

DETERMINAÇÃO DA FORMA OPTIMA DE COBERTURAS COM MALHAS DE CABOS

Luis Miguel da Cruz Simões

RESUMO

O comportamento estático de uma estrutura constituída por malhas de cabos pré-esforçadas apresenta uma forte não-linearidade em consequência das deformações provocadas pelas cargas aplicadas. Além da não-linearidade geométrica tem de se incluir no seu estudo a não-linearidade física, que corresponde a perda de pré-esforço e/ou à cedência dos cabos. Pretende-se minimizar a força de pós-tensão de modo a garantir uma capacidade resistente às cargas aplicadas sem exceder os limites impostos na deformabilidade da estrutura e evitando tensões de compressão nos cabos de pré-esforço. Este trabalho apresenta um método para o dimensionamento deste tipo de estruturas resolvendo o problema multicritério correspondente com auxílio do princípio da entropia máxima.

ABSTRACT

The static behaviour of a prestressed cable net exhibits a strong nonlinearity due to the configuration changes caused by the applied loading. Besides this geometric nonlinearity, a physical nonlinearity also occurs when slackening and/or yielding of cables is taken into account. The prestressing forces should be reduced in order to reduce costs for given requirements on the nodal deflections and member forces in terms of a suitably defined stiffness. In this work a method for the sizing of cable net structures is presented that solves the corresponding multicriteria problem by using the maximum entropy principle.

Professor Associado, Departamento de Engenharia Civil
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra

1. INTRODUÇÃO

As estruturas constituídas por malhas de cabos pré-esforçados interessam a campos distintos: ao arquitecto, o potencial considerável do ponto de vista da economia, funcionalidade e estética; ao construtor em virtude da complexidade de detalhes e processos de execução; ao engenheiro de estruturas em virtude do comportamento não-linear com que se tem de entrar na análise e no dimensionamento. Este trabalho tem em vista o último desses aspectos. Admite-se um carregamento quasi-estático caracterizado por uma combinação de não-linearidades geométricas e físicas. As primeiras que são devidas a grandes deformações (embora associadas a pequenas extensões) características deste tipo de estruturas suspensas. A não-linearidade física diz respeito à deformabilidade localizada de segmentos dos cabos de pré-esforço entre os nós que não podem estar sujeitos a compressões.

A determinação da resposta da estrutura às cargas aplicadas a partir de uma dada posição de equilíbrio não é o único problema que se põe no dimensionamento de coberturas pré-esforçadas por malhas de cabos. O projectista tem de resolver pelo menos dois problemas distintos: (i) a determinação da posição inicial quando a estrutura está descarregada e se aplica o pré-esforço inicial (optimização de forma). (ii) A minimização da força de pré-esforço (e por consequência do custo dos cabos de pré-esforço, ligação e estruturas rígidas de apoio) de modo a garantir que a estrutura apresente características resistentes adequadas. Estes dois assuntos vão ser abordados neste trabalho.

Dois tipos de metodologia têm sido adoptados para analisar o comportamento deste tipo de estruturas; algoritmos de programação matemática (ref.[1]) e o método de Newton-Raphson ou as suas variantes (ref.[2]). No primeiro caso, as relações que determinam a resposta da estrutura a cargas quase-estáticas e distorções (efeitos térmicos, operações de pré-esforço e assentamento de apoios) dos cabos de pré-esforço podem ser interpretadas através de condições de Karush-Kuhn-Tucker de um problema de optimização não-linear. A função objectivo representa uma generalização do princípio da energia potencial total. Em alternativa, as não-linearidades geométricas e físicas podem também ser analisadas resolvendo-se as relações fundamentais através do método de Newton-Raphson. O processo de

resolução é iniciado através de uma aproximação que suaviza a não-linearidade no comportamento de cada troço dos cabos de pré-esforço. A formulação do problema da optimização da força de pré-esforço foi inicialmente apresentada na ref.[3]. O problema não-linear (e não-convexo) daí resultante foi resolvido através de uma sequência de programas lineares que satisfazem certas condições de optimalidade. Por esse motivo na ref.[4] foi aplicado um algoritmo que garante a convergência para o mínimo global deste tipo de problemas. Contudo verifica-se que a linearização das equações de compatibilidade pode introduzir erros relativamente importantes no cálculo da estrutura. Por outro lado, o comportamento da estrutura para a solução optimizada é normalmente extremamente sensível a pequenas oscilações nos valores das variáveis de decisão.

Em lugar de se tomar como único objectivo a redução da força de pré-esforço, para se encontrar o dimensionamento óptimo das coberturas com malhas de cabos, devem considerar-se vários critérios para dimensionamento. Com base no princípio da entropia máxima é definido um programa multicritério que se verifica partilhar as soluções com a minimização de uma função escalar não-linear. Nos problemas testados, a solução inicial foi substancialmente melhorada ao fim de apenas uma iteração. Para um estudo mais completo dever-se-ia atender contudo a restrições genéricas que estão associadas a técnicas de construção bem como condicionantes tecnológicas e limites nos deslocamentos impostos.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE ANÁLISE DA ESTRUTURA

2.1 - Equação de Equilíbrio dos Membros

A rigidez da estrutura no seu conjunto pode ser caracterizada pelos valores absolutos dos deslocamentos nodais ao passo que a rigidez localizada é calculada a partir da relação entre os deslocamentos dos nós relevantes. Considere-se um nó q numa estrutura pré-esforçada por cabos que está ligada ao nó p pelo segmento de cabo i , considere-se para a força de pré-esforço F_i e o comprimento do cabo s_i . As coordenadas iniciais dos nós p e q são x_p, y_p, z_p e x_q, y_q, z_q , respectivamente. Se um sistema de forças P_{xq}, P_{yq}, P_{zq} for aplicado em q , os nós p e q modificam a sua posição de u_p, v_p, w_p e u_q, v_q, w_q , respectivamente, relativamente aos eixos x, y e z . A força F_i e o comprimento s_i são alterados das quantidades ΔF_i e Δs_i e passam a ser F_i' e s_i' ,

$$\Delta F_i = E A_i (s_i'/s_i - 1) \quad (1)$$

onde $E A_i$ é a rigidez do segmento i ao alongamento. Considerando m segmentos de cabo, as equações de equilíbrio do nó q antes da aplicação das cargas são,

$$\sum_{i=1}^m \frac{F_i}{s_i} [(x_p - x_q)] = 0 \quad (2a)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{F_i}{s_i} [(y_p - y_q)] = 0 \quad (2b)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{F_i}{s_i} [(z_p - z_q)] = 0 \quad (2c)$$

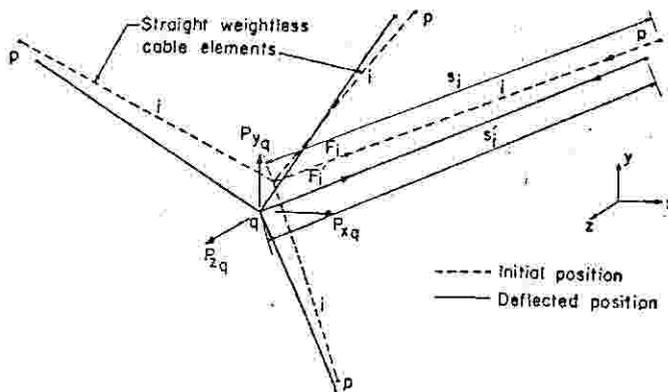


Figura 1

Estas expressões pressupõe que a estrutura está em equilíbrio com as cargas aplicadas. Após a aplicação das cargas, (2) vem:

$$\sum_{i=1}^m \frac{F_i'}{s_i'} [(x_p + u_p - x_q - u_q)] + P_{xq} = 0 \quad (3a)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{F_i'}{s_i'} [(y_p + v_p - y_q - v_q)] + P_{yq} = 0 \quad (3b)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{F_i'}{s_i'} [(z_p + w_p - z_q - w_q)] + P_{zq} = 0 \quad (3c)$$

Substituindo,

$$s_i = [(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2] \quad (4)$$

em,

$$s_i' = [(x_p + u_p - x_q - u_q)^2 + (y_p - v_p - y_q - v_q)^2 + (z_p + w_p - z_q - w_q)^2] \quad (5)$$

chega-se a,

$$s_i' = s_i (1 + 2 a_i + b_i)^{1/2} \quad (6)$$

onde,

$$a_i = \frac{1}{s_i^2} [(x_p - x_q) (u_p - u_q) + y_p - y_q) (g_p - v_q) + (z_p - z_q) (w_p - w_q)] \quad (7)$$

$$b_i = \frac{1}{s_i^2} [(u_p - u_q)^2 + (v_p - v_q)^2 + (w_p - w_q)^2] \quad (8)$$

Expandindo o lado direito da equação (6) e substituindo em (1) tem-se,

$$\Delta F_i = E A_i \left(a_i + \frac{1}{2} b_i - \frac{1}{2} a_i^2 - \frac{1}{2} a_i b_i + \frac{1}{2} a_i^3 + \dots \right) \quad (9)$$

Do mesmo modo, escrevendo (6) na forma,

$$1/s_i' = 1/s_i (1 + 2 a_i + b_i)^{-1/2} \quad (10)$$

Expandindo a expressão, tem-se:

$$\frac{1}{s_i'} = \frac{1}{s_i} \left(1 - a_i - \frac{1}{2} b_i + \frac{1}{2} a_i^2 + \frac{1}{2} a_i b_i - \frac{1}{2} a_i^3 - \dots \right) \quad (11)$$

As equações de equilíbrio no nó q depois da carga ser aplicada podem escrever-se de forma a que só os termos de 1ª ordem em u, v, w entrem para a matriz de rigidez do segmento i. Agrupando estas relações para m segmentos de cabo, tem-se:

$$\sum_{i=1}^m [F_i \frac{u_p - u_q}{s_i} + (E A_i - F_i) \frac{x_p - x_q}{s_i} a_i] = -P_{xq} + R_{xq} \quad (12a)$$

$$\sum_{i=1}^m [F_i \frac{v_p - v_q}{s_i} + (E A_i - F_i) \frac{y_p - y_q}{s_i} a_i] = -P_{yq} + R_{yq} \quad (12b)$$

$$\sum_{i=1}^m [F_i \frac{w_p - w_q}{s_i} + (E A_i - F_i) \frac{z_p - z_q}{s_i} a_i] = -P_{zq} + R_{zq} \quad (12c)$$

onde,

$$R_{xq} = - \sum_{i=1}^m (E A_i - F_i) \left[\frac{u_p - u_q}{s_i} + \frac{x_p - x_q}{2 s_i} d_i \right] \quad (13a)$$

$$R_{yq} = - \sum_{i=1}^m (E A_i - F_i) \left[\frac{v_p - v_q}{s_i} + \frac{y_p - y_q}{2 s_i} d_i \right] \quad (13b)$$

$$R_{zq} = - \sum_{i=1}^m (E A_i - F_i) \left[\frac{w_p - w_q}{s_i} + \frac{z_p - z_q}{2 s_i} d_i \right] \quad (13c)$$

$$c_i = a_i + \frac{1}{2} b_i - \frac{3}{2} a_i^2 \quad (14)$$

$$d_i = b_i - 3 a_i^2 - 3 a_i b_i + 5 a_i^3 \quad (15)$$

As expressões para R_{xq} , R_{yq} e R_{zq} são obtidas considerando os termos até à terceira potência de u , v e w e desprezando os de ordem superior. Podem ser vistos como forças residuais que correspondem à diferença entre a análise não-linear e os resultados que seriam obtidos se se procedem a uma análise elástica linear.

2.2 - Análise de Estrutura

Considere-se a estrutura sujeita a l condições de carregamento. Se o número de graus de liberdade dos nós for n , os deslocamentos e cargas nodais para a condição de carregamento j , são representados por $u_j = [u_j \ v_j \ w_j]^t$ e $P_j = [P_{xj}, P_{yj}, P_{zj}]$, respectivamente. O problema da análise deste tipo de estrutura reduz-se a resolução de um sistema de $3 \times n$ equações não-lineares (três equações por nó) que se pode representar de forma matricial,

$$K u_j = - P_j + R_j \quad (16)$$

onde K é a matriz de rigidez constituída pelos coeficientes das incógnitas u e R_j

é um vector coluna que contém os termos residuais P_{xq} , P_{yq} , P_{zq} . A solução destas equações pretende obter os valores de u , v , w , que por sua vez substituídos em (9) permitem calcular a variação da força de pré-esforço.

2.3 - Método de Newton Raphson

Não existe solução directa do sistema de equações (16), em virtude de do vector R que é função das incógnitas ser um dos termos do lado direito. O cálculo com base no Método de Newton-Raphson utiliza a rigidez instantanea da estrutura calculada em cada nova iteração. Embora os resultados de aplicação deste método se tenham traduzido por uma convergência rápida, ele está associado a um esforço computacional considerável em virtude de ser necessário calcular e inverter a matriz de rigidez em cada iteração. Este método tem a vantagem de permitir que as mudanças nas características elásticas ou físicas da estrutura possam ser introduzidas no cálculo sem qualquer dificuldade. Este método foi adoptado em virtude dos resultados das variantes deste procedimento piorarem a convergência e a análise incremental estar associada a um tempo de computação superior. O algoritmo para a análise de estrutura consiste nos seguintes passos:

Passo 1. Iteração $k = 0$. Supor que, $u_j(0) = R_j(0) = 0$

Passo 2. $k = 1$. Resolver $K_j(0) u_j(1) = -P_j$ para calcular $u_j(1)$

Passo 3. Obter $R_j(k)$ a partir de $u(k)$

a) Se $R_j(k) < \epsilon_1$, Terminar.

b) Doutro modo ir para o Passo 4.

Passo 4. Resolver $K_j(k) \Delta u_j(k) = R(k)$ para calcular $\Delta u_j(k)$

a) Se $\Delta u_j(k) < \epsilon_2$, Terminar.

b) Doutro modo, iteração $k = k+1$. Calcular:

$$u_j(k) = \Delta u_j(k-1) + u_j(k-1)$$

e ir para o Passo 3.

2.4 - Determinação da Geometria Inicial

As equações dos parágrafos anteriores foram formuladas com base na hipótese da geometria do sistema ser conhecida para um conjunto de forças de pré-esforço especificadas. Como a geometria inicial da estrutura não é normalmente conhecida, é necessário calculá-la para se puder efectuar a análise do comportamento da estrutura sujeita ao carregamento real. Este problema pode ser analisado pelo algoritmo de Newton-Raphson anteriormente descrito, alterando algumas das

expressões indicadas em 2.1-. Supõe-se que a estrutura de apoio, bem como as forças de pré-esforço nos cabos são conhecidas e pretende-se calcular o posicionamento dos troços de cabos pré-esforçados. As coordenadas dos nós da malha vão sendo sucessivamente modificadas até se chegar a uma situação de equilíbrio com as forças de pré-esforço aplicadas à estrutura. Por outro lado, supõe-se que na cobertura não actuam quaisquer cargas, permanentes ou acidentais, e que as forças de pré-esforço se mantem constantes durante o processo iterativo. Como a geometria inicial pode não satisfazer o equilíbrio estático, não é necessário considerar o conjunto de equações (2). Além disso, como em todos os troços se mantém constantes as forças de pré-esforço, tem-se:

$$\Delta F_i = 0 \quad \text{e} \quad F_i' = F_i \quad (17)$$

As equações (12) modificam-se para:

$$\sum_{i=1}^m \frac{F_i}{s_i} [(u_p - u_q) - (x_p - x_q) a_i] = R_{xq} \quad (18a)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{F_i}{s_i} [(v_p - v_q) - (y_p - y_q) a_i] = R_{yq} \quad (18b)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{F_i}{s_i} [(w_p - w_q) - (z_p - z_q) a_i] = R_{zq} \quad (18c)$$

onde,

$$R_{xq} = - \sum_{i=1}^m \frac{F_i}{s_i} [(x_p - x_q) - (u_p - u_q) a_i - 1/2 (x_p + u_p - x_q - u_q) e_i] \quad (19a)$$

$$R_{yq} = - \sum_{i=1}^m \frac{F_i}{s_i} [(y_p - y_q) - (v_p - v_q) a_i - 1/2 (y_p + v_p - y_q - v_q) e_i] \quad (19b)$$

$$R_{zq} = - \sum_{i=1}^m \frac{F_i}{s_i} [(z_p - z_q) - (w_p - w_q) a_i - 1/2 (z_p + w_p - z_q - w_q) e_i] \quad (19c)$$

$$e_i = - b_i + 3 a_i b_i - 5 a_i^3 \quad (20)$$

Claro que o método de Newton-Raphson vai apenas determinar uma solução do sistema de equações não-lineares. Contudo, como as estimativas iniciais das coordenadas dão uma forma próxima da configuração estável, o risco de encontrar outra forma é muito baixo.

3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OPTIMIZAÇÃO

3.1 - Optimização da cobertura pré-esforçada por malhas de cabos

Como as forças de pré-esforço vão influenciar as estruturas de apoio e os custos é desejável a sua redução. Em particular, como o custo das ancoragens e estruturas de apoio se reduzem de uma forma directa em relação às deformações da estrutura suspensa e inversa em relação à relaxação dos cabos, pode concluir-se que o pré-esforço é uma propriedade que deveria ser optimizada. O posicionamento dos cabos de pré-esforço neste tipo de estruturas sugere como variáveis de decisão D as d componentes horizontais das forças de pré-esforço aplicadas em cada uma das extremidades dos cabos. Estas variáveis não são negativas em virtude dos segmentos de cabos estarem sempre traccionados. Supondo que é dada a geometria inicial da estrutura que está em equilíbrio com as forças de pré-esforço aplicadas, pretende-se minimizar um conjunto de objectivos (custo, deslocamentos nodais, etc.) através da determinação dos valores do pré-esforço inicial. Considera-se que o custo da estrutura é directamente proporcional ao valor das projecções horizontal das forças de pré-esforço inicial multiplicadas pelos seus comprimentos.

$$w = c^t D \quad (21)$$

Impondo limites superiores em e de entre n deslocamentos nodais,

$$A u = A u_s + A u_p \leq u^u \quad (22)$$

onde A é uma matriz e por n e u_s, u_p são os deslocamentos nodais em relação a uma superfície de referência que correspondem à geometria inicial da estrutura e deformação provocada pelas cargas aplicadas, respectivamente. Outro critério a ser considerado está associado à imposição de limites para os esforços a que ficam sujeitos os segmentos dos cabos após a aplicação do pré-esforço. Os limites inferiores impedem os cabos de deixarem de estar traccionados,

$$D + \Delta F = D + \Delta F_p \geq F^l \quad (23)$$

Os limites superiores não permitem que os cabos atinjam a cedência,

$$D + \Delta F = D + \Delta F_p \leq F^u \quad (24)$$

De notar que os esforços nos cabos são função apenas do carregamento. Todos esses objectivos podem ser reescritos numa forma normalizada. Se \underline{w} representar um custo de referência, a equação (21) vem,

$$c^t D \leq \underline{w} \quad \Rightarrow \quad g_1(D) = \frac{c^t D}{\underline{w}} - 1 \leq 0 \quad (25)$$

De um modo análogo (21) - (23) vem,

$$g_2(D) = \frac{Au}{u^u} - 1 \leq 0 \quad (26)$$

$$g_3(D) = \frac{D + \Delta F}{F^l} + 1 \leq 0 \quad (27)$$

$$g_4(D) = \frac{D + \Delta F}{F^u} - 1 \leq 0 \quad (28)$$

Este problema multicritério pode ser enunciado no formato minimax,

$$\min_F \max_k (g_1, \dots, g_k, \dots, g_4) \quad (29)$$

3.2 - Optimização Minimax e Multicritério

Para um conjunto qualquer de números reais positivos U_j , $j=1, \dots, J$, e um real $p \geq q \geq 1$, a desigualdade de Jensen, igualmente designada desigualdade de norma p (ref.[5]), define-se pela inequação,

$$\left(\sum_{j=1}^J U_j^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^J U_j^q \right)^{1/q} \quad (30)$$

A desigualdade (30) implica que a norma p do conjunto U diminui monotonicamente quando a sua ordem aumenta. Outra propriedade importante de norma p está relacionada com o limite, quando p tende para infinito,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^J U_j^p \right)^{1/p} = \max_{j \in J} \langle U_j \rangle \quad (31)$$

Considere-se o problema de optimização minimax,

$$\min_{x \in X} \max_{j \in J} \langle g_j(x) \rangle \quad (32)$$

e a desigualdade de Jensen. Fazendo $U_j = \exp [g_j(x)]$, $j=1, \dots, J$ e deste modo

impondo que $U_j > 0$, qualquer que seja $g_j(x)$, tem-se:

$$\left(\sum_{j=1}^J U_j^p \right)^{1/p} = \left\{ \sum_{j=1}^J \exp[p g_j(x)] \right\}^{1/p} \quad (33)$$

Aplicando limites ao lado esquerdo, vem:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{j=1}^J \exp[p g_j(x)] \right\}^{1/p} = \text{Max}_{j \in J} \langle \exp[g_j(x)] \rangle \quad (34)$$

Em virtude de:

$$\log \lim(f) = \lim \log(f) \quad \text{e} \quad \log \text{Max}(f) = \text{Max} \log(f) \quad (35)$$

Calculando o logaritmo natural da expressão (34) vem,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (1/p) \log \left\{ \sum_{j=1}^J \exp[p g_j(x)] \right\} = \text{Max}_{j \in J} \langle g_j(x) \rangle \quad (36)$$

O resultado (36) é verdadeiro para qualquer conjunto de vectores $g(x)$, incluindo o conjunto que resulta da minimização de ambos os lados da igualdade (36) qualquer que seja $x \in X$. Deste modo esta igualdade é aplicável ao programa matemático:

$$\text{Min}_{x \in X} \text{Max}_{j \in J} \langle g_j(x) \rangle = \text{Min}_{x \in X} (1/p) \log \left\{ \sum_{j=1}^J \exp[p g_j(x)] \right\} \quad (37)$$

para valores crescentes de p no intervalo $1 \leq p \leq \infty$.

Este resultado indica que o problema de optimização minimax (32) pode ser resolvido através da minimização da função escalar,

$$(1/p) \log \left\{ \sum_{j=1}^J \exp[p g_j(x)] \right\} \quad (38)$$

no domínio definido por $x \in X$ e para uma sequência não decrescente de valores $p \geq 1$

Nos problemas de optimização multicritério,

$$\text{Min}_{x \in X} [g_j(x)] \quad j=1, \dots, J \quad (39)$$

pretende-se variar os valores do vector x de modo que todos os elementos do

vector de critérios ou objectivos sejam tão pequenos quanto possível.

x^* é uma solução óptima de Pareto de (39) se não existir qualquer outro $x \in X$ tal que,

$$g_j(x) \leq g_j(x^*) \quad \forall j = 1, \dots, J \quad (40)$$

Um óptimo de Pareto (ref.[6]) para o problema (39) pode ser encontrada através da resolução do programa de optimização escalar:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad \sum_{j=1}^J \lambda_j g_j(x) \\ & x \in X \end{aligned} \quad (41)$$

no qual $\lambda_j, j=1, \dots, J$ são multiplicadores que satisfazem as condições:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^J \lambda_j = 1 \quad ; \quad \lambda_j \geq 0 \end{aligned} \quad (42)$$

O programa de optimização multicritério tem diversas soluções de Pareto, cada uma das quais correspondendo a um conjunto de multiplicadores λ .

Para chegar às relações que ligam os problemas de optimização minimax (32) e multicritério é necessário considerar a desigualdade de Cauchy, também designada desigualdade aritmética-geométrica. Considere-se um conjunto de números reais positivos $U_j, j=1, \dots, J$ e os multiplicadores $\lambda_j, j=1, \dots, J$. Tem-se:

$$\sum_{j=1}^J U_j \geq \prod_{j=1}^J (U_j / \lambda_j)^{\lambda_j} \quad (43)$$

A relação (43) é satisfeita como igualdade se o lado direito for maximizado em ordem a valores de λ que satisfazem as condições (42). Como ambos os lados de (43) são positivos e $p \geq 1$,

$$\left\{ \sum_{j=1}^J U_j \right\}^{1/p} \geq \left\{ \prod_{j=1}^J (U_j / \lambda_j)^{\lambda_j} \right\}^{1/p} = \prod_{j=1}^J U_j^{\lambda_j/p} \lambda_j^{-\lambda_j/p} \quad (44)$$

Substituindo $U_j = \{ \exp[g_j(x)] \}^p$ em (44), vem:

$$\left\{ \sum_{j=1}^J \exp[p g_j(x)] \right\}^{1/p} \geq \exp\left\{ \sum_{j=1}^J \lambda_j g_j(x) \right\} \prod_{j=1}^J \lambda_j^{-\lambda_j/p} \quad (45)$$

Aplicando logaritmos a ambos os lados dá:

$$(1/p) \log \left\{ \sum_{j=1}^J \exp[p g_j(x)] \right\}^{1/p} \geq \sum_{j=1}^J \lambda_j g_j(x) - (1/p) \sum_{j=1}^J \lambda_j \log \lambda_j \quad (46)$$

O lado esquerdo da desigualdade (46) é a função escalar (38), que sendo minimizada em ordem às variáveis $x \in X$ para uma sequência não decrescente de p , converge para a solução do problema minimax (32). A desigualdade pode ser alterada para,

$$\text{Min}_{x \in X} \text{Max}_{j \in J} \langle g_j(x) \rangle \geq \text{Min}_{x \in X} \sum_{j=1}^J \lambda_j g_j(x) - (1/p) \sum_{j=1}^J \lambda_j \log \lambda_j \quad (47)$$

para valores de $p \geq 1$ não decrescentes. O lado direito de (47) é um problema multicritério na forma de Pareto e que contém um termo adicional que é função dos multiplicadores λ e do parâmetro p . Este termo adicional é constante relativamente à minimização nas variáveis $x \in X$ e tende para 0 à medida que $p \rightarrow \infty$. A forma deste termo adicional é pois idêntica à função de entropia de Shannon (ref.[7]), onde $k=1/p$

$$S = -k \sum_{j=1}^J \lambda_j \log \lambda_j \quad (48)$$

onde S é a entropia, k é uma constante positiva e os λ_j , $j=1, \dots, J$ satisfazem o conjunto de condições (42). A função de entropia de Shannon é medida da incerteza associada a um processo aleatório discretizado na qual λ_j é a probabilidade associada ao acontecimento j . Jaynes utilizou a função de entropia (48) para definir o princípio da entropia máxima segundo o qual,

$$\lambda_k = \exp[p g_k(x)] / \left\{ \sum_{j=1}^J \exp[p g_j(x)] \right\} \quad ; \quad k=1, \dots, J \quad (49)$$

Para um conjunto de multiplicadores qualquer λ o lado direito de (47) é um ótimo de Pareto do problema multicritério (39). A desigualdade (47) foi deduzida utilizando-se a desigualdade de Cauchy que se transforma em igualdade se o lado direito for maximizado em ordem a λ e desde que satisfaça as condições (42).

$$\text{Max}_{\lambda} \sum_{j=1}^J \lambda_j g_j(x) - (1/p) \sum_{j=1}^J \lambda_j \log \lambda_j \quad (50a)$$

sujeito a,

$$\sum_{j=1}^J \lambda_j = 1 \quad ; \quad \lambda_j \geq 0 \quad ; \quad j=1, \dots, J \quad (50b)$$

Subtraindo os multiplicadores associados à entropia máxima (49) na função objectivo (50a) chega-se à função escalar (38) que se viu ser idêntica ao problema de optimização minimax (32).

3.3 - Optimização da função escalar

Como se verificou, minimizar a função escalar (38) é idêntico à optimização minimax (32) e multicritério (39). Este tipo de função possui propriedades muito importantes do ponto de vista da optimização. Trata-se de uma aproximação convexa dos critérios, o que permite a utilização de métodos para optimização convexa. Por outro lado, a qualidade das aproximações melhora para valores de p mais elevados.

Como o domínio em que está definida é determinado pelo intervalo de variação das incógnitas, utilizam-se métodos apropriados à minimização sem restrições. As derivadas da função escalar vão possuir termos exponenciais com valores mais crescentes que os das funções primitivas, pelo que são particularmente desaconselhados algoritmos que utilizem aproximações de 2ª ordem. Há um grande número de métodos que podem ser utilizados para resolver problemas de optimização sem restrições e que são classificados em duas categorias: métodos de pesquisa directa e métodos descendentes. Os métodos de pesquisa directa só necessitam do cálculo da função objectivo e não utilizam a informação relativa às suas derivadas parciais para obter o extremo. Por esse motivo são mais aconselhados para a resolução de problemas de pequena dimensão ou que envolvam funções não diferenciáveis e a sua eficiência é normalmente menor que a dos métodos descendentes. Estes últimos, além do cálculo da função objectivo utilizam normalmente a primeira derivada e em alguns casos derivadas de ordem superior.

Contudo, para a função escalar(38) o cálculo do gradiente da função objectivo coloca alguns problemas. Embora seja sempre diferenciável, a determinação das derivadas não é muito prática, pois envolve um grande esforço computacional na sua determinação. Por esse motivo foi adoptado um método gradiente que utiliza diferenças finitas à frente para obter uma estimativa das derivadas. Este método tem como vantagem relativamente às diferenças finitas centrais necessitar de metade

dos cálculos. Assim como as diferenças na função objectivo contem informações relativas às primeiras derivadas, as diferenças nos gradientes permitem calcular aproximações para as segundas derivadas. Como a função objectivo é diferenciável pelo menos duas vezes, optou-se por um método que utiliza as segundas derivadas em prejuízo de métodos que utilizam apenas as primeiras derivadas tais como Gradientes Conjugados ou Fletcher and Reeves. Todos os mínimos locais de uma função diferenciável f satisfazem as condições necessárias,

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad (51)$$

Eq. (51) representa um conjunto de n equações não-lineares cuja solução é x^* . Um dos procedimentos mais conhecidos para resolver este sistema é o método de Newton. Como este método requer o cálculo da matriz das segundas derivadas e da inversa em cada iteração, adopta-se uma aproximação designada método quase-Newton. Em primeiro lugar é linearizado o sistema de equações em ordem a um ponto tomando x_i como primeira estimativa do mínimo. A expansão em série de Taylor dá,

$$\nabla f(x) = \nabla f(x_i+s) = \nabla f(x_i) + J_{x_i} s + \dots = 0 \quad (52)$$

onde J_{x_i} é a matriz de segundas derivadas de f no ponto x_i . Desprezando os termos de ordem superior,

$$\nabla f(x_i) + J_{x_i} s = 0 \quad (53)$$

Se J_{x_i} for uma matriz não singular, o sistema de equações lineares (53) tem por solução,

$$s = - J_{x_i}^{-1} \nabla f(x_i) \quad (54)$$

e o mínimo pretendido seria $x^* = x_i + s$. Como os termos de ordem superior na expansão de Taylor não podem ser desprezados, é necessário efectuar mais iterações com o fim de melhorar as aproximações. Se x_i e x_{i+1} representarem as aproximações do mínimo obtidas em duas iterações consecutivas,

$$\nabla f(x_{i+1}) - \nabla f(x_i) = J_{x_i} s = J_{x_i} (x_{i+1} - x_i) \quad (55)$$

Desprezando,

$$\nabla f(x_{i+1}) - \nabla f(x_i) = G_i \quad \text{e} \quad s_i = x_{i+1} - x_i \Rightarrow s_i = J_{x_i}^{-1} G_i \quad (56)$$

desde que J_i não seja singular e fazendo,

$$s_i = H_i G_i \quad (57)$$

onde H_i é a aproximação de $J_{x_i}^{-1}$ na iteração i e supondo que (57) também é satisfeita na iteração seguinte,

$$s_{i+1} = H_{i+1} G_{i+1} = H_{i+1} [\nabla f(x_{i+2}) - \nabla f(x_{i+1})] \quad (58)$$

Se o ponto obtido na iteração $i+1$ for estacionário, $\nabla f_{x_{i+2}} = 0$ e (58) vem,

$$s_{i+1} = - H_{i+1} \nabla f(x_{i+1}) \quad (59)$$

Como esta hipótese não é geralmente correcta, o ponto x_{i+2} pode não ser uma boa estimativa do ponto estacionário. Por esse motivo, utiliza-se (59) como direcção da pesquisa e obtem-se uma nova solução através das seguintes fórmulas de recorrência,

$$x_{i+2} = x_{i+1} + s_{i+1} \quad (60a)$$

$$s_{i+1} = -\lambda_{i+1}^* H_{i+1} \nabla f(x_{i+1}) \quad (60b)$$

onde λ_{i+1}^* é o comprimento de passo óptimo na direcção $-H_{i+1} \nabla f_{x_{i+1}}$. Das diversas subrotinas experimentadas, verificou-se ser a subrotina E04JAF da biblioteca NAG a mais eficiente do ponto de vista computacional.

4. ANALISE DAS SENSIBILIDADES

É necessário determinar as relações que ligam as variáveis de decisão ao comportamento de estrutura expresso através das variáveis de estado: deslocamentos nodais e esforços nos segmentos dos cabos pré-esforçados.

A partir de (14), tem-se para os deslocamentos nodais

$$\frac{\partial K}{\partial D_k} u_j + K \frac{\partial U_j}{\partial D_k} = \frac{\partial R_j}{\partial D_k} \Rightarrow \frac{\partial u_j}{\partial D_k} = K^{-1} \left(\frac{\partial R_j}{\partial D_k} - \frac{\partial K}{\partial D_k} u_j \right) \quad (61)$$

$$\frac{\partial R_j}{\partial k} = \sum_{k=1}^m \left[\frac{\partial c_k}{\partial k} \frac{u_p - u_q}{s_k} + \frac{\partial d_k}{\partial k} \frac{x_p - x_q}{2 s_k} \right] - \sum_{k=1}^m F_k \left[\frac{\partial u_p}{\partial D_k} \frac{\partial u_q}{\partial D_k} \frac{\partial s_k}{\partial D_k} - (u_p - u_q) \frac{c_k}{d D_k} \right] +$$

$$+ \frac{\partial c_k}{\partial D_k} \frac{u_p - u_q}{s_k} + \frac{\partial d_k}{\partial D_k} \frac{x_p - x_q}{2 s_k} - d_k \frac{(x_p - x_q)}{2 s_k^2} \frac{\partial s_k}{\partial D_k} \quad (62)$$

Diferenciando a expressão que dá os valores dos esforços nos cabos após a deformação, vem:

$$\frac{\partial (D + \Delta F)}{\partial D_k} = 1 + E A_k \left(\frac{\partial a_k}{\partial D_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial b_k}{\partial D_k} - a_k \frac{\partial a_k}{\partial D_k} - \frac{1}{2} b_k \frac{\partial a_k}{\partial D_k} \right)$$

$$- \frac{1}{2} a_k \frac{\partial b_k}{\partial D_k} + \frac{3}{2} a_k^2 \frac{\partial a_k}{\partial D_k} \quad (63)$$

e,

$$\frac{\partial K}{\partial D_k} = \sum_{k=1}^m \left[\frac{u_p - u_q}{s_k} + F_k \frac{\left(\frac{\partial u_p}{\partial D_k} - \frac{\partial u_q}{\partial D_k} \right) s_k - (u_p - u_q) \frac{\partial s_k}{\partial D_k}}{s_k^2} \right]$$

$$- \sum_{k=1}^m \left[\frac{x_p - x_q}{s_k} a_k + F_k \frac{\left(x_p - x_q \right) \left[\frac{\partial a_k}{\partial D_k} s_k - a_k \frac{\partial s_k}{\partial D_k} \right]}{s_k^2} \right] \quad (64)$$

Só alguns dos termos podem ser obtidos directamente. Os outros são calculados através de um processo iterativo que se inicia supondo que só as derivadas directas de D_k , $k=1, \dots, d$ não são nulas. Como o número de variáveis de decisão não é elevado, foi adoptado um outro esquema para análise das sensibilidades baseado em diferenças finitas e que requer d análises pelo método de Newton-Raphson em cada iteração do algoritmo de optimização. Seria igualmente necessário avaliar as modificações na geometria inicial da estrutura que são provocadas pela variação das variáveis de decisão. Utilizando igualmente diferenças finitas à frente seriam necessárias mais d determinações da geometria inicial em cada iteração. A morosidade desta aproximação seria compensada pelo elevado número de cálculo que o processo iterativo que corresponde ao cálculo analítico das sensibilidades envolve.

5. ALGORITMO DE OPTIMIZAÇÃO DA FUNÇÃO ESCALAR

Inicialização

Toma-se para ponto de partida uma solução de pré-esforço horizontal constante em todos os cabos, sendo preferível que alguns dos critérios para a optimização não sejam cumpridos. Verifica-se um comportamento satisfatório do algoritmo para valores de p entre 30. e 100. na primeira iteração. A sua escolha terá em atenção o número de critérios violados e o seu valor numérico. Se esse número for elevado ou

os critérios estiverem longe de ser satisfeitos escolher um valor de p baixo. Um valor de p mais elevado está associado a uma solução de menor peso.

Iteração

1. Determinar a geometria da estrutura antes da aplicação das cargas em relação à superfície de referência. Aquela corresponde à aplicação das forças de pré-esforço inicial que são os valores das variáveis de decisão. Analisar a estrutura para as condições de carregamento especificadas.

2. Efectuar a análise das sensibilidades. Considerando apenas os primeiros termos do desenvolvimento em série de Taylor dos c critérios, obter o mínimo da função escalar em d variáveis:

$$\min 1/p \log \sum_{i=1,c} \exp(p[g(x_0) + \sum_{i=1,d} (\partial g / \partial x)_{x_0} (x-x_0)]) \quad (65)$$

3. Analisar o resultado obtido;

a) Se o ponto inicial pertencer ao domínio e o resultado da minimização conduzir a uma estrutura que possui membros não traccionados, fazer uma interpolação linear entre estes dois pontos para obter uma solução mais próxima da fronteira do domínio e utilizá-la na iteração seguinte como ponto de partida.

b-1) Se o resultado da optimização for uma solução do problema com menor custo, reter essa solução como dimensionamento optimizado. Neste caso, se todos os condicionamentos forem ultrapassados, diminuir proporcionalmente os valores do pré-esforço inicial até que um dos critérios deixe de ser satisfeito. Utilizar esta solução como ponto de partida para a nova iteração.

b-2) Se a diferença de custos entre as soluções for pequena, aumentar p . Se se mantiver essa pequena diferença entre custos, terminar o algoritmo. A solução não pode ser melhorada.

c) Se o ponto de partida pertencer ao domínio e o resultado da optimização for uma solução do problema com maior custo, aumentar o valor do parametro p e reoptimizar com o mesmo ponto de partida.

d-1) Se o ponto de partida não pertencer ao domínio e o resultado da optimização violar mais as restrições parar o algoritmo. A solução existente não pode ser melhorada.

d-2) Se o ponto de partida não pertencer ao domínio e o resultado da optimização violar menos as restrições reduzir o valor do parametro p e reoptimizar com o mesmo ponto de partida.

6. EXEMPLO NUMÉRICO

O método de otimização indicado foi aplicado tendo em vista a determinação das forças de pré-esforço inicial que podem melhorar o dimensionamento de um parabolóide hiperbólico submetido a uma força de pré-esforço constante em todos os cabos. A geometria e rigidez ao alongamento de cabos positivos e negativos são idênticos aos da ref.[2].

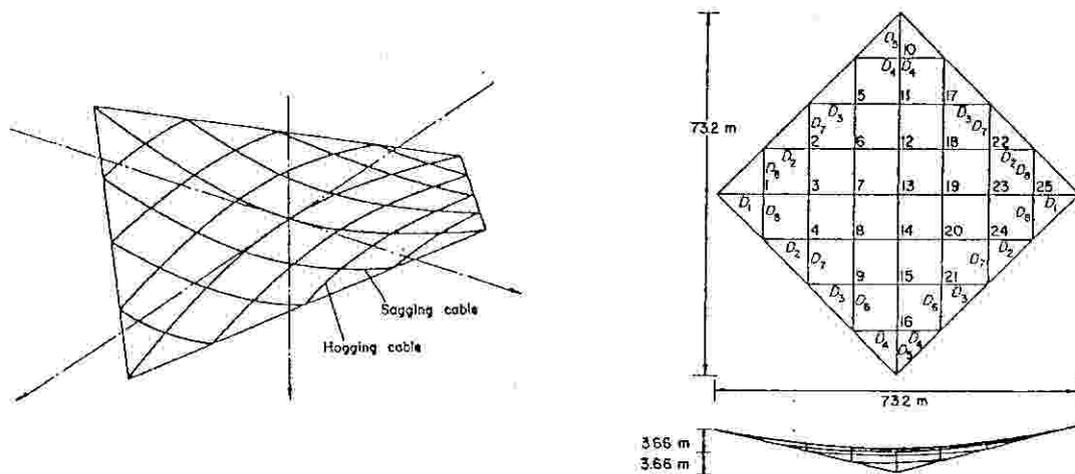


Figura 2

A simetria da distribuição de cabos conduz a $d=8$ variáveis de decisão D , cada qual associada aos membros externos de cada alinhamento de cabos. Consideram-se para coeficientes de custo das variáveis de decisão as projecções horizontais dos comprimentos dos cabos. A estrutura é dimensionada para três condições de carga alternativas, que correspondem ao peso próprio e sobrecarga, peso próprio e vento normal, peso próprio e vento excepcional, respectivamente.

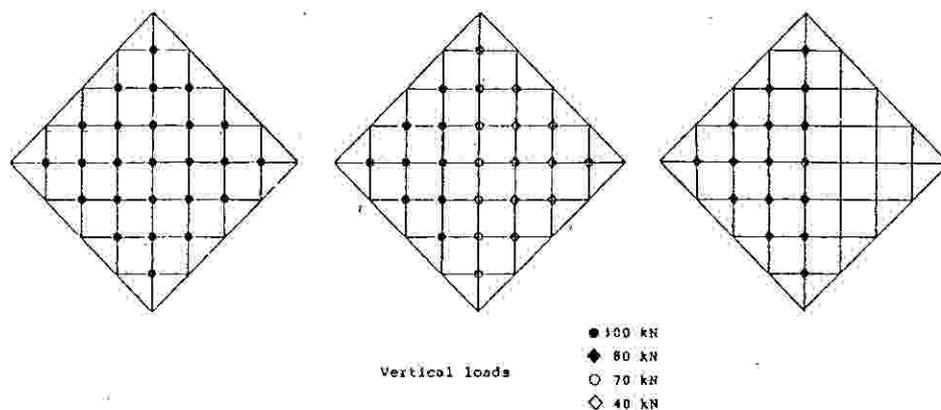


Figura 3

Consideram-se quatro problemas que correspondem à combinação dos critérios de dimensionamento correspondentes aos limites inferiores dos esforços nos cabos de 335 kN e 75 kN e limites superiores nos afundamento dos nós livres em relação à superfície de referência de 1.0 m e 0.8 m. O limite inferior nos afundamentos controla a deformabilidade da estrutura. O limite inferior na força final de cada cabo tem como consequência impedir que alguns dos troços de cabo deixem de estar traccionados. Toma-se para ponto de partida de todos os problemas, o paraboloide hiperbólico sujeito a um pré-esforço de 670 kN em todos os alinhamentos de cabos. Pretende-se determinar a distribuição da projecção horizontal da força de pré-esforço inicial pelas oito variáveis de decisão.

$$P1 \quad P_{\min} = 190 \text{ kN} \quad ; \quad u_{\max} = 1.0 \text{ m}$$

$$1^{\text{a}} \text{ iteração} \quad p = 100.$$

$$H_1 = 913 ; H_2 = 606 ; H_3 = 280 ; H_4 = 338 ; H_5 = 746 ; H_6 = 670 ; H_7 = 521 ; H_8 = 271 \\ w = 674 \cdot 10^3 \text{ kN} \quad ; \quad P_{\min} = 213 \text{ kN} \quad ; \quad u_{\max} = 0.90 \text{ m}$$

Como este ponto pertence ao domínio de problema, para iniciar a 2ª iteração seria necessário reduzir proporcionalmente a força de pré-esforço em todos os cabos. Alguns dos critérios passariam a ser satisfeitos no limite ou seriam violados, de modo a conseguir-se na iteração seguinte uma solução resistente com uma distribuição mais uniforme de esforços. Por outro lado este procedimento permitiria a utilização de valores de p mais reduzidos.

O ponto de partida para a 2ª iteração:

$$H_1 = 809 ; H_2 = 537 ; H_3 = 248 ; H_4 = 299 ; H_5 = 661 ; H_6 = 593 ; H_7 = 461 ; H_8 = 240 \\ w = 597 \cdot 10^3 \text{ kN} \quad ; \quad P_{\min} = 190 \text{ kN} \quad ; \quad u_{\max} = 0.91 \text{ m}$$

pertence ao domínio. Supondo que este resultado não poderia ser melhorado, a solução para uma força constante está associada ao custo $776 \cdot 10^3$ kN que corresponde ao pré-esforço de 663 kN em todos os alinhamentos de cabos. Conclui-se ser possível melhorar o dimensionamento inicial de 13% e 23% após uma única iteração.

$$P2 \quad P_{\min} = 335 \text{ kN} \quad ; \quad u_{\max} = 1.0 \text{ m}$$

$$1^{\text{a}} \text{ iteração} \quad p = 50.$$

$$H_1 = 855 ; H_2 = 656 ; H_3 = 469 ; H_4 = 487 ; H_5 = 865 ; H_6 = 795 ; H_7 = 617 ; H_8 = 404 \\ w = 795 \cdot 10^3 \text{ kN} \quad ; \quad P_{\min} = 351 \text{ kN} \quad ; \quad u_{\max} = 0.98 \text{ m}$$

O ponto de partida para a 2ª iteração:

$$H_1 = 834 ; H_2 = 640 ; H_3 = 458 ; H_4 = 475 ; H_5 = 844 ; H_6 = 776 ; H_7 = 602 ; H_8 = 394 \\ w = 775 \cdot 10^3 \text{ kN} \quad ; \quad P_{\min} = 329 \text{ kN} \quad ; \quad u_{\max} = 1.01 \text{ m}$$

não pertence ao domínio. Na segunda iteração, ter-se-ia para $p = 100$,

$$H_1 = 919 ; H_2 = 696 ; H_3 = 296 ; H_4 = 329 ; H_5 = 872 ; H_6 = 789 ; H_7 = 601 ; H_8 = 423 \\ w = 775 \cdot 10^3 \text{ kN} \quad ; \quad P_{\min} = 344 \text{ kN} \quad ; \quad u_{\max} = 0.99 \text{ m}$$

Prosseguindo o algoritmo não se conseguiriam melhorias sensíveis. Após a 4ª iteração e utilizando $p = 200.$, vem:

$$H_1 = 844 ; H_2 = 716 ; H_3 = 362 ; H_4 = 107 ; H_5 = 874 ; H_6 = 780 ; H_7 = 596 ; H_8 = 390 \\ w = 757 \cdot 10^3 \text{ kN} \quad ; \quad P_{\min} = 337 \text{ kN} \quad ; \quad u_{\max} = 0.99 \text{ m}$$

a que corresponderia um ponto de partida para a 5ª iteração pertencente ao domínio:

$$H_1 = 838 ; H_2 = 711 ; H_3 = 360 ; H_4 = 106 ; H_5 = 868 ; H_6 = 775 ; H_7 = 592 ; H_8 = 387 \\ w = 751 \cdot 10^3 \text{ kN} \quad ; \quad P_{\min} = 335 \text{ kN} \quad ; \quad u_{\max} = 0.99 \text{ m}$$

A solução para uma força constante está associada ao custo $925 \cdot 10^3 \text{ kN}$ que corresponde ao pré-esforço de 790 kN em todos os alinhamentos de cabos. Conclui-se ser possível melhorar o dimensionamento inicial de 14, 16, 18 e 19% nas 4 iterações.

$$P3 \quad P_{\min} = 190 \text{ kN} \quad ; \quad u_{\max} = 0.8 \text{ m}$$

$$1^{\text{a}} \text{ iteração} \quad p = 100.$$

$$H_1 = 787 ; H_2 = 640 ; H_3 = 564 ; H_4 = 578 ; H_5 = 691 ; H_6 = 637 ; H_7 = 465 ; H_8 = 527$$
$$w = 728 \cdot 10^3 \text{ kN} ; P_{\min} = 204 \text{ kN} ; u_{\max} = 0.71 \text{ m}$$

O ponto de partida para a 2ª iteração:

$$H_1 = 732 ; H_2 = 595 ; H_3 = 524 ; H_4 = 537 ; H_5 = 642 ; H_6 = 592 ; H_7 = 432 ; H_8 = 490$$
$$w = 676 \cdot 10^3 \text{ kN} ; P_{\min} = 89 \text{ kN} ; u_{\max} = 0.74 \text{ m}$$

não pertence ao domínio. Na segunda iteração com $p = 100.$, a solução:

$$H_1 = 818 ; H_2 = 667 ; H_3 = 391 ; H_4 = 396 ; H_5 = 689 ; H_6 = 640 ; H_7 = 468 ; H_8 = 304$$
$$w = 684 \cdot 10^3 \text{ kN} ; P_{\min} = 190 \text{ kN} ; u_{\max} = 0.80 \text{ m}$$

pertence ao domínio. Supondo que este resultado não poderia ser melhorado, a solução para uma força constante está associada ao custo $1145 \cdot 10^3 \text{ kN}$ que corresponde ao pré-esforço de 978 kN em todos os alinhamentos de cabos. Conclui-se ser possível melhorar o dimensionamento inicial de 36% e 40% nas 2 iterações indicadas.

$$P_4 \quad P_{\min} = 335 \text{ kN} ; u_{\max} = 0.8 \text{ m}$$

1ª iteração $p = 30.$

$$H_1 = 905 ; H_2 = 804 ; H_3 = 484 ; H_4 = 454 ; H_5 = 860 ; H_6 = 785 ; H_7 = 620 ; H_8 = 418$$
$$w = 833 \cdot 10^3 \text{ kN} ; P_{\min} = 360 \text{ kN} ; u_{\max} = 0.80 \text{ m}$$

Este resultado pode servir de ponto de partida para a 2ª iteração com $p = 100.$,

$$H_1 = 906 ; H_2 = 836 ; H_3 = 494 ; H_4 = 187 ; H_5 = 855 ; H_6 = 769 ; H_7 = 601 ; H_8 = 406$$
$$w = 814 \cdot 10^3 \text{ kN} ; P_{\min} = 347 \text{ kN} ; u_{\max} = 0.77 \text{ m}$$

a que corresponderia o ponto de partida para a iteração seguinte pertencente ao domínio:

$$H_1 = 890 ; H_2 = 821 ; H_3 = 485 ; H_4 = 184 ; H_5 = 840 ; H_6 = 756 ; H_7 = 591 ; H_8 = 399$$
$$w = 800 \cdot 10^3 \text{ kN} ; P_{\min} = 335 \text{ kN} ; u_{\max} = 0.77 \text{ m}$$

A solução para uma força constante está associada ao custo $1145 \cdot 10^3$ kN que corresponde ao pré-esforço de 978 kN em todos os alinhamentos de cabos. Conclui-se ser possível melhorar o dimensionamento inicial de 27% e 30% nas 2 iterações indicadas.

Os resultados obtidos não podem ser comparados aos da ref.[3]. Verifica-se que nesse artigo os problemas P1 e P3 dão soluções incorrectas, em virtude de alguns dos troços dos cabos deixarem de estar traccionados. Nos problemas P2 e P4 os resultados indicados, embora não ultrapassem o afundamento máximo no nó 13, excedem em quaisquer dos casos no nó 12 e 14 a deformação permitida.

7. CONCLUSOES

Por vezes as soluções são caracterizadas por um pré-esforço que é muito elevado em relação à rigidez que seria necessária para manter todos os varões traccionados e para que os deslocamentos em certos pontos não excedam certos valores limites. Em relação aos algoritmos de optimização tradicionalmente utilizados no dimensionamento de estruturas, a principal vantagem deste método consiste em reduzir o número de parâmetros independentes que tem de ser calculados em cada iteração. Assim, nos métodos de optimização convencionais é necessário estabelecer um conjunto de restrições activas e os valores dos multiplicadores a elas associados. No algoritmo descrito neste trabalho os multiplicadores são automaticamente calculados de modo a maximizar a entropia, ou seja diminuir a incerteza com que são determinados, tendo por base o seu comportamento nas iterações anteriores. O parametro p é pois o único valor que é necessário especificar. Em problemas convexos e em alguns casos de comportamento localmente convexo é normalmente possível estabelecer regras a que os p devem obedecer. Contudo, em coberturas constituídas por malhas de cabos pré-esforçadas a não-linearidade geométrica e física conduz a um procedimento mais heurístico: O valor de p depende do posicionamento do ponto de partida relativamente ao domínio do problema.

As coberturas de malhas de cabos são por vezes muito sensíveis a pequenas variações da força de pré-esforço inicial. Tem como consequencia que localmente alguns troços deixem de estar traccionados por alteração ao modo como a estrutura resiste às cargas aplicadas sem que esse fenómeno seja acompanhado de variações

sensíveis na deformada da estrutura. Face ao comportamento deste tipo de estrutura julga-se não ser objectivo a obtenção de um óptimo que, para diferentes condições de carregamento, esteja próximo da não-linearidade física, mas sim reduzir o custo do dimensionamento inicial sem por em causa a segurança. A utilização de um valor elevado de p tem a vantagem de reduzir todos os objectivos simultaneamente. A redução dos objectivos é acompanhada de uma redução nos valores das variáveis de decisão, o que aumenta a probabilidade de se encontrar uma boa solução junto à fronteira do domínio. Para os problemas testados foram encontrados bons resultados com uma única iteração, o que torna este método particularmente recomendável face ao grande número análises que são necessárias para estudar as sensibilidades em cada iteração.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BUCHHOLDT, H.A., "An Introduction to Cable-roof Structures", Cambridge, Cambridge University Press, 1985.
- [2] KRISHNA,P , Cable Suspended Roofs , McGraw-Hill, 1978
- [3] CINQUINI,C E CONTRO,R "Prestressing Design Method for Cable Net Structures", Eng. Structures, Vol. 7, 183-189, 1985
- [4] SIMOES,L.M.C. "Optimização do Pré-esforço em coberturas com malhas de cabos", 1º Encontro Nacional de Estruturas Pré-esforçadas, Lisboa, 1986
- [5] CHARALAMBOUS, C. e BANDLER, J.W. "Nonlinear Minimax Optimization as a sequence of least pth optimization with finite values of p ", Int. J. of Systems Science, 7, 377-391, 1976
- [6] GREENBERG, H.J. e PIERSKALLA, "Surrogate Mathematical Programming", Op. Res.,18 924-939, 1970.
- [7] SHANNON, C.E. "A Mathematical Theory of Communication", Bell System Technical Journal, 27, 379-428, 1948