

OPTIMIZAÇÃO DA FORMA DE UMA BARRAGEM ABÓBADA UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS

SHAPE OPTIMIZATION OF A ARCH DAM USING FINITE ELEMENTS

L. M. C. Simões, *Dep. Engenharia Civil, Universidade de Coimbra, Portugal*

J. H. Negrão, *Dep. Engenharia Civil, Universidade de Coimbra, Portugal*

J. A. M. Lapa, *Dep. Engenharia Civil, Universidade de Coimbra, Portugal*

SUMARIO: Apresentam-se neste trabalho técnicas numéricas para a optimização de forma de estruturas, com especial incidência em barragens abóbada. Descrevem-se alguns aspectos da metodologia de optimização, tais como a modelização, escolha das variáveis de forma, representação geométrica da forma, geração automática e refinamento da malha, análise das sensibilidades e métodos de resolução do programa matemático.

ABSTRACT: In this paper numerical methods for the shape optimization of structures applicable to arch dams are presented. Several steps in the optimization process such as model description, selection of the shape variables, representation of the boundary shape, finite element mesh generation and refinement, sensitivity analysis and solution methods are described with detail.

1. INTRODUÇÃO

Uma classe importante de problemas de programação matemática aplicada à engenharia civil, consiste na determinação da forma óptima de uma estrutura. As superfícies da estrutura são controladas de um modo automático pelo algoritmo de optimização. Uma das aplicações destes conceitos é ao projecto das barragens abóbada. Poucos trabalhos tem sido realizados, tendo em vista a implementação de algoritmos de programação matemática (utilizando a análise por elementos finitos), capazes de obter a forma de uma barragem abóbada com eficiência.

Em [1] foi adoptado o elemento casca-fina, mas os resultados obtidos por programação linear conduziam a tracções que excediam os valores admissíveis. Conseguiram-se melhores resultados utilizando um algoritmo de programação linear associado, quer a um elemento isoparamétrico de 8 nós [2], quer a 20 nós [3]. Até agora ainda não foi implementado qualquer sistema de geração automática de malha e refinamento, sendo a forma das secções controlada uma a uma [3] ou descrita através de polinómios [2].

Este trabalho tem como finalidade a descrição de aspectos numéricos que ainda não foram abordados, tendo em vista a indicação de linhas de investigação que deverão ser seguidas.

2. REPRESENTAÇÃO DO PROGRAMA MATEMÁTICO

2.1 Descrição do problema

Conferência Ibero-Americana sobre Aproveitamentos Hidráulicos, Lisboa, Junho 1987.

O problema consiste em determinar a forma de uma barragem abóbada de modo a minimizar uma função de mérito exprimindo o custo e utilidade funcional da estrutura, sujeita a restrições de comportamento e geometria. Considere-se o programa matemático de optimização:

$$\begin{aligned} \min v(s) & & (1) \\ \text{st } g_i(s) \leq 0 & & i = 1, \text{NBC} & (2) \\ s_k^L \leq s_k \leq s_k^U & & k = 1, \text{NSV} & (3) \\ d_j^L \leq \sum_{k=1, \text{NSV}} d_{kj} s_k \leq d_j^U & & j = 1, \text{NGC} & (4) \end{aligned}$$

onde $v(s)$ é a função objectivo, g_i a restrição i do comportamento da estrutura; s é um vector que define a forma da estrutura e s_k^L , s_k^U são os limites máximos e mínimos das variáveis que podem reflectir exigências de fabrico ou limitações de análise. As variáveis de forma s podem estar relacionadas através de restrições lineares de modo a garantir que certas exigências geométricas, tais como a continuidade da tangente à fronteira, sejam cumpridas. NBC é o número das restrições da análise da estrutura, NSV o número das variáveis de forma e NGC o número de restrições geométricas.

2.2 Função objectivo

O principal objectivo do projecto de uma barragem abóbada é chegar a uma solução económica e segura. É difícil quantificar muitos dos factores dos quais depende a função objectivo. O factor que é mais rápida e convencionalmente adoptado é o custo, directamente associado ao volume de betão.

O objectivo em determinar a forma de uma barragem reduz-se então à minimização do volume de betão. Este objectivo é acompanhado dos seguintes benefícios: minimização do custo do desaterro e redução do período de construção. O volume da barragem é pois, a soma dos volumes dos elementos finitos.

2.3 Restrições

As restrições devem conduzir a um projecto seguro e funcional. Para manter a topologia, são impostas restrições que limitam inferiormente a espessura t da barragem. Para limitar os vãos máximos das consolas da barragem ou controlar o ângulo de incidência da abóbada, são impostas restrições às variáveis de projecto s .

As tensões σ não podem exceder os seus valores admissíveis. Consideram-se tensões de qualquer tipo, i.e: tensões normais, tensões de corte num determinado plano (definido à custa do sistema de coordenadas paramétricas locais) e tensões principais.

Para assegurar a estabilidade da barragem no seu conjunto, incluem-se restrições respeitantes a cargas globais e momentos derrubadores.

3. MÉTODOS DE OPTIMIZAÇÃO

A aplicação da linearização convexa das funções é hoje em dia uma técnica normalmente utilizada em optimização da forma de estruturas, permitindo obter uma solução que minimiza pelo menos localmente a função objectivo. O volume da barragem não é uma função linear das variáveis de forma e por outro lado as restrições relativas ao comportamento da estrutura são não-linearmente dependentes das variáveis de decisão.

Para determinar qual das aproximações é a mais eficiente, foi realizado um estudo comparativo em [4], tendo-se concluído que não havia grandes vantagens em utilizar uma expansão de 2ª ordem da função objectivo. Neste trabalho só se descrevem:

1. Expansão de 1ª ordem da função objectivo e restrições em ordem às variáveis directas.
2. Linearização da função objectivo em ordem às variáveis de forma e linearização das restrições relativamente às variáveis inversas.

3.1 Sequencia de programas lineares

Uma das formas de resolver o programa matemático não-linear inicial é substituí-lo por uma sequencia de subproblemas que são programas lineares [2],[3]. Cada um destes problema é gerado, linearizando a função objectivo $v(s)$ e as restrições não-lineares $g_j(s)$ no ponto $s^{(k)}$. Desprezando os termos da série de Taylor de ordem superior à primeira, tem-se:

$$v(s^{(k+1)}) \cong v(s^{(k)}) + (s^{(k+1)} - s^{(k)})^T \nabla v(s^{(k)}) \quad (5)$$

$$g(s^{(k+1)}) \cong g(s^{(k)}) + (s^{(k+1)} - s^{(k)})^T \nabla g(s^{(k)}) \quad (6)$$

onde $\nabla v(s^{(k)})$ e $\nabla g(s^{(k)})$ são os gradientes da função objectivo e das restrições em ordem às variáveis de forma no ponto $s^{(k)}$.

Em virtude do problema daí resultante ser linear, pode ser resolvido com eficiencia utilizando um algoritmo do tipo Simplex. Ora, sabe-se que a solução de um programa linear se encontra num dos vertices do seu dominio. Como a solução óptima do problema inicial não tem obrigatoriamente que estar num vértice, pode ser que este método convirja para uma solução que não é a óptima ou tenha um comportamento oscilatório entre dois ou mais vertices do dominio. Para evitar este tipo de comportamento indesejável pode-se adoptar a técnica dos limites variáveis [5].

3.2 Linearização das restrições no espaço das variáveis inversas

Esta aproximação consiste em manter a aproximação linear da função objectivo em termos das variáveis de decisão iniciais e linearizar as restrições relativas à análise estrutural em ordem às variáveis inversas das variáveis de decisão:

$$z_j = 1/s_j \quad j = 1 \dots NSV \quad (7)$$

As restrições que traduzem o comportamento da estrutura, vem:

$$g(z^{(k+1)}) \cong g(z^{(k)}) + (z^{(k+1)} - z^{(k)})^T \nabla g(z^{(k)}) \quad (8)$$

onde $z^{(k)}$ é o vector que dá as coordenadas ao fim da iteração k no espaço das variáveis inversas. Esta técnica vai gerar em cada iteração um problema do tipo:

$$\min \sum v_j s_j \quad (9)$$

$$\text{st } \sum g_{1j}/s_j \leq g_1 \quad (10)$$

$$s_j^L \leq s_j \leq s_j^U \quad (11)$$

onde os coeficientes g_{1j} representam as derivadas das restrições em ordem às variáveis inversas (ie: os elementos de $\nabla g(z^{(k)})$). Escrevendo o

problema em termos das variáveis inversas z_j , o problema possui restrições lineares e pode ser resolvido por um método de gradiente projectado, possuindo uma convergência rápida.

Em virtude das características especiais de convexidade e separabilidade, cada subproblema pode ser resolvido adoptando uma extensão do método dual [6]. Este método tem por base a teoria da dualidade para programação convexa, permitindo obter os resultados com grande rapidez através de um algoritmo min-max de duas fases.

4. REPRESENTAÇÃO DA FORMA

A forma de descrever a forma da estrutura é um dos assuntos chave para que seja possível obter uma forma óptima. Se as variáveis de forma não forem bem escolhidas, a fiabilidade dos resultados calculados pode ser seriamente prejudicada. Em seguida apresentam-se tres métodos aplicáveis à representação da forma

1. Utilizam-se nós extremos para representar a forma.
2. A forma é descrita, entre troços sucessivos, através de polinómios.
3. A forma é descrita por funções curvilineares simples ou mistas.

4.1 Nós extremos para a representação da forma

A utilização das coordenadas dos nós que definem a malha de elementos finitos como variáveis de forma foi o primeiro método e é o mais simples que pode ser utilizado. Esta escolha de variáveis de forma tem grandes desvantagens:

- (a) o número de variáveis de decisão é muito elevado, o que conduz a um problema de optimização cuja solução não é fácil;
- (b) é difícil assegurar compatibilidade e continuidade nas tangentes da superfície definida por nós consecutivos o que conduz a uma forma que não é conveniente;
- (c) a malha de elementos finitos é normalmente alterada durante o processo de optimização, de modo a dar resultados com a precisão que se requer.

4.2 Representação polinomial

Nesta formulação só são utilizados como variáveis de decisão alguns dos pontos da malha para controlar as coordenadas dos nós que definem os paramentos ou as direcções segundo as quais estes nós se deslocam. Para definir a superfície entre os nós de controle são utilizadas funções de forma. Para representar a forma geometrica indicada na figura seguinte, podem-se utilizar coeficientes polinomiais, definidos no sistema de coordenadas polares (r, θ) :

$$r(\theta) = r_0(\theta) + \sum_{i=1, I} x_i f_i \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0 \quad (12)$$

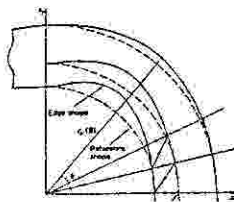


Figura 1

Nesta expressão as funções f_1 vão satisfazer condições de continuidade e tangência, r_0 é a função de forma de referencia e x_1 são as variáveis de decisão (em número de I).

As curvas,

$$r_p(\theta) = C_p r_0(\theta) + c_p \sum_{i=1, I} x_i f_i(\theta) \quad (13)$$

$$0 \leq \theta \leq \theta_0 \quad ; \quad p = 1 \dots P$$

e a equação anterior intersectadas com linhas com ângulo θ constante definem as posições dos pontos nodais. As constantes C_p e c_p que satisfazem as condições,

$$1 < C_1 < C_2 < \dots < C_p \quad ; \quad 1 \geq c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_p \quad (14)$$

são escolhidas de modo a não provocar degenerescência na malha. A utilização de polinômios para controlarem os nós que definem a forma vai reduzir o número de variáveis de forma. Contudo se o grau dos polinômios for elevado os resultados numéricos não são estáveis.

4.3 Representação curvilínea

A adopção da representação curvilínea para definir a forma pode eliminar o problema resultante da utilização de polinômios de grau elevado, dado que as funções curvilíneas são compostas de troços polinomiais de pequena ordem, combinados de modo a minimizar a definição das superfícies.

As funções de Bezier estão associadas aos vértices do polígono que definem uma curva de um modo único, apenas pertencendo o primeiro e o último vértice do polígono à curva descrita. Os outros vértices permitem a definição das derivadas e ordem da curva que dá a forma. Para a curva definida pelo polígono aberto da figura 2:

$$P(x) = \sum_{i=0, n} P_i J_{n,i}(x) \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (15)$$

onde,

$$J_{n,i}(x) = \left[\sum_{i=1, n} x^i (1-x)^{n-i} \right] \quad (16)$$

$$\left[\sum_{i=1, n} \right] = n! / [i! (n-i)!] \quad (17)$$

n é o grau do polinómio e P_i são os vértices do polígono em número $n+1$.



Figura 2

As funções de Bezier tem muitas vantagens, tais como: pequena variação de curvatura, independência de eixos e valores múltiplos. Contudo tem desvantagens: em primeiro lugar o número de nós de controle vai fixar o grau do polinómio que define a curva; em segundo lugar estes não permitem um controle localizado porque as modificações de um nó de controle vai modificar a forma no seu conjunto.

As funções curvilíneas-B partilham grande parte das características das funções de Bezier. As grandes vantagens das funções curvilíneas-B são o comportamento relativo ao controle localizado. Com estas funções é

possível modificar a ordem da curva sem que para isso seja necessário alterar o número de vértices do polígono (figura 3).

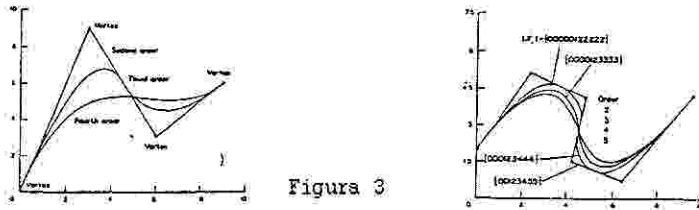


Figura 3

$$P(x) = \sum_{i=0, n} P_i N_{i,k}(x) \quad ; \quad 0 \leq x \leq x_{\max} \quad (18)$$

onde,

$$N_{i,1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } X_i \leq x \leq X_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (19)$$

$$N_{i,k}(x) = \frac{(x-X_i) N_{i,k-1}(x)}{X_{i+k-1} - X_i} + \frac{(X_{i+k} - x) N_{i+1,k-1}(x)}{X_{i+k} - X_{i+1}} \quad (20)$$

P_i são os vértices do polígono, em número $n+1$, k é a ordem das funções curvilíneas-B e $N_{i,k}(x)$ designa-se função de peso. X é um vector de ligação utilizado em funções curvilíneas do tipo B e é responsável pelo aumento de flexibilidade.

Um vector de ligação consiste simplesmente numa série de valores inteiros X , tal que $X_i \leq X_{i+1}$ qualquer que seja X_i . Vão ser utilizados para indicar o intervalo de variação do parametro x que gera a função curvilínea do tipo B, onde $0 \leq x \leq x_{\max}$ ($x_{\max} = n-k+2$). A ordem da curva é indicada pelo vector de ligação.

4.4 Relações geométricas

Escolhe-se um número limitado de nós principais para controlar a forma (ou subregião ou elemento). Estes nós principais podem-se encontrar nos paramentos, ou na superfície média da barragem ou ainda fora da estrutura. As coordenadas dos nós principais ou as direcções em que estes se deslocam são as variáveis de forma. A associação desses nós principais com as funções curvilíneas que os definem (polinómios, linhas rectas, ou outro tipo de curvas) vai formar uma malha grosseira do conjunto de elementos de controle.

Cada um destes elementos vai-se subdividir automaticamente num conjunto de elementos finitos. Para facilitar, utilizam-se dois sistemas de coordenadas paramétricas locais: uma delas corresponde ao elemento definido pelos nós principais e a outra ao próprio elemento finito. Para corpos tridimensionais com um comportamento elástico, cada ponto pode ser representado num sistema de coordenadas globais:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \sum_{j=1, MIN} P_j(\xi, \eta, \zeta) \begin{bmatrix} X_j \\ Y_j \\ Z_j \end{bmatrix} \quad (21)$$

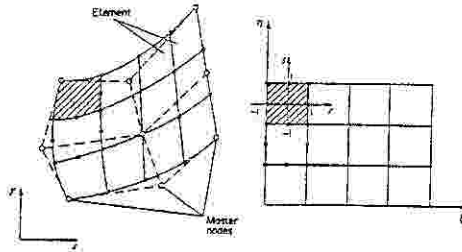


Figura 4

onde X , Y e Z são as coordenadas globais desse ponto; ξ , η e ζ são os eixos do sistema de coordenadas paramétricas locais do elemento definido pelos nós de controle. $F_j(\xi, \eta, \zeta)$ são as funções de forma definidas pelos nós principais (X_j, Y_j, Z_j) utilizando funções curvilíneas ou outros tipos de curvas. NEN é o número de nós principais.

Para corpos tridimensionais elásticos as coordenadas globais de cada ponto dentro da malha de elementos finitos, vão ser:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \sum_{i=1, NEN} N_i(r, s, t) \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} \quad (22)$$

onde $N_i(r, s, t)$ são as funções de forma definidas a partir dos nós dos elementos (X_i, Y_i, Z_i) que são calculados utilizando a equação anterior; r , s e t são os eixos do sistema de coordenadas paramétricas locais que correspondem ao elemento finito. NEN é o número de nós do elemento.

5. ANÁLISE ESTRUTURAL E DA SENSIBILIDADE

Formulando em termos de deslocamentos o método dos elementos finitos, a análise da estrutura consiste em resolver o sistema de equações de equilíbrio:

$$K u = \lambda \quad (23)$$

onde K é a matriz de rigidez da estrutura, que é construída por assemblagem das matrizes de rigidez K_e dos elementos, u é o vector dos deslocamentos nodais que se vão determinar e λ é o vector de carga genérico, que inclui o peso próprio da estrutura e/ou pressão hidrostática. Quer a matriz K quer o vector λ são funções das variáveis de forma s_k . A maior fatia do custo da análise estrutural é tomada com a resolução do sistema (23), pelo que foram desenvolvidas diversas técnicas numéricas para calcular os deslocamentos dos nós. Logo que os deslocamentos nodais sejam conhecidos, todas as outras incógnitas da análise da estrutura podem ser calculadas.

Qualquer deslocamento d na estrutura pode-se representar através de uma combinação linear de elementos do vector u :

$$d = C^T u \quad (24)$$

onde C é uma matriz constante na estrutura.

A matriz das tensões correspondente a um dado ponto do elemento finito,

vai ser:

$$\sigma = C_e \sigma u_e \quad (25)$$

onde $C_e \sigma$ é a matriz de tensão de cada elemento que depende das forças nodais e da matriz de rigidez do elemento; u_e são os deslocamentos nodais do elemento.

Com base em (23) e utilizando elementos finitos isoparamétricos obtém-se com facilidade a matriz K_e , a matriz das tensões e o vector das forças nodais. Calculam-se os deslocamentos globais U, V, W em cada ponto no elemento finito tridimensional através de,

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \sum_1 N_i(r,s,t) \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{bmatrix}$$

ie:

$$u = N u_e \quad (26)$$

O vector das deformações é dado por:

$$\varepsilon = L N u_e = E_e u_e \quad (27)$$

e a matriz das tensões do elemento, vem:

$$C_e \sigma = D B \quad (28)$$

e D é a matriz elástica.

A matriz de rigidez do elemento, é:

$$\begin{aligned} K_e &= \int \int B^T D B \, dv \\ &= \sum_k E_k^T D E_k \det J_k w_k \end{aligned} \quad (29)$$

k é o ponto de integração de Gauss, $\det J_k$ é o determinante do Jacobiano e w_k é o coeficiente de peso relativo a k .

O vector das forças nodais é,

$$\begin{aligned} \lambda_e &= \int \int N^T b \, dv + \int N^T p \, ds \\ &= \sum_k N_k^T b_k \det J_k w_k + \sum_1 N_1^T p_1 \det J_1 w_1 \end{aligned} \quad (30)$$

onde N_k (N_i) representa a função de forma no ponto k , b_k (p_1) são as forças volumicas (de superfície) que exercem no ponto k (1).

5.1 Análise das sensibilidades

A análise de sensibilidades do projecto, (isto é: o cálculo da informação quantitativa do modo como a resposta da estrutura é afectada por mudanças nos valores das variáveis que definem a sua forma) é um ingrediente fundamental da optimização de forma. As derivadas parciais de 1ª ordem das equações de análise estrutural relativamente as variáveis de

forma, vão fornecer a informação essencial para ligar o método de otimização aos resultados de análise da estrutura.

Há duas formas de abordar o problema da análise de sensibilidades. Uma é baseada nas derivadas do modelo discretizado de elementos finitos; a outra obtém-se por meio do cálculo variacional, a partir das equações do modelo contínuo. Neste trabalho só se descreve o primeiro método.

Derivando a equação (23) em ordem a s_k , vem:

$$\frac{\partial U}{\partial s_k} = K^{-1} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial s_k} - \frac{\partial K}{\partial s_k} U \right) = K^{-1} \lambda_p \quad (31)$$

onde,

$$\lambda_p = \frac{\partial \lambda}{\partial s_k} + \frac{\partial K}{\partial s_k} U = \sum_e \left(\frac{\partial \lambda_e}{\partial s_k} - \frac{\partial K_e}{\partial s_k} U_e \right) \quad (32)$$

representa a matriz das cargas fictícias.

Derivando (31) e (32) em ordem a s_k , chega-se a:

$$\frac{\partial d}{\partial s_k} = C^T K^{-1} \lambda_p \quad (33)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s_k} = \frac{\partial C_e \sigma^T}{\partial s_k} U_e + C_e \sigma^T (K^{-1} \lambda_p)_e \quad (34)$$

A técnica de cargas fictícias utiliza as equações (31), (33) and (34). O cálculo das derivadas vai exigir a utilização de um espaço de memória adicional, que corresponde ao cálculo dos vetores de cargas fictícias com $N_{SV} \times N_{LC}$ (número de variáveis \times número de condições de carregamento) elementos.

As equações (33) e (34) podem-se escrever doutro modo, conduzindo à técnica das cargas virtuais, para a qual o cálculo das derivadas vai necessitar de um espaço adicional de N_{BC} (número de restrições obtidas da análise estrutural) matrizes de cargas virtuais. As derivadas da análise estrutural obtidas pelo método das cargas fictícias é pois mais econômica que a técnica de cargas virtuais em virtude do N_{BC} ser bastante superior a $N_{VS} \times N_{LC}$.

6. GERAÇÃO AUTOMÁTICA DA MALHA E REFINAMENTO

O segundo maior problema na otimização de forma é a geração de malha de elementos finitos e o seu refinamento. Deixa de ser válido o modelo de análise que possui os elementos finitos fixos, não sendo possível assegurar a precisão da análise estrutural quando varia a forma de fronteira, dado que a precisão das várias porções da malha de elementos

finitos vai mudar. Uma maneira genérica de resolver este problema é tirar partido da geração automática da malha e possibilidades de refinamento no programa de computador de otimização de forma.

Pressupondo a disponibilidade de um programa de geração automática da malha para a forma inicial, utiliza-se a informação obtida através da análise estrutural para identificar as regiões da malha de elementos finitos que necessitam de ser refinadas.

Uma forma de melhorar a qualidade dos resultados obtidos por elementos finitos é aumentar o número de graus de liberdade. Isto é feito depois de se conhecer a solução inicial. Tem sido implementadas algumas técnicas com a finalidade de introduzir mais graus de liberdade de um modo selectivo, conduzindo a uma melhoria substancial da solução anterior. Para isso é necessário estabelecer um critério para identificar as regiões do domínio onde a aproximação por elementos finitos é mais pobre. Adicionam-se graus de liberdade nessas regiões, quer aumentando a ordem da aproximação polinomial dentro do elemento (método-p) quer subdividindo os elementos (método-h), até que se obtenham resultados com a precisão pretendida [7]. Em última análise, toda a malha terá de ser modificada.

Na figura seguinte estão representadas as estratégias indicadas.

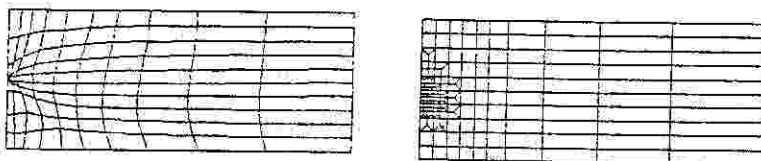


Figura 5

AGRADECIMENTOS

Os autores desejam expressar o seu agradecimento ao Prof. J. Laginha Serafim, Presidente da COBA pelo seu auxílio crítico que permitiu realizar este trabalho.

BIBLIOGRAFIA

1. Sharpe, R., The optimum design of arch dams, Institution of Civil Engineers, Paper 7200S, 1969.
2. Wasserman, K., Three dimensional shape optimization of arch dams with prescribed shape functions, J. Struct. Mech., 11, 465, 1983-84.
3. Ricketts, R.E., Zienkiewicz, O.C., Shape optimization of continuum structures, New Directions in Optimum Structural Design (Ed. E. Atrekk, R.E. Gallagher, K.M. Ragsdell and O.C. Zienkiewicz), J. Wiley, NY, 1984.
4. Braibant, V., Fleury, C., An approximation concepts approach to shape optimal design, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 53, 119, 1985.
5. Bhavikatti, S.S., Ramakrishnan, C.V., Computational efficiency of improved move limits method of sequential linear programming for structural optimization, Comp. Struct., 11, 191, 1980.
6. Fleury, C., Structural weight optimization by dual methods of convex programming, Int. J. Num. Meth. Engng., 14, 12, 1979.
7. Dias, A.R., Kikushi, N., Taylor, J.E., A method for grid optimization for finite element methods, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 4, 29, 1983.