-se de não pertença ( $\mu_G=0$ ). Conclui-se que os limites superior e inferior do objectivo fuzzy são dados por:

$$\mu_G^U = 1 \quad (11a)$$

$$\mu_G^L = m/M \quad (11b)$$

O nível óptimo pode ser calculado a partir da equação 8:

$$\alpha^* = \mu_G(\underline{x}^*(\alpha^*)) \quad (12)$$

### 3.3. $\alpha$ Múltiplo

Este procedimento pode ser generalizado aos casos em que se consideram diversos valores de  $\alpha$  cada qual associado a um tipo de imprecisão diferente. Obtém-se o nível óptimo para cada  $\alpha_i$  efectuando pesquisas de limites. Com este conjunto de  $\alpha$  determina-se a solução fuzzy adaptando a equação (12).

## 4. RELAÇÕES ESTRUTURAIS

### 4.1. Análise por Elementos Finitos

O código de elementos finitos MODULEF foi utilizado como ferramenta básica para a análise da estrutura, dada a disponibilidade do código onde viriam a ser introduzidos os diversos desenvolvimentos. Dos vários elementos disponíveis na biblioteca de elementos, só foram retidos e adaptados os necessários à modelação de pontes estaiadas por cabos de 2D e 3D. Consistem em elementos barra, viga (formulação Euler-Bernoulli) e modelos para placa-membrana serendipity de 4 e 8 nós (formulação de Reissner-Mindlin).

## 4.2. Variáveis de Decisão

A resposta estrutural de uma ponte atirantada é condicionada por um grande número de parâmetros, designadamente secções transversais e dimensões, geometria genérica da ponte, forças de pré-esforço aplicadas, ligações tabuleiro-pilar, etc. Enquanto que algumas só desempenham um papel secundário no comportamento da ponte outras, tais como, o padrão dos cabos e forças de pré-esforço têm maior importância para fins de segurança e fiabilidade. Consideraram-se três tipos de variáveis de decisão: dimensionamento, forma e mecânica. As variáveis de dimensionamento são as secções transversais das barras, viga e elementos placa (altura da alma, largura do banzo, espessura da placa). Alterações nos valores destas variáveis não implica a necessidade de alterar a malha de elementos finitos. As variáveis de forma vão produzir alterações à geometria e, por este motivo, requerem a actualização das coordenadas nodais ou a reformulação da malha. Outro tipo de variáveis de decisão caracteriza-se como sendo híbrido, uma vez que definem a forma da secção em caixão ou geometria do tabuleiro, necessitando apenas da actualização das coordenadas nodais. Por último, a força de pré-esforço é uma variável de decisão mecânica, que não está relacionada com qualquer tipo de quantidade geométrica. Os tipos de variáveis de dimensionamento correntemente disponíveis estão representadas na figura 5.

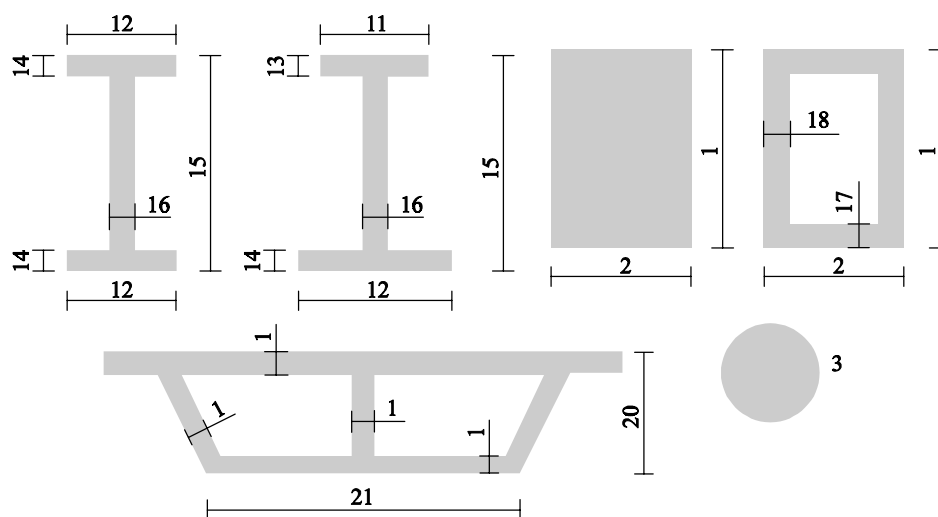


Figura 5: Variáveis de decisão de dimensionamento

Estas variáveis têm finalidades complementares para a optimização da estrutura. As variáveis de decisão de dimensionamento conduzem à redução do volume/ custo da estrutura. As variáveis de decisão mecânicas e de forma têm uma influência reduzida no custo da estrutura, mas permitem uma melhor distribuição de tensões, que por sua vez permite reduzir os valores das variáveis de dimensionamento. As variáveis de decisão de pré-esforço são essenciais para obter a razante, tomando para carregamento o peso da estrutura.

### 4.3. Análise de sensibilidades

Foi adoptado método de análise directa para efectuar a análise de sensibilidades dada a disponibilidade do código, o padrão da estrutura discretizada e o grande número restrições envolvidas. Para problemas estáticos lineares as derivadas das restrições cinemáticas (deslocamentos) são obtidas através da resolução de um sistema estrutural com cargas virtuais:

$$\underline{K} \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial \underline{P}}{\partial x_i} - \frac{\partial \underline{K}}{\partial x_i} \underline{u} = \underline{Q}_{vi} \quad (13)$$

onde  $\underline{Q}_{vi}$  representa o vector de carga virtual do sistema associado à variável de decisão  $i$ .

As derivadas das tensões são obtidas analiticamente através da derivação em cadeia da matriz de tensão de cada elemento finito:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{B}_e \underline{u}_e \quad (14)$$

$$\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial x_i} = \frac{\partial (\underline{D} \underline{B}_e)}{\partial x_i} \underline{u}_e + \underline{D} \underline{B}_e \frac{\partial \underline{u}_e}{\partial x_i} \quad (15)$$

### 4.4. Optimização

O princípio económico de Pareto está a ganhar aceitação na optimização de problemas com objectivos múltiplos. Em problemas de minimização a solução é óptimo de Pareto, se não existir nenhum outro vector admissível que possa reduzir uma função objectiva sem aumentar pelo menos uma outra. O vector óptimo existe normalmente em problemas práticos e não é único.

Considerando variáveis de decisão de dimensionamento e geométricas, respectivamente representadas por  $x_i$  e  $z_i$ , o vector global de variáveis de decisão é

$$\underline{\mathbf{x}} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, z_{i+1}, z_{i+2}, \dots, z_N\} \quad (16)$$

Devem ser estabelecidos limites para estas variáveis, a fim de que sejam obtidas soluções executáveis e que cumpram os requisitos estéticos desejados. O objectivo primordial do projecto de pontes atirantadas é o de obter soluções económicas e seguras. Neste estudo não se pretende a consideração de todos os factores com impacto económico na estrutura. Dada a sua relevância, considera-se como factor determinante o custo dos materiais utilizados na realização da estrutura. Outro conjunto de objectivos é o da redução das tensões actuantes a valores tão baixos quanto possível.

O método de optimização descrito na secção seguinte requer a normalização de todos estes objectivos. Se se estabelecer um custo de referência  $V_o$ , o objectivo associado ao custo estrutural poderá representar-se na forma

$$g_i(x,y) = V(x,y)/V_o - 1 \leq 0 \quad (17a)$$



Outro conjunto de objectivos resulta da imposição de limites superiores e inferiores aos valores das variáveis de dimensionamento, nomeadamente às áreas de secção transversal dos tirantes, de forma a impedir mudanças de topologia e garantir dimensões exequíveis para as secções transversais das longarinas e dos pilares:

$$g_2(x_i) = -x_i/x_L + 1 \leq 0 \quad (17b)$$

$$g_3(x_i) = x_i/x_U - 1 \leq 0 \quad (17c)$$

onde  $x_i$  é a  $i$ -ésima variável de dimensionamento e  $x_L$  e  $x_U$  os seus limites inferior e superior. Restrições similares devem ser consideradas para as variáveis de decisão geométricas:

$$g_4(z_k) = -z_k/z_L + 1 \leq 0 \quad (17d)$$

$$g_5(z_k) = z_k/z_U - 1 \leq 0 \quad (17e)$$

onde  $z_k$  é a  $k$ -ésima variável geométrica e  $z_L$  e  $z_U$  os respectivos limites inferior e superior.

Sendo consideradas variáveis de decisão geométricas, é necessária a imposição de limites adicionais, por forma a assegurar que não ocorre violação da geometria da estrutura quando se procede à actualização da estrutura para uma nova configuração. Por exemplo, quando são utilizadas variáveis dos tipos 4 e 5 (Figura 6), o seu comprimento total não pode exceder o do vão lateral. Se se designarem por  $i$  e  $j$  as posições destas variáveis no vector  $\underline{X}$ , esta condição traduzir-se-á por

$$(z_i + z_j)/L_s - 1 \leq 0 \quad (17f)$$

onde  $L_s$  representa o vão lateral.

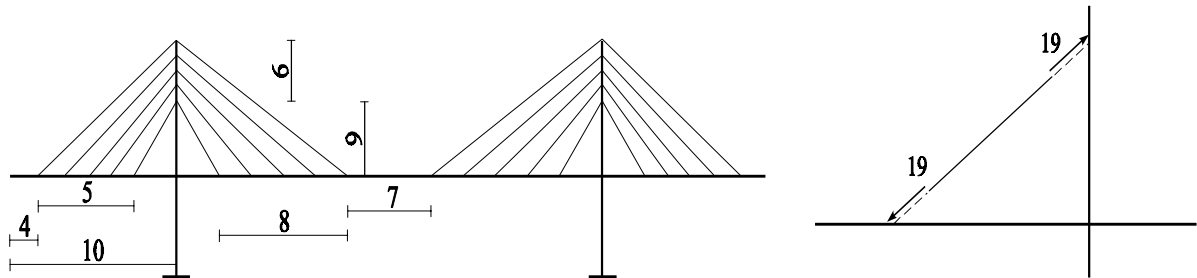


Figura 6: Variáveis de decisão de forma

Podem definir-se objectivos adicionais, por forma a assegurar a satisfação dos requisitos geométricos no decurso do processo de optimização (discretização da malha, padrão de espaçamento das ancoragens dos tirantes nos pilares e no tabuleiro, etc.). A metodologia seguida para estes objectivos foi a de definir inicialmente toda a informação necessária, por recurso a um conjunto de coeficientes de geometria que descrevem estas condições.

O objectivo é minimizar todos estes objectivos considerando as variáveis de decisão de dimensionamento e geométricas. Este problema é descontínuo e diferenciável e, por isso, difícil de resolver. Contudo, através da utilização de uma abordagem baseada na entropia,

Templeman mostrou que a sua solução é equivalente à de uma função escalar convexa sem restrições, dependendo somente de um parâmetro de controlo. Este problema de minimização pode ser resolvido pelos métodos convencionais quasi-Newton. Quanto ao parâmetro de controlo, deve garantir-se que este seja aumentado no decurso do processo de optimização. A função scalar é muito semelhante à de Kreisselmeyer-Stainhauser, derivada para problemas de controlo:

$$F(\underline{x}) = \frac{1}{\rho} \cdot \ln \left[ \sum_{j=1}^M e^{\rho(g_j(\underline{x}))} \right] \quad (18)$$

O problema (18) não tem restrições e é não diferenciável o que, em teoria, permite uma utilização dos diversos métodos numéricos disponíveis. Contudo, dado que grande parte das funções  $g_j(x,z)$  não têm uma forma algébrica explícita, a estratégia adoptada foi solucionar (18) através de uma sequência iterativa de modelos aproximados explícitos. Formula-se uma aproximação explícita considerando os desenvolvimentos em série de Taylor de todos os objectivos  $g_j(x,z)$  truncados após o termo linear:

$$\text{Min } F(\underline{x}) = \frac{1}{\rho} \cdot \ln \left[ \sum_{j=1}^M e^{\rho \left( g_{0j}(\underline{x}) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial g_{0j}(\underline{x})}{\partial x_i} \cdot dx_i \right)} \right] \quad (19)$$

onde  $N$  e  $M$  são, respectivamente, o número das variáveis de decisão de dimensionamento e geometria e o número de funções objectivos.  $g_{0j}$  e  $\partial g_{0j} / \partial x_i$  são objectivos e as suas derivadas avaliadas no dimensionamento corrente  $(x_0, z_0)$ , para o qual são efectuados as expansões em séries de Taylor. Resolver (15) para valores numéricos particulares de  $g_{0j}$  forma apenas uma iteração da solução final do problema (14). O vector  $(x_1, z_1)$  obtido no final dessa iteração representa um novo ponto que tem de ser analisado, fornecendo novos valores para  $g_{1j}$ ,  $\partial g_{1j} / \partial x_i$  e  $(x_1, z_1)$  para substituir aqueles que correspondem a  $(x_0, z_0)$  em (15). As iterações continuarão até que as mudanças nas variáveis de decisão sejam inferiores a limites previamente definidos.

## 5. EXEMPLO NUMÉRICO

Considerou-se um exemplo numérico envolvendo apenas as variáveis de dimensionamento e não considerando as fases construtivas. Foi adoptado um modelo representado na figura 7 consistindo numa ponte de tirantes simétrica de 3 vãos. São definidas secções monossimétricas em I para as grelhas, ao passo que as torres são constituídas por placas metálicas definindo uma secção rectangular oca. A camada de desgaste é suportada por vigas transversais em I. Consideram-se três casos de carregamento correspondendo à carga permanente mais os efeitos da sobrecarga nos vãos laterais, central ou em todo o tabuleiro.

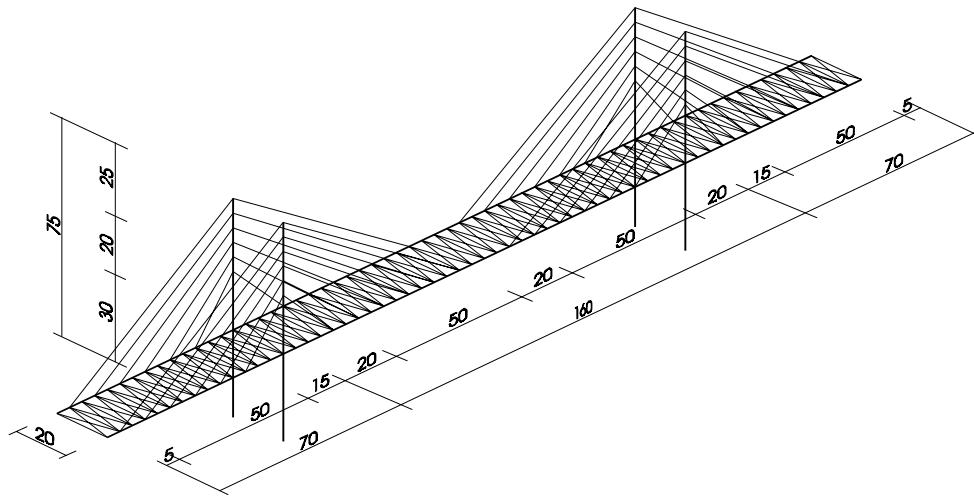


Figura 7: Geometria do modelo da ponte

Os objectivos fuzzy estão relacionados com o módulo de elasticidade, tensões limites e carregamento. Como a influência das variáveis de decisão geométricas no custo da estrutura é reduzida, admitiu-se que eram do tipo determinístico. Além disso, face ao controlo estrito dos valores das variáveis de dimensionamento em pontes de tirantes metálicas, também se admitiu serem do tipo determinístico. Foram especificadas tensões admissíveis de 180MPa para o tabuleiro e torre e 475MPa para os tirantes. Admitiu-se uma imprecisão nas tensões admissíveis de 40MPa para os elementos do tabuleiro e torre e 50MPa para os tirantes. Ao adoptar uma função de pertença de rectas inclinadas, converte-se (18) num programa paramétrico. Na primeira fase, ao resolver (18) para diferentes valores de  $\alpha$ , obtém-se dimensionamentos determinísticos associados ao nível de aceitação (correspondente à imprecisão nas tensões admissíveis). Na segunda fase, foi encontrada a solução utilizando o método iterativo de procura de limites descrito em 3.2.

$$M = W(\alpha=1) = 159.52 \quad m = W(\alpha=0) = 140.88 \quad 0.883 \leq \alpha \leq 1.00$$

$$\text{Para } \alpha = 0.894, W(\alpha) = 157.54 \text{ e } \mu_G = m/W(\alpha) = 0.894$$

Uma vez conhecido o valor óptimo de  $\alpha$ , determinam-se as variáveis de dimensionamento. O óptimo fuzzy correspondente a uma solução 1.2% menos cara do que a solução determinística inicial. Se for diminuída para metade a imprecisão nas tensões admissíveis e mantendo as funções de pertença lineares, os resultados obtidos na primeira fase:

$$M = W(1) = 159.52 \quad m = W(0) = 149.16 \quad 0.935 \leq \alpha \leq 1.00$$

A solução crisp encontrada na segunda fase é:

$$\alpha = 0.94, W(\alpha) = 158.74 \text{ e } \mu_G = m/W(\alpha) = 0.94$$

Estes resultados são apenas 0,5% menos dispendiosos que a solução determinística.

Em seguida considerou-se uma imprecisão de 5% no módulo de elasticidade. A solução encontrada revela que pode ser desprezada a influência do módulo de elasticidade nos cabos quando as tensões (e não os deslocamentos) condicionam a solução ótima.

Dado que o trânsito rodoviário tem aumentado muito nas últimas décadas foi estudada a influência de um aumento de 30% no valor de sobrecarga. Os resultados obtidos com os níveis de corte são:

$$M = W(1) = 185.97 \quad m = W(0) = 159.52 \quad 0,818 \leq \alpha \leq 1$$

A solução obtida na segunda fase é  $\alpha = 0.873$ ,  $W(\alpha) = 182.62$  e  $\mu_G = m/W(\alpha) = 0.873$ . O ótimo fuzzy é 1,8% menos caro que a solução determinística.

Também foram consideradas simultaneamente imprecisões nas tensões admissíveis e no carregamento. Se a imprecisão for apenas representada por um valor de  $\alpha$ , o que significa correlação perfeita entre o aumento de carregamento e aceitação de tensões admissíveis mais elevadas, os resultados obtidos na primeira fase foram:

$$M = W(1) = 185.97 \quad m = W(0) = 140.88 \quad 0,758 \leq \alpha \leq 1$$

Para  $\alpha = 0.797$ ,  $W(\alpha) = 176.81$  e  $\mu_G = m/W(\alpha) = 0.797$  dá uma solução 4,9% mais barata que a solução determinística. Contudo, se o sobrecarregamento e a aceitação de tensão admissíveis superiores forem representados por duas variáveis independentes  $\alpha_s$  e  $\alpha_l$ , chega-se na primeira fase a:

$$\begin{aligned} M_s = W(1) = 159.52 & \quad m_s = W(0) = 140.88 & \quad 0,883 \leq \alpha_s \leq 1 \\ M_l = W(1) = 167.33 & \quad m_l = W(0) = 140.88 & \quad 0,841 \leq \alpha_l \leq 1 \end{aligned}$$

A solução obtida na fase 2 da pesquisa de limites é  $\alpha_s = 0.894$ ,  $\alpha_l = 0.861$  e a solução fuzzy é  $W(\alpha_s, \alpha_l) = 180.31$ , 2% mais dispendiosa que a solução anterior, mas 3% menos que a solução determinística.

## 6. CONCLUSÕES

Ao considerar este modelo de incerteza, foi referido que a optimização fuzzy tem vantagens relativamente à optimização determinística por se obter um projecto mais razoável e lógico. Os exemplos numéricos indicados mostram que o método das duas fases baseado na teoria de fuzzy sets é eficiente na optimização com dados imprecisos de estruturas com comportamento elástico ou plástico. Os resultados obtidos conduzem a projectos, que apesar de manterem elevados níveis  $\alpha$ , permitem reduzir o custo final.

## REFERÊNCIAS

- [1] J.H.O. Negrão and L.M.C. Simões, "Optimization of Cable-stayed bridges with 3-dimensional modelling", *Computers & Structures*, 64, 741-758, (1997).
- [2] L.M.C. Simões and J.H.O. Negrão, "Optimization of Cable-stayed bridges subjected to earthquakes with non-linear behaviour", *Engin. Optimization*, 31, 457-478, (1999).

- [3] J.H.O. Negrão and L.M.C. Simões , “*Shape and sizing optimisation of box-girder decks of cable-stayed bridges*”, S.Hernandez, A.J.Kassab & C.A. Brebbia eds., *Proc. OPTI 99 (Sixth Int. Conf. on Computer Aided Optimum Design of Structures)*, WITpress, (1999) , pp.323-332.
- [4] J.H.O. Negrão and L.M.C. Simões , “*Cable Stretching Force Optimization in Cable-stayed Bridges*”, W. Gutkowski and Z. Mroz eds., *Proc. WCSMO-2 (Second World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization)*, Zakopane May 26-30 Poland, Institute of Technological Recsearch, Warsaw,Poland, (1997) , pp.983-988.
- [5] E. Barbieri, C. Cinquini and M. Lombardi, “*Shape/size Optimization of Truss Structures using Non-probabilistic Description of Uncertainty*”, C.A. Brebbia, and S. Hernandez, eds, *Computer Aided Optimum Design of Structures V*, Springer-Verlag (1997), 285-295.
- [6] G.-Y.Wang and W.-Q.Wang, “*Fuzzy Optimum Design of Structures*”, *Eng. Opt.*, 8, 291-300, (1985).
- [7] J.L. Verdegay, “*Fuzzy mathematical programming*”, M. M. Gupta and E. Sanchez eds., *Fuzzy Information and Decision Processes*, North-Holland, New York, (1982), pp. 231-237.