



**Universidade de Coimbra**  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Departamento de Física

**Restauração das Simetrias Quiral e Axial a Temperatura  
Finita no Modelo de Nambu Jona-Lasinio com dois Sabores**

Mário Jorge César dos Santos

2009



**Universidade de Coimbra**  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Departamento de Física

**Restauração das Simetrias Quiral e Axial a  
Temperatura Finita no Modelo de Nambu  
Jona-Lasinio com dois Sabores**

*Dissertação submetida à Faculdade de Ciências  
e Tecnologia da Universidade de Coimbra para  
apreciação em provas do Curso de Mestrado  
em Física, com especialização em Física  
Nuclear e de Partículas*

Orientadora: Prof. Doutora Maria da Conceição Ruivo

Mário Jorge César dos Santos

2009



## Agradecimentos

Agradeço à Prof. Doutora Conceição Ruivo, que desde as etapas iniciais, dedicou o seu tempo a ensinar-me. Ao longo deste trabalho, o seu constante encorajamento e apoio permitiram manter vivo o meu entusiasmo. Devo-lhe ainda todas as sugestões e alvitres que permitiram melhorar este trabalho, visto que, desde a versão preliminar, ainda com uma exposição demasiado sumária e imprecisões várias, até ao resultado final, houve um longo percurso rico de aprendizagem.

Manifesto a minha gratidão ao Doutor Pedro Costa por toda a ajuda na implementação e utilização do programa computacional, mas também nas discussões de carácter físico, das quais retenho a noção de que perceber bem os fundamentos e métodos analíticos da física é essencial para conseguirmos formular um programa e analisar os dados obtidos.

Recordo as ideias de algumas discussões deste grupo de investigação, em que tive o prazer de participar, e que muito me ajudaram para conseguir realizar este trabalho.

A responsabilidade por quaisquer erros cabe-me unicamente a mim.

## Abstract

We consider a phenomenological model of Nambu-Jona-Lasino (NJL), that incorporates the symmetries of the quantum chromodynamics (QCD), to study the physical processes that occur in the low energy limit - region not accessible to the perturbative methods of the QCD.

The present work is centered on the study of two flavour NJL model of upon which the Lagrangian includes an interaction term that explicitly breaks the  $U_A(1)$  anomaly. This model's Lagrangian allows to identify four channels corresponding to the mesons  $\pi$ ,  $\sigma$ ,  $\eta$  and  $a_0$ . At finite temperature, the restoration of chiral and axial symmetries, signaled by the behavior of several observables, is investigated.

After the conventional regularization, we found that the effect of a new type of regularization, that takes into account the effects of high momentum quarks, allows the full recovery of the chiral symmetry. It is found in the SU(2) model, unlike the SU(3) results, that the recovery of the axial symmetry is not a consequence of the full recovery of the chiral symmetry. Thus, one needs to use an additional idea, by means of a temperature dependence of the anomaly coefficient, that simulates instanton suppression effects.

## Resumo

Consideramos o modelo fenomenológico de Nambu-Jona-Lasino (NJL), que incorpora as simetrias da cromodinâmica quântica (QCD), para estudar os processos físicos no regime das baixas energias - região não acessível aos métodos perturbativos da QCD.

O presente trabalho é centrado no estudo do modelo NJL de dois sabores cujo lagrangiano inclui um termo de interação que quebra explicitamente a anomalia  $U_A(1)$ . O lagrangiano deste modelo permite identificar 4 canais correspondentes aos mesões  $\pi$ ,  $\sigma$ ,  $\eta$  e  $a_0$ . É analisada a restauração das simetrias quirais e axial a temperatura finita, estudando-se para o efeito o comportamento de vários observáveis que sinalizam a restauração das simetrias quirais e axial.

Estuda-se o efeito do tipo de regularização no processo de restauração das simetrias. Para além da regularização convencional, é estudado um tipo de regularização que permite ter em conta o efeito dos quarks de momentos elevados a altas temperaturas.

A restauração da simetria axial não ocorre com consequência da restauração da simetria quiral. Verificamos que a situação em  $SU(2)$  é diferente dos resultados referidos ao modelo NJL em  $SU(3)$ . Não basta considerar o tipo de regularização para que todos os observáveis relacionados com a simetria  $U_A(1)$  se anulem, pelo que para a sua restauração, é necessário considerar um mecanismo adicional, que simula a supressão do efeito de instantões. Para isso é introduzida uma dependência na temperatura para a constante de acoplamento associada com a anomalia.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
1.1	Simetrias na Física e Cromodinâmica Quântica . . . . .	7
1.1.1	Simetrias na Cromodinâmica Quântica . . . . .	7
1.1.2	O Teorema de Goldstone . . . . .	12
1.1.3	A Simetria Quiral . . . . .	13
1.1.4	O Potencial Efectivo <i>vs</i> Bosão de Goldstone . . . . .	15
1.1.5	A Simetria Axial . . . . .	16
1.2	O Modelo de Nambu Jona-Lasino - Enquadramento e Motivação . . .	18
1.3	O Modelo de Nambu Jona-Lasino e a sua Aplicação a Diferentes Áreas . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Formalismo</b>	<b>27</b>
2.1	O Modelo de Nambu Jona-Lasino com Anomalia . . . . .	28
2.1.1	A Equação do <i>Gap</i> . . . . .	31
2.1.2	Espectro de Massa dos Mesões . . . . .	32
2.1.3	A Susceptibilidade Topológica . . . . .	36
2.2	Extensão do Modelo para Temperaturas e Densidades Finitas . . . .	39
2.2.1	Formalismo . . . . .	40
2.2.2	Regularização com <i>Cutoff</i> Infinito . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Apresentação e Discussão dos Resultados</b>	<b>44</b>
3.1	Ajuste dos Parâmetros no Vácuo e Processos de Regularização a Tem- peratura Finita . . . . .	45
3.2	Apresentação dos Resultados . . . . .	48
3.2.1	Discussão Global dos Resultados . . . . .	54



<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>57</b>
<b>5</b>	<b>Apêndice</b>	<b>59</b>
5.1	Matrizes de Dirac . . . . .	59
5.2	Simetrias no Modelo NJL(A) . . . . .	61
5.3	Conservação de Correntes no Modelo NJL(A) . . . . .	66
5.4	Cálculo de Susceptibilidade Topológica . . . . .	71
5.4.1	Termo de 't Hooft em SU(3) . . . . .	75
5.4.2	Relação entre $\mathcal{L}_2$ e $Q(x)$ e a Forma Determinantal . . . . .	76

# Capítulo 1

## Introdução

*Num certo sentido todos nós já estivemos no interior de uma estrela, e se o universo teve um principio, cada um de nós estava lá.*

Martin Harwit, "Astrophysical Concepts"

Reverendo a lição Nobel de Yoichiro Nambu [1], recordamos que a ideia de os hadrões serem compostos por partículas ainda mais fundamentais tem uma interessante história em perpétuo desenvolvimento. Em 1949, Fermi e Yang [2] propuseram descrever o píão como um estado ligado do próton e do neutrão. No início dos anos 50, Sakata [5] incluiu partículas estranhas com o objectivo de explicar a conservação de isospin e de estranheza [3, 4], tendo considerado como partículas fundamentais o próton, o neutrão e a partícula  $\lambda$ . Apesar de o modelo estar correctamente formulado segundo uma álgebra de Lie com simetria unitária, permaneciam, neste modelo, ainda dificuldades, tais como o facto de se prever spin  $1/2$  para a partícula  $\Xi$  em vez do valor experimental  $3/2$ , bem como o facto de o modelo não permitir a construção do octeto de bariões. Foi em 1964 que Gell-Mann e Zweig [6, 7, 8], de forma independente, propuseram o modelo de quarks<sup>1.1</sup> considerando o quark uma partícula elementar, que teoricamente seria uma realização da representação da álgebra de Lie no sector  $SU(3)$ .

---

<sup>1.1</sup>Uma bibliografia sobre o modelo de quarks é dada por O. W. Greenberg [9]; ver ainda: Fyodor V. Tkachov "A contribution to the history of quarks: Boris Struminsky's 1965 JINR publication", arxiv/0904.0343

Com o advento, na década de 70, da Cromodinâmica Quântica (QCD) [10, 11, 12, 13] passamos a dispor de uma teoria que descreve a dinâmica de quarks e glúons.

A partir desta época desenvolveram-se, para a QCD, várias técnicas de cálculo perturbativo [12, 13, 14]. Apesar disso, as propriedades dos hádrões são muito difíceis de obter directamente da QCD e o desenvolvimento da teoria de padrão na rede permitiu alguns sucessos neste âmbito [15].

De acordo com os cálculos na rede em QCD [16, 17, 18] prevê-se que, quando a temperatura aumenta, ocorra a restauração da simetria quiral, sendo a temperatura de transição da ordem de  $T_c \sim 150 \text{ MeV}$ <sup>1,2</sup>. Devido à dificuldade em obter as propriedades de baixa energia directamente da QCD, surgiu a motivação para a construção de modelos efectivos (teorias efectivas).

A utilização de modelos fenomenológicos é o modo mais directo para tratar este tipo de problemas. De facto, estes modelos têm sido utilizados para estudar as propriedades das partículas no vácuo e investigar efeitos decorrentes de temperatura e densidade finitas. Reforçou-se, deste modo, o estudo de modelos efectivos para interacções hadrónicas que constituiu uma área de pesquisa bastante activa, e cujo início remonta aos anos 70-80.

Para o estudo da matéria em condições extremas, como é o caso da matéria no interior de estrelas compactas onde se atingem densidades muito elevadas, ou nas colisões relativistas de iões pesados, onde se atingem densidades e temperaturas elevadas, necessitamos de um formalismo que respeite as simetrias fundamentais da QCD.

Na cromodinâmica quântica (QCD), a estrutura da matéria tem origem num pequeno (e restrito) tipo de partículas diferentes, que interagindo permite a formação de estados ligados. Os hádrões constituem o menor nível conhecido de estrutura não trivial acessível pela experiência. Estes são combinações de 2 ou 3 quarks confinados por forças muito fortes, que actuam a distâncias da ordem de  $10^{-15} \text{ m}$ , ou combinações de pares de quark e antiquark.

Historicamente, foram formulados vários modelos em termos nucleões de tipo

---

<sup>1,2</sup>A questão se a restauração da simetria quiral e o desconfinamento ocorrem simultaneamente é ainda objecto de debate

pontual, muito antes da descoberta dos quarks [19, 20, 21, 22, 23]. Com o sucesso da teoria da QCD ficaram claras as limitações deste tipo de modelos, devido ao facto de os graus de liberdade dos quarks e glúões serem ignorados. Contudo, o formalismo da QCD é muito difícil de incorporar para o estudo da matéria no regime de baixa energia, para baixos momentos transferidos (quando o acoplamento é forte) [24], ao contrário do que acontece na situação de acoplamento fraco, onde os quarks exibem liberdade assintótica e a QCD é bem compreendida.

A teoria de padrão na rede tem sido extensivamente utilizada neste regime, usando supercomputadores para simular QCD numa rede discretizada [25]. No entanto, esta abordagem torna-se problemática quando o potencial químico é finito, o determinante de fermiões não é definido positivo, logo não pode ser usado (com medida/peso de probabilidade) no integral funcional <sup>1,3</sup>. Para estudar as propriedades das fases nesta matéria, a abordagem mais promissora tem sido construir modelos que, tanto quanto possível, contêm as propriedades da QCD. Um dos modelos efectivos, com este tipo de características, que se tem provado mais eficaz é o modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL), que tem sido objecto de diferentes extensões, havendo hoje uma classe de modelos de tipo NJL. O presente estudo é efectuado num modelo de NJL. Uma das vantagens do modelo NJL, é que este é baseado nos graus de liberdade de quarks e partilha com a QCD algumas das mais importantes características de baixa energia: simetrias e quebra de simetrias. Apesar destas vantagens, o modelo não é renormalizável devido à natureza das interacções de quarks, que é de tipo pontual. Este problema é solucionado com uso de um *cutoff* para regularizar o modelo [26].

Experiências de iões pesados permitem sondar no diagrama de fase regiões complexas, onde a QCD é não-perturbativa. Foram propostas experiências para realizar no *Large Hadron Collider* (LHC) do *Centre Européenne pour la Recherche Nucléaire* (CERN) e são esperados para o futuro próximo resultados que permitirão compreender o plasma de quarks-gluões. Experiências deste tipo, usando colisões de iões pesados, permitirão obter conhecimento sobre o comportamento da matéria a

---

<sup>1,3</sup>Esta situação é referida como: *sign problem*

muito altas temperaturas, contudo, não possibilitam aceder à parte do diagrama de fases com respeito às baixas temperaturas. São as estrelas compactas que oferecem a oportunidade de estudar matéria densa a muito baixas temperaturas<sup>1.4</sup>. As estrelas compactas possuem um raio da ordem de alguns quilómetros e massas da ordem de grandeza da do sol. Assim, os respectivos campos gravitacionais associados a estas estrelas são enormes, por isso é necessário usar a teoria da relatividade geral para ser possível descrevê-los.

Para a descrição da matéria com altas densidades e/ou temperaturas são consideradas duas fases distintas, a fase hadrónica e a fase de quarks. Estas duas fases diferem uma da outra pela propriedade do confinamento de quarks. Na fase hadrónica a matéria é composta de neutrões, prótons e outros hadrões. Na fase de matéria de quarks, os hadrões não se encontram presentes, estando os quarks desconfinados. Nesta fase espera-se que as simetrias da QCD, quebradas na fase hadrónica, sejam restauradas.

Tendo em vista o que acabamos de expor, compreende-se que a investigação sobre a transição de fase associada à restauração da simetria quiral ocupe um papel de relevo na actualidade. Uma outra importante simetria, explicitamente quebrada no lagrangiano da QCD, é a simetria  $U_A(1)$ , que pode eventualmente ser também restaurada em condições extremas. Coloca-se o problema de saber se a simetria quiral e a simetria axial são ou não restauradas simultaneamente e quais os observáveis que podem dar indicações dessa restauração. O presente trabalho procura contribuir para a compreensão deste problema. Com este objectivo, vamos utilizar o modelo de NJL no sector  $SU(2)$  mas com a inclusão de um termo que quebra explicitamente a simetria  $U_A(1)$ . Investigar-se-à o comportamento com a temperatura dos seguintes observáveis: condensado de quarks, susceptibilidade topológica e o comportamento dos mesões  $\pi$ ,  $\sigma$ ,  $a_0$  e  $\eta$ .

Passamos a uma breve descrição do plano de trabalho. Este capítulo encontra-se organizado na seguinte forma: após uma abordagem preliminar ao modelo NJL,

---

<sup>1.4</sup>Estrelas compactas típicas possuem temperaturas na superfície aproximadamente de  $10^6$  Kelvin, e em termos de cálculos para física nuclear, a influência desta temperatura é desprezável [27].

na secção 1.1 fez-se uma breve referência a algumas propriedades da QCD (nesta secção foram referências principais [28, 29, 30]) com especial atenção à simetria quiral, devido à sua importância no estudo da física hadrónica e de baixas energias. Nas subsecções 1.1.2 a 1.1.5, faz-se referência, de modo mais detalhado, aos seguintes tópicos: o teorema de Goldstone, a simetria quiral, o potencial efectivo e a simetria axial. Na secção 1.2, apresentamos a motivação e enquadramento para o modelo de NJL, onde nos referiremos à sua utilização do sector  $SU(2)$ , no presente trabalho. Na secção 1.3 iremos referir aplicações do modelo de NJL em diferentes áreas, dando especial ênfase à interligação entre os conceitos da matéria condensada e física das partículas, onde se apresentam alguns exemplos actuais deste aspecto.

No capítulo 2 apresentaremos o formalismo do modelo NJL para o lagrangiano em  $SU(2)$  com anomalia. Serão determinadas as equações do *gap* e os propagadores que permitem o cálculo de diversos observáveis. Será também discutida a quebra de simetria axial neste modelo e calculada a susceptibilidade topológica. Far-se-à a extensão do modelo para temperatura finita e serão discutidos os processos de regularização e a possível dependência da temperatura de parâmetros do modelo.

No capítulo 3, numa análise sobre a termodinâmica do sistema, realiza-se o estudo das transições de fase no presente modelo, e discute-se o comportamento com a temperatura das massas dos mesões escalares e pseudoescalar e da susceptibilidade topológica, bem como as suas relações com a restauração de simetrias.

No último capítulo, 4, apresenta-se um resumo das respectivas análises e conclusões.

## 1.1 Simetrias na Física e Cromodinâmica Quântica

### 1.1.1 Simetrias na Cromodinâmica Quântica

Para investigar as propriedades da matéria ao nível subatómico temos primeiro que entender as regras básicas das interacções entre as partículas. A QCD, [24] que descreve as interacções entre quarks em termos da troca de gluões, é a teoria fundamental das interacções fortes. Segundo esta teoria, proposta na década de 70, os quarks são fermiões de spin  $1/2$ , com carga eléctrica fraccionária e existem 3 cargas de cor para os mesmos (r, b, g) e 6 sabores diferentes (*up*, *down*, *strange*, *bottom*, *top*);

estes novos números quânticos da interacção forte permitem construir os hadrões observados na natureza sem violar o princípio da exclusão de Pauli. A teoria decorre da invariância local perante transformações  $SU(3)_{cor}$ . A QCD é uma teoria de padrão não abeliana, isto é, ao contrário da electrodinâmica quântica (QED), onde os fótons possuem carga nula, na teoria QCD os bosões de troca (mediadores da força, os gluões) transportam carga de cor; assim eles interagem com os quarks e entre si também.

A densidade lagrangiana para QCD é da forma:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi - \frac{1}{4}G_a^{\mu\nu}G_{\mu\nu}^a . \quad (1.1)$$

Onde  $\psi$  é o campo dos quarks com sabor  $f$ , com 3 cores  $\mathcal{D} = D_\mu\gamma^\mu = (\partial_\mu - igA_\mu^a T_a)\gamma^\mu$  é a derivada covariante e  $G_{\mu\nu}^a$  é o tensor de campo dos gluões. Na derivada covariante,  $g$  é a constante de acoplamento da interacção forte,  $m$  é a massa de correntes dos quarks,  $A_\mu^a$  representa o campo de gluões. As matrizes  $T_a$  ( $T_a = \lambda_a/2$ ), que surgem no operador derivada, são geradores da álgebra de Lie em  $SU(3)_{cor}$ . Este lagrangiano, eq.1.1, é invariante perante transformações padrão de cor  $\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\theta(x)\cdot\lambda}\psi$ , onde  $\theta(x)$  é um vector com oito parâmetros, um por cada gerador  $\lambda^a$  do espaço  $SU(3)$ . Para os geradores de  $SU(3)$ , são escolhidas as matrizes de Gell-Mann (ver apêndice 5.1) que satisfazem as seguintes relações:

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda^c \quad Tr(\lambda_a\lambda_b) = 2\delta_{ab} \quad Tr\lambda_a = 0 , \quad (1.2)$$

onde  $f_{a,b,c}$  são as constantes de estrutura do grupo. Na física hadrónica de baixa energia ( $\sim 2$  GeV), apenas os quarks com sabor mais leves contribuem para a dinâmica, porque as suas massas são relativamente pequenas ( $m_u \sim m_d \sim 5$  MeV), em contraste com quarks de outros sabores. Notamos que a semelhança na massa destes quarks leves reflecte-se na natureza da simetria de sabor  $SU(2)$  quase perfeita, assim a simetria quiral no sector  $SU(2)$  é pouco quebrada. A massa do quark estranho é da ordem dos  $m_s \sim 100$  MeV e as massas dos quarks *charm*, *bottom* e *top* são muito maiores que o nucleão. Assim, devido ao facto de os quarks *up* e *down* serem tão leves compreende-se que eles desempenham um papel importante

na QCD de baixa energia. A QCD tem bastantes características que a distinguem de todos os outros tipos de interacções encontradas na física. Como consequência da não comutação das matrizes (de cor),  $\lambda_a$ , as transformações de padrão no espaço de cor, para que a densidade lagrangiana permaneça invariante, requerem que os campos de glúões se transformem com:

$$A_a^\mu \rightarrow A_a^\mu - \frac{1}{g} \partial^\mu \theta_a + f_{abc} \theta_a A_c^\mu, \quad (1.3)$$

onde  $\theta_i$ , com  $i = 1, \dots, 8$  são parâmetros reais associados à transformação de padrão para a cor:  $\psi \rightarrow \psi' = U\psi$ , onde o operador de transformação é dado por  $U = e^{-i\theta_a \lambda_a/2}$ . Em consequência da invariância da densidade lagrangiana, com respeito a esta transformação de cor, o tensor de campo dos glúões toma a forma:

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c. \quad (1.4)$$

Verifica-se assim que as partículas de troca (glúões) auto interactuam. No entanto, a QCD descreve bem o regime das altas energias, onde a teoria das perturbações pode ser aplicada, pois a QCD adquire liberdade assintótica [31, 32], isto é, para processos físicos que envolvem grandes quantidades de movimento transferidas, ou seja comprimentos de onda da ordem de  $10^{-1}$  fm (região do ultravioleta), os acoplamentos são fracos e os quarks e glúões propagam-se quase livremente. Para tratar este regime recorrer-se a teorias quirais perturbativas. Contudo no regime de baixas energias ( $\sim 1$  GeV), para pequenas quantidades de movimento transferidas, isto é, comprimentos de onda da ordem de 1 fm (região do infravermelho), o acoplamento torna-se muito forte logo a teoria de perturbações não pode ser aplicada. Neste regime não-perturbativo, a constante de acoplamento efectiva é muito elevada sendo responsável pelo confinamento. A força de atracção entre dois quarks cresce indefinidamente, à medida que estes se afastam. Compreende-se assim que a interacção entre quarks e glúões não possa ser tratada no âmbito da teoria de perturbações; logo, o tratamento perturbativo da QCD não permite descrever hadrões com massas abaixo de 2 GeV.

São as notáveis propriedades de confinamento de quarks e a quebra de simetria quiral que dão origem ao espectro massivo observado na natureza das partículas



ligadas. Assim o confinamento <sup>1.5</sup> permite explicar a não observação de quarks livres. Ainda, devido ao facto de as interações entre quarks e gluões na QCD serem não-perturbativas, o vácuo adquire uma estrutura não trivial. De facto, no estado fundamental ocorre condensação de pares de quark-anti quark (bem como condensação de gluões) <sup>1.6</sup>. A condensação de quark-anti-quark está relacionada com a quebra espontânea na densidade lagrangiana de uma simetria fundamental, a simetria quirar, produzindo para os condensados quirais valores espectáveis finitos. Verificamos que na QCD as simetrias e quebras de simetrias desempenham um papel importante e central em explicar a física. Na tabela 1.1.1 apresenta-se um resumo das simetrias relevantes para a QCD de dois sabores. De acordo com o teorema de Noether uma simetria na densidade lagrangiana dá origem a uma corrente conservada,  $j^\mu$ , o que satisfaz a relação  $\partial_\mu j^\mu = 0$ .

Simetria	Grupo	Transformação	Corrente	Manifestação na natureza
Isospin	$SU_V(2)$	$\psi' \rightarrow \exp(i\frac{\vec{\omega}\cdot\vec{\tau}}{2})\psi$	$j_\mu^k = \bar{\psi}\gamma_\mu\tau^k\psi$	Aprox. conservada
Axial	$U_A(1)$	$\psi' \rightarrow \exp(i\theta\gamma_5)\psi$	$j_{5\mu} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$	Problema $U_A(1)$
Quiral	$SU_A(2)$	$\psi' \rightarrow \exp(i\gamma_5\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}}{2})\psi$	$j_{5\mu}^k = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\tau^k\psi$	Quebrada espontaneamente
Bariónica	$U_V(1)$	$\psi' \rightarrow \exp(i\beta)\psi$	$j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$	Conservada

Tabela 1.1: Simetrias adicionais da QCD, para além da  $SU(3)_{cor}$ , no limite quirar no sector dos quarks *up* e *down*. (As correntes conservadas apresentadas na quarta coluna são consequência da invariância da densidade lagrangiana sob as transformações apresentadas na coluna três)

- A simetria de isospin observada na natureza (primeira linha da tabela 1.1.1) permite simplificar o estudo da matéria em modelos de dois sabores, pois significa que os quarks *up* e *down* têm praticamente a mesma massa e, para efeitos de cálculo é possível igualar estas massas.
- A simetria  $U_V(1)$  implica conservação do número bariónico, observado na natureza. Na segunda linha da tabela 1.1.1 o problema  $U_A(1)$  refere-se à questão

<sup>1.5</sup>Existe uma analogia entre este efeito e o caso da supercondutividade. O supercondutor exhibe diamagnetismo perfeito, em que o campo magnético é expulso do supercondutor - efeito de Meissner. De modo análogo, o vácuo da QCD é *dieléctrico de cor*, e pode ser visto como confinamento de cor, como um tipo de efeito de Meissner eléctrico na cor.

<sup>1.6</sup>A condensação de gluões deve-se ao facto de  $\mathcal{L}_{QCD}$  ser invariante sob transformações de escala e esta simetria ser quebrada ao nível quântico [33]

do porquê de não existir nenhum mesão que possa ser identificado como bóson de Goldstone correspondente à simetria axial (não é observada experimentalmente a existência de um mesão pseudoescalar com  $I = 0$  e com uma massa semelhante à do píon). Este problema foi resolvido por 't Hooft, considerando os efeitos de instantões <sup>1.7</sup>.

- A simetria quiral (apresentada na terceira linha da tabela 1.1.1) é quebrada espontaneamente no vácuo (mesmo para temperatura e densidade nula), mas para altas temperaturas e/ou densidades, espera-se que a simetria quiral seja restaurada e as massas dos quarks se aproximem do valor das respectivas massas correntes. Assim, as massas dos hádrões podem ser atribuídas aos processos de geração dinâmica de massa. Estes processos, que envolvem a quebra espontânea da simetria quiral, resultam na massa constituinte para os quarks da ordem de 300 – 400 MeV (como discutiremos no contexto do modelo de NJL). No limite quiral ( $m_u = m_d = 0$ ), o lagrangiano de QCD exhibe as simetrias  $SU(2) \otimes SU(2) \otimes U_V(1) \otimes U_A(1)$ , e que pode ser escrito na forma:  $[SU(2) \otimes U(1)]_L \otimes [SU(2) \otimes U(1)]_R$ , onde  $L$  e  $R$  indicam que as transformações que actuam só nas componentes quirais da esquerda e da direita, respectivamente. As simetrias  $SU(2)$  e  $U_A(1)$  correspondem a transformações que envolvem a matriz  $\gamma_5$  e alteram a paridade do estado em que actuam. Sabemos que simetria  $SU(2)$  é quebrada, este conhecimento é confirmado experimentalmente pelo facto de não ser observado na natureza, para cada multiplete de isospin a existência de um multiplete espelho com paridade oposta. Por outro lado, também a simetria  $U_A(1)$  é quebrada, se assim não fosse, deveria ser observado para cada hádrão a existência de um parceiro com paridade oposta. Concluí-se que existem mecanismos de quebra destas simetrias, pois experimentalmente não são encontrados tais hádrões.

---

<sup>1.7</sup>A teoria QCD é conhecida por ter soluções localizadas no 4-espaço euclidiano, que são chamados de instantões: objectos do tipo solitões não-perturbativos. [34]

### 1.1.2 O Teorema de Goldstone

O teorema de Goldstone foi primeiro sugerido por Goldstone [35] e provado por Goldstone, Salam, and Weinberg [36]. Esta secção segue a abordagem apresentada nas refs. [37, 38, 39]. O primeiro exemplo do mecanismo de Goldstone na área da física de partículas relativistas foi o modelo de Nambu Jona-Lasinio, [22], onde a simetria quiral é espontaneamente quebrada.

A quebra espontânea de simetria ocorre quando a invariância da acção não é uma invariância do vácuo. Se a simetria quebrada for contínua, surge o mecanismo de Goldstone.

Na teoria de campo clássico, a acção numa simetria contínua é descrita por um grupo de Lie  $G$ , que implica a existência de correntes conservadas  $j_\mu^a(x)$ , de acordo com o teorema de Noether.

$$\partial^\mu j_\mu^a(x) = 0, \quad (1.5)$$

Com  $a = 1, 2, \dots, n$ , onde  $n$  é o número de geradores do grupo. Integrando sobre o espaço a componente temporal das correntes  $j_\mu^a$ , definem-se as cargas conservadas  $Q^a$  correspondentes à simetria contínua (usando o teorema de Stokes, desprezando os termos de superfície):

$$Q^a \equiv \int d^3x j_0^a(x) \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dt} Q^a(t) = 0. \quad (1.6)$$

As cargas  $Q^a$  podem ser consideradas os geradores do grupo de Lie  $G$ , *ex.* a acção do lagrangiano é invariante sob transformações unitárias do campo  $\phi$ :

$$U(\theta) \in G, \quad \phi \rightarrow \phi' = U^\dagger(\theta)\phi U(\theta), \quad U(\theta) = \exp\{i\theta^a Q^a\}. \quad (1.7)$$

As transformações infinitesimais  $\theta^a \ll 1$  dos operadores  $O_i$  dos campos  $\phi$  são geradas por  $Q_a$ :

$$\delta O_i[\phi] = -i\theta^a \{Q^a, O_i[\phi]\}, \quad (1.8)$$

onde  $\{, \}$  são os parentes de Poisson. Na teoria quântica de campos, os parentes de Poisson são substituídos por um comutador, no caso de  $Q$  ser um operador bosónico, ou por um anti comutador, para o caso de  $Q$  ser um operador de fermiões.

Na teoria quântica de campos com conservação do operador corrente  $j_\mu^a(x)$ , a quebra espontânea de simetria (global) encontra-se associada à existência de um modo de frequência zero (implica uma ordem de longo alcance), o bóson de Goldstone, e é caracterizada pela condição de existência de um operador  $O_i$  para o qual

$$\langle 0 | \delta O_i[\phi] | 0 \rangle \neq 0, \quad (1.9)$$

Assim, resulta que pelo menos uma das cargas  $Q^a$  na Eq. (1.8) não aniquila o vácuo, então o vácuo não é invariante sob uma transformação de simetria contínua. Se o operador  $O_i[\phi]$  responsável pela quebra das invariâncias do vácuo for um operador composto, em vez de ser apenas um campo simples, então dizemos tratar-se de quebra dinâmica de simetria.

O teorema de Goldstone assenta no seguinte: considerar uma teoria de campo local com invariância de Lorentz e translacional, com correntes conservadas  $j_a^\mu$  relacionadas ao grupo de Lie  $G$ ; assumir que esta simetria é quebrada espontaneamente, tal que se verifica a Eq. (1.9). Logo existem partículas sem massa (os bósons de Nambu–Goldstone (NG)) com os mesmos números quânticos que o operador  $O_i[\phi]$ , que acoplam tanto com as correntes  $j_\mu^a$  como com os operadores  $O_i[\phi]$ . Os bósons NG são de facto bósons se  $O_i[\phi]$  for um operador bosónico, no entanto, em geral esta premissa não é obrigatória.

Na teoria da simetria quebrada espontaneamente, a degenerescência do vácuo está associada à existência de uma transição de fase no modelo.

No caso de o mecanismo de quebra espontânea de simetria ser muito mais forte que o da quebra explícita de simetria, obtém-se para a simetria quiral, uma relação da conservação parcial da corrente axial.

### 1.1.3 A Simetria Quiral

A simetria quiral é referida como o caso especial de simetria contínua para férmions sem massa. Os férmions na natureza têm massa, logo a simetria quiral está quebrada explicitamente.

Consideramos o lagrangiano,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu D_\mu\psi(x), \quad (1.10)$$

onde  $\gamma^\mu D_\mu$  é uma derivada covariante. Exemplificando para o caso SU(2), o lagrangiano é invariante sob transformações quirais isoescalares e isovectores, a seguir indicadas:

$$\begin{aligned} \psi \rightarrow \psi' &= e^{-i\theta\gamma_5}\psi, & \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' &= \bar{\psi} e^{i\theta\gamma_5}, \\ \psi \rightarrow \psi' &= e^{-i\gamma_5\frac{\vec{\alpha}}{2}\vec{\tau}}\psi, & \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' &= \bar{\psi} e^{i\gamma_5\frac{\vec{\alpha}}{2}\vec{\tau}}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

onde  $\theta$  e  $\vec{\alpha}$  são parâmetros arbitrários. A matriz  $\gamma_5$  é definida como

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5^\dagger, \quad \{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0, \quad \gamma_5^2 = 1. \quad (1.12)$$

Vamos exemplificar a invariância do lagrangiano para a transformação quiral isoescalar. A simetria quiral implica que o lagrangiano pode ser escrito em termos spinors "direitos" e "esquerdos",

$$\psi_L = \left(\frac{1 + \gamma_5}{2}\right)\psi, \quad \psi_R = \left(\frac{1 - \gamma_5}{2}\right)\psi, \quad (1.13)$$

tal que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\bar{\psi}_L\gamma^\mu D_\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu D_\mu\psi_R]. \quad (1.14)$$

O termo de massa  $m_0\bar{\psi}\psi$  não é invariante sob transformações quirais, pois o lagrangiano com o termo de massa escreve-se:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_L\gamma^\mu D_\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu D_\mu\psi_R - m_0\bar{\psi}_L\psi_R - m_0\bar{\psi}_R\psi_L. \quad (1.15)$$

Vemos que o termo de massa mistura os spinors "direitos" e "esquerdos". A simetria quiral dá origem à conservação da corrente axial isoescalar

$$j^{5\mu} = \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi, \quad \partial_\mu j^{5\mu} = 0. \quad (1.16)$$

Na presença do termo de massa, a simetria quiral é explicitamente quebrada resultando na não conservação da corrente, isto é:

$$\partial_\mu j^{5\mu} = m_0 \bar{\psi} i \gamma^5 \psi. \quad (1.17)$$

De modo análogo obter-se-iam as equações correspondentes para a transformação quiral isovector:

$$j^{5\mu i} = \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \tau^i \psi, \quad \partial_\mu j^{5\mu i} = m_0 \bar{\psi} i \gamma^5 \tau^i \psi. \quad (1.18)$$

Este tópico será desenvolvido no Apêndice 5.3 para o caso concreto do modelo de NJL com anomalia. A corrente  $j^{5\mu}$  define a carga  $Q^5$  como gerador da simetria quiral axial.

Dentro do formalismo, para a quebra espontânea de simetria, apresentado na Eq. (1.9), vamos considerar o seguinte operador composto pseudoescalar,  $O[\bar{\psi}, \psi] = \bar{\psi}(x) i \gamma_5 \vec{\tau} \psi(x)$ . Sob transformações infinitesimais quirais (1.11) (*i.e.*  $\theta \ll 1$ ), o operador transforma-se com

$$\delta(\bar{\psi} i \gamma_5 \vec{\tau} \psi) = -\alpha \bar{\psi} \psi. \quad (1.19)$$

Na ausência da massa corrente de quarks no lagrangiano (1.10), ocorre que

$$\langle 0 | \delta(\bar{\psi} i \gamma_5 \vec{\tau} \psi) | 0 \rangle \neq 0 \quad \implies \quad \langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle \neq 0, \quad (1.20)$$

Assim a simetria quiral é quebrada dinamicamente <sup>1.8</sup>. O teorema de Goldstone <sup>1.9</sup> implica a existência duma partícula pseudoescalar sem massa, o píon.

### 1.1.4 O Potencial Efectivo *vs* Bosão de Goldstone

Considerando um potencial efectivo  $V$  como uma função de vários campos mesónicos, admitiremos o sistema de quarks (degenerados) com massa  $m$ .

Em termos de campos compostos escalares e pseudoescalares, em SU(3) temos

<sup>1.8</sup>Quebrada espontaneamente pelo operador composto.

<sup>1.9</sup>Teorema de Goldstone: se uma simetria global continua é quebrada espontaneamente, para cada gerador de grupo quebrado deve aparecer na teoria uma partícula sem massa.

$$\sigma \sim \bar{\psi}\psi \quad (1.21)$$

$$\pi_\alpha \sim i\bar{\psi}\lambda_\alpha\gamma_5\psi \quad (1.22)$$

$$\eta' \sim i\bar{\psi}\gamma_5\psi \quad (1.23)$$

$$a_\alpha \sim \bar{\psi}\lambda_\alpha\psi, \quad (1.24)$$

onde  $\lambda_\alpha$  são as matrizes de Gell-Mann em  $SU(N_f)$ , (fazemos  $\lambda_\alpha \rightarrow \tau_\alpha$  em  $SU(2)$ ),

A quebra espontânea de simetria quiral, tem como consequência que o vácuo adquire um condensado de quarks com  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \langle \sigma \rangle = v \neq 0$ . O potencial efectivo  $V(\sigma)$  forma uma estrutura de poço duplo, fig. 1.1. A simetria  $\sigma \leftrightarrow -\sigma$  está associada com a invariância da acção sob rotação quiral de sabores. Por exemplo, em  $SU(2)$ , transformando as variáveis

$$\psi \rightarrow e^{i\pi\tau_3\gamma_5/2}\psi \quad (1.25)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{i\pi\tau_3\gamma_5/2} \quad (1.26)$$

onde  $\tau_3$  é a matriz de Pauli. A transformação deixa a acção invariante mas muda o sinal de  $\sigma$ .

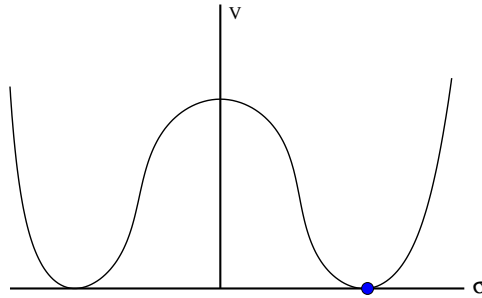


Figura 1.1: A quebra espontânea de simetria quiral é representada por um potencial efectivo de poço duplo, com 2 mínimos possíveis. Num dos mínimos, a simetria quiral é quebrada pela selecção dum valor específico para o condensado de quarks.

### 1.1.5 A Simetria Axial

Nas condições de temperatura e densidades elevadas espera-se que ocorra restauração da simetria quiral. Essas condições poderão também levar à restauração

da simetria axial. O estudo da possível restauração destas simetrias e a sua eventual interligação é um tema de investigação muito actual. Um importante aspecto do problema consiste em considerar o papel da anomalia  $U_A(1)$  na restauração da fase quiral [40, 41, 42, 43, 44, 45]. A anomalia  $U_A(1)$  da QCD, desempenha um papel importante na física de hádrons, sendo a massa do mesão  $\eta'$  uma sua manifestação. O problema  $U_A(1)$  está relacionado com facto da simetria  $U_A(1)$  não ser quebrada espontâneamente, mas sim explicitamente, pela anomalia; assim, o mesão  $\eta'$  não pode ser considerado como o bosão (sem massa) de Nambu-Goldstone, tal como os outros mesões pseudoescalares. De facto, a massa do mesão  $m_{\eta'} = 958$  MeV é da ordem da massa dos nucleões. Para estudar o problema  $U_A(1)$  é essencial analisar a susceptibilidade topológica  $\chi$  [46], que em  $SU(3)$ , relaciona  $m_{\eta'}$  através da fórmula de massa Witten-Veneziano [47, 48],

$$\frac{2N_f}{f_\pi^2}\chi = m_\eta^2 + m_{\eta'}^2 - 2m_K^2,$$

onde  $N_f = 3$  é o número de sabores e  $f_\pi$  a constante de decaimento do pião. Esta relação é confirmada por cálculos de  $\chi$  na rede, onde  $\chi \sim 180^4$ , [49]. O efeito da anomalia  $U_A(1)$  tem sido estudado para temperaturas finitas, sendo pertinente analisar se a restauração da simetria quiral ocorre simultaneamente com a restauração da simetria  $U_A(1)$  [46, 50].

Nos trabalhos [44] foi explorado o tema da restauração da simetria axial  $U_A(1)$  usando o modelo Nambu-Jona-Lasinio de 3 sabores  $SU(3)$ , que incorpora de modo explicito da anomalia axial, através da interacção de 't Hooft. Muitas investigações fenomenológicas [51, 52, 53] foram dedicadas a contribuição da quebra da simetria  $U_A(1)$ , no processo de geração das massas de mesões.

O lagrangiano da QCD é, por construção, simétrico perante as transformações de padrão  $SU(3)$  no espaço da cor. Assim a QCD tem uma simetria quiral (aproximada)  $U(3)\otimes U(3)$ , com a sua sub-simetria  $U_A(1)$  sendo explicitamente quebrada pela anomalia axial [10]. Neste contexto a quebra da simetria quiral e da anomalia  $U_A(1)$ , desempenham um papel importante permitindo estudar, por exemplo, para



a QCD de baixa energia:

- o octeto dos mesões pseudoescalares leves ( $\pi, K, \eta$ ) aproximadamente como bosões de Goldstone;
- os mesões  $\eta - \eta'$  e as violações da regra de Okubo-Zweig-Iizuka (OZI), que lhe estão associadas.

## 1.2 O Modelo de Nambu Jona-Lasino - Enquadramento e Motivação

Os estudos de QCD, a temperatura e densidade finitas, têm motivado muitos físicos da área da física das partículas, ao longo destes últimos anos, porque fornecem elementos relevantes para a compreensão da física: das colisões de iões pesados, do estudo da cosmologia e das estrelas de neutrões. Nos estudos experimentais, espera-se que os feixes de alta energia nas colisões de iões pesados ultra-relativistas, possam permitir a observação em pequenas escalas de distância e encontrar as evidências de plasma de quarks e gluões, consequência da restauração de simetrias e desconfinamento. Deste modo, a QCD desempenha um papel fundamental na compreensão da origem das interacções fortes e, neste domínio, é objecto importante de estudo a simetria quiral, onde notamos que é conservada tanto a QCD como no modelo que propomos estudar.

A teoria prevê a restauração da simetria quiral acima de uma determinada temperatura e/ou densidade finita. Esta restauração é indicada pelo desaparecimento dos condensados de quarks  $\langle \bar{q}q \rangle$ , considerados "parâmetros de ordem"<sup>1.10</sup> e ainda as massas dos quarks tendem para as respectivas massas correntes. Evidências experimentais relacionadas com a transição de fase quiral foram analisadas recentemente [54].

Os seguintes aspectos estão subjacentes à utilização de modelos de tipo NJL.

- Os modelos inspirados no modelo de NJL [22] são dos modelos efectivos mais utilizados para estudar as interacções fortes, devido à sua simplicidade e capa-

---

<sup>1.10</sup>Em rigor deve chamar-se a  $\langle \bar{q}q \rangle$  quase parâmetro de ordem, ele só é um parâmetro de ordem no limite quiral.

cidade de descrever hadrões a baixas energias. O surgimento do condensado de quarks constitui o cenário *standard* para a quebra espontânea de simetria. O parâmetro de ordem neste modelo é o condensado, que surge quando a "força de interacção" excede um valor crítico.

- Assim, a estrutura não perturbativa do vácuo é caracterizada pela existência de condensados  $\langle q\bar{q} \rangle = 0$ ; pelo aparecimento de partículas pseudoescalares leves, que consideramos (quasi) bosões de Goldstone [35, 36] (a existência do condensado é confirmada por simulações numéricas na rede).

Os modelos de tipo NJL [55, 56, 44] permitem tratar modos mesónicos nas fases simétrica e assimétrica. Este cenário permite focar a atenção no espectro dos hadrões *vs* paridade, cuja degenerescência é uma indicação de uma restauração efectiva da simetria quiral. Em particular, os mesões escalares e os seus parceiros (quirais) pseudoscalares (opostos em paridade), são massivos e degenerados na fase simétrica. O modelo NJL permite, numa mesma abordagem, estudar ambos os tipos de mesões (escalares e pseudoescalares), o processo de quebra de simetria quiral bem como a sua restauração a densidades e temperaturas finitas [57].

O modelo de Nambu Jona-Lasinio foi primeiro introduzido para descrever a interacção nucleão-nucleão via interacção de contacto de quatro fermiões. Mais tarde, o modelo foi adaptado para estudar os quarks, constituindo um modelo efectivo para a QCD. Historicamente o modelo NJL remonta ao ano 1961, época onde nem os quarks nem a QCD eram ainda conhecidos, contudo existiam já indicações sobre a conservação (parcial) do vector corrente axial - simetria quiral.

A ideia de Nambu e Jona-Lasinio [22, 23], consistiu em considerar que o *gap* de massa no espectro de Dirac (para os nucleões) pode ser gerado de modo análogo ao *gap* de energia dum superconductor na teoria BCS [58]. Com esse objectivo, os autores introduziram no lagrangiano, para o campo de nucleões  $\psi$ , uma interacção pontual de quatro fermiões, conservando a simetria quiral [23],

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + G \left\{ (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2 \right\}, \quad (1.27)$$

onde  $m$  é a massa do nucleão (pequena),  $\vec{\tau}$  é a matriz de Pauli que actua no espaço de isospin e  $G$  uma constante de acoplamento.

Após o desenvolvimento da QCD, o modelo NJL foi adaptado para permitir uma descrição de sistemas de quarks Mas, o facto de este modelo não possuir confinamento limita de certo modo a sua aplicabilidade. No entanto, existem muitas situações físicas onde a simetria quiral é o aspecto mais relevante a ter em conta e os detalhes do confinamento são secundários.

O lagrangiano original do modelo NJL Eq. (1.27) foi adaptado para modelo de quarks, onde  $\psi$ , representa um campo de quarks de 3 cores (com 2 e 3 sabores, em SU(2) e SU(3), respectivamente). Foram posteriormente apresentados trabalhos cuja forma de escrever os termos de interacção foi mais abrangente. 't Hooft introduziu no modelo uma interacção de seis pontos, que pode ser tratada como uma interacção efectiva de quatro pontos.

O modelo NJL está bem adaptado para o estudo da matéria de quarks desconfinada, neste âmbito destacam-se os artigos de revisão de T. Hatsuda e T. Kunihiro [33], S. P. Klevansky [59] e U. Vogl e W. Weise [60].

Como já referimos, o presente trabalho é dedicado ao modelo NJL de dois sabores com anomalia. Pretende-se estudar o efeito da temperatura na restauração da simetria quiral da simetria axial e analisar o comportamento dos mesões  $\pi$ ,  $\sigma$ ,  $\eta$  e  $a_0$ , em particular a degenerescência dos parceiros quirais.

Fazemos notar que este tipo de problemática já foi objecto de estudo no modelo de NJL em SU(3) [50]. A motivação para fazer este estudo em SU(2) prende-se com o facto de em SU(3) poderem existirem efeitos cumulativos (inerentes ao modelo) que poderão interferir no comportamento dos vários observáveis que interessa estudar. Nesse sentido, estudar o modelo em SU(2), pode permitir uma melhor compreensão dos fundamentos da física associada aos vários mecanismos que envolvem os processos da restauração das simetrias.

## 1.3 O Modelo de Nambu Jona-Lasino e a sua Aplicação a Diferentes Áreas

Existem variados exemplos onde as ideias e o formalismo desenvolvido no contexto da matéria condensada se revelaram muito proveitosos quando adaptados para a física de partículas. Mas também, muitas das técnicas da teoria de muitos corpos, utilizadas na matéria condensada, tiveram a sua motivação no desenvolvimento da física das altas energias. O modelo de NJL incorpora conceitos comuns às duas áreas, pelo que é pertinente abrir aqui um parêntesis sobre este tema.

De facto a teoria da supercondutividade formulada por Ginzburg-Landau, bem como a teoria microscópica de BCS, fornecem entendimento para variados outros domínios da física: física de baixa temperatura, física nuclear e física de partículas. Apresentam-se alguns exemplos de como a teoria de BCS se relaciona nestes domínios.

- Permite compreender a razão porque o isótopo  $U^{238}$  requer neutrões de alta energia para fissão, enquanto o  $U^{235}$  necessita apenas de neutrões térmicos.
  - As forças nucleares entre nucleões são forças atractivas de curto alcance; neste sentido são similares às forças atractivas num supercondutor, produzidas entre electrões por fonões virtuais. Como num metal, estas forças atractivas levam à formação de pares, neste caso formam-se pares de nucleões. No  $U^{238}$  os neutrões encontram-se emparelhados, enquanto no  $U^{235}$  esta situação não se verifica (existem em número ímpar). Quando adicionamos um neutrão ao  $U^{238}$ , deixa de existir um par, custando uma quantidade de energia igual à energia de *gap* para emparelhar nucleões; por esta razão são requeridos neutrões de alta energia para a fissão do  $U^{238}$ , tornando-o inútil como combustível nuclear de fissão. Por contraste, quando adicionamos um neutrão ao  $U^{235}$  este forma um par com o neutrão desemparelhado, libertando uma quantidade de energia  $2\Delta$ ; esta energia desestabiliza o núcleo causando a fissão.
- Fornece explicação sobre qual a razão pela qual electrões interagem fortemente com prótons, mas fracamente com neutrões.

- Os electrões interagem com os prótons via força eléctrica, envolvendo a troca de fótons virtuais (sem massa). A interacção de electrões com um neutrão ocorre via força fraca, envolvendo a troca de um bosão vectorial massivo, sendo então que a força nuclear seja de curto alcance: o princípio de incerteza de Heisenberg mostra que um bosão virtual pesado pode apenas existir por curtos períodos de tempo.

No universo primitivo, as forças electromagnéticas e forças fracas eram ambas equivalentes mediadas por bosões sem massa.

Acredita-se que a massa do bosão W surge devido a um tipo de efeito Meissner (cósmico), assim o universo primitivo desenvolveu um condensado de bosões de Higgs. De modo análogo, como no caso do efeito Meissner magnético, o efeito Meissner electro-fraco fornece massa aos bosões W e Z, excluindo do universo os campos fracos e tornando a força fraca numa força de curto alcance.

- Justifica a razão para o facto de o Hélio  $H_e^3$ , um fluido de fermiões, se tornar um superfluido a muito baixa temperatura,  $T \sim 1$  mK.
  - O Hélio-3 torna-se superfluido a baixas temperaturas porque os átomos de Hélio-3 formam um condensado de pares em analogia com a supercondutividade. A interacção entre átomos de Hélio é repulsiva, não favorecendo pares de ondas-s, formando antes pares de Cooper cuja função de onda contenha um nodo, tal que tendencialmente afasta os átomos, baixando assim sua energia.

Notamos que Y. Nambu teve como formação inicial estudos na área da matéria condensada, dedicando-se à física das partículas mais tarde. É particularmente interessante a sua conferência intitulada "A Superconductor Model of Elementary Particles and its Consequences" (1960 Midwest Conference in Theoretical Physics, Purdue University):

*Em anos recentes tem sido frequente aplicar técnicas de teoria de campo a problemas de muitos corpos existentes na física do estado sólido e na física nuclear. Isto não é nenhuma surpresa pois, numa teoria de campo quantizada, existe sempre a possibilidade de criação de pares (reais ou virtuais), que é essencialmente um problema de muitos corpos. Estamos familiarizados com um certo número de fortes analogias entre ideias e problemas na teoria das partículas elementares e as correspondentes em física do estado sólido. Por exemplo, o mar de Fermi de electrões num metal é análogo aos electrões do mar de Dirac no vácuo, e nós falamos de electrões nestes dois casos. Algumas pessoas devem ter pensado no mesão de campo como algo como o campo de Coulomb blindado. Certamente, em partículas elementares estamos perante mais propriedades de simetrias e de invariância do que na outra, e analogias cegas são por vezes perigosas.*

Na comunidade da física da matéria condensada, existe uma crescente atenção para o estudo das propriedades electrónicas da folha de grafeno, sintetizado pela primeira vez no ano 2004 [61]. Também, físicos dos domínios das altas energias têm, recentemente, dedicado ao estudo deste material [62]. O grafeno pertence a uma classe mais ampla de sistemas planares na matéria condensada, que inclui, por exemplo os supercondutores de alta temperatura crítica. O grafeno é uma forma alotrópica de carbono com uma estrutura bidimensional de favo de mel (com hibridação  $sp_2$ ) que define uma estrutura de bandas peculiar [63] com dois pontos nodais na zona de Brillouin e, onde as superfícies energéticas (com massa efectiva nula) são cónicas e as bandas de condução e de valência se tocam (pontos de Dirac degenerados, com lei de dispersão linear <sup>1.11</sup>). Estes factos dão origem a uma dinâmica electrónica do tipo relativista [64], extraordinário para a matéria condensada.

Para o grafeno, o análogo da constante de estrutura fina é  $\alpha_g \sim 300\alpha$ , onde  $\alpha$  é a constante de estrutura fina na electrodinâmica quântica (QED); assim as propriedades de baixa energia no grafeno apresentam diferenças relativamente à QED, pois trata-se dum regime de acoplamento muito forte. Este aspecto fornece excitantes

---

<sup>1.11</sup>Esta situação é também encontrada na vizinhança dos quatro pontos nodais nos supercondutores de alta temperatura crítica, com simetria de onda- $d$ . Tendo sido também, recentemente, observadas estas propriedades no condutor orgânico  $\alpha - (BEDT - TTF)_2I_3$ , na vizinhança dos "cones de Dirac".

oportunidades para estudar as teorias de acoplamentos fortes, num análogo com a matéria condensada, sendo que neste caso as observações experimentais podem ser levadas a cabo com equipamentos economicamente mais viáveis <sup>1.12</sup>.

De modo notável, a física do grafeno, descrita pelo campo de Dirac em  $2 + 1$  dimensões, com quatro componentes  $\phi_a$ ,  $a = 1, 2, 3, 4$ , satisfaz a simetria quiral  $U(2N_f)$  (com  $N_f = 2$  no grafeno). Esta simetria pode ser quebrada espontaneamente, gerando um *gap* no espectro das quasi partículas. Contudo, do ponto de vista experimental, este tema é ainda uma questão em aberto, no entanto foi reportado na referência [64] um *gap* induzido pelo substrato. Do ponto de vista teórico, a geração dinâmica do *gap* é descrita por uma transição de fase quântica devido à formação de estados ligados partícula-antipartícula <sup>1.13</sup>.

Contudo, neste regime de acoplamento muito forte, a análise, mesmo que qualitativa, deverá ser não-perturbativa. Isto é especialmente verdadeiro para o grafeno no vácuo (grafeno suspenso, sem substrato), onde  $\alpha_g$  atinge o valor máximo, enquanto na presença do substrato este valor é parcialmente blindado.

Vários trabalhos abordaram o estudo do grafeno numa aproximação não-perturbativa, mas na ref. [65] foi investigado um modelo para o limite de acoplamento forte.

Nestas condições, o formalismo do modelo NJL no sector  $SU(2)$  (dois sabores) constituiu, também, uma motivação para o estudo deste novo material, tão interessante no contexto da física da matéria condensada.

Sistema Físico	Simetria Quebrada
Ferromagnetos	Invariância Rotacional
Cristais	Invariância Translacional
Supercondutores	Invariância de Padrão Local
Superfluido $^4He$	Invariância de Padrão Global

Tabela 1.2: Outros exemplos de quebra de simetria para diferentes sistemas físicos relacionados à matéria condensada.

Também, por outro lado, estudos centrados no grafeno permitem sugerir novas

<sup>1.12</sup>De facto as experiências na área da matéria condensada necessita de aparatos experimentais mais baratos que os grandes aceleradores de partículas, que constituem o domínio experimental dos físicos de partículas. As experiências neste material podem mimetizar certos aspectos relevantes para as teorias da física de partículas.

<sup>1.13</sup>No contexto do grafeno, também habitualmente designado por partícula-lacuna.

abordagens para a investigação na física de altas energias. Em particular, o último trabalho de Miransky [66] segue esta orientação. De facto, neste trabalho, é revisto os resultados obtidos para o grafeno e constata-se que o campo magnético constituiu um forte catalisador da quebra espontânea da simetria quiral [67, 68]. Tendo sido objectivo desse trabalho revelar e descrever algumas das propriedades universais de tal dinâmica, para o caso de matéria relativista densa [69, 70]. Estudos recentes de dinâmica similar, dedicados ao grafeno [71] em 2+1 D, revelaram vários tipos de parâmetros de ordem cujos análogos não foram ainda discutidos no contexto de modelos relativistas em 3+1 D (ver ref. [72] para primeiros estudos do fenómeno de catálise magnética em grafeno). Isto motivou os investigadores para reexaminar as propriedades da matéria relativista densa na presença de um campo magnético em 3+1 D. Como mostraram, este efeito, pode ter profundas implicações para a física das estrelas compactas bem como para as colisões de iões pesados. Nesse artigo, foi utilizado o modelo de NJL, para ilustrar o efeito de modo mais claro possível.

Em física nuclear um tema importante está relacionado à ideia [73] da condensação do mesão- $\pi$  de Goldstone. Como consequência da quebra espontânea da simetria quiral, o píão surge como o bóson de Goldstone, cuja massa tende para zero no limite quiral, tendo sido esta a permissão fundamental para o trabalho de Goldstone, na sua derivação do teorema geral de Goldstone [35]. Experimentalmente, não foi ainda detectada a existência de excitações colectivas (leves) nucleão-antinucleão. A densidade nuclear normal não é suficiente para gerar condensação, é por isso que este efeito nunca foi observado - para induzir condensação seria necessário compressões muito fortes que, possivelmente, poderão ser realizados só em estados da matéria nuclear exóticos. Recentemente estudos teóricos, e em particular experimentais na matéria condensada, em supercondutores de alta temperatura crítica, revelaram a condensação de magnões de Goldstone - efeito análogo ao da condensação do mesão- $\pi$ , constituindo, também deste modo, um terreno para sondar esta fenomenologia própria da física nuclear e de altas energias [74].

Outro exemplo sobre a implementação das estratégias e formalismos utilizados na matéria condensada, recentemente aplicados à física nuclear [75, 76] e à física das



altas energias, destaca-se o recente trabalho de Rozynek, *et al* ("Nonextensive effects in the Nambu-Jona-Lasinio model of QCD") [77]. Este implementa os princípios da mecânica estatística não-extensiva de Tsallis [78] ao modelo NJL, tendo esse estudo como motivação, e referência principal, o trabalho, também, recentemente publicado pelos autores P. Costa, M.C. Ruivo e C.A. de Sousa [50].

Nota-se a versatilidade do modelo NJL, usado, durante décadas, nas áreas da física nuclear e de partículas, está recentemente a ser associado a outras áreas relacionadas com a matéria condensada [79, 66]. A utilização do modelo no contexto da física de partículas pode permitir uma aprendizagem útil nestas diferentes áreas.

# Capítulo 2

## Formalismo

Neste capítulo estudaremos o formalismo matemático do modelo NJL, começando por analisar as propriedades dos quarks e mesões no vácuo e posteriormente generalizamos os resultados para temperatura finita e potencial químico finito. No presente trabalho estudar-se-á o sistema de quarks de dois sabores, três cores, e será introduzido a anomalia, isto é, introduz-se no lagrangiano um termo que actua como uma fonte da anomalia. Note-se que os efeitos da anomalia tem sido intensivamente estudados no modelo de NJL em  $SU(3)$  com termo de  $t'$  Hooft [59, 33, 44, 80, 50] e, mais recentemente, a possibilidade de restauração da simetria axial e seus efeitos em diversos observáveis [46, 44, 80, 50]. O modelo em  $SU(2)$ , pela sua simplicidade, permite isolar alguns aspectos do problema, pelo que o seu estudo pode fornecer um contributo relevante para o entendimento da física associada à quebra e restauração da simetria  $U_A(1)$ . Notemos que embora o modelo de NJL em  $SU(3)$  com anomalia tenha sido objecto de um estudo mais intensivo do que o seu equivalente em  $SU(2)$ , este último também tem tido diversas aplicações. A anomalia no modelo  $SU(2)$  está já presente no modelo original de NJL [22, 23], através de uma transformação de Fierz, e foi considerado em outros trabalhos (ver ref. [81] e referências aí indicadas). No entanto, o estudo da quebra e restauração da simetria  $U_A(1)$  neste modelo não foi até agora considerada e é uma contribuição original do presente trabalho.

## 2.1 O Modelo de Nambu Jona-Lasino com Anomalia

O lagrangiano que aqui iremos estudar considera um termo adicional que, embora invariante quirial, quebra explicitamente a simetria axial, sendo responsável pela introdução deste conceito de anomalia no modelo NJL no sector  $SU(2)$ . Assim, o presente estudo constitui uma generalização do modelo original de NJL, permitindo analisar em  $SU(2)$  os efeitos associados à anomalia.

Consideramos o seguinte lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i \not{\partial} - m)q + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \quad (2.1)$$

$$\mathcal{L}_1 = g_1 \left[ (\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2 + (\bar{q}\vec{\tau}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5q)^2 \right] \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_2 = g_2 \left[ (\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2 - (\bar{q}\vec{\tau}q)^2 - (\bar{q}i\gamma_5q)^2 \right] \quad (2.3)$$

O lagrangiano 2.1 é invariante quirial (ver Apêndice 5.2) no limite em que as massas correntes dos quarks tendem para zero. Neste lagrangiano, ambos os termos  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  são invariantes sob transformações do tipo:  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ . Notamos que na situação  $g_1 \equiv g_2 \equiv g/2$ , recuperamos o lagrangiano NJL original Eq. 1.27. No entanto, a componente  $\mathcal{L}_2$  faz com que o lagrangiano não seja covariante sob transformações  $U_A(1)$ . Este termo, que pode ser escrito na forma de um determinante (ver apêndice 5.4.2), pode ser identificado como o induzido por instantões, de acordo com  $t'$  Hooft, e quebra explicitamente a simetria axial, mesmo no limite quirial.

Procedendo ao rearranjo dos quatro tipos de campos no lagrangiano de interação, notando  $g_s = (g_1 + g_2)/2$  e  $g_a = (g_1 - g_2)/2$ , temos:

$$\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = g_s \left[ (\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2 \right] + g_a \left[ (\bar{q}\vec{\tau}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5q)^2 \right]. \quad (2.4)$$

Vamos neste trabalho utilizar um método relacionado com o formalismo dos integrais de caminho de Feynman - método da bosonização. Esta estratégia permite obter relações entre os observáveis, tais como os condensados, constantes de acoplamento e decaimento, etc. A bosonização de uma teoria fermiónica considera para um lagrangiano original de fermiões a transformação num lagrangiano equivalente que passará a depender de graus de liberdade bosónicos [57]. Deste modo, para as baixas energias, a acção efectiva bosónica equivalente reflecte a dinâmica da acção original do modelo de NJL.

A hadronização processa-se via a funcional geradora:

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{N} \int Dq \int D\bar{q} \exp \left[ i \int d^4x (\mathcal{L}(\bar{q}, q) + \bar{q}\eta + \bar{\eta}q) \right], \quad (2.5)$$

onde podemos aplicar as técnicas de bosonização usuais. Assim, procedemos à introdução de campos auxiliares da forma:

$$c_1 = \int D\sigma \exp \left[ i \int d^4x \left( -\frac{\sigma^2}{2g_s} \right) \right] \quad (2.6)$$

$$c_2 = \int D\pi \exp \left[ i \int d^4x \left( -\frac{\pi^2}{2g_s} \right) \right] \quad (2.7)$$

$$c_3 = \int D\eta' \exp \left[ i \int d^4x \left( -\frac{\eta'^2}{2g_a} \right) \right] \quad (2.8)$$

$$c_4 = \int Da_0 \exp \left[ i \int d^4x \left( -\frac{a_0^2}{2g_a} \right) \right] \quad (2.9)$$

efectuando as seguintes mudanças de variáveis

$$\sigma' \rightarrow \sigma \pm g_s(\bar{q}q) \quad (2.10)$$

$$\pi' \rightarrow \pi \pm g_s(\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q) \quad (2.11)$$

$$\eta' \rightarrow \eta \pm g_a(\bar{q}i\gamma_5q) \quad (2.12)$$

$$a_0' \rightarrow a_0 \pm g_a(\bar{q}\vec{\tau}q) \quad (2.13)$$

definimos uma nova constante  $C$ , na forma:

$$C = \int D\sigma D\pi D\eta Da_0 \times \exp \left\{ -i \int d^4x \left[ \frac{\sigma'^2}{2g_s} + \frac{\pi'^2}{2g_s} + \frac{\eta'^2}{2g_a} + \frac{a_0'^2}{2g_a} \right] \right\}.$$

Introduzindo  $C$  na funcional geradora, Eq. 2.5, temos:

$$\begin{aligned} Z[\eta, \bar{\eta}] &= \int Dq D\bar{q} D\sigma D\pi D\eta Da_0 \\ &\times \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \bar{q}(i\rlap{\not{\partial}} - m)q - \frac{\sigma^2 + \pi^2}{2g_s} - \frac{\eta^2 + a_0^2}{2g_a} \right. \right. \\ &\left. \left. + \sigma\bar{q}q + \pi\bar{q}i\gamma_5\bar{\tau}q + \eta\bar{q}i\gamma_5q + a_0\bar{q}\bar{\tau}q + \bar{q}\eta + \bar{\eta}q \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

a integração sobre os campos fermiônicos na equação 2.14, considera:

$$\int Dq D\bar{q} \exp \left\{ i \int d^4x \left( \bar{q}(i\rlap{\not{\partial}} - m + \sigma + i\gamma_5\tau\pi + \eta i\gamma_5 + a_0\tau)q + \eta\bar{q} + \bar{\eta}q \right) \right\}, \quad (2.15)$$

onde identificamos o propagador efectivo de fermiões

$$(i\rlap{\not{\partial}} - m + \sigma + i\gamma_5\tau\pi + \eta i\gamma_5 + a_0\tau)\delta^4(x - y) = S_F^{-1}(x - y), \quad (2.16)$$

apresentamos, então a equação 2.15 na forma:

$$\int Dq D\bar{q} \exp \left[ i \int d^4x d^4y \left( \bar{q}(x)S_F^{-1}(x - y)q(y) + \bar{q}(x)\eta(y) + \bar{\eta}(x)q(y) \right) \right]. \quad (2.17)$$

Para a integração sobre os campos fermiônicos, fazendo uso da propriedade das variáveis de Graussmann [38],

$$\int \prod_{i,j} \pi_i \partial\theta_i^* \partial\theta_i \exp [\theta_i^* M_{ij} \theta_j + \theta_i^* C_i + \theta_i C_i^*] = N \mathbf{det} M_{ij} \exp (\theta_i^* M_{ij}^{-1} \theta_j),$$

obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} &\int Dq D\bar{q} \exp \left[ i \int d^4x d^4y \left( \bar{q}(x)S_F^{-1}(x - y)q(y) + \bar{q}(x)\eta(y) + \bar{\eta}(x)q(y) \right) \right] \\ &= N \mathbf{det} \left[ -iS_F^{-1}(x - y)|_{x=y} \right] Z_f[\eta, \bar{\eta}], \end{aligned} \quad (2.18)$$

com  $Z_f[\eta, \bar{\eta}] = \exp \left[ -i \int d^4x \int d^4y \bar{\eta}(x) S_F(x-y) \eta(y) \right]$ . Finalmente, a funcional geradora para bósons escreve-se como:

$$Z = N \int D\sigma \int D\pi \int D\eta \int Da_0 \exp \left( i \int d^4x I_{eff} \right)$$

com a acção efectiva dada por:

$$\begin{aligned} I_{eff} = & -i \text{Tr} \ln \left( -i \not{\partial} - m + \sigma + i\gamma_5 \tau \pi + i\gamma_5 \eta + a_0 \tau \right) \\ & - \frac{\sigma^2 + \vec{\pi}^2}{2g_s} - \frac{\eta^2 + \vec{a}_0^2}{2g_a}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Esta técnica permite obter para o regime de baixa energia, os graus de liberdade naturais no sector mesónico. A notação  $\text{Tr}$  significa efectuar a integração sobre os momentos e a operação "traço" sobre os índices discretos ( $N_f = 2$  e  $3$  cores  $N_c = 3$ ).

### 2.1.1 A Equação do *Gap*

Para determinar as equações do *gap* vamos minimizar a acção efectiva 2.19 em ordem aos campos clássicos  $\Phi = \sigma, \pi, \eta, a_0$ :

$$\frac{\partial I_{eff}}{\partial \Phi} \Big|_{\Phi=\Phi_c} = 0. \quad (2.20)$$

Assim, a primeira variação da acção permite escrever a equação do *gap* na forma:

$$M_i = m_i - 2g_s \langle \bar{q}_i q_i \rangle, \quad (2.21)$$

onde identificamos  $i = u, d$  e  $M_i$  como a massa constituinte dos quarks. É possível ajustar os parâmetros tal que obtemos soluções não triviais  $M \neq m$ , produzindo, em analogia com a teoria BCS, um *gap*  $\Delta E = 2M$ ; os condensados de quarks são determinados por:

$$\langle \bar{q}_i q_i \rangle = -i \text{Tr} \frac{1}{\hat{p} - M_i} = -i \text{Tr} S_i(p), \quad (2.22)$$

sendo  $S_i(p)$  a função de Green dos quarks, onde  $S_i(p) = (\not{p} - M_i + i\varepsilon)^{-1}$  é o propagador de quarks. Efectuado o traço sob o espaço de Dirac, da cor e do sabor,

obtém-se:

$$M_i = m + 8N_f N_c g_s i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{M_i}{p^2 - M_i^2 + i\varepsilon}, \quad (2.23)$$

onde  $N_f = 2$  e  $N_c = 3$  são respectivamente o número de sabores e cores, e escrevemos o condensado de quarks na forma:

$$\langle \bar{q}_i q_i \rangle = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S_i(p). \quad (2.24)$$

### 2.1.2 Espectro de Massa dos Mesões

A matriz-T de pares de quark-antiquark é da forma:

$$T_{\mathcal{M}}(q^2) = \frac{2g}{1 - 2g \Pi_{\mathcal{M}}(q^2)}, \quad (2.25)$$

onde

$$\Pi_{\mathcal{M}}(q^2) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\mathcal{O}_{\mathcal{M}} S(p+q) \mathcal{O}_{\mathcal{M}} S(p)], \quad (2.26)$$

é o operador de polarização para o sistema quark-antiquark, relativo ao canal com números quânticos  $\{\mathcal{M}\}$ , no sector mesónico. O lagrangiano Eq. (2.1-2.5) comporta 4 canais, assim na matrix-T Eq. (2.25) identificamos os mesões  $\pi$  e  $\sigma$ , associados a  $g \equiv g_s$ , e identificamos os mesões  $\eta$  e  $a_0$  associados a  $g \equiv g_a$ . Para um lagrangiano como apresentado na Eq. (1.27) temos o canal sigma ( $\mathcal{O}_{\sigma} = \mathbb{1}$ ) e três canais de piões ( $\mathcal{O}_{\pi_a} = i\gamma_5 \tau_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ ;  $\{\pi^+, \pi^-, \pi^0\}$ ). No caso geral, consideramos ainda os mesões  $\eta$  e  $a_0$  associados a  $g \equiv g_a$ , onde temos o canal  $\eta$  ( $\mathcal{O}_{\eta} = i\gamma_5$ ) e três canais de  $a_{0(a)}$  ( $\mathcal{O}_{a_{0(a)}} = \tau_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ ;  $\{a_0^+, a_0^-, a_0^0\}$ ). Após proceder ao cálculo dos respectivos traços, obtemos  $\Pi_{\sigma}(q^2)$ ,  $\Pi_{\pi_a}(q^2)$ ,  $\Pi_{\eta}(q^2)$  e  $\Pi_{a_{0(a)}}(q^2)$ .

A análise da estrutura do pólo na matriz-T permite-nos determinar as propriedades dos mesões:

$$1 - 2g_{s,a} \Pi_{\mathcal{M}}(q^2 = M_{\mathcal{M}}^2) = 0 \quad . \quad (2.27)$$

Verificamos, de acordo com o teorema de Goldstone, que na situação do limite quiral  $m = 0$ , obtém-se  $m_{\pi} = 0$ . No entanto, para massa corrente de quarks  $m \neq 0$ , resulta

$m_\pi \neq 0$ . A constante de acoplamento mesão-quark,  $g_{\mathcal{M}qq}$ , relaciona-se com o resíduo obtido no pólo

$$g_{\mathcal{M}qq}^{-2} = \left. \frac{d\Pi_{\mathcal{M}}}{dq^2} \right|_{q^2=M_{\mathcal{M}}^2}.$$

## Mesões Pseudoescalares

Para calcular o espectro de massa dos mesões, expandimos sobre o campo mesónico, a acção efectiva 2.19. Vamos primeiro considerar o sector pseudoescalar, que representamos pelo campo  $\varphi^p$ , onde  $p = s, a$ , representa respectivamente, os mesões  $\pi$ , associado a  $g \equiv g_s$ , e  $\eta$  associado a  $g \equiv g_a$ . Mantendo os termos de 2ª ordem na expansão, obtemos a acção efectiva de mesões:

$$I_{eff}^{(2)}[\varphi] = -\frac{1}{2}\varphi^p [g^{-1} - \Pi^P(P)] \varphi^p = -\frac{1}{2}\varphi^p (D^P(P))^{-1} \varphi^p, \quad (2.28)$$

onde  $\Pi^P(P)$  é o operador polarização, que no espaço dos momentos se escreve:

$$\Pi_{ab}^P(P) = iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr}_D [S_i(p)(i\gamma_5\tau_a)S_j(p+P)(i\gamma_5\tau_b)]. \quad (2.29)$$

Na equação Eq. 2.28 identificamos o inverso do propagador dos mesões pseudoescalares,  $(D_{ab}^P(P))^{-1}$ . As massas dos mesões, são calculadas no referencial em repouso,  $\mathbf{P} = 0$ , com a seguinte condição sobre o pólo do propagador,

$$1 - 2g\Pi_{ij}^P(P_0 = M, \mathbf{P} = \mathbf{0}) = 0. \quad (2.30)$$

Assim, no referencial em repouso, a condição  $D_\pi^{-1}(P_0 = M_\pi, \mathbf{P} = 0) = 0$  e  $D_\eta^{-1}(P_0 = M_\eta, \mathbf{P} = 0) = 0$  fornecem-nos as massas de  $\pi$  e  $\eta$ .

Procedendo ao cálculo do traço na Eq. 2.29, o operador polarização para os mesões pseudoescalares, toma a forma:

$$\Pi_{ij}^P(P_0) = 4 \left( (I_1^i + I_1^j) - [P_0^2 - (M_i - M_j)^2] I_2^{ij}(P_0) \right), \quad (2.31)$$



para regularizar os integrais introduzimos um parâmetro de *cutoff*  $\Lambda$ , assim  $I_1^i$  e  $I_2^{ij}(P_0)$  são:

$$I_1^i = iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - M_i^2} = \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{\mathbf{p}^2 d\mathbf{p}}{E_i}, \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} I_2^{ij}(P_0) &= iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - M_i^2)((p + P_0)^2 - M_j^2)} \\ &= \frac{N_c}{4\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{\mathbf{p}^2 d\mathbf{p}}{E_i E_j} \frac{E_i + E_j}{P_0^2 - (E_i + E_j)^2}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

sendo  $E_{i,j} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M_{i,j}^2}$  a energia de quark.

Quando a massa do mesão exceder a soma das massas constituintes dos seus quarks,  $P_0 > M_i + M_j$ , é necessário considerar a parte imaginária do integral Eq. 2.33 [82], pois nessa situação o mesão pode decair no par quark-antiquark que o constituí, deixando de ser um estado ligado e passando a ser um estado ressonante. Este comportamento é consequência do modelo de NJL não possuir confinamento. Foi por isso desenvolvido um modo de ultrapassar esta limitação - trata-se da chamada "aproximação de largura finita". Com esta técnica a Eq. 2.30 tem que ser calculada na sua forma complexa, de modo a determinar a massa da ressonância,  $M_M$ , bem como a sua largura de decaimento  $\Gamma_M$ . Para isso, assumimos que a Eq. 2.30 tem soluções do tipo:

$$P_0 = M_M - \frac{1}{2}i\Gamma_M. \quad (2.34)$$

Considerando  $P_0^2 \rightarrow P_0^2 - i\epsilon$ , obtemos o integral na forma

$$I_2^{ij}(P_0) = \frac{N_c}{4\pi^2} \mathcal{P} \int_0^\Lambda \frac{\mathbf{p}^2 d\mathbf{p}}{E_i E_j} \frac{E_i + E_j}{P_0^2 - (E_i + E_j)^2} + i \frac{N_c}{16\pi} \frac{p^*}{(E_i^* + E_j^*)}, \quad (2.35)$$

onde  $\mathcal{P}$  significa o valor principal de Cauchy, o momento vem dado por:

$$p^* = \frac{\sqrt{(P_0^2 - (M_i - M_j)^2)(P_0^2 - (M_i + M_j)^2)}}{2P_0} \quad (2.36)$$

e a energia é da forma

$$E_{i,j}^* = \sqrt{(p^*)^2 + M_{i,j}^2}. \quad (2.37)$$

Notamos que neste cálculo foi feita uma aproximação, de modo a evitar a complexidade introduzida no cálculo pelo uso da "aproximação de largura finita". No integral Eq. 2.35, considerámos o valor de  $\Gamma_M$  pequeno, e como consequência, desprezámos  $\Gamma_M$  no denominador de  $I_2^{ij}(P_0)$ .

### Constante Decaimento do Pião

O ajuste dos parâmetros do modelo com os resultados experimentais, considera no âmbito dos mesões pseudoescalares, a constante de decaimento do pião, que assim assume um papel fundamental. A constante de decaimento do pião é obtida pelo elemento de matriz pião-vácuo:

$$f_\pi q^\mu \delta_{ab} = g_{\pi qq} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau_a}{2} S(p+q) i\gamma_5 \tau_b S(p) \right]. \quad (2.38)$$

No limite quiral é satisfeita a relação de Goldberger-Treiman [83],

$$g_{\pi qq} f_\pi = M + \mathcal{O}(m), \quad (2.39)$$

e em primeira ordem na massa  $m$ , a relação de Gell-Mann Oakes Renner [84] para a massa do pião,

$$f_\pi^2 m_\pi^2 = -m \langle \bar{q}q \rangle + \mathcal{O}(m^2). \quad (2.40)$$

### Mesões Escalares

O processo para descrever os mesões escalares é análogo ao implementado na descrição para mesões pseudoescalares. Assim, para calcular a massa do mesão, expande-se a acção efectiva, Eq. 2.19, sobre campos mesónicos escalares,  $\sigma^e$ , onde aqui  $e = s, a$ , representa, respectivamente, os mesões: mesão  $\sigma$  associado a  $g \equiv g_s$  e mesão  $a_0$  associado a  $g \equiv g_a$ .

Assim, mantendo somente mesões escalares, obtemos a acção mesónica efectiva

$$I_{eff}^{(2)}[\sigma] = -\frac{1}{2} \sigma^a \left[ g^{-1} - \Pi_{ab}^S(P) \right] \sigma^b = -\frac{1}{2} \sigma^a (D_{ab}^S(P))^{-1} \sigma^b, \quad (2.41)$$

com  $\Pi_{ab}^S(P)$  sendo o operador de polarização, que se calcula de modo análogo ao caso analisado anteriormente para mesões pseudoescalares, mas agora com  $i\gamma_5$  substituída

pela matriz identidade. Este operador encontra-se associado aos mesões escalares  $a_0$  e  $\sigma$ :

$$\Pi_{ij}^S(P_0) = 4 \left( (I_1^i + I_1^j) + [P_0^2 - (M_i^2 + M_j^2)] I_2^{ij}(P_0) \right). \quad (2.42)$$

As massas dos mesões  $\sigma$  e  $a_0$  são agora determinadas pelas seguintes condições  $D_\sigma^{-1}(M_\sigma, \mathbf{0}) = 0$  e  $D_{a_0}^{-1}(M_{a_0}, \mathbf{0}) = 0$ .

### 2.1.3 A Susceptibilidade Topológica

Um dos objectivos centrais deste trabalho é o estudo do comportamento da susceptibilidade topológica com a temperatura, em comparação com os resultados dos cálculos na rede. A susceptibilidade topológica,  $\chi$ , é um parâmetro essencial para o estudo do problema da quebra e da restauração da simetria  $U_A(1)$ , tendo sido realizados diversos estudos associando o comportamento de  $\chi$  com a restauração da referida simetria a temperaturas elevadas.

Os resultados dos cálculos computacionais na rede, indicam um decréscimo acentuado do valor de  $\chi$  para a temperatura de desconfinamento, mostrando uma aparente restauração da simetria  $U_A(1)$ . O cálculo para a susceptibilidade topológica, no âmbito do modelo de NJL em  $SU(3)$ , foi primeiro realizado por K. Fukushima e colaboradores em [46].

Apresentamos de seguida os conceitos básicos relativos ao cálculo de  $\chi$  no vácuo. A extensão deste cálculo para temperaturas finitas é feita naturalmente a partir do formalismo de Matsubara, que é apresentado na secção seguinte.

A densidade lagrangiano da QCD dada por:

$$L = \bar{q}(i\gamma_\mu D_\mu - m) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \theta Q,$$

sendo  $\theta$  o ângulo de vácuo da QCD,  $F_{\mu\nu}^a$  é o tensor de campo de gluões,  $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$  é a derivada covariante onde  $A_\mu$  é o campo de gluões,  $g$  é a constante de acoplamento da interacção forte e  $Q$  é a densidade de carga topológica (ver apêndice 5.3 Eq. 5.56) definida como:

$$Q(x) = \frac{g^2}{32\pi^2} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}.$$

A densidade de energia no vácuo  $\varepsilon$  escreve-se no formalismo dos integrais de caminho como:

$$\exp(-\varepsilon VT) = \int DA_\mu D\bar{q} Dq e^{\int d^4x \mathcal{L}} \equiv Z,$$

onde  $V$  é o volume. A susceptibilidade topológica é apresentada como a segunda derivada de  $\varepsilon$  em ordem a  $\theta$  para  $\theta = 0$ :

$$\chi \equiv \left. \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} = \int d^4x e^{-kx} \langle 0 | T Q(x) Q(0) | 0 \rangle_c,$$

onde  $T$  é o operador de ordenação temporal, e o índice  $c$  "conexos" significa considerar a contribuição de todos os diagramas conexos.

Para o cálculo de  $\chi$  no modelo NJL é necessário encontrar  $Q(x)$ . Tendo em conta que na QCD a tetradivergência da corrente axial  $j_5^\mu$  obedece à equação:

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2N_f Q(x) + 2m i \bar{q} \gamma_5 q, \quad (2.43)$$

é necessário fazer um estudo desta quantidade no modelo de NJL(A) de modo a identificar  $Q(x)$ .

A anomalia axial da QCD é suposta ser quebrada por efeitos quânticos e essa quebra pode ser descrita a um nível semiclássico por instantões, de acordo com  $t'$  Hooft. Em modelos de tipo NJL o termo de  $t'$  Hooft é uma interação determinantal de 6 ou 4 quarks, consoante o modelo for SU(3) ou SU(2), como iremos verificar no caso de SU(2). É possível demonstrar que o lagrangiano do presente modelo é invariante quirial, no limite quirial, mas não é invariante axial mesmo neste limite porque o termo  $\mathcal{L}_2$  quebra a simetria axial (ver apêndice 5.2).

A análise da conservação (ou não conservação) das correntes vectorial, isovector axial e isoescalar axial, permite-nos resumir que:

- conservação de corrente vectorial

$$i\partial_\mu (\bar{q} \gamma^\mu q) = \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.44)$$

- a corrente axial isovector, é conservada no limite quiral

$$\partial_\mu j_5^{\mu i} = 2m(\bar{q}i\gamma_5\tau^i q) \quad (2.45)$$

- a corrente axial isoescalar não é conservada mesmo no limite quiral

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2m i \bar{q}\gamma_5 q + 8g_2 \left[ (\bar{q}\vec{\tau}q)(\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q) - (\bar{q}q)(\bar{q}i\gamma_5 q) \right] \quad (2.46)$$

Estabelecendo uma comparação entre esta equação 2.46 e a equação Eq. (2.43), concluímos que o equivalente de  $Q(x)$  nestes modelos é (ver apêndices 5.3, 5.4.2 Eq. (5.56), Eq. (5.86) e Eq. (5.87)),

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2g_2[(\bar{q}\vec{\tau}q) - (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q) - (\bar{q}q) - (\bar{q}i\gamma_5 q)] \\ &= 4ig_2[(\bar{q}_1\gamma_5 q_2)(\bar{q}_2 q_1) + (\bar{q}_2\gamma_5 q_1)(\bar{q}_1 q_2) \\ &\quad - (\bar{q}_1 q_1)(\bar{q}_2\gamma_5 q_2) - (\bar{q}_2 q_2)(\bar{q}_1\gamma_5 q_1)], \end{aligned} \quad (2.47)$$

simplificando:

$$Q(x) = 2 i g_2 [\det [\bar{q}(1 - \gamma_5)q] - \det [\bar{q}(1 + \gamma_5)q]]. \quad (2.48)$$

Para dedução detalhada das equações, Eq. (2.44), Eq. (2.45) e Eq. (2.46) aqui apresentadas, ver no apêndice 5.3 as análises para as equações Eq. (5.42), Eq. (5.48) e Eq. (5.53). No apêndice 5.4.2 Eq. (5.85) demonstra-se tal como para  $Q(x)$  apresentado na Eq. (2.48), também  $\mathcal{L}_2$  se escreve na forma de um determinante,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= g_2[(\bar{q}q)^2 - (\bar{q}\vec{\tau}q)^2 + (\bar{q}\gamma_5 q)^2 - (\bar{q}\gamma_5\vec{\tau}q)^2] \\ &= 2g_2[\det [\bar{q}(1 - \gamma_5)q] + \det [\bar{q}(1 + \gamma_5)q]]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Uma vez que as deduções destas relações são extensas, elas são apresentadas nos apêndices 5.3, 5.4.2, bem como o cálculo detalhado da susceptibilidade topológica (ver apêndice 5.4), cuja expressão é:

$$\chi^4 = \frac{8g_2^2}{1 - 8g_a I_1^2} \langle \bar{q}q \rangle I_1. \quad (2.50)$$

## 2.2 Extensão do Modelo para Temperaturas e Densidades Finitas

Após a reinterpretação do modelo NJL, como um modelo de quark eficaz, este tem sido aplicado para o estudo das propriedades de quarks e mesões em matéria quente e densa. Pois em virtude da aplicação do formalismo de Matsubara [85, 86], o modelo NJL pode ser generalizado para temperatura finita e potencial químico finito (os pormenores do cálculo serão apresentados na secção seguinte).

Os resultados apresentam a mesma estrutura que as expressões do vácuo mas, neste caso, estão modificadas por números de ocupação térmica. Por exemplo, a equação do *gap* Eq. (2.23) torna-se agora,

$$M = m + 4N_f N_c g_s \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_p} \left( 1 - n_p(T, \mu) - \bar{n}_p(T, \mu) \right), \quad (2.51)$$

onde  $E_p = \sqrt{p^2 + M^2}$  é a energia do quark, obtida por auto-consistência para a massa constituinte  $M$ , onde  $n_p$  e  $\bar{n}_p$  são números de ocupação de Fermi de quarks e antiquarks,

$$n_p(T, \mu) = \frac{1}{e^{(E_p - \mu)/T} + 1}, \quad \bar{n}_p(T, \mu) = \frac{1}{e^{(E_p + \mu)/T} + 1}. \quad (2.52)$$

Estas funções estão relacionados com o número da densidade do quark total na forma:

$$n(T, \mu) = 2N_f N_c \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left( n_p(T, \mu) - \bar{n}_p(T, \mu) \right). \quad (2.53)$$

Veremos que estas relações nos permitirão adaptar o processo de integração de modo a contornar, de certo modo, o *cutoff*  $\lambda$ . Chamaremos a este processo de regularização com ”*cutoff* infinito”. De facto, os termos dependentes na temperatura, presentes na Eq. 2.52, permitem que no caso de estendermos a integração ao infinito, possamos obter resultados convergentes. Lembramos que o *cutoff* finito  $\lambda$  foi introduzido no modelo devido à necessidade de regularizar os integrais; mas, notamos que os termos que dependem da temperatura, Eq. 2.52, permitem, que para eles <sup>2.1</sup>, possamos

<sup>2.1</sup>Esta técnica de integração em ”*cutoff* infinito”, não é completamente independente do

estender a integração até infinito. Este método permitirá, obter resultados mais próximos dos da rede, como é o caso das temperaturas de transição e ainda obter a restauração simultânea da simetria quiral a simetria axial, como foi mostrado no trabalho [50].

Os números de ocupação são, de modo geral, não nulos, logo reduzem o valor da massa constituinte. Para temperaturas ou densidades grandes, o factor  $(1 - n_p - \bar{n}_p)$  tende para zero e  $M$  aproxima-se ao valor da massa corrente  $m$ .

O comportamento suave da massa constituinte de quarks, sugeriu considerar a transição de fase como sendo de segunda ordem [87]. Foi no entanto, mostrado por Asakawa e Yazaki que a transição de fase é de primeira ordem [88].

O nosso objectivo no presente trabalho restringe-se aos efeitos da temperatura finita e potencial químico nulo. A transição de fase com a Temperatura é considerada de tipo crossover.

### 2.2.1 Formalismo

Vimos que modelo de NJL pode ser aplicado para estudar o caso de temperatura finita e potencial químico finito. A generalização do modelo pode ser efectuada por meio da substituição [86]

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \longrightarrow \frac{1}{-i\beta} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_n, \quad (2.54)$$

onde  $\beta = 1/T$ ,  $T$  é a temperatura e a soma é efectuada sobre as frequências de Matsubara  $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , de tal modo que  $p_0 \longrightarrow i\omega_n + \mu$ , com o potencial químico  $\mu$ . Em vez da integração sobre  $p_0$ , efectuamos a soma sobre as frequências de Matsubara,

$$-\frac{1}{\beta} \sum_n h(\omega_n) = \sum_{\text{Re} z_m \neq 0} \left[ (1 - f(z_m)) \text{Res}[h(\omega_n), z_m] + \bar{f}(z_m) \text{Res}[\bar{h}(\omega_n), z_m] \right], \quad (2.55)$$

---

parâmetro  $\lambda$ . Por exemplo, na Eq. 2.51 a presença da unidade necessita a manutenção na integração do uso do parâmetro  $\lambda$ .

onde  $f(z)$  e  $\bar{f}(z)$  são as funções de distribuição de Fermi para quarks e antiquarks

$$f(z) = \frac{1}{1 + e^{\beta(z-u)}}, \bar{f}(z) = \frac{1}{1 + e^{\beta(z+u)}}. \quad (2.56)$$

Como estas funções satisfazem:  $1 - \bar{f}(z) = f(-z)$ , introduzimos, por conveniência, as funções de distribuição de Fermi para o estado de energia positiva (negativo) do inésimo quark:

$$n_i^\pm = f_i(\pm E_i) = \frac{1}{1 + e^{\pm\beta(E_i \mp \mu_i)}}. \quad (2.57)$$

À temperatura finita, o integral  $I_1^i$  (2.32) toma a forma de

$$I_1^i(T, \mu_i) = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int \frac{\mathbf{p}^2 d\mathbf{p}}{E_i} (n_i^+ - n_i^-). \quad (2.58)$$

De modo geral o integral  $I_2^{ij}(P)$  depende agora da temperatura  $T$  e de dois potenciais químicos  $\mu_i, \mu_j$ ,

$$\begin{aligned} I_2^{ij}(P_0, T, \mu_i, \mu_j) = & -N_c \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[ \frac{1}{2E_i} \frac{1}{(E_i + P_0 - (\mu_i - \mu_j))^2 - E_j^2} n_i^+ \right. \\ & - \frac{1}{2E_i} \frac{1}{(E_i - P_0 + (\mu_i - \mu_j))^2 - E_j^2} n_i^- \\ & + \frac{1}{2E_j} \frac{1}{(E_j - P_0 + (\mu_i - \mu_j))^2 - E_i^2} n_j^+ \\ & \left. - \frac{1}{2E_j} \frac{1}{(E_j + P_0 - (\mu_i - \mu_j))^2 - E_i^2} n_j^- \right]. \quad (2.59) \end{aligned}$$

Para o caso degenerado no sabor, em que  $i = j$ , temos a seguinte expressão, com parte imaginária:

$$\begin{aligned} I_2^{ii}(P_0, T, \mu_i) = & -\frac{N_c}{2\pi^2} \mathcal{P} \int \frac{\mathbf{p}^2 d\mathbf{p}}{E_i} \frac{1}{P_0^2 - 4E_i^2} (n_i^+ - n_i^-) \\ & - i \frac{N_c}{4\pi} \sqrt{1 - \frac{4M_i^2}{P_0^2}} \left( n_i^+ \left( \frac{P_0}{2} \right) - n_i^- \left( \frac{P_0}{2} \right) \right). \quad (2.60) \end{aligned}$$

Usando estes integrais como função da temperatura e potenciais químicos, podemos investigar as propriedades dos mesões em matéria quente e densa.



## 2.2.2 Regularização com *Cutoff* Infinito

Para entender a necessidade da regularização com ”*cutoff* infinito” notamos que no vácuo temos de ter sempre um *cutoff*. A temperatura finita, devido às funções térmicas, uma parte dos integrais é convergente e não necessita de *cutoff*. Podemos então ter duas opções

- Regularização I - usar *cutoff* finito, tanto no vácuo ( $T = 0$ ) como a temperatura finita ( $T \neq 0$ ).
- Regularização II - só usar *cutoff* nos integrais divergentes, para  $T \neq 0$ .

Reconhecem-se vantagens de aplicar a regularização II, pois permite a presença de quarks de momento elevado a temperatura finita. Este facto vai ter consequências não triviais.

Na secção anterior, sec. 2.2, dissemos que os termos dependentes na temperatura que figuram agora no modelo (ver por exemplo a Eq. 2.52) permitir-nos estender a integração até ao infinito. Pois, para estes termos é legítimo esta extensão até ao infinito, uma vez que os seus integrais mantêm-se convergentes (como é este o caso). É conveniente separar nos integrais explicitamente os termos ”convergentes” dos não-convergentes aquando do processamento da integração, segundo esta técnica. Para mostrar que o integral 2.58 se relaciona com a forma apresentada na Eq. 2.51, vamos usar as relações, Eq. 2.57 e Eq.2.52. Assim, para  $I_1^i$  fica:

$$\begin{aligned}
 I_1^i(T, \mu_i) &= \frac{6}{4\pi^2} \int \frac{p^2}{E} dp \left( \frac{1}{1 + e^{-\beta(E+\mu)}} - \frac{1}{1 + e^{\beta(E-\mu)}} \right) \\
 &= \frac{6}{4\pi^2} \int \frac{p^2}{E} dp \left( \frac{e^{\beta(E-\mu)} + 1 - 1}{1 + e^{\beta(E+\mu)}} - \frac{1}{1 + e^{\beta(E-\mu)}} \right) \\
 &= \frac{6}{4\pi^2} \int \frac{p^2}{E} dp \left( 1 - \frac{1}{1 + e^{\beta(E+\mu)}} - \frac{1}{1 + e^{\beta(E-\mu)}} \right) \\
 &= \frac{6}{4\pi^2} \int_0^\lambda \frac{p^2}{E} dp + \frac{6}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2}{E} dp (-\bar{n}_p(T, \mu) - n_p(T, \mu)).
 \end{aligned}
 \tag{2.61}$$

Deste modo verificamos que quando  $\lambda \rightarrow \infty$  temos  $p^2/E \rightarrow \infty$ , mas notamos que  $\bar{n}_p(T, \mu) + n_p(T, \mu) \rightarrow 0$ . Podemos escrever a integração na Eq. 2.58, nesta abordagem de processo de integração em " *cutoff* infinito"

$$I_1 = \frac{6}{4\pi^2} \left( \int_0^\lambda \frac{p^2}{E} dp - \int_0^\infty \frac{p^2}{E} (\bar{n}_p(T, \mu) + n_p(T, \mu)) dp \right). \quad (2.62)$$

Este método permitirá, como confirmaremos com a análise dos resultados apresentados no capítulo seguinte, obter comportamentos mais próximos dos resultados da rede, como é o caso das temperaturas de transição, que ocorrem a temperaturas mais baixas do que as obtidas com os modelos NJL de *cutoff* convencional (finito). No entanto, este método produz algumas inconsistências que se manifestam a temperaturas acima da temperatura crítica, como por exemplo no caso do sinal do condensado de quarks. Notamos que na eq. 2.62 existem dois limites de integração -  $\lambda$  e  $\infty$ , sendo este facto a fonte de produção de tais inconsistências, que uma vez compreendido podemos, com segurança e baseado em argumentação física (impondo a condição:  $M \geq m$ ), truncar tal comportamento patológico.

# Capítulo 3

## Apresentação e Discussão dos Resultados

No presente trabalho estudar-se-à o sistema de quarks de dois sabores (degenerados por uma questão de simplicidade), onde será introduzida a anomalia, via lagrangiano Eq. (2.1).

O estudo da restauração das simetrias quirais e axiais foi já realizado no trabalho [50], onde se estudou o efeito do tipo de regularização no processo de restauração das simetrias, mas no modelo NJL em  $SU(3)$ . Verificou-se que a temperatura crítica para a transição de fase, obtida com a regularização (II), é mais próxima dos resultados numéricos obtidos por cálculos na rede, e que a restauração efectiva das simetrias quiral e axial ocorrem simultaneamente (para temperatura maior que a temperatura critica). Quando as constantes de acoplamento são consideradas constantes, a restauração da simetria axial ocorre como uma consequência natural da restauração completa da simetria quiral. A supressão dos efeitos de instantões foi considerada por meio de uma conveniente dependência na temperatura para o coeficiente da anomalia sendo verificado que a restauração da simetria  $U_A(1)$  ocorre para valores mais baixos.

Assumindo que ambas as simetrias ( $SU(N_f)\otimes SU(N_f)$  e  $U_A(1)$ ) são restauradas para temperaturas elevadas, E. Shuryak num estudo referente a  $SU(2)\otimes SU(2)$ , propôs a existência de dois cenários [45]:

1. cenário 1,  $T_{\text{chi}} \ll T_{U(1)}$  (sendo  $T_{\text{chi}}$  a temperatura a que ocorre a restauração da simetria  $SU(N_f)\otimes SU(N_f)$  e  $T_{U(1)}$  a temperatura a que acon-

tece a restauração da simetria  $U_A(1)$ ). A restauração completa da simetria  $U(N_f) \otimes U(N_f)$  da-se na fase do plasma de quarks e glúons;

2. cenário 2,  $T_{\text{chi}} \approx T_{U(1)}$ .

Para decidir qual o cenário mais realista, estudou-se em [50] o comportamento do mesão  $\eta'$ , ou de observáveis com ele relacionados, como seja a susceptibilidade topológica. Com respeito à restauração efectiva da simetria quiral  $SU(2)$  e  $U(2) \otimes U(2)$ , verificou-se no trabalho da ref. [50] que a utilização da regularização tipo (II) não provocou alteração do cenário Shuryak, tal qual a regularização convencional, do tipo (I). Contudo, com a consideração dos quarks de momentos elevados (referente à regularização tipo (II)), no sector  $SU(3)$ , obtém-se um cenário onde ambas as simetrias, quiral e axial, são efectivamente restauradas à mesma temperatura,  $T = T_{eff} \simeq 333$  MeV. No entanto, como iremos verificar a situação em  $SU(2)$  é diferente. Não basta usar a regularização de tipo (II) para que todos os observáveis relacionados com a simetria  $U_A(1)$  se anulem, pelo que é necessário usar um mecanismo adicional para a sua restauração. Para estudar a restauração efectiva desta simetria impõe-se uma condição sobre o coeficiente da anomalia, assim fazemos a constante de acoplamento  $g_2$ , depender da temperatura.

### 3.1 Ajuste dos Parâmetros no Vácuo e Processos de Regularização a Temperatura Finita

Para analisarmos numericamente o modelo temos que efectuar um ajuste dos parâmetros. Os integrais foram regularizados com uso de um *cutoff* para os momentos. Assim, consideramos os três parâmetros seguintes : a massa corrente de quarks  $m$ , as constantes de acoplamento  $g_s$  e  $g_a$ , e o *cutoff*  $\Lambda$ . Estes parâmetros são fixados de modo a obter-se um ajuste com grandezas experimentalmente bem conhecidas, a massa do píon e sua constante de decaimento e ainda o condensado de quarks cujo valor é determinado por cálculos na rede. Assim a massa do píon,

$m_\pi = 135.0 \text{ MeV}$ <sup>3.1</sup> e a constante de decaimento do pião,  $f_\pi = 92.4 \pm 0.2 \text{ MeV}$ , são conhecidas com boa precisão.

Os valores dos parâmetros são apresentados na tabela 3.1 apresentam-se os parâmetros do modelo: " *cutoff* "  $\lambda$ , constantes de acoplamento  $g_s$  e  $g_a$ , massas correntes de quarks  $m$ .

$\Lambda$ [MeV]	$g_s\Lambda^2$	$g_a\Lambda^2$	$m$ [MeV]
590	2.435	1.217	6.0

Tabela 3.1: Valores numéricos dos parâmetros do modelo

Em resultado do ajuste destes parâmetros obtemos as respectivas quantidades relacionadas - constante  $f_\pi$ , massa de quarks constituinte  $M$ , condensados de quark  $\langle \bar{q}q \rangle$ , e susceptibilidade topológica  $\chi$ , apresentadas na tabela 3.1

	$f_\pi$ [MeV]	$\langle \bar{q}q \rangle^{1/3}$ [MeV]	$\chi^{1/4}$ [MeV]	$\pi$ [MeV]	$\sigma$ [MeV]	$\eta$ [MeV]	$a_0$ [MeV]
Modelo	93	-300	176	140	804	766	956
Experimental			(180)	(135)	(400-1200)	(547)	(984)

Tabela 3.2: Valores numéricos dos observáveis calculados

Notamos que no âmbito do presente modelo a descrição do pião é a mais fiável, visto que não tem comportamento de estranheza. O  $\sigma$  e o  $a_0$  têm uma pequena componente de estranheza, mas a do  $\eta$  já é significativa. Aliás a identificação dos mesões associados à constante de acoplamento  $g_a$ , como o  $\eta$  e o  $a_0$ , é um tanto arbitrária, visto que podiam também ser identificados como o  $\eta'$  e o  $f_0$ . A presente opção justifica-se pelo facto de  $\eta$  e  $a_0$  terem menor comportamento de estranheza do que o  $\eta'$  e o  $f_0$ .

Para análise dos resultados numéricos com uso do *cutoff* a temperatura finita, consideramos que:

<sup>3.1</sup>Apresenta-se a massa correspondente de  $\pi^0$ , por não ser afectado por correcções electro-magnéticas

- O modelo de NJL é não renormalizável, pelo que é necessário um *cutoff* ultravioleta para tornar os integrais convergentes
- Para temperatura finita alguns integrais tornam-se convergentes
- Duas opções:
  - usar *cutoff* finito em todos os integrais, mesmo a temperatura finita → proibimos os efeitos da presença de quarks de momentos elevados
  - usar *cutoff* finito só nos integrais divergentes → tratamento diferente para o mar de Fermi e para o mar de Dirac (regularização II)
    - \* melhoram alguns aspectos da descrição da termodinâmica → surgem efeitos não físicos a temperaturas elevadas, que têm que ser truncados

O estudo da susceptibilidade topológica foi já realizado no modelo em SU(3) [46, 44, 70]. No entanto, procura-se, neste trabalho aspectos físicos que podem ser melhor compreendidos num modelo mais simples como este. Será efectuada a comparação com resultados na rede obtidos por B. Allés e M. D’Elia [49].

Para além da análise comparativa dos resultados obtidos a temperatura finita com os processos de regularização, iremos também analisar o efeito de considerarmos a constante de acoplamento associada à anomalia dependente da temperatura,  $g_2(T)$ .

A restauração da simetria  $U_A(1)$  deve ter efeitos observáveis no espectro mesónico, quer para os mesões pseudoescalares como para os mesões escalares. A análise da degenerescência entre os parceiros quirais, constituiu um critério a usar para identificar a restauração efectiva da simetria quiral. É geralmente assumido que, se as simetrias  $SU(N_f) \otimes SU(N_f)$  e  $U_A(1)$  são restauradas, resultará que os mesões escalares,  $a_0$  e  $\sigma$ , bem como os mesões pseudoescalares,  $\pi$  e  $\eta$ , ficam degenerados entre si. É esse comportamento que se vai procurar obter neste modelo NJL SU(2), com a estratégia de permitir  $g_2$  variar na temperatura. Na próxima secção, apresentam-se os resultados correspondentes.

Como motivação para a implementação desta estratégia, lembramos que para o sector SU(3) é conhecido o seguinte:

- Em modelos quirais, quando o termo da anomalia é constante, e quando se usa a regularização (I), apesar de se verificar um decréscimo, em função da temperatura, nos valores dos observáveis associados à anomalia a simetria  $U_A(1)$  não é restaurada [89, 90, 91], devido ao facto de o condensado de quarks estranhos se manter elevado [92, 44, 80, 50].
- Provou-se que no modelo de NJL em  $SU(3)$  podemos ter a restauração da simetria axial desde que se escolha o coeficiente da anomalia  $g_2$  como uma função decrescente da temperatura, ou alternativamente se se usar a regularização (II).
- Como iremos verificar em  $SU(2)$  não basta usar a regularização (II) para obter a degenerescência dos parceiros quirais axiais, pelo que se impõe o estudo do efeito de considerar  $g_2(T)$  uma função decrescente da temperatura.

Todavia, a restauração efectiva da simetria  $U_A(1)$  pode ser alcançada assumindo que o coeficiente do termo da anomalia ( $g_2$  no presente caso) é uma função decrescente da temperatura. A metodologia aqui adoptada, no que respeita à forma de  $g_2(T)$ , baseia-se no estudo efectuado na ref. [46]. A partir dos resultados dos cálculos na rede para  $\chi$  [49], fazemos o ajuste aos pontos usando uma função de Fermi.

## 3.2 Apresentação dos Resultados

Nas próximas páginas apresenta-se um conjunto de três gráficos referentes ao estudo dos vários observáveis. Neste conjunto de gráficos, o primeiro refere-se ao estudo usando *cutoff* finito,  $\lambda$ , e o segundo corresponde ao método de *cutoff* infinito, que discutimos no capítulo anterior. O terceiro gráfico corresponde ao estudo realizado com variação na temperatura do parâmetro  $g_2(T)$ .

### Representação gráfica dos observáveis $-\langle\bar{q}q\rangle^{1/3}$ e $\chi^{1/4}$ e respectivas derivadas

É de referir que  $-\langle\bar{q}q\rangle^{1/3}$  e  $\chi^{1/4}$  são "parâmetros" relativos à restauração da simetria quiral e axial, respectivamente, justificando por isso a análise efectuada para

estas grandezas na fig. 3.1. Nesta figura é mostrada na, 1ª linha, o comportamento do condensado de quarks,  $-\langle\bar{q}q\rangle^{1/3}$ , enquanto na 2ª linha se estuda o comportamento da susceptibilidade topológica,  $\chi^{1/4}$ , cujas derivadas se apresentam na 3ª linha,  $-d\langle\bar{q}q\rangle/dT$  e  $d\chi/dT$ .

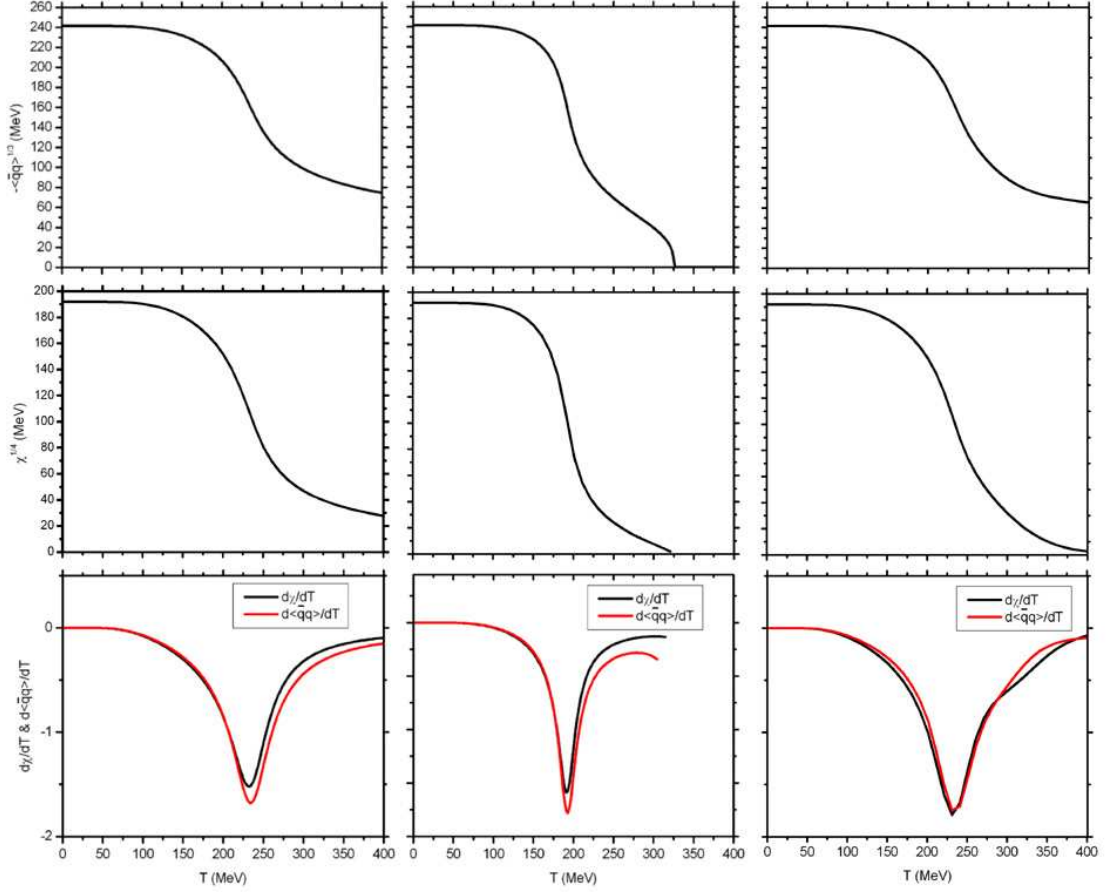


Figura 3.1: Representação de  $-\langle\bar{q}q\rangle^{1/3}$  (1ª linha),  $\chi^{1/4}$  (2ª linha) e respectivas derivadas,  $-d\langle\bar{q}q\rangle/dT$  e  $d\chi/dT$  (3ª linha), com variação da temperatura. A 1ª coluna corresponde à regularização tipo (I), 2ª coluna regularização tipo (II) e a 3ª coluna refere-se à regularização (I) com a função decrescente de temperatura,  $g_2(T)$ .

A regularização tipo (I), como vimos, consiste no processo *standard* para o modelo NJL, onde se define um *cutoff*  $\lambda$ . A implementação da regularização tipo (II) (*cutoff* infinito), conduz (no sector SU(3)) à restauração "simultânea" da simetria quiral e axial [50]. A restauração da simetria axial é consequência da restauração da simetria quiral, visto que esta última é associada à susceptibilidade topológica,



$\chi$ , que por sua vez é proporcional a  $\langle \bar{q}q \rangle$ , e na restauração da simetria quiral ocorre  $\langle \bar{q}q \rangle \rightarrow 0$ .

Os inconvenientes da regularização tipo (II) apresentam-se evidentes para temperaturas superiores que a  $T_c$ , sendo destacados pelos seguintes aspectos.

- A massa constituinte dos quarks decresce abaixo do valor das respectivas massas correntes. Este aspecto é corrigido por imposição da condição de que  $M$  nunca seja inferior a  $m$ .
- Decréscimo acentuado da susceptibilidade topológica, facto que não reproduz com fidelidade os últimos pontos obtidos nos cálculos da rede, como vemos nos gráficos das figuras 3.4 e 3.5.

Notamos que os gráficos apresentados na 3<sup>a</sup> coluna, da fig. 3.1, são correspondentes à regularização tipo (I), e à modulação do parâmetro  $g_2$  por uma função decrescente de temperatura, tal que  $g_2(T)$ . Este processo tem pouca influência na restauração da simetria quiral, mostrando, no entanto, que a susceptibilidade topológica tende para zero,  $\chi \rightarrow 0$ , e a simetria axial é restaurada.

Antes de comentar os resultados convém notar que, num modelo com massas de quarks de correntes não nulas, há que distinguir entre restaurações de simetrias parciais e efectivas. No limite quiral, os valores criticos para ambas as restaurações coincidem. A restauração parcial de simetria com a temperatura é identificada como o ponto em que as derivadas de  $-\langle \bar{q}q \rangle^{1/3}$  (simetria quiral) e de  $\chi^{1/4}$  (simetria axial) têm mínimos; a restauração efectiva destas simetrias é assinalada pela degenerescência dos parceiros quirais.

Na 3<sup>a</sup> linha, da fig. 3.1, a análise das derivadas, permite obter a temperatura crítica, restauração parcial da simetria quiral e axial. Salienta-se o facto que a aplicação da regularização tipo (II), 2<sup>a</sup> coluna, permite obter uma temperatura crítica mais baixa, aproximando os resultados com os obtidos através dos cálculos na rede. Em todos os casos a restauração parcial da simetria quiral é simultânea com a da simetria axial.

## Representação gráfica da massa constituinte, $M$ , e da constante de decaimento, $f_\pi$

A fig. 3.2 mostra a variação, na temperatura, das massas e constantes de decaimentos do pião. Estas são funções dos condensado de quarks  $\langle \bar{q}q \rangle$ . Estes resultados confirmam, e são consequência, do comportamento do condensado  $\langle \bar{q}q \rangle$ , mostrado na 1ª coluna da fig. 3.1, relativo à restauração da simetria quiral. Como vemos, na segunda coluna  $f_\pi$  deixa de tender assintoticamente para zero, mas anula-se à temperatura  $T_{eff} \cong 330$  MeV, a mesma para a qual  $\langle \bar{q}q \rangle = 0$  e, como veremos a seguir, em que degeneram os parceiros quirais, ( $\pi, \sigma$  e  $\eta, a_0$ ).

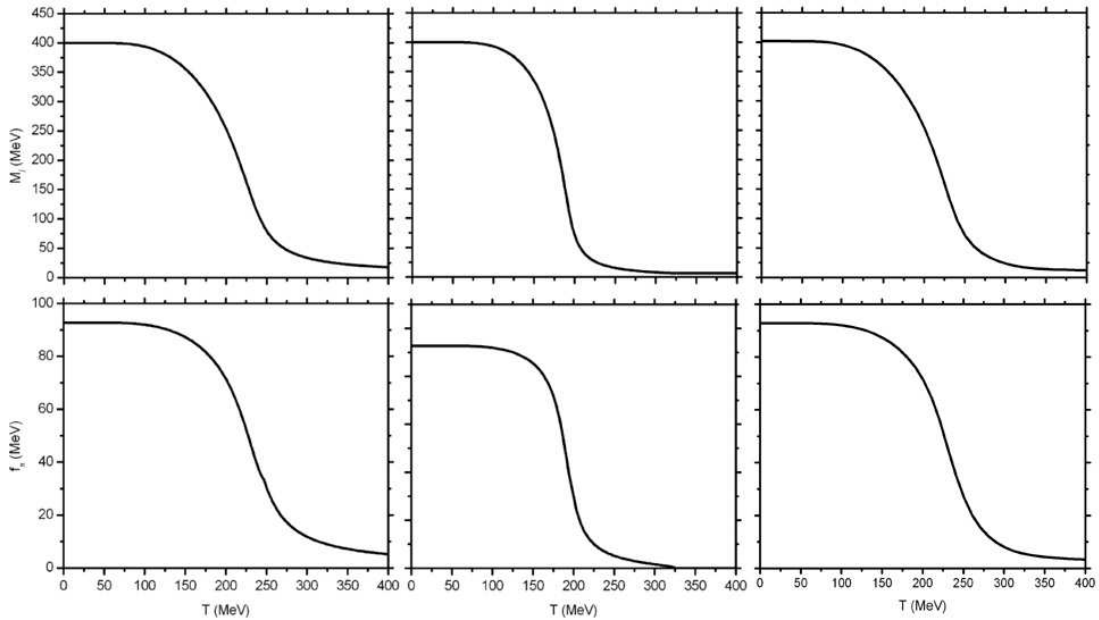


Figura 3.2: Representação do comportamento das massas constituintes  $M_i$  (1ª linha) e da constante de decaimento do pião (2ª linha), em função da temperatura. Neste conjunto de gráficos, a 1ª coluna refere-se ao estudo usando a regularização tipo (I), e a 2ª coluna corresponde ao método de regularização tipo (II), que discutimos no capítulo anterior. A 3ª coluna corresponde à regularização tipo (I) com a função decrescente de temperatura,  $g_2(T)$ .

## Representação gráfica das massas dos mesões

Na fig. 3.3 estuda-se as massas dos mesões focando o comportamento susceptível de sinalizar a restauração efectiva das simetrias. É de particular interesse a degenerescência dos parceiros quirais. Notamos que no 1º gráfico e 2º gráfico, da fig. 3.3, obtidos com o parâmetro  $g_2$  constante (com regularização (I) e (II), respectivamente) não ocorre degenerescência dos parceiros axiais. Este resultado, no que se refere ao 2º gráfico, difere do comportamento para o sector SU(3), observado na ref. [50], onde a restauração dos parceiros axiais foi obtida com regularização (II).

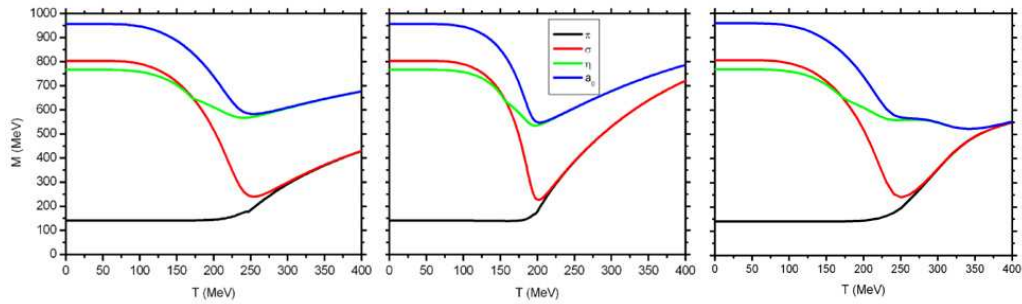


Figura 3.3: Representação do comportamento dos mesões:  $\pi$ ,  $\sigma$ ,  $\eta$  e  $a_0$ , em função da temperatura. O 1º gráfico refere-se ao estudo usando *cutoff* finito,  $\lambda$ , e o 2º gráfico corresponde ao método de *cutoff* infinito, que discutimos no capítulo anterior. O 3º gráfico corresponde à regularização tipo (I) com a função decrescente de temperatura,  $g_2(T)$ .

## Representação gráfica da susceptibilidade topológica $\chi$

Na fig. 3.4 apresenta-se o comportamento da susceptibilidade topológica,  $\chi$ , em função da temperatura, em comparação com os resultados, com respectiva barras de erro, obtidos na rede [49] para o modelo SU(2). Mostra-se os resultados, no 1º gráfico, para uma regularização tipo (I), no 2º gráfico para uma regularização tipo (II) e 3º gráfico para uma regularização tipo (I) com  $g_2(T)$  uma função decrescente da temperatura. Os resultados para a susceptibilidade topológica foram comparados com os de cálculos na rede obtidos em SU(2) (quarks com massa) e em teoria de Yang-Mills (quarks sem massa) [49]. É de notar que o comportamento da susceptibilidade topológica, para os três casos aqui em discussão, não difere significativamente. No entanto, observa-se que a utilização da regularização (II) permite um melhor ajuste aos primeiros pontos obtidos através do cálculo numérico na rede [49].

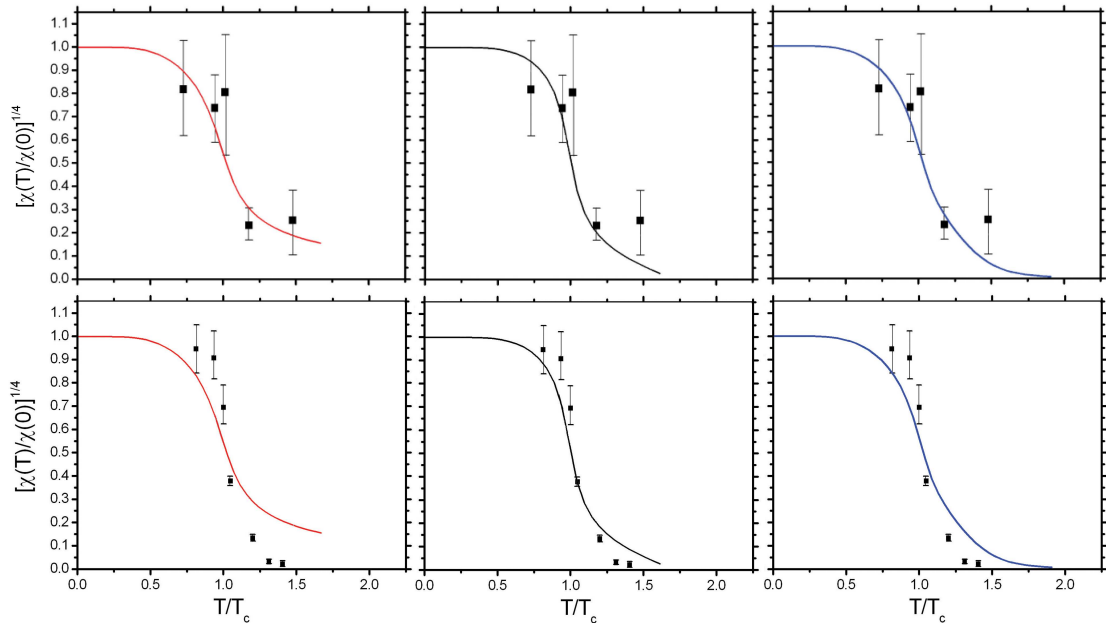


Figura 3.4: Representação do comportamento da susceptibilidade topológica:  $\chi$ , em função da temperatura. A 1ª coluna refere-se ao estudo usando regularização tipo (I), e a 2ª coluna corresponde ao método de regularização tipo (II), que discutimos no capítulo anterior. A 3ª coluna corresponde à regularização tipo (I) com a função decrescente de temperatura,  $g_2(T)$ . Os gráficos na 1ª linha correspondem à comparação da susceptibilidade topológica do presente modelo com os resultados da rede (com respectivas barras de erro [49]) para quarks com massa, enquanto que os gráficos na 2ª linha referem-se a quarks com massa.

Para melhor visualização dos dados, apresenta-se os três gráficos da fig. 3.4 sobrepostos na fig. 3.5.

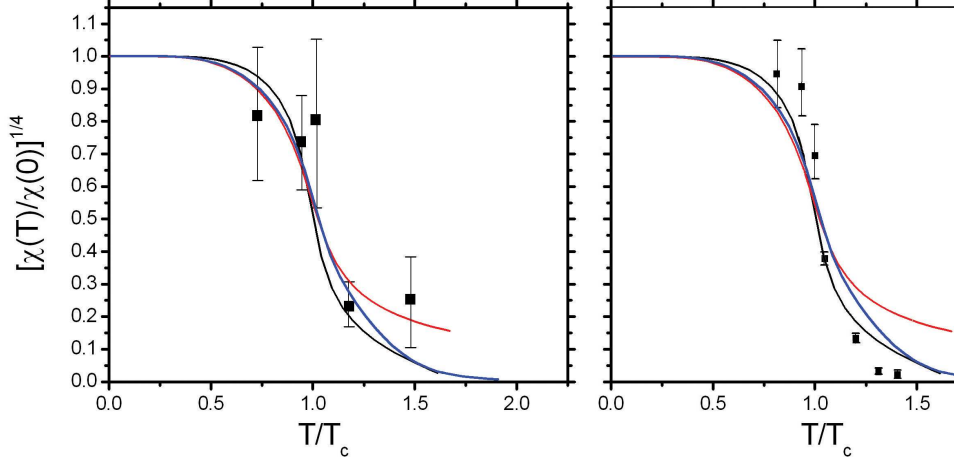


Figura 3.5: Sobreposição das três curvas de  $\chi$  referentes à fig. 3.4, onde o 1º gráfico corresponde à 1ª linha e o 2º gráfico corresponde à 2ª linha da fig. 3.4.

### 3.2.1 Discussão Global dos Resultados

Antes de iniciar a discussão global dos resultados, começamos por resumir esquematicamente alguns aspectos do presente cálculo:

- $T_c$ : temperatura da transição de fase - mínimo da derivada de  $\langle \bar{q}q \rangle$  (restauração parcial da simetria quiral)
  - A massa constituinte e os condensados de quarks atingem valores baixos ( 1/3 do valor inicial)
- $T_{eff}$ : restauração efectiva da simetria quiral<sup>3.2</sup>
  - Degenerescência dos parceiros quirais:  $m_\sigma = m_\pi$  e  $m_\eta = m_{a_0}$
- Vantagens e inconvenientes do *cutoff* infinito:
  - Baixa  $T_c$ , conduzindo a um valor mais próximo dos resultados da rede

<sup>3.2</sup>Na tabela 3.3 tomou-se para  $T_{eff}$  o valor médio das temperaturas para a degenerescência dos parceiros quirais,  $\pi, \sigma$  e  $\eta, a_0$ , uma vez que estas temperaturas, apesar de muito próximas, não coincidem exactamente

- Mas para temperaturas elevadas, faz decrescer  $\chi$  demasiadamente em comparação com os resultados da rede.
- Se houver restauração efectiva da simetria axial:  $\chi \rightarrow 0$ ,  $m_\sigma = m_\pi = m_\eta = m_{a_0}$

	<i>Cutoff</i> Finito	<i>Cutoff</i> Infinito	<i>Cutoff</i> finito com $g_2(T)$
$T_c$ [MeV]	234	193	234
$T_{eff}$ [MeV]	320	220	280

Tabela 3.3: Temperatura da restauração parcial ( $T_c$ ) e efectiva ( $T_{eff}$ ). Para o caso de  $g_2(T)$  e regularização (II) a temperatura de restauração efectiva da simetria axial é de 400 Mev.

- Restauração efectiva da simetria axial:
  - A susceptibilidade topológica  $\chi$ , tende para zero, mas os parceiros quirais axiais não degeneram, independentemente da regularização utilizada
    - \* Necessidade de um mecanismo adicional para a restauração desta simetria

Façamos agora uma análise comparativa dos resultados relativos à restauração da simetria axial no modelo em SU(2) e em SU(3).

Quando se utiliza a regularização (II), que permite quarks de momentos elevados, em SU(3) a simetria axial é restaurada como consequência da restauração da simetria quiral (processos simultâneos). De facto, em SU(3) verifica-se que, usando a regularização (II), à temperatura  $T_{eff} = 333$  MeV [50], ocorre simultaneamente, a anulação dos condensados de quarks (estranhos e não estranhos) e da susceptibilidade topológica  $\chi$ , bem como do *gap* entre os parceiros axiais. Em SU(2), como vimos, apenas se anulam as duas primeiras quantidades. Compreende-se que em ambos os modelos a susceptibilidade topológica se anule ao mesmo tempo que os condensados de quarks se anulam visto que  $\chi$  é, nos dois casos, proporcional aos condensados de quarks. Todavia, em SU(3) há efeitos que decorrem do facto de figurar o condensado de quarks estranhos  $\langle s\bar{s} \rangle$  nas várias expressões relacionadas com

os observáveis que pretendemos analisar, nomeadamente as massas dos mesões. Em SU(3), o termo que simula a anomalia, é uma interacção de 6 quarks, que é transformada numa interacção efectiva de 4 quarks através da contracção de Wick que depende apenas dos projectores  $S_{ab}$  e  $P_{ab}$  ( ver Eq. (5.80) e Eq. (5.81) no apêndice 5.4.1), ou seja

$$S_{ab} = g_S \delta_{ab} + g_D D_{abc} \langle \bar{q} \lambda^c q \rangle, \quad (3.1)$$

$$P_{ab} = g_S \delta_{ab} - g_D D_{abc} \langle \bar{q} \lambda^c q \rangle, \quad (3.2)$$

onde  $\langle \bar{q} \lambda^c q \rangle$  são valores expectáveis do vácuo. Notamos que, quando os condensados de quarks vão para zero, o coeficiente da anomalia desaparece dos projectores, tudo se passa como se tivéssemos uma constante de acoplamento  $g_D$  efectiva, dependendo do condensado de quarks:

$$g_D \rightarrow g_{D_{ef}} = g_D D_{abc} \langle \bar{q} \lambda^c q \rangle. \quad (3.3)$$

Ao contrário, em SU(2) temos à partida uma interacção de 4 quarks, com constantes de acoplamento fixas.

A diferença entre SU(2) e SU(3) não está em  $\chi$ , visto que ambas são proporcionais a  $\langle \bar{q} q \rangle$ . Se  $\langle \bar{q} q \rangle \rightarrow 0$  implica que  $\chi \rightarrow 0$ . A diferença é que os propagadores dos mesões dependem de  $g_1 \pm g_2$ , em SU(2), e de  $g_s \pm g_D \langle q \bar{q} \rangle$ , em SU(3).

Em SU(2) a degenerescência dos parceiros quirais é apenas conseguida considerando uma dependência na temperatura para a "constante" de interacção  $g_2(T)$ , tal que é suprimida a quebra explícita da simetria axial (pois  $g_2(T) \rightarrow 0$  quando  $\chi \rightarrow 0$ ).

Concluimos assim e, pela análise deste trabalho em SU(2) e revendo os resultados obtidos em SU(3), que a  $\chi$  não "diz" tudo sobre a restauração da simetria axial. De facto, mesmo quando  $\chi \rightarrow 0$  a "quebra" efectiva da simetria axial permanece. Neste modelo a restauração da simetria quiral não implica a restauração da simetria axial.

# Capítulo 4

## Conclusões

Neste estudo, dedicado à análise do modelo Nambu Jona-Lasinio de dois sabores com anomalia, designado por NJL(A), foi analisado o comportamento de vários observáveis que sinalizam a restauração das simetrias quiral e axial com a temperatura.

A acção efectiva relacionada com os graus de liberdade mesónicos, foi obtida pela bosonização, que se efectua por integração sobre o campo de quarks no integral funcional com o lagrangiano. Após a bosonização do modelo, obtemos uma acção efectiva, de onde extraímos a equação do *gap* e os propagadores dos mesões, e calculamos outros observáveis como a constante de decaimento do pião e a susceptibilidade topológica. Posteriormente, esses resultados foram generalizados para temperatura finita, recorrendo ao formalismo de Matsubara. Consideraram-se dois tipos de regularização a temperatura finita, um que consiste em usar sempre o *cutoff* finito (I) e outro em que este *cutoff* só é usado nos integrais divergentes (II). Foi também analisado o efeito do coeficiente da anomalia,  $g_2(T)$  depender da temperatura.

Estudou-se a restauração das simetrias quiral e axial, com a temperatura, tendo em conta o efeito do tipo de regularização no processo de restauração das simetrias, e efectuou-se uma comparação dos resultados aqui obtidos, com os relativos ao modelo NJL em SU(3) [50]. Verificou-se que aqui, também a temperatura crítica para a transição de fase, obtida com a regularização (II), é mais próxima dos resultados numéricos obtidos por cálculos na rede; no entanto, a restauração efectiva das simetrias quiral e axial não ocorreram simultaneamente, para temperaturas superiores à da temperatura crítica. Concluimos pois, que quando as constantes de acoplamento são consideradas constantes, a restauração da simetria axial, no sector SU(2), não



ocorre como uma consequência natural da restauração completa da simetria quiral, constituindo este facto uma diferença fundamental entre o sector  $SU(3)$  e o sector  $SU(2)$ , onde, e como verificamos, não basta usar a regularização de tipo (II) para que todos os observáveis relacionados com a simetria  $U_A(1)$  se anulem. É, então necessário usar um mecanismo adicional para a sua restauração, como a utilização de uma dependência adicional da temperatura no coeficiente de acoplamento relacionado com a anomalia  $g_2(T)$ . Uma vez que  $g_2$  é a constante de acoplamento do termo que quebra a simetria axial e que simula o efeito dos instantões, este resultado parece indicar que, em  $SU(2)$ , os instantões não são suprimidos inteiramente pela restauração da simetria quiral.

Um contributo relevante que este estudo fornece para o entendimento da física associada à quebra e restauração da simetria  $U_A(1)$ , refere-se ao facto de que, pela análise deste trabalho em  $SU(2)$  e revendo os resultados obtidos em  $SU(3)$ , que a análise da susceptibilidade topológica  $\chi$ , é a "condição necessária", mas não é a "condição suficiente", para o estudo e compreensão da restauração da simetria axial.

# Capítulo 5

## Apêndice

### 5.1 Matrizes de Dirac

Usaremos aqui as convenções do livro de Bjorken e Drell [93] e adotaremos unidades tais que  $\hbar = c = 1$ .

O tensor da métrica é dado por

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

As componentes tempo de um tetravector  $a^m u = (a^0, \vec{a})$ , são tais que

$$aa = a^\mu a_\mu = a^\mu g_{\mu\nu} a^\nu = (a^0)^2 - \vec{a} \cdot \vec{a}. \quad (5.1)$$

As derivadas em ordem as coordenadas covariantes  $x^\mu$  e contravariantes  $x_\mu$  são tais que:

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right). \quad (5.2)$$

As matrizes de Dirac  $\gamma^\mu = (\gamma_0, \vec{\gamma})$  satisfazem as relações

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (5.3)$$

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad (5.4)$$

$$(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.5)$$

A matriz  $\gamma_5$  definida por

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (5.6)$$

satisfaz as propriedades:

$$\gamma_5, \gamma^\mu = 0 \quad (5.7)$$

$$(\gamma_5)^2 = 1 \quad (5.8)$$

Adoptamos a representação dita *standard*, para as matrizes  $\gamma$ .

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{bmatrix},$$

onde  $\sigma_k$  são as matrizes do spin de Pauli:

$$\sigma^1 = \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^2 = \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^3 = \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nesta representação para as matrizes  $\gamma$ , temos

$$\gamma_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

As matrizes de isospin, formalmente idênticas às matrizes de spin, respeitam as seguintes relações:

$$[\tau_i, \tau_j] = 2i\epsilon_{ijk}\tau_k \quad (5.9)$$

$$\tau_i\tau_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\tau_k \quad (5.10)$$

## 5.2 Simetrias no Modelo NJL(A)

Consideramos o lagrangiano apresentado nas Eqs. 2.1, 2.2, 2.3, sujeito as seguintes transformações:

Transformação quiral:

$$U_5 = \exp\left(-i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}\hat{n}}{2}\alpha\right) \quad (5.11)$$

Transformação axial:

$$\tilde{U}_5 = \exp(-i\gamma_5\alpha) \quad (5.12)$$

### Invariância Quiral de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$

A transformação quiral Eq. 5.11, pode escrever-se:

$$U_5 = \cos \frac{\alpha}{2} - i\gamma_5 \vec{\tau}\hat{n} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (5.13)$$

e

$$U_5^\dagger = \cos \frac{\alpha}{2} + i\gamma_5 \vec{\tau}\hat{n} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (5.14)$$

Sob esta transformação resulta:

$$q' = U_5 q, \quad (5.15)$$

e

$$\bar{q}' = q^\dagger U_5^\dagger \gamma^0 = \bar{q} U_5, \quad \text{logo} \quad \bar{q}' q' = \bar{q} U_5^2 q, \quad (5.16)$$

onde

$$U_5^2 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} - i\gamma_5 \vec{\tau}\hat{n} 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (5.17)$$

simplificando

$$U_5^2 = \cos \alpha - i\gamma_5 \vec{\tau}\hat{n} \sin \alpha. \quad (5.18)$$

Analisando o efeito desta transformação, consideramos no lagrangiano Eq. 2.1, as respectivas transformações das suas componentes:

a)

$$\begin{aligned}
(\bar{q}'q')^2 &= \left( \cos \alpha \bar{q}q - (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}\hat{n}q) \sin \alpha \right)^2 \\
&= \cos^2 \alpha (\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2 \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha (\bar{q}q)(\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)\hat{n}
\end{aligned} \tag{5.19}$$

b)

$$(\bar{q}'i\gamma_5\vec{\tau}q')^2 = (\bar{q}iU_5\vec{\tau}\gamma_5U_5q)^2, \tag{5.20}$$

desenvolvendo o termo  $U_5\vec{\tau}\gamma_5U_5$ , temos:

$$\begin{aligned}
U_5\vec{\tau}\gamma_5U_5 &= \left( \cos \frac{\alpha}{2} - i\gamma_5\vec{\tau}\hat{n} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \gamma_5\vec{\tau} \left( \cos \frac{\alpha}{2} - i\gamma_5\vec{\tau}\hat{n} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \\
&= \left( \gamma_5\vec{\tau} \cos \frac{\alpha}{2} - i\hat{n} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left( \cos \frac{\alpha}{2} - i\gamma_5\vec{\tau}\hat{n} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \\
&= \gamma_5\vec{\tau} \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \hat{n} - \gamma_5\vec{\tau} \sin^2 \frac{\alpha}{2}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

simplificando,

$$\begin{aligned}
iU_5\vec{\tau}\gamma_5U_5 &= (i\gamma_5\vec{\tau}) \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \hat{n} - i\gamma_5\vec{\tau} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\
&= (i\gamma_5\vec{\tau}) \cos \alpha + \sin \alpha \hat{n}.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Então obtemos a Eq. 5.20 na forma:

$$\begin{aligned}
(\bar{q}'i\gamma_5\vec{\tau}q')^2 &= \left[ (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q) \cos \alpha + \hat{n}(\bar{q}q) \sin \alpha \right]^2 \\
&= \sin^2 \alpha (\bar{q}q)^2 + \cos^2 \alpha (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)(\bar{q}q)\hat{n}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

c)

$$(\bar{q}'\vec{\tau}q')^2 = (\bar{q}U_5\vec{\tau}U_5q)^2 \tag{5.24}$$

desenvolvendo o termo  $U_5\vec{\tau}U_5$ , temos:

$$\begin{aligned}
U_5\vec{\tau}U_5 &= \left( \vec{\tau} \cos \frac{\alpha}{2} - i\gamma_5 \hat{n} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left( \cos \frac{\alpha}{2} - i\gamma_5 \vec{\tau} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \\
&= \vec{\tau} \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \vec{\tau} \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2i\gamma_5 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \hat{n} \\
&= \vec{\tau} \cos \alpha - i\gamma_5 \sin \alpha \hat{n}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

assim, obtemos a componente apresentada na Eq. 5.24 na forma,

$$\begin{aligned}
(\vec{q}'\vec{\tau}q')^2 &= \left( \cos \alpha (\vec{q}\vec{\tau}q) - (\vec{q}i\gamma_5q) \hat{n} \sin \alpha \right)^2 \\
&= \cos^2 \alpha (\vec{q}\vec{\tau}q)^2 + (\vec{q}i\gamma_5q)^2 \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha (\vec{q}\vec{\tau}q) (\vec{q}i\gamma_5q) \hat{n}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

d)

$$(\vec{q}'i\gamma_5q')^2 = (\vec{q}iU_5\gamma_5U_5q)^2 \tag{5.27}$$

desenvolvendo o termo  $iU_5\gamma_5U_5$ , temos:

$$\begin{aligned}
iU_5\gamma_5U_5 &= i \left[ \left( \cos \frac{\alpha}{2} - i\gamma_5 \vec{\tau} \hat{n} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \gamma_5 \left( \cos \frac{\alpha}{2} - i\gamma_5 \vec{\tau} \hat{n} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \right] \\
&= i \left( \gamma_5 \cos \frac{\alpha}{2} - i\vec{\tau} \hat{n} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left( \cos \frac{\alpha}{2} - i\gamma_5 \vec{\tau} \hat{n} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \\
&= i \left( \gamma_5 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \gamma_5 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2i\vec{\tau} \hat{n} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) \\
&= i\gamma_5 \cos \alpha + \vec{\tau} \sin \alpha \hat{n}.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Então

$$\begin{aligned}
(\vec{q}'i\gamma_5q')^2 &= [(\vec{q}i\gamma_5q) \cos \alpha + (\vec{q}\vec{\tau}q) \sin \alpha]^2 \\
&= (\vec{q}i\gamma_5q)^2 \cos^2 \alpha + (\vec{q}\vec{\tau}q)^2 \sin^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin \alpha (\vec{q}i\gamma_5q) (\vec{q}\vec{\tau}q) \hat{n}
\end{aligned} \tag{5.29}$$

As componentes Eqs. 5.19, 5.23, 5.26, 5.29, do lagrangiano transformadas pela transformação quiral, são incluídas nos respectivos lagrangianos, onde por exemplo

para  $\mathcal{L}'_1$  toma a forma,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_1 = & (\bar{q}q)^2 \cos^2 \alpha + (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2 \sin^2 \alpha - 2 \cos \alpha \sin \alpha (\bar{q}q)(\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)\hat{n} \\
& + (\bar{q}q)^2 \sin^2 \alpha + (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2 \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin \alpha (\bar{q}q)(\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)\hat{n} \\
& + (\bar{q}\vec{\tau}q)^2 \cos^2 \alpha + (\bar{q}i\gamma_5q)^2 \sin^2 \alpha - 2 \cos \alpha \sin \alpha (\bar{q}\vec{\tau}q)(\bar{q}i\gamma_5q)\hat{n} \\
& + (\bar{q}\vec{\tau}q)^2 \sin^2 \alpha + (\bar{q}i\gamma_5q)^2 \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin \alpha (\bar{q}\vec{\tau}q)(\bar{q}i\gamma_5q)\hat{n}.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Logo concluímos que  $\mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_1$ . De igual modo obtemos  $\mathcal{L}'_2 = \mathcal{L}_2$ .

### Invariância Axial de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$

A transformação axial Eq. 5.12, pode escrever-se:

$$\tilde{U}_5 = \cos \theta - i\gamma_5 \sin \theta, \tag{5.31}$$

Analisando o efeito desta transformação, consideramos no lagrangiano Eq. 2.1, as respectivas transformações das suas componentes:

a)

$$\begin{aligned}
(\bar{q}'q')^2 &= [\bar{q}(\cos 2\theta - i\gamma_5 \sin 2\theta)q]^2 \\
&= \cos^2 2\theta (\bar{q}q)^2 + \sin^2 2\theta (\bar{q}i\gamma_5q)^2 - 2 \sin 2\theta \cos 2\theta (\bar{q}q)(\bar{q}i\gamma_5q).
\end{aligned} \tag{5.32}$$

b)

$$\begin{aligned}
(\bar{q}'i\gamma_5\vec{\tau}q')^2 &= [\bar{q}(i\gamma_5 \cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - i\gamma_5 \sin \theta)\vec{\tau}]^2 \\
&= [(\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2 \sin \theta \cos \theta (\bar{q}\vec{\tau}q)]^2 \\
&= (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2 \cos^2 2\theta + (\bar{q}\vec{\tau}q)^2 \sin^2 2\theta + 2 \sin 2\theta \cos 2\theta (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)(\bar{q}\vec{\tau}q).
\end{aligned} \tag{5.33}$$

c)

$$\begin{aligned}
(\bar{q}'\vec{\tau}q') &= (\bar{q}\vec{\tau}\tilde{U}_5^2q)^2 \\
&= [\bar{q}\vec{\tau}(\cos 2\theta - i\gamma_5 \sin 2\theta)q]^2 \\
&= (\bar{q}\vec{\tau}q)^2 \cos^2 2\theta + (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2 \sin^2 2\theta - 2 \sin 2\theta \cos 2\theta (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)(\bar{q}\vec{\tau}q).
\end{aligned}
\tag{5.34}$$

d)

$$\begin{aligned}
(\bar{q}'\gamma_5q')^2 &= [(\bar{q}i\gamma_5q) \cos 2\theta + \sin 2\theta(\bar{q}q)]^2 \\
&= (\bar{q}q)^2 \sin^2 2\theta + (\bar{q}i\gamma_5q)^2 \cos^2 2\theta + 2 \sin 2\theta \cos 2\theta (\bar{q}i\gamma_5q)(\bar{q}q).
\end{aligned}
\tag{5.35}$$

Procedendo de modo análogo à Eq. 5.30, concluímos que também para a transformação axial verifica-se:  $\mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_1$ . Mas no entanto a transformação axial não é invariante para a componente  $\mathcal{L}_2$ , pois  $\mathcal{L}'_2 \neq \mathcal{L}_2$ . O termo  $\mathcal{L}_2$  quebra, por conseguinte, a simetria axial.



### 5.3 Conservação de Correntes no Modelo NJL(A)

Consideramos o lagrangiano do modelo NJL(A),

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i \not{\partial} - m)q + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2, \quad (5.36)$$

as equações de Euler-Lagrange,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)} = i(\partial_\mu \bar{q})\gamma^\mu \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{q}} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{q})} = -i\gamma^\mu(\partial_\mu q) \end{cases} \quad (5.37)$$

permitem obter:

a)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -m\bar{q} + \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial q} = i(\partial_\mu \bar{q})\gamma^\mu. \quad (5.38)$$

b)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{q}} = -mq + \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \bar{q}} + \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \bar{q}} = i(\partial_\mu q)\gamma^\mu. \quad (5.39)$$

Estas relações permitem estudar as leis de conservação das correntes: conservação da corrente vectorial, não conservação da corrente axial isovector  $j_5^\mu$ , conservação da corrente axial isoescalar.

#### 1. Conservação da corrente vectorial

Para o estudo da corrente vectorial, utilizamos a seguinte estratégia:

- Multiplicar a Eq.5.38 à direita por  $q$
- Multiplicar a Eq. 5.39 à esquerda por  $\bar{q}$
- Subtrair

obtendo-se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial q} q + \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial q} q - \bar{q} \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \bar{q}} - \bar{q} \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \bar{q}} = i[(\partial_\mu \bar{q}) \gamma^\mu q + (\bar{q} \gamma^\mu \partial_\mu q)], \quad (5.40)$$

escrevendo na forma de uma derivada total, fica:

$$i \partial_\mu (\bar{q} \gamma^\mu q) = \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial q} q + \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial q} q - \bar{q} \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \bar{q}} - \bar{q} \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \bar{q}} = 0, \quad (5.41)$$

ou seja, conservação da corrente vectorial:

$$i \partial_\mu (\bar{q} \gamma^\mu q) = \partial_\mu j^\mu = 0. \quad (5.42)$$

## 2. Conservação da corrente axial isovector $j_5^{\mu i}$

Para o estudo da corrente axial isovector, utilizamos a seguinte estratégia:

- Multiplicar a Eq. 5.38 à direita por  $\gamma_5 \tau^i q$
- Multiplicar a Eq. 5.39 à esquerda por  $\bar{q} \gamma_5 \tau^i$
- Somar

resultando em:

$$\begin{aligned} & -2m \bar{q} \gamma_5 \tau^i q + \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial q} \gamma_5 \tau^i q + \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial q} \gamma_5 \tau^i q + \bar{q} \gamma_5 \tau^i \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \bar{q}} + \bar{q} \gamma_5 \tau^i \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \bar{q}} \\ & = i(\partial_\mu \bar{q}) \gamma^\mu \gamma^5 \tau^i q - i \bar{q} \underbrace{\gamma_5 \tau^i \gamma^\mu}_{-\gamma^\mu \gamma_5 \tau^i} \partial_\mu q = i \partial_\mu (\bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 \tau^i q), \end{aligned} \quad (5.43)$$

ou seja,

$$\partial_\mu j_5^{\mu i} = 2m(\bar{q} i \gamma_5 \tau^i q) + \left( \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial q} \gamma_5 \tau^i q + \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial q} \gamma_5 \tau^i q + \bar{q} \gamma_5 \tau^i \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \bar{q}} + \bar{q} \gamma_5 \tau^i \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \bar{q}} \right). \quad (5.44)$$

Desenvolvendo-se as derivadas que figuram no 2º termo da Eq. 5.44,

a) consideramos o termo:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial q} \gamma_5 \tau^i q + \bar{q} \gamma_5 \tau^i \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \bar{q}} \right) \\
&= 2g_1 \left[ (\bar{q}q)(\bar{q}\gamma_5\tau_i q) + (\bar{q}^i\gamma_5\tau^i q)(\bar{q}^i\gamma_5\tau_j\gamma_5\tau_i q) \right. \\
&\quad \left. + (\bar{q}\vec{\tau}q)(\bar{q}\tau^j\gamma_5\tau^i q) + (\bar{q}^i\gamma_5 q)(\bar{q}^i\gamma_5\gamma_5\tau_i q) \right] \times 2, \quad (5.45)
\end{aligned}$$

simplificando verifica-se que este se anula,

$$4g_1 \left[ (\bar{q}q)(\bar{q}\gamma_5\tau_i q) - (\bar{q}\gamma_5\tau^i q)(\bar{q}q) + (\bar{q}\vec{\tau}q)(\bar{q}\gamma_5 q) - (\bar{q}\gamma_5 q)(\bar{q}\tau_i q) \right] = 0, \quad (5.46)$$

b) de modo análogo obtemos,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial q} \gamma_5 \tau_i q + \bar{q} \gamma_5 \tau_i \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \bar{q}} \\
&= 4g_2 \left[ (\bar{q}q)(\bar{q}\gamma_5\tau_i q) + (\bar{q}^i\gamma_5\tau_j q)(\bar{q}^i\gamma_5\tau_j\gamma_5\tau_i q) \right. \\
&\quad \left. - (\bar{q}\tau^j q)(\bar{q}\tau^j\gamma_5\tau^i q) + (\bar{q}^i\gamma_5 q)(\bar{q}^i\gamma_5\gamma_5\tau_i q) \right] \\
&= 4g_2 \left[ (\bar{q}q)(\bar{q}\gamma_5\tau_i q) - (\bar{q}\gamma_5\tau^i q)(\bar{q}q) \right. \\
&\quad \left. - (\bar{q}\tau^i q)(\bar{q}\gamma_5 q) + (\bar{q}\gamma_5 q)(\bar{q}\tau^i q) \right] = 0. \quad (5.47)
\end{aligned}$$

Concluimos que a corrente axial isovector, é conservada no limite quiral:

$$\partial_\mu j_5^{\mu i} = 2m(\bar{q}^i\gamma_5\tau^i q). \quad (5.48)$$

### 3. Conservação da corrente axial isoescalar

Para o estudo da corrente axial isoescalar, utilizamos a seguinte estratégia:

- Multiplicar a Eq. 5.38 à direita por  $\gamma_5 q$
- Multiplicar a Eq. 5.39 à esquerda por  $\bar{q}\gamma_5$

- Somar

Fica

$$\begin{aligned}
& -2m\bar{q}\gamma_5q + \left[ \frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial q}\gamma_5q + \frac{\partial\mathcal{L}_2}{\partial q}\gamma_5q + \bar{q}\gamma_5\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial\bar{q}} + \bar{q}\gamma_5\frac{\partial\mathcal{L}_2}{\partial\bar{q}} \right] \\
& = i\partial_\mu j_5^\mu,
\end{aligned} \tag{5.49}$$

onde,

$$j_5^\mu = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5q. \tag{5.50}$$

Desenvolvendo-se as derivadas que figuram no 1º termo da Eq. 5.49, verifica-se que se anula a seguinte contribuição:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial q}\gamma_5q + \bar{q}\gamma_5\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial\bar{q}} & = 2g_1 \left[ (\bar{q}q)(\bar{q}\gamma_5q) + (\bar{q}i\gamma_5\tau_iq)(\bar{q}i\gamma_5\tau_i\gamma_5q) \right. \\
& \quad \left. + (\bar{q}\tau^iq)(\bar{q}\tau_i\gamma_5q) + (\bar{q}i\gamma_5q)(\bar{q}i\gamma_5\tau_i\gamma_5q) \right] 2 \\
& = 4g_1 \left[ (\bar{q}q)(\bar{q}\gamma_5q) - (\bar{q}\gamma_5\tau_iq)(\bar{q}\tau_iq) \right. \\
& \quad \left. + (\bar{q}\tau_iq)(\bar{q}\tau_i\gamma_5q) - (\bar{q}\gamma_5q)(\bar{q}q) \right] = 0,
\end{aligned} \tag{5.51}$$

no entanto, a próxima contribuição é não nula,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}_2}{\partial q}\gamma_5q + \bar{q}\gamma_5\frac{\partial\mathcal{L}_2}{\partial\bar{q}} & = 2g_2 \left[ (\bar{q}q)(\bar{q}\gamma_5q) - (\bar{q}\gamma_5\tau_iq)(\bar{q}\tau_iq) \right. \\
& \quad \left. - (\bar{q}\gamma_5\tau_iq)(\bar{q}\tau^iq) + (\bar{q}q)(\bar{q}\gamma_5q) \right] \\
& = 8g_2 \left[ (\bar{q}q)(\bar{q}\gamma_5q) - (\bar{q}\gamma_5\vec{\tau}q)(\bar{q}\vec{\tau}q) \right].
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Rearranjando os termos, obtemos:

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2m i \bar{q}\gamma_5q + 8g_2 \left[ (\bar{q}\vec{\tau}q)(\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q) - (\bar{q}q)(\bar{q}i\gamma_5q) \right]. \tag{5.53}$$

A corrente axial (isoescalar) não é conservada mesmo no limite quiral. Este facto, é consequência de o lagrangiano,  $\mathcal{L}_2$ , não ter invariância axial.

**Definição de carga axial** [46]

A carga axial na teoria QCD define-se como:

$$\partial_\mu j_\mu^5 = 2 i \bar{q} m \gamma_5 q + 2N_f Q(x), \quad (5.54)$$

a análise do modelo NJL(A), Eq. 5.53, permite escrever,

$$\partial_\mu j_\mu^5 = 2 i \bar{q} m \gamma_5 q + 4N_f g_2 \left[ (\bar{q} \vec{\tau} q) (\bar{q} i \gamma_5 \vec{\tau} q) - (\bar{q} q) (\bar{q} i \gamma_5 q) \right], \quad (5.55)$$

assim definimos a carga axial como:

$$Q(x) = 2g_2 \left[ (\bar{q} \vec{\tau} q) (\bar{q} i \gamma_5 \vec{\tau} q) - (\bar{q} q) (\bar{q} i \gamma_5 q) \right]. \quad (5.56)$$

## 5.4 Cálculo de Susceptibilidade Topológica

A susceptibilidade topológica é dada por

$$\chi = \int d^4x \langle 0|TQ(x)Q(0)|0\rangle_c, \quad (5.57)$$

onde  $c$  significa conexos (considera-se apenas os diagramas conexos),  $Q(x)$  é a carga de densidade topológica, definida na Eq. 5.56 para o modelo NJL(A) e  $T$  é o operador de ordem temporal. A expressão geral para  $\chi$  no sector SU(3) do modelo NJL foi obtida em [46]. Neste apêndice refere-se o cálculo de susceptibilidade topológica no sector SU(2), ver Eq. 5.56 no apêndice 5.3. Assim necessitamos calcular os seguintes elementos,

$$\begin{aligned} Q(x)Q(0) &= 4g_2^2 \left[ [\bar{q}(x)q(x)][\bar{q}(x)\gamma_5 q(x)] - [\bar{q}(x)\vec{\tau}q(x)][\bar{q}(x)\gamma_5 \vec{\tau}q(x)] \right] \\ &\quad \left[ [\bar{q}(0)q(0)][\bar{q}(0)\gamma_5 q(0)] - [\bar{q}(0)\vec{\tau}q(0)][\bar{q}(0)\gamma_5 \vec{\tau}q(0)] \right] \\ &= 4g_2^2 \left[ [\bar{q}(x)q(x)][\bar{q}(x)\gamma_5 q(x)][\bar{q}(0)q(0)][\bar{q}(0)\gamma_5 q(0)] \right. \\ &\quad - [\bar{q}(x)q(x)][\bar{q}(x)\gamma_5 q(x)][\bar{q}(0)\vec{\tau}q(0)][\bar{q}(0)\gamma_5 \vec{\tau}q(0)] \\ &\quad - [\bar{q}(x)\vec{\tau}q(x)][\bar{q}(x)\gamma_5 \vec{\tau}q(x)][\bar{q}(0)q(0)][\bar{q}(0)\gamma_5 q(0)] \\ &\quad \left. + [\bar{q}(x)\vec{\tau}q(x)][\bar{q}(x)\gamma_5 \vec{\tau}q(x)][\bar{q}(0)\vec{\tau}q(0)][\bar{q}(0)\gamma_5 \vec{\tau}q(0)] \right], \quad (5.58) \end{aligned}$$

que representam-se graficamente na fig. 5.1.

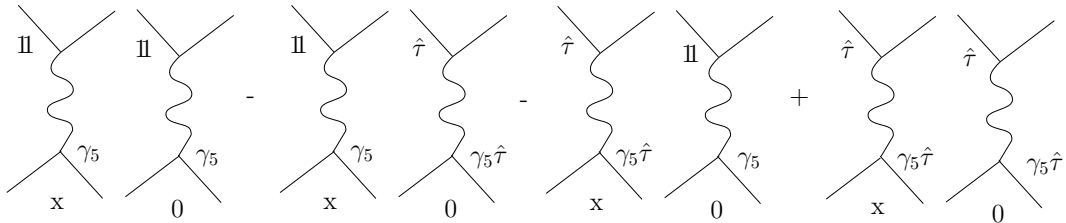


Figura 5.1: Interacção

No processo do cálculo serão utilizados os seguintes integrais:

$$I_1 = iN_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4(k^2 - m^2)} = \frac{N_c}{4\pi^2} \int \frac{k^2}{E} dk \quad (5.59)$$

$$\langle \bar{q}q \rangle = -i \operatorname{tr} \frac{1}{\not{k} - m} = -4mI_1 \quad (5.60)$$

$$I_2 = -iN_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k + q - m)^2} dk \quad (5.61)$$

$$J_{qq} = 8I_1 + q^2 I_2 \quad (5.62)$$

$$J_{qq}(0) = 8I_1 = -\frac{\langle \bar{q}q \rangle}{2m} \quad (5.63)$$

Escrevemos a equação 5.58 na forma

$$\chi = 4g_2^2(\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4), \quad (5.64)$$

e notamos que o cálculo de  $\chi$  considera os itens que a seguir se enumeram.

1. Cálculo de  $\chi_{\text{low}}$ , onde são tomados em consideração os quatro termos na Eq. 5.64, obtendo-se o seguinte resultado para a expressão diagramática de ordem mais baixa, fig. 5.2,

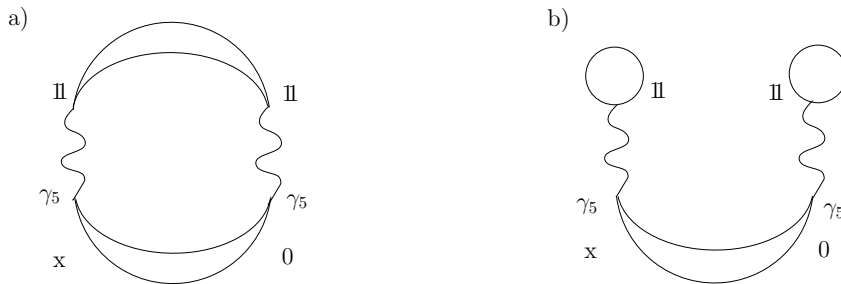


Figura 5.2: Diagramas ligados com contribuição não-nula

Da análise da fig. 5.2, escreve-se as correspondentes expressões a) e b).

a) Expressão correspondente ao diagrama a) na fig. 5.2 é

$$\text{tr} \mathbb{1} \frac{1}{\not{k} - m} \mathbb{1} \frac{1}{\not{k} - m} \quad \text{tr} \frac{1}{\not{k} - m} \gamma_5 \frac{1}{\not{k} - m} \gamma_5 \quad (5.65)$$

é da ordem de  $N_c^2$

b) Expressão correspondente ao diagrama b) na fig. 5.2, é da forma

$$\text{tr} \frac{1}{\not{k} - m} \text{tr} \frac{1}{\not{k} - m} \gamma_5 \frac{1}{\not{k} - m} \gamma_5 \text{tr} \frac{1}{\not{k} - m} \quad (5.66)$$

é da ordem de  $N_c^3$

Assim compreende-se que só a expressão b) é que deve ser tida em conta.

Deste modo,

$$\chi_{\text{low}} = 4g_2^2 \left( \text{tr} \frac{1}{\not{k} - m} \right)^2 \text{tr} \frac{1}{\not{k} - m} \gamma_5 \frac{1}{\not{k} - m} \gamma_5, \quad (5.67)$$

onde consideramos para o cálculo as duas seguintes integrações

•

$$i \text{tr} \frac{1}{\not{k} - m} = 4MI_1 \quad (5.68)$$

•

$$\text{tr} \frac{1}{\not{k} - m} \gamma_5 \frac{1}{\not{k} - m} \gamma_5 = \text{tr} \frac{(\not{k} - m) \gamma_5 (\not{k} - m) \gamma_5}{(k^2 - m^2)^4} \quad (5.69)$$

$$-4N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 - m^2}{(k^2 - m^2)^2} = -4N_c \int \frac{d^4k}{k^2 - m^2} = i4I_1 \quad (5.70)$$

Deste modo escrevemos  $\chi_{\text{low}}$  da seguinte forma

$$\chi_{\text{low}} = 84 g_2^2 (4MI_1)^2 4 I_1 \quad (5.71)$$

ou, segunda a equação 5.63,  $\chi_{\text{low}}$  também pode ficar

$$\chi_{\text{low}} = 44 g_2^2 \langle \bar{q}q \rangle^2 \frac{J_{qq}(0)}{2} \quad (5.72)$$



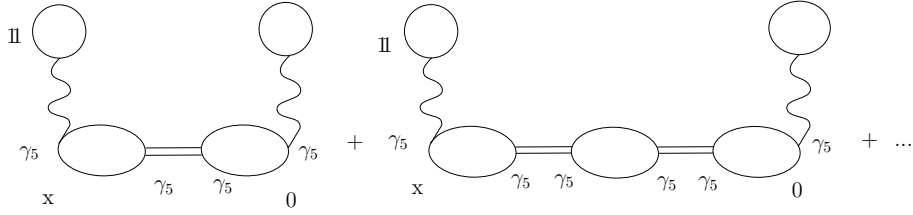


Figura 5.3:  $\chi_{\text{string}}$

## 2. Cálculo de $\chi_{\text{string}}$

A expressão de  $\chi_{\text{string}}$  correspondente à fig. 5.3 é

$$\chi_{\text{string}} = 4g_2^2 \left( \text{tr} \frac{1}{\not{k} - m} \right)^2 \left( \text{tr} \frac{1}{\not{k} - m} \gamma_5 \frac{1}{\not{k} - m} \gamma_5 \right)^2 \left( \frac{g_a}{1 - 8g_a I_1} \right) \quad (5.73)$$

que, atendendo às equações 5.68 e 5.70, pode escrever-se

$$\chi_{\text{string}} = 4g_2^2 4 \langle \bar{q}q \rangle^2 (4I_1)^2 \frac{g_a}{1 - 8g_a I_1} 2 \quad (5.74)$$

onde o factor 2 refere-se ao traço sobre o sabor. Obtemos finalmente  $\chi_t$ , com respeito às equações  $\chi_{\text{low}}$  e  $\chi_{\text{string}}$

$$\chi_t = 4 4g_2^2 \langle \bar{q}q \rangle^2 4I_1 \left[ 1 + \frac{8g_a I_1}{1 - 8g_a I_1} \right] \quad (5.75)$$

$$= 4g_2^2 \langle \bar{q}q \rangle^2 \frac{4I_1 8}{1 - 8g_a I_1} \quad (5.76)$$

onde, recordando a eq. 5.63 fica-se com

$$\chi_t = 8g_2^2 \langle \bar{q}q \rangle^2 \left[ \frac{J_{qq}(0)}{1 - g_a J_{qq}(0)} \right] \quad (5.77)$$

sendo  $g_a = g_1 - g_2$ .

### 5.4.1 Termo de 't Hooft em SU(3)

Considera-se aqui uma revisão do modelo de NJL em SU(3), pois termo de 't Hooft é introduzido no sistema de 3 sabores, o lagrangiano contém os termos de interacção escalar e pseudoescalar e ainda o termo de interacção introduzido por 't Hooft, gerado por instantões na QCD, este termo quebra a simetria  $U_A(1)$ , sendo o lagrangiano para o campo de quarks  $q$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{q}(i\gamma^\mu\partial_\mu - \hat{m})q + \frac{1}{2}g_S \sum_{a=0}^8 [(\bar{q}\lambda^a q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\lambda^a q)^2] \\ & - \frac{1}{2}g_V \sum_{a=0}^8 [(\bar{q}\gamma_\mu\lambda^a q)^2 + (\bar{q}i\gamma_\mu\gamma_5\lambda^a q)^2] \\ & + g_D \{ \det[\bar{q}(1 + \gamma_5)q] + \det[\bar{q}(1 - \gamma_5)q] \}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Onde  $q = (u, d, s)$  representa o campo de quarks com 3 sabores,  $N_f = 3$ , e 3 cores,  $N_c = 3$ .  $\lambda^a$  são as matrizes de Gell-Mann,  $a = 0, 1, \dots, 8$ ,  $\lambda^0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{I}$ .

Este lagrangiano mantém a simetria quiral da QCD. No entanto notamos que esta simetria é apenas parcialmente conservada, a simetria quiral  $SU(3) \otimes SU(3)$  do lagrangiano (5.78) é explicitamente quebrada pelas massas correntes dos quarks:  $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ , facto este também valido para o sector SU(2) que se analisa no presente trabalho.

O último termo escrito no lagrangiano (5.78), foi introduzido por 't Hooft que deste modo (inclusão de uma interacção de seis quarks sob a forma de um determinante) forneceu uma maneira de quebrar a simetria axial  $U_A(1)$  deixando intacta, a simetria quiral  $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ , além disso torna massivo o mesão  $\eta'$ .

É conveniente escrever o lagrangiano 5.78 de modo mais natural para efectuar a bosonização, assim devemos converter a interacção de seis quarks, 5.78, numa interacção de quatro quarks, permitindo assim obter um lagrangiano efectivo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} = & \bar{q}(i\gamma^\mu\partial_\mu - \hat{m})q \\ & + S_{ab}[(\bar{q}\lambda^a q)(\bar{q}\lambda^b q)] + P_{ab}[(\bar{q}i\gamma_5\lambda^a q)(\bar{q}i\gamma_5\lambda^b q)], \end{aligned} \quad (5.79)$$

onde os projectores  $S_{ab} P_{ab}$  são

$$S_{ab} = g_S \delta_{ab} + g_D D_{abc} \langle \bar{q} \lambda^c q \rangle, \quad (5.80)$$

$$P_{ab} = g_S \delta_{ab} - g_D D_{abc} \langle \bar{q} \lambda^c q \rangle, \quad (5.81)$$

onde  $\langle \bar{q} \lambda^c q \rangle$  são valores expectáveis do vácuo. As constantes  $D_{abc}$  coincidem com as constantes de estrutura de  $SU(3)$   $d_{abc}$  para  $a, b, c = (1, 2, \dots, 8)$  e  $D_{0ab} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \delta_{ab}$ ,  $D_{000} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

### 5.4.2 Relação entre $\mathcal{L}_2$ e $Q(x)$ e a Forma Determinantal

Seguindo o trabalho de F. Fukushima [46], escrevemos:

$$\phi = \bar{q}(1 - \gamma_5)q \quad \rightarrow \quad \phi_{ij} = \bar{q}_i(1 - \gamma_5)q_j, \quad (5.82)$$

e procedemos ao cálculo de  $\det \phi + \det \phi^*$  e de  $\det \phi - \det \phi^*$ .

1. Cálculo de  $\det \phi + \det \phi^*$ :

$$\begin{aligned} & \det [\bar{q}(1 - \gamma_5)q] + \det [\bar{q}(1 + \gamma_5)q] \\ = & \det \begin{vmatrix} \bar{q}_1(1 - \gamma_5)q_1 & \bar{q}_1(1 - \gamma_5)q_2 \\ \bar{q}_2(1 - \gamma_5)q_1 & \bar{q}_2(1 - \gamma_5)q_2 \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \bar{q}_1(1 + \gamma_5)q_1 & \bar{q}_1(1 + \gamma_5)q_2 \\ \bar{q}_2(1 + \gamma_5)q_1 & \bar{q}_2(1 + \gamma_5)q_2 \end{vmatrix} \\ = & [\bar{q}_1(1 - \gamma_5)q_1][\bar{q}_2(1 - \gamma_5)q_2] - [\bar{q}_1(1 - \gamma_5)q_2][\bar{q}_2(1 - \gamma_5)q_1] \\ & + [\bar{q}_1(1 + \gamma_5)q_1][\bar{q}_2(1 + \gamma_5)q_2] - [\bar{q}_1(1 + \gamma_5)q_2][\bar{q}_2(1 + \gamma_5)q_1] \\ = & 2[(\bar{q}_1 q_1)(\bar{q}_2 q_2) + (\bar{q}_1 \gamma_5 q_1)(\bar{q}_2 \gamma_5 q_2) - (\bar{q}_1 q_2)(\bar{q}_2 q_1) - (\bar{q}_1 \gamma_5 q_2)(\bar{q}_2 \gamma_5 q_1)], \end{aligned}$$

simplificando temos:

$$\begin{aligned} & \det [\bar{q}(1 - \gamma_5)q] + \det [\bar{q}(1 + \gamma_5)q] \\ = & 2[(\bar{q}_1 q_1)(\bar{q}_2 q_2) - (\bar{q}_1 q_2)(\bar{q}_2 q_1) + (\bar{q}_1 \gamma_5 q_1)(\bar{q}_2 \gamma_5 q_2) - (\bar{q}_1 \gamma_5 q_2)(\bar{q}_2 \gamma_5 q_1)]. \end{aligned} \quad (5.83)$$

2. Cálculo de  $\det \phi - \det \phi^*$ :

$$\begin{aligned} & \det [\bar{q}(1 - \gamma_5)q] - \det [\bar{q}(1 + \gamma_5)q] \\ &= 2[(\bar{q}_1\gamma_5q_2)(\bar{q}_2q_1) + (\bar{q}_1q_2)(\bar{q}_2\gamma_5q_1) - (\bar{q}_1\gamma_5q_1)(\bar{q}_2q_2) - (\bar{q}_2\gamma_5q_2)(\bar{q}_1q_1)]. \end{aligned} \quad (5.84)$$

1. É possível obter uma relação para  $\mathcal{L}_2$  e a Eq. 5.82, comecemos por considerar os seguintes termos de  $\mathcal{L}_2$ :

$$\begin{aligned} &= (\bar{q}q)^2 - (\bar{q}\vec{\tau}q)^2 \\ &= (\bar{q}_1q_1 + \bar{q}_2q_2)^2 - (\bar{q}\tau_1q)^2 - (\bar{q}\tau_2q)^2 - (\bar{q}\tau_3q)^2, \end{aligned}$$

onde foi usado as seguintes igualdades:

(a)

$$(\bar{q}\tau_1q) = (\bar{q}_1q_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \bar{q}_1q_2 + \bar{q}_2q_1$$

(b)

$$(\bar{q}\tau_2q) = -i(\bar{q}_1q_2 - \bar{q}_2q_1)$$

(c)

$$(\bar{q}\tau_3q) = \bar{q}_1q_1 - \bar{q}_2q_2$$

assim a Eq. 5.85 fica,

$$\begin{aligned} & (\bar{q}_1q_1 + \bar{q}_2q_2)^2 - (\bar{q}_1q_2 + \bar{q}_2q_1)^2 - (\bar{q}_1q_2 - \bar{q}_2q_1)^2 - (\bar{q}_1q_1 - \bar{q}_2q_2)^2 \\ &= 4[(\bar{q}_1q_1)(\bar{q}_2q_2) - (\bar{q}_1q_2)(\bar{q}_2q_1)]. \end{aligned}$$

Analisando agora os restantes termos de  $\mathcal{L}_2$ :

$$(\bar{q}\gamma_5q)^2 - (\bar{q}\gamma_5\vec{\tau}q)^2 = 4(\bar{q}_1\gamma_5q_1)(\bar{q}_2\gamma_5q_2) - (\bar{q}_1\gamma_5q_2)(\bar{q}_2\gamma_5q_1).$$

Somando estes termos, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& (\bar{q}q)^2 - (\bar{q}\vec{\tau}q)^2 + (\bar{q}\gamma_5q)^2 - (\bar{q}\gamma_5\vec{\tau}q)^2 \\
= & 4[(\bar{q}_1q_1)(\bar{q}_2q_2) - (\bar{q}_1q_2)(\bar{q}_2q_1) + (\bar{q}_1\gamma_5q_1)(\bar{q}_2\gamma_5q_2) - (\bar{q}_1\gamma_5q_2)(\bar{q}_2\gamma_5q_1)].
\end{aligned}$$

Escrevemos então  $\mathcal{L}_2$  na forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 &= g_2[(\bar{q}q)^2 - (\bar{q}\vec{\tau}q)^2 + (\bar{q}\gamma_5q)^2 - (\bar{q}\gamma_5\vec{\tau}q)^2] \\
&= 2g_2[\det [\bar{q}(1 - \gamma_5)q] + \det [\bar{q}(1 + \gamma_5)q]] \quad (5.85)
\end{aligned}$$

2. Demonstra-se também que para  $Q(x)$ , Eq. 5.56, é possível obter uma relação com a Eq. 5.82,

$$\begin{aligned}
Q(x) &= 2g_2[(\bar{q}\vec{\tau}q) - (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q) - (\bar{q}q) - (\bar{q}i\gamma_5q)] \\
&= 2g_2i[(\bar{q}\tau_1q)(\bar{q}\gamma_5\tau_1q) + (\bar{q}\tau_2q)(\bar{q}\gamma_5\tau_2q) + (\bar{q}\tau_3q)(\bar{q}\gamma_5\tau_3q) - (\bar{q}q)(\bar{q}\gamma_5q)] \\
&= 2ig_2[(\bar{q}_1q_2 + \bar{q}_2q_1)(\bar{q}_1\gamma_5q_2 + \bar{q}_2\gamma_5q_1) - (\bar{q}_1q_2 - \bar{q}_2q_1)(\bar{q}_1\gamma_5q_2 - \bar{q}_2\gamma_5q_1) \\
&\quad + (\bar{q}_1q_1 - \bar{q}_2q_2)(\bar{q}_1\gamma_5q_1 - \bar{q}_2\gamma_5q_2) - (\bar{q}_1q_1 + \bar{q}_2q_2)(\bar{q}_1\gamma_5q_1 + \bar{q}_2\gamma_5q_2)] \\
&= 2ig_2[(\bar{q}_1\gamma_5q_2)2(\bar{q}_2q_1) + (\bar{q}_2\gamma_5q_1)2(\bar{q}_1q_2) \\
&\quad - (\bar{q}_1q_1)(2\bar{q}_2\gamma_5q_2) - (\bar{q}_2q_2)(\bar{q}_1\gamma_5q_1)] \\
&= 4ig_2[(\bar{q}_1\gamma_5q_2)(\bar{q}_2q_1) + (\bar{q}_2\gamma_5q_1)(\bar{q}_1q_2) \\
&\quad - (\bar{q}_1q_1)(\bar{q}_2\gamma_5q_2) - (\bar{q}_2q_2)(\bar{q}_1\gamma_5q_1)], \quad (5.86)
\end{aligned}$$

simplificando:

$$\underbrace{Q(x) = 2 i g_2[\det [\bar{q}(1 - \gamma_5)q] - \det [\bar{q}(1 + \gamma_5)q]]}_{\text{Coeficiente de Fukushima}}. \quad (5.87)$$

Assim verifica-se no modelo NJL(A), o  $\mathcal{L}_2$  é o termo de t'Hooft para o modelo SU(2).

# Bibliografia

- [1] <http://nobelprize.org>.
- [2] E. Fermi, Phys. Rev. **76**, 1739 (1949).
- [3] M. Gell-Mann, Phys. Rev. **92**, 883 (1953).
- [4] T. Nakano and K. Nishijima, Phys. Rev. **10**, 581 (1953).
- [5] S. Sakata, Phys. Rep. **16**, 686 (1956).
- [6] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8**, 214 (1964).
- [7] G. Zweig, CERN 8142 Th 401 prepr. (1964).
- [8] G. Zweig, CERN 8419 Th 412 prepr. (1964).
- [9] O. W. Greenberg, Am. J. Phys. **50**, 1074 (1982).
- [10] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **31**, 494 (1973).
- [11] H. Fritzsch, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, Phys. Lett. **B47**, 365 (1973).
- [12] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
- [13] D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
- [14] T. Muta in Foundations of Quantum Chromodynamics, World Scientific, Singapore (1987).
- [15] H. G. Rothe in Lattice Gauge Theories, An Introduction, World Scientific, New York (1992).

- [16] E. Laermann, Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) **63**, 114 (1998).
- [17] F. Karsch, Lect. Notes Phys. **583**, 209 (2002).
- [18] Z. Fodor e S. Katz, Phys. Lett. B **534**, 87 (2002); J. High Energy Phys. **0203**, 014 (2002).
- [19] M. H. Johnson and E. Teller, Phys. Rev. **98**, 783 (1955).
- [20] M. G. Mayer and J. H. D. Jensen, New York, USA: John Wiley and Sons (1955).
- [21] H. Duerr, Phys. Rev. **103**, 469 (1956).
- [22] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
- [23] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **124**, 246 (1961).
- [24] T. Muta, World Sci. Lect. Notes Phys. **57**, 1 (1998).
- [25] J. B. Kogut, Phys. Rept. **67**, 67 (1980).
- [26] J. S. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [27] N. K. Glendenning, New York, USA: Springer (1997).
- [28] Pedro Costa "Restauração de Simetrias Quirais em Meios Quentes e Densos e suas Manifestações em Propriedades Mesónicas". Tese de doutoramento, Universidade de Coimbra, Coimbra, 2005.
- [29] Pedro Costa "Transições de Fase e Comportamento de Mesões Pseudoescalares em Matéria Assimétrica". Tese de mestrado, Universidade de Coimbra, Coimbra, 2002.
- [30] Sarah I. Howie "A Unified Approach to Nuclear Matter and Quark Matter". Tese de mestrado, Universidade de Adelaide, Australia, 2006.
- [31] D. J. Gross e F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
- [32] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).

- [33] T. Hatsuda e T. Kunihiro, Phys. Rept. **247** 221 (1994).
- [34] G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. **37**, 8 (1976).
- [35] J. Goldstone, Nuovo Cimento **19**, 164 (1961).
- [36] J. Goldstone, A. Salam, e S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, 965 (1962).
- [37] V.A. Miransky, Dynamical Symmetry Breaking in Quantum Field Theories, World-Scientific, Singapore (1993).
- [38] C. Itzykson and J.-B. Zuber, Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York (1980).
- [39] Manuel Reenders, arxiv:hep:th/9906034.
- [40] T. D. Cohen, Phys. Rev. D **54**, 1867 (1996).
- [41] Su H. Lee e T. Hatsuda, Phys. Rev. D **54**, R1871 (1996).
- [42] N. Evans, S. Hsu e M. Schwetz, Phys. Letts. B **375**, 262 (1996).
- [43] M. Birse, T. Cohen e J. McGovern, Phys. Letts. B **388**, 137 (1996).
- [44] P. Costa, M. C. Ruivo, C. A. Sousa, e Yu. L. Kalinovsky, Phys. Rev. D **71**, 116002 (2005).
- [45] E. Shuryak, Comments Nucl. Part. Phys. **21**, 235 (1994).
- [46] K. Fukushima, K. Ohnishi, e K. Ohta, Physical Review C **63**, 045203 (2001).
- [47] E. Witten, Nucl. Phys. **B156**, 296 (1979).
- [48] G. Veneziano, Nucl. Phys. **B159**, 213 (1979).
- [49] B. Allés, M. D'Elia, e A. Di Giacomo, Nucl. Phys. **B494**, 281 (1997); B. Allés e M. D'Elia, hep-lat/0602032.
- [50] P. Costa, M. C. Ruivo and C. A. de Sousa, Phys. Rev. D **77**, 096009 (2008).



- [51] Th. Feldmann, P. Kroll e B. Stech, Phys. Rev. D **58**, 114006 (1998).
- [52] Th. Feldmann e P. Kroll, Phys. Scr. **T99**, 13 (2002).
- [53] K. Kawarabayashi e N. Ohta, Nucl. Phys. B **175**, 477 (1980).
- [54] O. Scavenius, Mócsy, I. N. Mishustin e D. H. Rischke, Phys. Rev. C **64**, 045202 (2001).
- [55] T. Kunihiro, Phys. Lett. B **219**, 363 (1989).
- [56] P. Rehberg, S. P. Klevansky e J. Hüfner, Phys. Rev. C **53**, 410 (1996).
- [57] U. Vogl e W. Weise, Prog. Part. Nucl. Phys. **27**, 195 (1991).
- [58] J. Bardeen, L.N. Cooper, e J.R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
- [59] S. P. Klevansky, Rev. Mod. Phys. **64** 649 (1992).
- [60] U. Vogl e W. Weise, Prog. Part. Nucl. Phys. **27** 195 (1991).
- [61] K.S.Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov, D. Jaing, Y.Zang, S.V. Dubonos, I.V. Grigorieva, and A.A. Frisov, Science **306**, 666 (1004).
- [62] E.V. Gorbar, V.P. Gusyrin and V.A. Miransky, Low. Temp. Phys. **34**, 790 (2008).
- [63] P.R.Wallace, Phys. Rev. **77**, 622 (1947).
- [64] G. Semenoff, Phys. Rev. **53**, 2449 (1984).
- [65] H. Rothe, Lattice Gauge Theories, *3<sup>rd</sup>* edition, World Scientific (2005)
- [66] E.V. Gorbar, V.A. Miransky, and I.A. Shovkovy, arXiv:0904.2164 [hep-ph] (2009).
- [67] V.P. Gusynin, V.A. Miransky, and I. A. Shovkovy, Phys. Rev. Lett. **73**, 3499 (1994); Phys. Rev. D **52**, 4718 (1995).

- [68] V.P. Gusynin, V.A. Miranksy, and I. A. Shovkovy, Phys. Rev. B **349**, 477 (1995); Nucl. Phys. B **462**, 249 (1996).
- [69] E.J. Ferrer, V. de la Incera, and C. Manuel, Phys. Rev. Lett. **95**, 152002 (2005); E.J. Ferrer, V. de la Incera, Phys. Rev. D **76**, 045011 (2007); J.L. Noronha and I.A. Shovkovy, Phys. Rev. D **76**, 105030 (2007); D.T. Son and M.A. Stephanov, Phys. Rev. D **77**, 014021 (2008).
- [70] K. Fukushima and H.J. Warringa, Phys. Rev. Lett. **100**, 032007 (2008).
- [71] E.V. Gorbar, V.P. Gusynin, and V.A. Miranksy **34**, Low Temp. Phys. **34**, 790 (2008); E.V. Gorbar, V.P. Gusynin, V.A. Miranksy, and I.A. Shovkovy, Phys. Rev. B **78**, 085437 (2008).
- [72] D.V. Khveshchenko, Phys. Rev. Lett. **87**, 206401 (2001); E.V. Gorbar, V.P. Gusynin, V.A. Miranksy, and I.A. Shovkovy, Phys. Rev. B **66**, 195429 (2006); I.F. Herbut Phys. Rev. Lett. **97**, 146401 (2006); Phys. Rev. B **75**, 165411 (2007); *ibid.* **76**, 085432 (2007); M. Ezawa, J. Phys. Soc. Jpn. **76**, 094701 (2007).
- [73] A.B. Migdal, Rev. Mod. Phys., **50**, 107 (1978).
- [74] O.P. Sushkov, Physics of  $\pi$ -meson Condensation and High Temperature Cuprate Superconductores, arxiv:0905.2717 (2009).
- [75] F. I. M. Pereira, R. Silva, J.S. Alcaniz, Phys. Rev. C **76**, 015201 (2007).
- [76] F. I. M. Pereira, R. Silva, J.S. Alcaniz, arXiv:0906.2422 (2009).
- [77] J. Rozynek and G. Wilk, arXiv:0905.3408v3[nucl-th] (2009).
- [78] C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988).
- [79] V. Juricic, I. F. Herbut, e G. W. Sermenoff, arXiv:0906.3513 (2009).
- [80] P. Costa, M. C. Ruivo, C. A. Sousa, e Yu. L. Kalinovsky, Phys. Rev. D **70**, 116013 (2004).

- [81] M. Frank, M. Buballa, e M. Oertel, Phys. Lett. **B 562** 221 (2003).
- [82] D. Blaschke et. al., Nucl. Phys. **A592**, 561 (1995).
- [83] M.L. Goldberger e S.B. Treiman, Phys. Rev. **110**, 1178 (1958).
- [84] M. Gell-Mann, R.J. Oakes, e B. Renner, Phys. Rev. **175**, 2195 (1968).
- [85] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14**, 351 (1955).
- [86] J. I. Kapusta, Finite-temperature Field Theory. Cambridge University Press, 1989.
- [87] V. Bernard, U.-G. Meißner, and I. Zahed, Phys. Rev. D **36** 819 (1987).
- [88] M. Asakawa and K. Yazaki, Nucl. Phys. **A 504**, 668 (1989).
- [89] P. Costa, M. C. Ruivo, Y. L. Kalinovsky, e C. A. de Sousa, Phys. Rev. C **70**, 025204 (2004).
- [90] J. T. Lenaghan, D. H. Rischke, e J. Schaffner-Bielich, Phys. Rev.D **62**, 085008 (2000).
- [91] J. Schaffner-Bielich e J. Randrup, Phys. Rev. C **59**, 3329 (1999).
- [92] J. Schaffner-Bielich, Phys. Rev. Lett. **84**, 3261 (2000).
- [93] J. Bjorken, S. Drell, Relativistic Quantum Fields, McGraw-Hill, New-York (1965).
- [94] M. Buballa, Phys. Rep. **407** 205 (2005)