

PARADOXO ENTRE A ANÁLISE PLÁSTICA LÍMITE E A DETERMINAÇÃO DO MECANISMO ESTOCÁSTICAMENTE MAIS IMPORTANTE DE ESTRUTURAS DUCTEIS

L.M.C. SIMÕES (1)

SUMARIO: Nesta comunicação vão ser apresentadas situações em que se verifica que a a carga de colapso de uma estrutura reticulada com comportamento plástico perfeito (menor carga que provoca a formação de um mecanismo) não se identifica com o mecanismo associado com a probabilidade de rotura mais baixa. Para os pórticos simples que servem de exemplo neste contexto, utiliza-se a programação linear para determinação da carga de colapso e bilinear para a determinação do mecanismo estocasticamente mais importante.

1. INTRODUÇÃO

O papel importante da programação matemática na mecânica estrutural vem sendo cada vez mais reconhecido quer em termos da vantagem computacional, quer no desenvolvimento teórico das formulações. Nesse contexto, tem sido abordados uma variedade de problemas de comportamento plástico de estruturas reticuladas bem como extensões a outras classes de sistemas estruturais discretizados através de modelos de elementos finitos.

Grande parte dos problemas de análise estrutural ocorrem de modo que as suas relações fundamentais podem ser escritas na forma de condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), que são condições necessárias para optimalidade. Se estas condições satisfizerem certas restrições respeitantes a convexidade (ou concavidade), elas são também suficientes e qualquer solução de um conjunto de condições de KKT é também a solução de um programa matemático (Equivalência de KKT).

As relações fundamentais (equações de equilíbrio e compatibilidade) dos problemas de análise plástica de estruturas ocorrem normalmente na forma de condições KKT e como cumprem certas condições de convexidade é possível obter dois programas matemáticos duais. Nestes programas estão implícitos os princípios variacionais relevantes e a teoria de KKT é o meio de se chegar a esses princípios fundamentais.

No caso particular de programas lineares (PL), como as funções lineares são simultaneamente convexas e concavas as condições de KKT são suficientes para optimalidade. Se as relações estruturais fundamentais (compatibilidade, equilíbrio e relações constitutivas) para um problema qualquer se puderem escrever na forma de condições de KKT de um programa linear, o método de solução pode-se basear directamente em programação linear. Para este tipo de programas matemáticos, a teoria de dualidade é bastante simples: modificando subconjuntos das condições de KKT do PL inicial (primal) é facilmente obtido num segundo PL (dual). Os programas lineares podem ser resolvidos por códigos disponíveis comercialmente baseados em algoritmos do tipo Simplex, sendo pois facilmente disponível a computação automática da carga de rotura.

(1) Eng.º Civil, Professor Associado
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra

Em programas matemáticos com restrições lineares e função objectivo é uma função quadrática convexa, a minimização pode ser efectuada por intermédio de um algoritmo do tipo Simplex. De um modo geral se a função objectivo for convexa e o domínio convexo, um ponto que satisfizer as condições de KKT é o mínimo único do programa matemático respectivo.

Contudo é suficiente que algumas das restrições ou a função objectivo sejam bilineares para que se não possa assegurar que um ponto cumprindo as condições de KKT seja o mínimo. É possível que seja um mínimo local, um máximo local ou um ponto estacionário (mínimo segundo algumas direcções e máximo nas outras). Nestas condições, para se obter o menor dos mínimos (ou mínimo global) é necessário utilizar métodos de optimização específicos para este tipo de programas matemáticos e que exigem um esforço computacional muito maior.

Grande parte da investigação em estruturas tem-se limitado a sistemas com comportamento dúctil. Se os membros possuírem um comportamento plástico perfeito, o colapso do sistema em pórticos surge em consequência da formação de um mecanismo através da plastificação de secções críticas.

2. ANALISE PLÁSTICA LIMITE DE ESTRUTURAS RECTICULADAS

2-1. Descrição Malha da Estática

O grau de indeterminação estática α do pórtico representado na figura 1 é 3 e o número de secções críticas (c_r) que tem de ser consideradas 7. Este pórtico pode ser reduzido a uma estrutura isostática de várias maneiras diferentes, uma das quais é através da introdução de rótulas adjacentes a três das secções críticas consideradas.

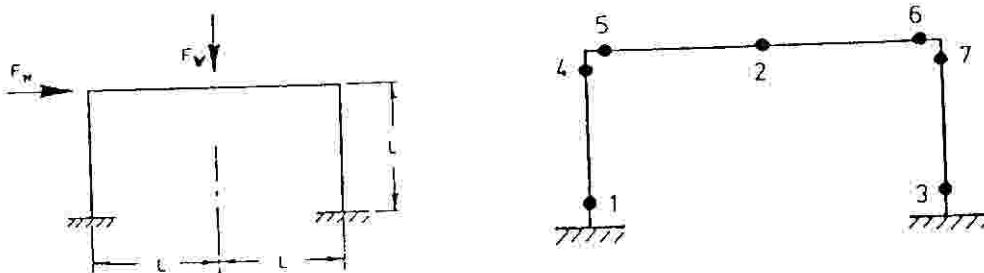


Figura 1

Os diagramas de esforços associados às forças (F_H e F_V) e momentos unitários nas redundantes (p_1, p_2, p_3) são representados na figura 2. Os momentos (m_1, m_2, \dots, m_7) nas secções críticas são as ordenadas desses diagramas.

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \dots \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots \\ b_{o4} & b_{o4} \\ b_{o5} & b_{o5} \\ b_{o6} & b_{o6} \\ b_{o7} & b_{o6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_H \\ F_V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots \\ L/2 & -L/2 \\ L/2 & -L/2 \\ -L/2 & -L/2 \\ -L/2 & -L/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_H \\ F_V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

ou seja:

$$m = B_0 F + B p \quad (1)$$

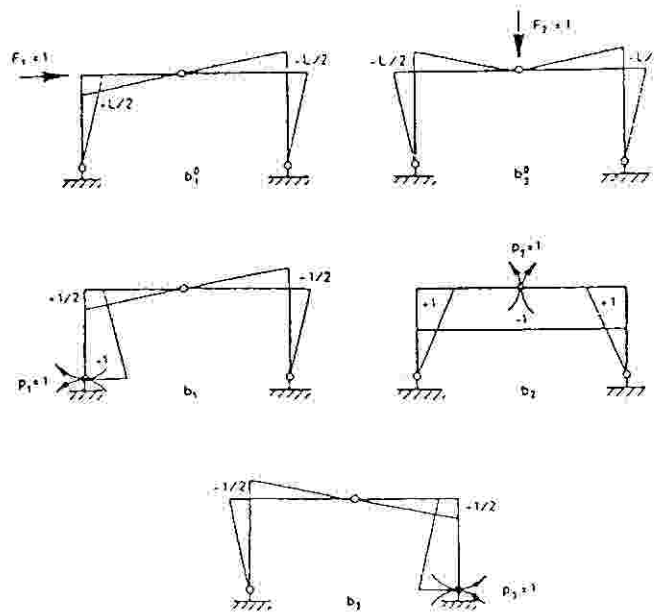


Figura 2

2-2. Descrição Malha da Cinemática

A expressão que permite determinar as descontinuidades angulares em cada uma das rótulas correspondentes às libertações, à custa das rotações das secções críticas da estrutura, é:

$$v_1 = b_{11} \theta_1 + b_{21} \theta_2 + b_{31} \theta_3 + b_{41} \theta_4 + b_{51} \theta_5 + b_{61} \theta_6 + b_{71} \theta_7 \quad (2)$$

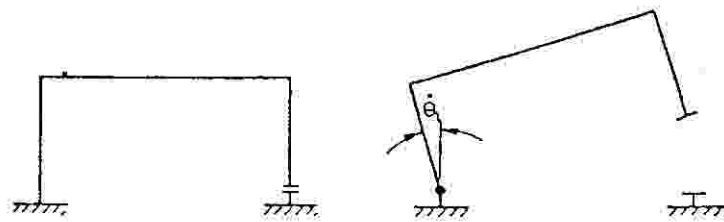


Figura 3

Se um mecanismo for constituído a partir da formação de rótulas planas nas secções críticas para a estrutura reduzida da figura 3, as rotações podem ser escritas em termos da rotação θ_1 do pórtico antes de se deformar:

$$v_1 = (+1) \theta_1 \quad ; \quad v_2 = 0 \theta_1 \quad ; \quad v_3 = (-L) \theta_1 \quad (3)$$

ou em termos dos coeficientes da matriz estática B:

$$v_1 = b_{11} \theta_1 \quad ; \quad v_2 = b_{12} \theta_1 \quad ; \quad v_3 = b_{13} \theta_1 \quad (4)$$

Do mesmo modo as deformações por flexão podem ser introduzidas na mesma estrutura reduzida em cada uma das secções críticas restantes, e os seus efeitos totais nas descontinuidades no corte são obtidos por sobreposição. Em notação matricial isto significa que:

$$v = B^T \theta \quad (5)$$

Analogamente, os deslocamentos u_1 e u_2 que correspondem às translações F_1 e F_2 podem ser escritas em termos das rotações:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^o_{11} & b^o_{21} & \dots \\ b^o_{12} & b^o_{22} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dots \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$u = B_o^T \theta \quad (6)$$

Em síntese, as relações cinemáticas para a descrição malha são :

$$\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^T \\ B_o^T \end{bmatrix} \theta \quad (7)$$

O corte e as descontinuidades daí provenientes é um conceito introduzido que permite analisar de uma forma elementar a cinemática. Para que a estrutura se desloque de uma forma compatível:

$$v = 0 \quad \Rightarrow \quad B^T \theta = 0 \quad (8)$$

Estas equações são válidas para qualquer mecanismo de deformação escolhido. Como as variáveis θ são reais e os algoritmos de programação linear funcionam com variáveis não negativas, a rotação na secção crítica i , θ_i é decomposta no par de variáveis positivas θ_i^+ e θ_i^- :

$$\theta_i = \theta_i^+ - \theta_i^- \quad (9)$$

Tem-se:

$$B^T \theta = [B^T \quad -B^T] \begin{bmatrix} \theta^+ \\ \theta^- \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

Na secção i pode:

1 - Formar-se uma rótula plástica positiva e que participa no mecanismo,

$$\theta_i^+ > 0 \quad ; \quad \theta_i = \theta_i^+ > 0 \quad ; \quad m^i = m_*^{i+}$$

2 - Formar-se uma rótula plástica negativa e que participa no mecanismo,

$$\theta_i^- > 0 \quad ; \quad \theta_i = -\theta_i^- < 0 \quad ; \quad m^i = -m_*^{i-}$$

3 - Ser um ponto elástico ou uma rótula plástica não participante no mecanismo,

$$\theta_i^+ = 0 = \theta_i^- \quad ; \quad \theta_i = 0 \quad ; \quad -m_*^{i-} \leq m^i \leq m_*^{i+}$$

2-3. Relações Constitutivas

O critério de cedência para estruturas com comportamento plástico perfeito impõe limites que os momentos em todas secções de estruturas e em particular nas secções críticas não podem ultrapassar. Se os momentos plásticos resistentes negativos e positivos na secção crítica i forem m_*^{i-} e m_*^{i+} , respectivamente, tem-se:

$$-m_*^{i-} \leq m_i \leq m_*^{i+} \quad (11)$$

Como as cargas são equilibradas através dos momentos na estrutura isostática m_0 , as cargas são expressas em termos de um único parâmetro de carga:

$$B_0 F = m_0 = b_0 \lambda \quad (12)$$

Em todas as secções críticas é obrigatório que:

$$\begin{bmatrix} B p + b_0 \lambda \\ -B p - b_0 \lambda \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} m_*^+ \\ m_*^- \end{bmatrix} \quad (13a)$$

$$(13b)$$

o que corresponde, em termos matriciais, a:

$$\begin{bmatrix} B & b_0 \\ -B & -b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ \lambda \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} m_*^+ \\ m_*^- \end{bmatrix} \quad (14a)$$

$$(14b)$$

que são as equações de Admissibilidade Estática.

Para evitar que as rotações das secções críticas cresçam indefinidamente e o algoritmo dê uma solução diferente de zero, é necessário reduzir a uma dada escala o vector θ . isto é conseguido associando os diagramas de esforços na estrutura reduzida às variáveis cinemáticas independentes:

$$B_0^T \theta = 1 \quad (15)$$

ou seja:

$$[B_0^T - B_0^T] \begin{bmatrix} \theta^+ \\ \theta^- \end{bmatrix} = 1 \quad (16)$$

Conjugando esta equação com as equações de compatibilidade, obtêm-se as condições de Admissibilidade Cinemática:

$$\begin{bmatrix} B_0^T & -B_0^T \\ B^T & -B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^+ \\ \theta^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

A matriz deste sistema de equações é a transposta da obtida para satisfazer Admissibilidade Estática.

As rotações nas secções críticas estão ligadas aos potenciais plásticos (variável que permite verificar se se formou ou não uma rótula plástica na secção crítica i:

$$\pi_{*i}^+ = m_{*i}^+ - B p - b_0 \lambda \leq 0 \quad \text{e} \quad \pi_{*i}^+ \theta_i^+ = 0 \quad (18)$$

$$\pi_{*i}^- = m_{*i}^- + B p + b_0 \lambda \leq 0 \quad \text{e} \quad \pi_{*i}^- \theta_i^- = 0 \quad (19)$$

Então,

$$\pi_{*}^+ \theta^+ + \pi_{*}^- \theta^- = 0 \quad \text{ou} \quad \pi_{*} \theta = 0 \quad (20)$$

que é uma condição de complementaridade representando as Regras de Paridade na formação das rótulas plásticas do mecanismo.

Combinando estas relações fundamentais obtém-se um conjunto de condições de KKT.

$$B p + b_0 \lambda - m_{*}^+ \leq 0 \quad (\text{Equilíbrio}) \quad (21a)$$

$$-B p - b_0 \lambda - m_{*}^- \leq 0 \quad (21b)$$

$$B_0^T \theta^+ - B_0^T \theta^- = 1 \quad (\text{Escala}) \quad (22)$$

$$B^T \theta^+ - B^T \theta^- = 0 \quad (\text{Compatibilidade}) \quad (23)$$

$$\pi_{*}^+ \theta^+ + \pi_{*}^- \theta^- = 0 \quad (\text{Paridade}) \quad (24)$$

$$\theta^+, \theta^- \geq 0 \quad (\text{Não-negatividade}) \quad (25)$$

Estas condições constituem um programa de complementaridade linear, que de acordo com a teoria de Karush-Kuhn-Tucker é equivalente ao par de programas lineares:

Teorema Inseguro de APL
(PL Primal Descrição Malha)

$$\begin{aligned} \min \quad z &= [m_{*}^+ \quad m_{*}^-] \begin{bmatrix} \theta^+ \\ \theta^- \end{bmatrix} \\ \text{sa} \quad &\begin{bmatrix} b_0^T & -b_0^T \\ B^T & -B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^+ \\ \theta^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\theta^+, \theta^- \geq 0 \end{aligned}$$

Teorema Seguro de APL
(PL Dual Descrição Malha)

$$\begin{aligned} \max \quad \omega &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \lambda \\ p \end{bmatrix} \\ \text{sa} \quad &\begin{bmatrix} b_0 & B \\ -b_0 & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ p \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} m_{*}^+ \\ m_{*}^- \end{bmatrix} \\ &\lambda \geq 0 ; \quad p \text{ são valores reais} \end{aligned}$$

Teorema da Unicidade de APL:

$$\lambda_u = z \geq z^* = \lambda_c = \omega^* \geq \omega = \lambda_s \quad (26)$$

Como a eficiência dos algoritmos do tipo Simplex penaliza fortemente o número de restrições, é mais aconselhado o programa primal.

3. DETERMINAÇÃO DO MECANISMO ESTOCASTICAMENTE MAIS IMPORTANTE

3-1. Método dos Segundos Momentos

Para representar de um modo explícito a incerteza com que a resistência da estrutura e o carregamento que nela actua são determinados, consideram-se variáveis aleatórias. Deste modo é possível medir a fiabilidade da estrutura em termos probabilísticos. Para determinar a fiabilidade de estruturas articuladas e reticuladas tem de se:

- (i) Identificar todos os mecanismos de rotura significativos do ponto de vista estocástico;
- (ii) Associar as probabilidades dos modos de rotura individuais para obter limites entre os quais se encontram a probabilidade de rotura do sistema.

Neste trabalho é apenas analisado o primeiro destes aspectos.

Define-se uma função de estado limite, que traduz a aptidão da estrutura para suportar o carregamento.

$$g(X) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (27)$$

Cada mecanismo possível num pórtico com comportamento plástico perfeito é uma combinação linear de mecanismos independentes. Cada um desses mecanismos independentes pode ser definido em termos da função de estado limite correspondente. Então, se $g(X) > 0$ a estrutura vai resistir. Quando $g(X) < 0$, a estrutura entra em cedência. Para $g(X) = 0$ verifica-se a ocorrência do estado limite.

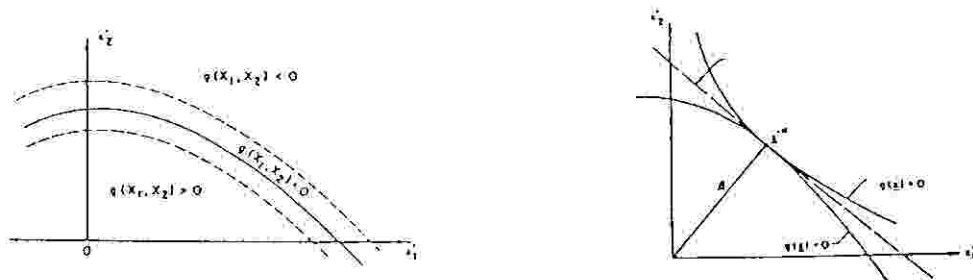


Figura 4

Para uma função de densidade probabilística f_X que corresponde às variáveis aleatórias X_1, \dots, X_n a probabilidade de rotura da estrutura corresponde à integração de f_X na região de cedência $g(X) < 0$. Da figura pode-se concluir que à medida que a curva $g(X) = 0$ se aproxima da origem, a área ocupada por $g(x_1, x_2) < 0$ diminui, ou seja: p_F aumenta.

Como o trabalho numérico de integração directa destas funções é moroso, é mais comum utilizar um método alternativo que é designado método dos 2º momentos. Este método apenas requer o valor da média e desvio padrão das distribuições probabilísticas. Shinozuka demonstrou que para variáveis aleatórias normais estatisticamente independentes, a posição da superfície do estado limite mais próximo da origem das variáveis normais reduzidas dá o ponto de rotura mais provável. Supondo que as variáveis aleatórias normais x_i são estatisticamente independentes, definem-se variáveis aleatórias normais reduzidas x'_i :

$$x'_i = (x_i - \mu_{X_i}) / \sigma_{X_i} \quad (28)$$

onde μ_{X_i} e σ_{X_i} são a média e desvio padrão, respectivamente, da variável aleatória x_i .

Se as distribuições probabilísticas das variáveis aleatórias x_1, x_2, \dots, x_n não seguirem a lei de Gauss, utiliza-se a transformação de Rosenblatt. Este método consiste em determinar uma distribuição normal equivalente às distribuições não-normais.

O parâmetro β , designado índice de segurança, é a distância da origem das variáveis normais reduzidas ao ponto da rotura mais provável. Os mecanismos com maior probabilidade de rotura são aqueles em que o índice de fiabilidade β é menor. Se as variáveis aleatórias seguirem a distribuição de Gauss, a probabilidade de rotura que lhe corresponde é:

$$P_F = \Phi(-\beta) \quad (29)$$

onde $\Phi(\beta)$ representa a função de distribuição da variável normal reduzida, cujos valores se encontram nas tabelas de probabilidades normais. Representa a área correspondente a esta distribuição, para valores da função de densidade probabilística compreendidos entre $-\infty$ e β .

3-2. Determinação do Mecanismo Estocasticamente mais Importante

Se as estruturas forem constituídas por membros com comportamento dúctil a sua resistência é independente da sequência segundo a qual os membros entram em cedência. Para analisar a fiabilidade do pórtico, consideram-se como variáveis aleatórias as cargas aplicadas e os momentos resistentes que seguem a distribuição normal e são caracterizadas pelas médias e desvios padrão. A função de estado limite é uma função bilinear que expressa a igualdade de trabalhos:

$$g(m_*, \lambda) = m_*^{+T} \theta^+ + m_*^{-T} \theta^- - \lambda_H u_1 - \lambda_V u_2 = 0 \quad (30)$$

onde,

$$u = B_0^T \theta = [B_0^{+T} \quad B_0^{-T}] \begin{bmatrix} \theta^+ \\ \theta^- \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\theta^+ \geq 0, \theta^- \geq 0, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \quad (32)$$

Para garantir compatibilidade nas deformações do mecanismo,

$$B^T \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad [B^{+T} \quad B^{-T}] \begin{bmatrix} \theta^+ \\ \theta^- \end{bmatrix} = 0 \quad (33)$$

A identificação do mecanismo mais importante do ponto de vista estocástico consiste em determinar a distância mínima β :

$$\min \beta = \sqrt{(m_*^{+})^2 + (m_*^{-})^2 + (\lambda'_H)^2 + (\lambda'_V)^2} \quad (34)$$

sujeita às restrições (28), (30)-(33). Para eliminar as variáveis aleatórias m_* e λ substituem-se os seus valores na equação de estado limite (30) pelos seus valores dados pela expressão (28):

$$\sigma_{m^+} m_*^{+T} \theta^+ + \sigma_{m^-} m_*^{-T} \theta^- - \sigma_H \lambda'_H u_1 - \sigma_V \lambda'_V u_2$$

$$+ \mu_{m^+}^T \Theta^+ + \mu_{m^-}^T \Theta^- - \mu_H u_1 - \mu_V u_2 = 0 \quad (35)$$

chegando-se a outra equação bilinear.

Minimizar β sujeito às restrições (31-33) e (35) partilha as mesmas soluções que a minimização da função quadrática:

$$\min \tau = (m'^+)^2 + (m'^-)^2 + (\lambda'_H)^2 + (\lambda'_V)^2 \quad (36)$$

sujeita às mesmas restrições, que é um programa bilinear.

3-3. Resolução de Programa Bilineares

Para determinar o mínimo global do programa bilinear, utiliza-se uma estratégia denominada "branch and bound" (B&B), que consiste em substituir o domínio inicial, não-convexo, por uma sequência de domínios convexos que se intersectam (utilizam-se para isso funções convexas, que subestimam as funções não-convexas do problema inicial). Cada um dos problemas daí resultantes possui uma única solução. Os dois ingredientes principais desta metodologia são uma árvore combinatória (cujos nós estão associados a subintervalos em que as variáveis são definidas) e limites superiores e inferiores obtidos em cada nó da árvore.

Como a subestimativa convexa de uma expressão linear é ela própria, é necessário determinar a envolvente dos termos em que surgem produtos de variáveis. Considere-se a função $f(x,y) = x y$ definida entre os limites:

$$a \leq x \leq b \quad ; \quad c \leq y \leq d \quad (37)$$

Toma-se para subestimativa convexa o valor z , tal que:

$$z_1 = c x + a y - a c \quad (38)$$

$$z_2 = d x + b y - b d \quad (39)$$

$$z = \max \{ z_1, z_2 \} \leq f(x,y) = x y \quad (40)$$

De um modo semelhante se podem obter sobrestimativas côncavas de funções bilineares. De realçar que a função subestimativa z (e sobrestimativa z^0) não é diferenciável em todos os pontos do seu domínio. É contudo possível ultrapassar esse obstáculo através da construção de um programa quadrático (PQ) equivalente. A maneira mais simples de o fazer consiste em adicionar algumas restrições e variáveis. O programa matemático:

$$\min 1/2 x^T C x \quad (41a)$$

$$\text{sa } A x \geq b \quad (41b)$$

$$f^T x + \max \{ g_1^T x, g_2^T x \} \leq h \quad (41c)$$

é equivalente ao PQ:

$$\min 1/2 x^T C x \quad (42a)$$

$$\text{sa } A x \geq b \quad (42b)$$

$$f^T x + u \leq h \quad (42c)$$

$$u \geq g_1^T x \quad u \geq g_2^T x \quad (42d)$$

A determinação do mecanismo mais importante estocasticamente, ou seja a distância $\beta = \sqrt{2} \tau$ corresponde à minimização de (36) sujeito às restrições (35), (31)-(33) que é um programa bilinear.

Cada nó da árvore combinatória associada à estratégia B & B é um programa quadrático (a sua solução é obtida a um custo semelhante a um programa linear do mesmo tamanho) cujas restrições são subestimativas convexas que substituem a restrição (35). Como a solução de cada um destes PQ é um limite inferior do óptimo que se pretende determinar, restringe-se o domínio até se encontrar uma solução parcial que satisfaça também (35). Pode-se eliminar uma solução parcial em cada uma das situações seguintes:

1. Chega-se a uma solução que pertence ao domínio do problema inicial;
2. O subprograma em que se utilizam subestimativas, não tem solução;
3. Não é possível encontrar uma solução nesse domínio com um peso inferior ao da estrutura utilizada como limite superior.

Se uma solução parcial for eliminada, isto significa que todas as continuações desse nó foram enumeradas de um modo implícito (e por esse motivo não é necessário enumerá-las explicitamente).

Nestas condições é possível eliminar um grande número de soluções possíveis sem ser necessário calculá-las. O algoritmo termina quando o último nó for eliminado; o óptimo global corresponde à solução parcial que conduz ao valor mais baixo de τ . Tem de se assegurar que nenhum dos nós é estudado mais de uma vez, ou omitido no cálculo, sendo necessário varrer a árvore combinatória.

4. EXEMPLO

São comparados dois dos mecanismos de estrutura reticulada representada na figura 5.

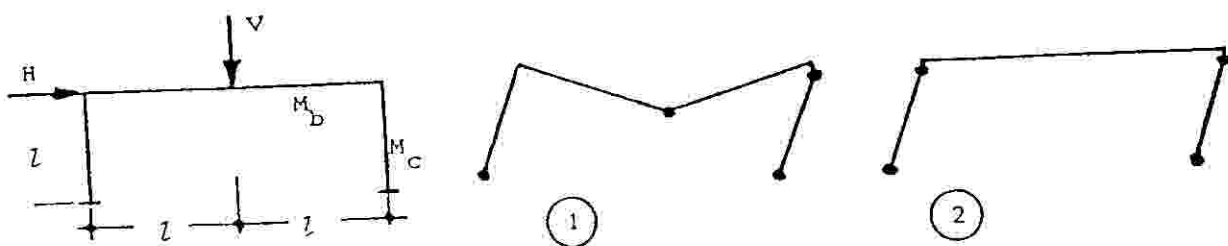


Figura 5

onde as cargas e resistências seguem a distribuição normal e não estão correlacionadas:

$$\begin{aligned} \mu_H = 50 \text{ kN} \quad ; \quad \mu_V = 40 \text{ kN} \quad ; \quad \Omega_H = \Omega_V = 30\% \\ \mu_{M_C} = 115.5 \text{ kNm} \quad ; \quad \mu_{M_D} = 161.6 \text{ kNm} \quad ; \quad \Omega_M = 5\% \end{aligned}$$

Do ponto de vista determinístico, o mecanismo combinado é o mais importante em virtude de se formar sob a acção de um parâmetro de carga $\lambda_1 = 1.74$ e corresponde à probabilidade de rotura $PF_1 \cong 3 \times 10^{-4}$. Contudo o mecanismo estocasticamente mais importante é do tipo painel a que corresponde $\lambda_2 = 1.85$ e $PF_2 \cong 3 \times 10^{-3}$. Pode concluir-se que a dominância estocástica de um dos modos de rotura depende dos coeficientes de variação, correlação e tipo de distribuição das variáveis aleatórias (intensidade do carregamento e capacidade plástica resistente).