

# COIMBRA

### Valter Tobias Gonçalves de Oliveira

## ANÁLISE AVANÇADA DE PÓRTICOS EM AÇO PARA PAVILHÕES INDUSTRIAIS

Dissertação de Mestrado em Construção Metálica e Mista orientada pelo Professor Doutor Luís Simões da Silva e pela Professora Doutora Trayana Tankova, apresentada ao Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Setembro de 2022

Departamento de Engenharia Civil Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Valter Tobias Gonçalves de Oliveira

## ANÁLISE AVANÇADA DE PÓRTICOS EM Aço Para Pavilhões Industriais

# Advanced analysis of steel frames for industrial buildings

Dissertação de Mestrado em Construção Metálica e Mista orientada pelo Professor Doutor Luís Simões da Silva e pela Professora Doutora Trayana Tankova, apresentada ao Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

> Esta Dissertação é da exclusiva responsabilidade do seu autor. O Departamento de Engenharia Civil da FCTUC, declina qualquer responsabilidade legal ou outra em relação a erros ou omissões que possam surgir

> > Coimbra, Setembro de 2022

#### Agradecimentos

Gostaria de começar por agradecer aos meus orientadores, Professor Doutor Luís Simões da Silva e Professora Doutora Trayana Tankova, por me terem aceite como orientando para o desenvolvimento desta dissertação.

Ao Professor Doutor Luís Simões da Silva pela orientação científica e disponibilidade imediata no meu acolhimento.

À professora Doutora Tryana Tankova pela sua simpatia, colaboração científica, disponibilidade e ajuda prestadas, sem as quais não teria sido possível a realização deste trabalho.

À DUPLANO, na pessoa do Engenheiro Fernando Lagoa, por todo o apoio, incentivo e disponibilidade prestados ao longo deste meu percurso académico.

Aos meus amigos que de uma forma direta ou indireta me apoiaram nesta caminhada, que tiraram duvidas e incentivaram. Obrigado por estarem presentes.

À Mariana um obrigado muito especial, pelo amor, força, apoio e por estar presente de forma incondicional. Agradeço a enorme compreensão e alegria contribuindo para chegar ao fim deste percurso. Juntos, e brevemente com um elemento de reforço (o Tomás), constituímos uma estrutura de elevada resistência.

O meu agradecimento final é dirigido à minha família, e mais importante, à minha mãe por todo o esforço, dedicação e sacrifício, para me proporcionar o melhor e me dar as ferramentas certas para construir o meu futuro e me tornar na pessoa que sou.

#### Resumo

O desenvolvimento da construção metálica em Portugal tem-se verificado, ao longo dos últimos anos, muito direcionado para a construção de edifícios de natureza industrial ou comercial. Devido à capacidade mecânica e tecnológica do aço, assim como a simplicidade e celeridade dos processos de produção, este tipo de estrutura torna-se competitivo no setor da construção.

Com o objetivo de otimizar cada secção dos elementos metálicos surgem os perfis de secção variável que apresentam uma maior eficiência estrutural.

Para a verificação da estabilidade de elementos e pórticos metálicos, a NP EN1993-1-1 faculta diversas metodologias de cálculo sendo complementada com a NP EN1993-1-5, que estabelece os requisitos para o dimensionamento de elementos constituídos por placas.

Com o avanço da tecnologia surgem os programas de análise de estruturas pelo método dos elementos finitos, potenciando a realização de análises numéricas avançadas para a resistência última de estruturas. No entanto, dada a sua grande complexidade e exigência técnica aliada à falta de regulamentação, este tipo de análise não é a primeira opção dos projetistas, sendo apenas utilizada na análise de elementos de grande complexidade para validar os resultados obtidos por métodos simplificados.

Nesta dissertação é feito o estudo do comportamento de um pórtico em aço, com ênfase no comportamento geométrica e materialmente não linear com imperfeições (GMNIA) e comparado com os valores presentes no *Manual de Dimensionamento de Estruturas Metálicas* (Silva, L. S., Gervásio, H. 2ª Edição).

Adicionalmente é verificada a influência do tipo de aplicação das imperfeições e o impacto da dimensão da malha no modelo de cálculo.

Palavras-chave: Análise avançada; Método dos elementos finitos; Modelação numérica; Pórticos em aço; Secção variável

#### Abstract

The development of metallic construction in Portugal has been verified, over the last few years, very focused on the construction of industrial or commercial buildings. Due to the mechanical and technological capacity of steel, as well as the simplicity and speed of the production processes, this type of structure becomes competitive in the construction sector.

With the objective of optimizing each section of the metallic elements, the profiles of variable section appear which present a greater structural efficiency.

To verify the stability of metallic elements and frames, NP EN1993-1-1 provides several calculation methodologies and is complemented with NP EN1993-1-5, which establishes the requirements for the design of elements made up of plates.

With the advancement of technology, programs for the analysis of structures by the finite element method appear, enabling the performance of advanced numerical analyses for the ultimate strength of structures. However, given its great complexity and technical requirement combined with the lack of regulation, this type of analysis is not the first option of designers, being only used in the analysis of elements of great complexity to validate the results obtained by simplified methods.

In this dissertation, the behaviour of a steel frame is studied, with emphasis on the Geometrically and materially nonlinear analysis with imperfections (GMNIA) and compared with the values present in the *Manual de Dimensionamento de Estruturas Metálicas* (Silva, L. S., Gervásio, H. 2<sup>a</sup> Edição).

Additionally, the influence of the type of application of imperfections and the impact of the mesh size on the calculation model is verified.

Keywords: Advanced analysis; Finite element method; Numerical modelling; Steel frames; Variable section

## Índice

AgradecimentosI
ResumoIII
AbstractV
SimbologiaXI
Letras minúsculas latinasXI
Letras maiúsculas latinasXI
Letras minúsculas gregasXIII
Letras maiúsculas gregasXIII
Letras latinas e gregasXIV
AbreviaturasXIV
Capítulo 1 - Introdução
1.1 Enquadramento
1.2 Objetivos
1.3 Estrutura da dissertação
Capítulo 2 – Projeto de estruturas em aço EC3-1-119
2.1 Análise global de estruturas metálicas EC3-1-1
2.1.1 Generalidades
2.1.2 Suscetibilidade das Estruturas aos Efeitos de 2ª Ordem20
2.1.3 Imperfeições21
2.2 Análise estrutural e dimensionamento de elementos metálicos de acordo com o Eurocódigo 3-1-1
2.2.1 Verificação da Segurança com Base nas Curvas de Encurvadura
2.2.2 Classificação da Secção24
2.2.3 Elementos Uniformes Comprimidos, Cláusula 6.3.1 do EC3-1-125
2.2.4 Elementos Uniformes em Flexão, Cláusula 6.3.2 do EC3-1-1
2.2.5 Elementos Uniformes em Flexão Composta com Compressão, Cláusula 6.3.3 do EC3-1-1
Capítulo 3 - Projeto de estruturas de aco com elementos constituídos por plaças EC3-1-535
3.1 Generalidades
3.2 Bases de projeto
3.2.1 Modelos de largura efetiva para análise global
3.2.2 Membros uniformes e não uniformes
3.2.3 Método das tensões reduzidas

3.3 Modelação e análise por elementos finitos EC3-1-5 Anexo C	38
3.3.1 Generalidades	38
3.3.2 Utilização	40
3.3.3 Modelação	40
3.3.4 Tipos de elementos de casca para modelação de seções de parede fina	41
3.3.5 Escolha do programa de cálculo	42
3.3.6 Utilização das imperfeições	42
3.3.7 Propriedades dos materiais	44
3.3.8 Cargas	46
3.3.9 Critérios relativos aos estados limites	46
3.3.10 Coeficientes parciais de segurança	46
Capítulo 4 - Caso de estudo	49
4.1 Descrição geral	49
4.1.1 Esquema Estrutural	49
4.1.2 Propriedades dos Materiais	51
4.1.3 Carregamento	52
4.2 Modelo Barras	53
4.3 Modelo Casca	58
4.3.1 Condições de Suporte	58
4.3.2 Imperfeições	59
4.3.3 Imperfeições Globais	59
4.3.4 Deformada inicial da estrutura	63
4.3.5 Imperfeições locais	65
4.4 Análise estrutural	68
4.4.1 Análise elástica linear	68
4.4.2 Resistência das seções	70
4.4.3 Estabilidade das travessas	75
4.4.5 Estabilidade dos pilares	78
Capítulo 5 – Resultados e Discussão	83
5.1 Resultados Obtidos Através da Análise Numérica Não Linear por Elementos Finitos	83
5.1.1 Análise Static-General	83

Capítulo 6 – Conclusão e trabalhos futuros87
6.1 Conclusões
6.2 Recomendações práticas para a modelação e análise com a utilização de software de análise
por elementos finitos
6.3 Trabalhos futuros
Bibliografia91

\_\_\_\_\_

#### Simbologia

## Letras minúsculas latinas

b	largura da secção transversal
С	altura útil
$d \mid h_w$	altura da alma
$e_0$	amplitude de uma imperfeição local
$f_y$	tensão de cedência
h	altura de uma secção transversal   altura do pórtico/estrutura
$k_{yy}$	fator de iteração
$k_{yz}$	fator de iteração
$k_{zy}$	fator de iteração
$k_{zz}$	fator de iteração
т	número de colunas num alinhamento
$t_w$	espessura da alma
$t_f$	espessura do banzo
$e_{0,d}$	valor de cálculo da amplitude de uma imperfeição
a <sub>0</sub> , a, b, c, d	Designações das curvas de dimensionamento à encurvadura
$t_f$	espessura do banzo
$t_w$	espessura da alma
y - y	eixo de uma secção transversal paralelo aos banzos
z - z	eixo de uma secção transversal perpendicular aos banzos

#### Letras maiúsculas latinas

Α	área da secção transversal
A <sub>eff</sub>	área da secção transversal efetiva
$A_{v}$	área resistente ao esforço transverso
Ε	módulo de elasticidade de flexão (módulo de Young)
EI	rigidez de flexão
F <sub>cr</sub>	valor crítico da carga associado à instabilidade elástica num modo global
$F_{Ed}$	valor de cálculo da força transversal
G	módulo de elasticidade de torção
$I_T$	constante de torção uniforme
Iw	constante de empenamento

#### Simbologia

$I_y$	momento de inércia em relação ao eixo de maior inércia $y - y$
$I_z$	momento de inércia em relação ao eixo de menor inércia $z - z$
Κ	matriz de rigidez
L	comprimento real do elemento
$L_E$	comprimento de encurvadura
$M_{b,Rd}$	valor de cálculo do momento fletor resistente à encurvadura lateral
$M_{cr}$	momento crítico elástico de encurvadura lateral
$M^E_{cr}$	momento crítico constante equivalente
M <sub>c,Rd</sub>	valor de cálculo do momento fletor resistente em relação a um eixo principal
$M_{Ed}$	valor de cálculo do momento fletor atuante
$M_{el}$	momento elástico
$M_{pl}$	momento plástico
$M_{y,Ed}$	valor de cálculo do momento fletor atuante, em relação ao eixo $y - y$
$M_{z,Ed}$	valor de cálculo do momento fletor atuante, em relação ao eixo $z - z$
$M_{y,Rd}$	valor de cálculo do momento fletor resistente, em relação ao eixo $y - y$
$M_{z,Rd}$	valor de cálculo do momento fletor resistente, em relação ao eixo $z - z$
N <sub>b,Rd</sub>	valor de cálculo do esforço transverso normal resistente à encurvadura
N <sub>cr</sub>	valor crítico do esforço normal associado ao modo de encurvadura elástica
	relevante
$N_{c,Rd}$	valor de cálculo do esforço normal resistente da secção transversal principal
$N_{Ed}$	valor de cálculo do esforço normal atuante
$N_{Rk}$	valor característico do esforço normal resistente da secção transversal
$V_{Ed}$	Valor de cálculo do esforço transverso
$V_{c,Rd}$	valor de cálculo do esforço transverso resistente
V <sub>pl,Rd</sub>	valor de cálculo do esforço transverso resistente plástico
$W_{pl,y}$	módulo plástico de flexão na direção $y - y$
$W_{pl,z}$	módulo plástico de flexão na direção $z - z$
$W_{el,y}$	módulo elástico de flexão na direção $y - y$
$W_{el,z}$	Módulo elástico de flexão na direção $z - z$

## Letras minúsculas gregas

$\alpha_{cr}$	valor mínimo do fator de amplificação dos esforços para se atingir a carga
	critica de encurvadura elástica
α	fator de imperfeição
$\alpha_{ult,k}$	valor mínimo do fator de amplificação a aplicar às ações de cálculo para se
	atingir o valor característico da resistência da secção transversal mais crítica do
	componente estrutural, considerando o seu comportamento no plano do
	carregamento sem ter em conta a encurvadura por flexão no plano lateral ou a
	encurvadura lateral (por flexão-torção), mas tendo em conta todos os efeitos
	devidos à deformação geométrica no plano e às imperfeições, globais e locais
$\alpha_h$	coeficiente de redução para tomar em consideração a altura $h$ do pórtico
$\alpha_m$	coeficiente de redução para tomar em consideração o número de colunas num
	alinhamento
β	parâmetro para tomar em consideração o efeito de flexão desviada
Үмі	coeficiente parcial de redução
σ	tensão
ε	extensão
$\phi$	imperfeição inicial global associada à falta de verticalidade
$\phi_0$	valor de base da imperfeição inicial global associada à falta de verticalidade
η	coeficiente entre os valores críticos elásticos dos esforços normais
$ar{\lambda}$	esbelteza normalizada
$ar{\lambda}_{LT}$	esbelteza normalizada para encurvadura lateral
υ	coeficiente de poisson em regime elástico
X	coeficiente de redução para a curva de dimensionamento relevante
$\chi_{LT}$	coeficiente de redução para a encurvadura lateral

## Letras maiúsculas gregas

$\Delta M_{y.Ed}$	momento devido ao afastamento do eixo baricêntrico $y - y$
$\Delta M_{z,Ed}$	momento devido ao afastamento do eixo baricêntrico $z - z$
Φ	valor para determinar o coeficiente de redução $\chi$
$\Phi_{LT}$	valor para determinar o coeficiente de redução $\chi_{LT}$

## Letras latinas e gregas

$(P - \Delta)$	efeitos de 2ª ordem globais (estrutura)
(P – δ)	efeitos de 2ª ordem locais (elemento)

## Abreviaturas

EC	eurocódigo
ELU	estado Limite último
GMNIA	análise geométrica e materialmente não linear com imperfeições
MNA	análise materialmente não linear
GNIA	análise geometricamente não linear com imperfeições
LA	análise elástica linear
LBA	análise elástica bifurcacional
MEF	método dos elementos finitos

#### Capítulo I - Introdução

#### I.I Enquadramento

Os elementos estruturais em aço, com secção transversal variável ao longo do seu desenvolvimento, fornecem soluções eficientes para vigas de grande comprimento, ajustando a altura das seções transversais à variação do momento fletor. Adicionalmente, os elementos metálicos não uniformes são esteticamente agradáveis em estruturas com coberturas e palas de grande vão.

Os perfis em aço com secção variável são geralmente fabricados por soldadura automática de placas de aço, sendo o seu fabrico económico, o que torna uma alternativa viável em detrimento do uso de perfis laminados a quente.

Estes elementos quando bem projetados, ajustando a altura da secção transversal, largura dos banzos, espessura das placas, o eixo poligonal horizontal variável ou distribuição irregular dos reforços ao longo do comprimento do elemento, permitem uma distribuição melhorada do material, levando a uma distribuição uniforme de tensões, portanto uma estrutura mais económica.

A característica mais relevante nos elementos estruturais não uniformes é a distribuição de tensões que surge nas seções transversais de membros cónicos.

Dada a razão de conicidade não uniforme, elementos em flexão apresentam tensões longitudinais que são normais a um arco que se desenvolve perpendicularmente de um banzo para o outro e alcançam os seus valores mais altos nos banzos e tensões tangenciais, resultado do equilíbrio estático.

Ao contrário da análise de estabilidade de barras uniformes com carregamento constante, existe uma dificuldade maior na escolha da secção transversal na análise de barras não uniformes, uma vez que se encontra sujeita às tensões mais elevadas. Essas tensões são resultado da combinação dos efeitos de primeira e segunda ordem. Para um elemento uniforme, sujeito a um momento fletor constante, o dimensionamento da barra é feito pela secção intermédia, onde a soma das razões de utilização devidas às forças de primeira e segunda ordem é máxima.

Contudo num elemento não uniforme, o local onde os efeitos de primeira e segunda ordem atingem um máximo não é conhecido e não pode ser identificado utilizando procedimentos diretos devido:

- i. à amplitude e forma da imperfeição a considerar
- ii. à variação da classe de secção transversal ao longo do comprimento da barra
- iii. às forças adicionais decorrentes da inclinação dos banzos

De acordo com a EN 1993-1-1, a análise de estabilidade de elementos não uniformes, sejam globais ou locais, pode ser verificada usando o método geral fornecido na cláusula 6.3.4. Em estruturas construídas com elementos não uniformes, os fatores de imperfeição são difíceis de determinar e em alguns casos, a sua definição usando procedimentos padrão pode levar a soluções excessivamente conservadoras. Por outro lado, ao considerar efeitos de  $2^a$  ordem,  $(P - \Delta)$  e  $(P - \delta)$  e imperfeições globais e locais, o número de combinações e imperfeições a considerar pode ser difícil de definir. Como alternativa ao método geral, a estabilidade de elementos de secção variável pode ser analisada usando a análise geométrica e materialmente não linear com imperfeições (GMNIA), o que requer a definição da forma e magnitude das imperfeições de forma correta. É um processo demorado e requer técnicos experientes para definir um modelo de elemento finitos que conduza a resultados confiáveis.

Em determinados projetos pode ser necessário validar os resultados analíticos com recurso a ensaios experimentais, de forma a validar o comportamento real dos elementos e ainda permitir a calibração do modelo numérico.

É importante realizar não apenas uma avaliação detalhada de resistência à encurvadura, mas também avaliar as deformações e distribuição de tensões, bem como as imperfeições (geométricas e tensões residuais) que influenciam a capacidade de carga de elementos não uniformes.

#### I.2 Objetivos

O objetivo deste trabalho é efetuar a análise numérica avançada de pórticos em aço para pavilhões industriais. Serão feitas comparações para o comportamento dos pórticos, com ênfase no comportamento geométrico e materialmente não linear com imperfeições (GMNIA). O trabalho será feito com recurso ao software Abaqus incluindo imperfeições geométricas e tensões residuais. Os resultados serão objeto de uma avaliação crítica por comparação com os resultados da aplicação das prescrições regulamentares do Eurocódigo 3, nomeadamente o novo prEN 1993-1-14, em elaboração. Também se pretende propor recomendações práticas para a modelação e análise com a utilização de software de análise por elementos finitos.

#### 1.3 Estrutura da dissertação

A presente dissertação encontra-se dividida em 5 capítulos.

No **capítulo 1** é feita uma abordagem aos perfis de secção variável e faz-se uma breve explicação do método através do qual se pretende verificar a estabilidade do caso de estudo abordado no capítulo 4.

No **capítulo 2** são abordados os conceitos de análise e dimensionamento de estruturas metálicas de acordo com o EC3-1-1, nomeadamente a suscetibilidade das estruturas aos efeitos de 2<sup>a</sup> ordem, imperfeições e a análise estrutural de elementos metálicos.

No **capítulo 3** é apresentada uma abordagem geral da literatura existente sobre o projeto de estruturas de aço com elementos constituídos por placas, nomeadamente o EC3-1-5. Serão também apresentadas considerações de projeto e abordadas considerações para modelação e análise por elementos finitos.

No **capítulo 4** apresenta-se o pórtico, assim como a construção do modelo numérico pelo Método de Elementos Finitos (MEF) utilizado na verificação da estabilidade, descrevendo-se os tipos de análises numéricas efetuados no pórtico em estudo, o comportamento do material, a consideração de imperfeições globais e locais, o tipo de malha utilizado, assim como, as condições de fronteira e a aplicação do carregamento. Os resultados obtidos na análise do modelo numérico para cada tipo de análise são também descritos neste capítulo.

No capítulo 5 são exibidos os resultados obtidos da análise GMNIA do caso de estudo.

No **capítulo 6** serão apontadas as principais conclusões desta pesquisa, as recomendações práticas para a modelação e a análise com a utilização de software de análise por elementos finitos.

### Capítulo 2 – Projeto de estruturas em aço EC3-1-1

#### 2.1 Análise global de estruturas metálicas EC3-1-1

#### 2.1.1 Generalidades

A instabilidade estrutural é um fenómeno associado à elevada esbelteza dos elementos estruturais ou seções. Dada a elevada resistência do material, as estruturas constituídas por elementos de aço podem apresentar uma elevada esbelteza e consequentemente suscetíveis a fenómenos de instabilidade.

No EC3-1-1 existem múltiplas opções para efetuar a análise da estabilidade. Dentro das diversas possibilidades, o projetista tem liberdade de selecionar o método a adotar de acordo com a complexidade do projeto, o nível de segurança que se pretende alcançar, a precisão dos resultados, ou mesmo a simplicidade de aplicação do método para solucionar o problema em si.

Estas abordagens podem ser divididas em três grupos principais, embora exista flexibilidade e interação entre os diversos tipos de análise:

- Verificação da estabilidade com base em fórmulas de interação;
- Verificação da estabilidade através da análise global de esforços não linear e de fatores de interação;
- Verificação da estabilidade através de análise global de esforços não linear.

Figura 1 - Esquematização dos métodos disponíveis para verificação da estabilidade de elementos (adaptado de Marques, et al., 2010)



A construção de estruturas com recurso a elementos de secção variável leva a soluções construtivas competitivas, contudo a sua análise e dimensionamento pode atingir algum grau de complexidade sendo por vezes necessário o recurso a análise pelo método de elementos finitos. O presente

trabalho é motivado pelo facto do EC3-1-1 e o EC3-1-5 apresentarem abordagens simplificadas a este método.

#### 2.1.2 Suscetibilidade das Estruturas aos Efeitos de 2ª Ordem

De acordo com a cláusula 5.2.2(2), a verificação da estabilidade dos pórticos ou de uma das suas partes obriga à execução de uma análise de 2ª ordem e tem em consideração as imperfeições. A avaliação dos efeitos de 2ª ordem e imperfeições podem ser avaliadas através de diferentes métodos que se podem sistematizar de acordo com a cláusula 5.2.2(3):

- Ambos o efeitos incluídos na totalidade de uma análise global de esforços e deslocamentos;
- Parte dos efeitos incluídos na análise global e os restantes contabilizados nas verificações de segurança dos elementos em relação a fenómenos de instabilidade, de acordo com a cláusula 6.3, utilizando comprimentos de encurvadura iguais ao comprimento real dos elementos;
- Em casos simples, através de verificações de segurança individuais dos elementos equivalentes em relação a fenómenos de instabilidade, de acordo com a cláusula 6.3, e utilizando comprimentos de encurvadura apropriados e que correspondam ao modo de encurvadura global da estrutura.

Os efeitos de 2<sup>a</sup> ordem podem ser subdivididos em P- $\delta$ , que correspondem aos efeitos dos deslocamentos ao longo do comprimento de um elemento, e os efeitos P- $\Delta$  que correspondem aos efeitos dos deslocamentos nas extremidades dos elementos, ilustrados na figura 1.

Tanto os efeitos P- $\delta$  como P- $\Delta$ , podem ser contabilizados através de verificações da estabilidade de elementos equivalentes. No entanto, no que diz respeito aos efeitos dos deslocamentos nas extremidades da estrutura, é necessário a determinação rigorosa dos modos de encurvadura e comprimentos equivalentes, assim como um comportamento estrutural em que o 1° modo de encurvadura seja dominante. De acordo com o EC3, este método é aplicado a casos simples.

O método em que é feita a análise através de esforços e deslocamentos constitui o método mais sofisticado de análise, vulgarmente designada por GMNIA, inclui os efeitos de segunda ordem, bem como as imperfeições globais da estrutura e as imperfeições locais dos elementos. No entanto, e atendendo à complexidade e volume de trabalho, este método não é preferencial na análise de estruturas.

Na análise de estruturas é habitual considerar em projeto que os efeitos dos deslocamentos ao longo do comprimento dos elementos, assim como, as imperfeições locais ao nível dos elementos, estão incorporadas nas expressões de verificação dos elementos, enquanto, os efeitos dos deslocamentos nas extremidades dos elementos e as imperfeições globais são avaliados na análise global da estrutura.

Dado que os efeitos de 2<sup>a</sup> ordem aumentam não só os deslocamentos, mas também os esforços internos relativamente aos efeitos de 1<sup>a</sup> ordem, é necessário verificar se este agravamento é

significativo, e caso seja relevante, calcular os esforços e deslocamentos reais da estrutura de acordo com a cláusula 5.2.1(2).

A sensibilidade de uma estrutura aos efeitos de 2<sup>a</sup> ordem é avaliada indiretamente a partir da carga crítica elástica da estrutura,  $F_{cr}$ . Esta verificação pode ser feita através do quociente entre a carga crítica e o correspondente carregamento de base  $(F_{cr}/F_{Ed})$ . De acordo com a cláusula 5.2.1(3) é necessário considerar os efeitos de 2<sup>a</sup> ordem sempre que:

 $\alpha_{cr} = F_{cr}/F_{Ed} \le 10$  (em análise elástica)

 $\alpha_{cr} = F_{cr}/F_{Ed} \le 15$  (em análise plástica)

De acordo com a cláusula 5.2.2(5)B, a determinação dos efeitos de 2<sup>a</sup> ordem deve ser feita de forma mais rigorosa sempre que  $\alpha_{cr} \leq 3$ .

#### 2.1.3 Imperfeições

No dimensionamento de elementos metálicos devem sempre ser consideradas as imperfeições geométricas.

De acordo com a EN1993-1-1 artigo 5.3.1 (1), a análise estrutural deverá incorporar os efeitos das imperfeições, incluindo tensões residuais e imperfeições geométricas, tais como a falta de verticalidade, retilinearidade, de planta ou de ajustamento entre outras. Estas imperfeições podem ter origem no processo de execução mesmo que sejam cumpridas todas as regras de boa execução. As imperfeições no dimensionamento de estruturas metálicas podem ser consideradas da seguinte forma: imperfeições globais em pórticos e sistemas de contraventamento e imperfeições locais em elementos considerados individualmente no artigo 5.3.1(3).

As imperfeições para a análise global de pórticos devem-se considerar com a direção e configuração mais desfavoráveis, todos os fenómenos de encurvadura, no plano e fora do plano do pórtico, incluindo a encurvadura por torção, associados aos modos de instabilidade (Artigo 5.3.2(2)).

A existência destas imperfeições introduz esforços adicionais que devem ser considerados na análise global e no dimensionamento das estruturas, de acordo com a EN1993-1-1 artigo 5.3.2(3) através de uma imperfeição equivalente dada por:

$$\phi = \phi_0.\,\alpha_h.\,\alpha_m$$

Onde:

 $\phi_0$  - Valor de base,  $\phi_0 = \frac{1}{200}$ 

 $\alpha_h$  - Coeficiente de redução calculado em função de h,  $\alpha_h = \frac{2}{\sqrt{h}} \max \frac{2}{3} \le \alpha_h \le 1.0$ 

h – Altura da estrutura

 $\alpha_m$  – Coeficiente de redução associado ao número de colunas num piso  $\alpha_m = \sqrt{0.5 \left(1 + \frac{1}{m}\right)}$ 

m – Número de colunas num piso, incluindo apenas aquelas que estão submetidas a um esforço axial  $N_{Ed}$  superior ou igual a 50% do valor médio por coluna no plano vertical considerado.



Figura 2 - Imperfeições globais equivalentes (inclinação inicial das colunas)

No que diz respeito às imperfeições locais dos elementos, a análise global de estruturas porticadas deve ainda incluir as imperfeições locais com a amplitude conforme a curva de encurvadura associada, expressa no quadro 1. Sabendo o valor da amplitude  $e_0$  e do comprimento *L* do elemento é possível calcular a excentricidade associada à amplitude máxima do deslocamento inicial.

locais $e_0/L$ para elementos				
Curva de encurvadura de	Análise elástica	Análise plástica		
acoruo com o Quauro 0.2	$e_0/L$	$e_0/L$		
$a_0$	l/350	<i>l/</i> 300		
а	l/300	<i>l</i> /250		
b	l/250	<i>l</i> /200		
С	<i>l</i> /200	<i>l</i> /150		
d	l/150	<i>l</i> /100		

Quadro 1 - Valores de cálculo das amplitudes das imperfeições

Caso seja mais conveniente, os efeitos das imperfeições globais e locais poderão ser substituídas por sistemas de forças equivalentes aplicados perpendicularmente ao elemento, como ilustrado na figura 3. No caso de edifícios de vários andares estas imperfeições devem ser aplicadas ao nível de cada andar, proporcionais às cargas verticais aplicadas a esse nível.



Figura 3 - Substituição das imperfeições iniciais por forças horizontais equivalentes

# 2.2 Análise estrutural e dimensionamento de elementos metálicos de acordo com o Eurocódigo 3-1-1

#### 2.2.1 Verificação da Segurança com Base nas Curvas de Encurvadura

Em estruturas, as imperfeições fazem com que o comportamento real de um elemento se afaste do comportamento teórico. No dimensionamento dos elementos metálicos, para ter em conta a influência das imperfeições no EC3-1-1, são usadas as "curvas europeias de dimensionamento à encurvadura". As referidas curvas foram desenvolvidas por Maquoi e Rondal com base na fórmula de Ayrton-Perry e fundamentadas num extenso programa de ensaios experimentais e estudos numéricos. Nesta formulação foi considerado que todas as imperfeições são reproduzidas por uma "configuração deformada inicial equivalente", cuja amplitude é calibrada de modo a reproduzir todas as imperfeições. Estas curvas permitem relacionar o coeficiente  $\chi = \frac{\sigma}{f_y}$  com o coeficiente de esbelteza normalizada  $\bar{\lambda}$ , tendo em conta as imperfeições reais das peças, traduzidas por um coeficiente  $\alpha$ .

A verificação de estabilidade neste processo é baseada em fatores de redução que têm em conta os efeitos do modo de encurvadura relevante, enquanto, a verificação da segurança é feita através de fórmulas de interação. Assim, pode ser efetuada uma análise de esforços de primeira ou segunda ordem. Nos seguintes subcapítulos serão abordados os métodos existentes no EC3-1-1 baseados neste conceito para determinar a resistência dos elementos quando solicitados por ações exteriores, procedendo então à verificação da resistência a fenómenos de instabilidade estrutural.

#### 2.2.2 Classificação da Secção

A classificação das seções transversais tem como objetivo identificar em que medida a sua resistência e a sua capacidade de rotação são limitadas pela ocorrência de encurvadura local, enquanto numa secção compacta, as zonas comprimidas podem plastificar numa secção esbelta, e isso pode não acontecer devido aos fenómenos de encurvadura local.

A instabilização local de um elemento é tanto mais suscetível quanto mais alta for a sua classe (das seções), estando dependente dos seguintes fatores:

- esbelteza dos componentes da secção (relação c/t, em que c corresponde ao comprimento do elemento comprimido e t a espessura);
- esforços atuantes (esfoço axial e momento fletor);
- classe do aço (parâmetro  $\varepsilon = \sqrt{235/f_y}$ , onde  $f_y$  corresponde à tensão de cedência), conforme a cláusula 5.5 e o quadro 5.2 do EC3-1-1;

A classe das seções informa acerca da capacidade de rotação e de formação de rótulas plásticas das seções em estudo. A definição da classe de uma secção é muito importante porque indica se o elemento deve ser dimensionado usando as suas capacidades plásticas (classe 1 e 2), capacidades elásticas (classe 3) ou se impõe a utilização das seções efetivas num dimensionamento elástico (classe 4). De acordo com Simões (2014), as diferentes seções classificam-se em:

- as seções transversais da classe 1 são aquelas em que se pode formar rotula plástica, com a capacidade de rotação necessária para uma análise plástica, sem redução da sua resistência;
- as seções transversais da classe 2 são aquelas que podem atingir o momento resistente plástico, mas cuja capacidade de rotação é limitada pela encurvadura local;
- as seções transversais da classe 3 são aquelas em que a tensão na fibra extrema comprimida, calculada com base numa distribuição elástica de tensões, pode atingir o valor da tensão de cedência, mas em que a encurvadura local pode impedir que o momento resistente plástico seja atingido;
- as seções transversais da classe 4 são aquelas em que ocorre a encurvadura local antes de se atingir a tensão de cedência numa ou mais partes da secção transversal.

O comportamento à flexão de seções das classes 1 a 4 é ilustrado na figura 4, onde  $M_{el}$  e  $M_{pl}$  significam o momento elástico e o momento plástico da secção, respetivamente.





De acordo com a cláusula 5.5.2(2), nas seções transversais da classe 4 poderão adotar-se larguras efetivas para ter em consideração as reduções de resistência devidas aos efeitos da encurvadura local.

A classificação de uma secção é feita tendo em conta a relação entre o comprimento e a espessura  $\left(\frac{c}{t}\right)$  dos componentes total ou parcialmente comprimidos (alma e banzos), nos esforços atuantes (esforço axial e momento) e na classe do aço, de acordo com os procedimentos definidos na cláusula 5.5 do EC3-1-1.

Os limites de c/t dos componentes comprimidos encontram-se definidos no quadro 5.2 do EC3-1-1, a classe do aço é tida em conta através do parâmetro  $\varepsilon = \sqrt{235/f_y}$ . A classe da secção é dada pela maior classe (mais desfavorável) dos componentes comprimidos que a constituem. Uma secção que não verifique os limites para a relação c/t da classe 3, pertence naturalmente à classe 4.

#### 2.2.3 Elementos Uniformes Comprimidos, Cláusula 6.3.1 do EC3-1-1

A encurvadura é um fenómeno de instabilidade que se manifesta em elementos sujeitos a esforços de compressão devido à ocorrência de grandes deformações transversais. Além da encurvadura por flexão, podem ainda ocorrer como fenómenos de instabilidade, a encurvadura por torção ou a encurvadura por flexão-torção. No entanto, em elementos comprimidos constituídos por seções em I ou H, apesar de se tratar de seções abertas de paredes finas, o modo de instabilidade mais crítico é geralmente a encurvadura por flexão, daí apenas se estudar este fenómeno (Simões, 2010). De acordo com o EC3-1-1, a resistência à encurvadura por flexão de um elemento axialmente comprimidos é verificada através da seguinte condição:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} \le 1.0$$

em que:

N<sub>Ed</sub> valor de cálculo do esforço axial de compressão

 $N_{b,Rd}$  valor de cálculo da resistência à encurvadura do elemento comprimido que poderá ser considerado igual a:

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A f_y}{\gamma_{M1}}$$
 para as seções transversais das classes 1, 2 e 3;

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A_{eff} f_y}{\gamma_{M1}}$$
 para as seções transversais da classe 4.

Onde,  $\chi$  corresponde ao coeficiente de redução para o modo de encurvadura relevante e cuja solução pode ser escrita na forma:

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \max \chi \le 1.0$$

Onde:

$$\Phi = 0.5 \left[ 1 + \alpha \left( \bar{\lambda} - 0.2 \right) + \bar{\lambda}^2 \right]$$

Em que:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{Af_y}{N_{cr}}}$$
 para as seções transversais classes 1, 2 e 3  
 $\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A_{eff}f_y}{N_{cr}}}$  para as seções transversais da classe 4

Onde:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

 $\alpha$  corresponde ao fator de imperfeição, L é o comprimento de encurvadura e  $N_{cr}$  corresponde à carga crítica elástica para o plano mais condicionante de um elemento estrutural comprimido.

As imperfeições reais das peças são incluídas no processo de dimensionamento à compressão, através do fator de imperfeição  $\alpha$ . O quadro 2, apresenta os valores que o mesmo pode tomar consoante a curva de encurvadura adotada.

Curva de encurvadura	$a_0$	a	b	c	d
Fator de imperfeição $\alpha$	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76



Quadro 2 - Fatores de imperfeição para as curvas de encurvadura

O fator de imperfeição associado à curva de encurvadura a adotar no dimensionamento de um dado elemento metálico depende da geometria das seções transversais, do processo de fabrico e do plano de encurvadura condicionante.

				Encurva-	Curva de Encurvadura	
	Secção transversal		Limites	dura em relação ao Eixo	S 235 S 275 S 355 S 420	S 460
Perfis Laminados	h y y y	$h^{/}b > 1,2$	$t_f \leq 40mm$	y-y z-z	a b	$a_0 a_0$
			$\begin{array}{l} 40mm < t_f \\ \leq 100mm \end{array}$	$\begin{array}{c} y - y \\ z - z \end{array}$	b c	a a
		≤ 1,2	$t_f \leq 100mm$	$\begin{array}{c} y - y \\ z - z \end{array}$	b c	a a
		$p'^{h}$	$t_{f} > 100 mm$	y-y z-z	d d	C C
is I dos	y $y$ $y$ $y$ $y$ $y$ $y$ $y$ $y$ $y$	$t_f \le 40mm$ $t_f > 40mm$		$\begin{array}{c} y - y \\ z - z \end{array}$	b c	b c
Perfi isolac				$\begin{array}{c} y - y \\ z - z \end{array}$	c d	c d
ões lares	ões lares		cabadas a quente	qualquer	а	$a_0$
Seç tubu		enformadas a frio		qualquer	С	С
em ladas		em ; a	geral (exceto como baixo indicado)	qualquer	b	b
Seções e caixão solc	Seções e caixão sold		daduras espessas: $a > 0.5t_f$ $b/t_f < 30$ $h/t_w < 30$	qualquer	С	С
Perfis U, T e seções cheias				qualquer	С	С
Cantoneiras		2		qualquer	b	b

Quadro 3 - Escolha da curva de encurvadura em função da secção transversal

De acordo com a cláusula 6.3.1.2(4), nos casos em que a esbelteza  $\bar{\lambda} \leq 0.2$  ou para  $\frac{N_{Ed}}{N_{cr}} \leq 0.04$ , os efeitos da encurvadura poderão ser ignorados, sendo apenas efetuadas as verificações de segurança das seções transversais.

#### 2.2.4 Elementos Uniformes em Flexão, Cláusula 6.3.2 do EC3-1-1

A encurvadura lateral é um fenómeno de instabilidade que pode ocorrer em elementos não restringidos lateralmente, e que consiste na deformação lateral da parte comprimida de uma secção de um elemento sujeito à flexão em torno do eixo y-y (eixo de maior inércia da secção). Este fenómeno ocorre especialmente quando os elementos são constituídos por seções abertas de paredes finas, como secões em I ou H (seções com baixa rigidez de torção e flexão lateral).

Nestas condições, a parte comprimida comporta-se como um elemento linear comprimido, continuamente restringido pela parte tracionada, que não tem qualquer tendência para se deslocar lateralmente. Como se pode verificar na figura 6 onde se ilustra este fenómeno, a deformação é devida à flexão lateral e à torção, daí o fenómeno também ser denominado por encurvadura lateral-torsional (Simões, 2010).





A resistência de uma viga à encurvadura lateral depende essencialmente do valor do momento crítico, que é o momento máximo que uma viga, em condições ideais, pode suportar sem encurvar lateralmente.

O momento crítico pode ser calculado entre seções contraventadas lateralmente de vigas com secção transversal duplamente simétrica, como a secção em I ou H, fletidas em torno do eixo de maior inércia (eixo y-y), para diversos tipos de carregamento aplicado no centro de corte das seções, e é dado por:

$$M_{cr} = \alpha_m M_{cr}^E$$

Onde:

 $\alpha_m$  é um fator que depende da forma do diagrama de momentos;  $M_{cr}^E$  é o momento crítico no caso padrão que é dado por:

$$M_{cr}^{E} = \frac{\pi}{L} \sqrt{GI_{T}EI_{z} \left(1 + \frac{\pi^{2}EI_{w}}{L^{2}GI_{T}}\right)}$$

Assim, de acordo com a cláusula 6.3.2.1 do EC3, um elemento sem travamento lateral e solicitado à flexão em relação ao eixo principal de maior inércia, deverá ser verificado em relação à encurvadura lateral através de:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{b,Rd}} \le 1.0$$

Em que:

 $M_{Ed}$  é o valor de cálculo do momento fletor atuante;

 $M_{b,Rd}$  é o valor de cálculo do momento fletor resistente à encurvadura lateral dado por:

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} W_y \frac{f_y}{\gamma_{M1}}$$

Em que  $W_y$  é o módulo de flexão considerado do seguinte modo:

 $W_y = W_{pl,y}$  para seções transversais das classes 1 ou 2;

 $W_y = W_{el,y}$  para seções transversais das classes 3;

 $W_y = W_{eff,y}$  para seções transversais das classes 4.

 $\chi_{LT}$  é o fator de redução devido à encurvadura lateral. De acordo com a cláusula 6.3.2.2 do EC3, para casos gerais, o coeficiente é determinado pela seguinte equação:

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \overline{\lambda}_{LT}^2}} \max \chi_{LT} \le 1$$

Em que:

$$\Phi_{LT} = 0.5 \left[ 1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - 0.2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right]$$

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y f_y}{M_{cr}}}$$

O fator de imperfeição  $\alpha_{LT}$  corresponde à curva de encurvadura apropriada e que de acordo com o EC3 pode ser definido no Anexo Nacional. Os valores recomendados de  $\alpha_{LT}$  são indicados no quadro 4.

Quadro 4 - Valores recomendados dos fatores de imperfeição

para as curvas de encurvadura lateral

Curva de encurvadura	а	b	с	d
Fator de imperfeição $\alpha_{LT}$	0,21	0,34	0,49	0,76

As recomendações para a escolha das curvas de encurvadura lateral são indicadas no quadro 5.

Quadro 5 – Curvas de encurvadura recomendadas para seções transversais quando é utilizada a expressão (1)

Secção transversal	Limites	Curva de encurvadura
George Henring de s	$h/b \leq 2$	а
Seções I fammadas	h/b > 2	b
Casãos I soldodos	$h/b \leq 2$	с
Seções I soluadas	h/b > 2	d
Outras seções transversais		d

## 2.2.5 Elementos Uniformes em Flexão Composta com Compressão, Cláusula 6.3.3 do EC3-1-1

A instabilidade de elementos submetido à flexão composta resulta da combinação dos efeitos de flexão e do esforço axial. Em elementos com esbelteza elevada, submetidos à flexão composta com compressão, o colapso tende a dar-se por encurvadura por flexão ou por encurvadura lateral.

A flexão composta surge principalmente em elementos verticais de estruturas porticadas. Tendo em conta o efeito dos fenómenos de instabilidade, nestes elementos em estruturas metálicas utilizamse geralmente seções do tipo H ou tubulares por apresentarem menores relações entre os momentos principais de inércia. Em pilares de pórticos com travessas inclinadas, geralmente usados em edifícios industriais na ausência de pontes rolantes ou outros equipamentos de elevação, a flexão segundo o eixo de maior inércia é mais influente do que o esforço axial. Nestes elementos utilizamse frequentemente perfis com seções do tipo I ou perfis de seções equivalentes constituídos por placas soldadas.

A instabilidade de um elemento submetido a flexão composta com compressão pode dever-se a encurvadura por flexão, a encurvadura lateral ou a uma combinação de ambos os fenómenos. De acordo com cláusula 6.3.3(1) do EC3-1-1, é feita a distinção entre:

- elementos não suscetíveis às deformações por torção, onde se enquadram as seções tubulares ocas ou as seções abertas se estiverem restringidas lateralmente;
- elementos suscetíveis às deformações por torção, por exemplo, seções abertas (seções I ou H) e seções não restringidas lateralmente.

A verificação da segurança que relaciona os dois tipos de instabilidade num elemento com secção transversal duplamente simétrica sujeita à flexão composta com compressão é efetuada através das seguintes condições:

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_{y} \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed} + \Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yz} \frac{M_{z,Ed} + \Delta M_{z,Ed}}{M_{z,Rk}/\gamma_{M1}} \le 1.0$$

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk}/\gamma_{M1}} + k_{zy} \frac{M_{y,Ed} + \Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT} M_{y,Rk}/\gamma_{M1}} + k_{zz} \frac{M_{z,Ed} + \Delta M_{z,Ed}}{M_{z,Rk}/\gamma_{M1}} \le 1.0$$

Onde:

 $N_{Ed}$ ,  $M_{y,Ed}$  e  $M_{z,Ed}$  são os valores de cálculo do esforço de compressão e momentos fletores máximos atuantes em torno de y-y e z-z;

 $\Delta M_{y,Ed}$  e  $\Delta M_{z,Ed}$  são os acréscimos de momentos fletores devidos à variação do centro de gravidade em seções da classe 4;

 $\chi_y$  e  $\chi_z$  coeficientes de redução devidos à encurvadura por flexão em torno dos eixos y-y e z-z, respetivamente, conforme cláusula 6.3.1 do EC3-1-1;

 $\chi_{LT}$  coeficiente de redução devido à encurvadura lateral, conforme cláusula 6.3.1 do EC3-1-1 ( $\chi_{LT}$ =1 para elementos onde não seja previsível a ocorrência de fenómenos de encurvadura lateral – elementos não suscetíveis de sofrer deformações por torção);

 $k_{yy}$ ,  $k_{yz}$ ,  $k_{zy}$  e  $k_{zz}$  são fatores de interação dependente dos fenómenos de instabilidade e de plasticidade envolvidos, podendo ser obtidos através do Anexo A (Método 1) ou do Anexo B (Método 2) do EC3-1-1.

 $N_{Rk} = f_y A_i$ ,  $M_{i,Rk} = f_y W_i$  e  $\Delta M_{i,Ed}$  são os valores característicos da resistência à compressão e à flexão em torno de y e z, respetivamente, na secção transversal condicionante. Estes valores são avaliados de acordo com o quadro 6.7 do EC3-1-1, dependentes da classe da secção transversal do elemento em análise.

Quadro 6 – Valores de $N_{RK} = f_y A_i$ , $M_{i,RK} = f_y W_i e \Delta M_{i,Ed}$					
Classe	1	2	3	4	
A <sub>i</sub>	Α	Α	Α	$A_{eff}$	
$W_y$	$W_{pl,y}$	$W_{pl,y}$	$W_{el,y}$	$W_{eff,y}$	
$W_{z}$	$W_{pl,z}$	$W_{pl,z}$	$W_{el,z}$	$W_{eff,z}$	
$\Delta M_{y,Ed}$	0	0	0	$e_{N.y} N_{Ed}$	
$\Delta M_{z,Ed}$	0	0	0	$e_{N.z} N_{Ed}$	
# Capítulo 3 - Projeto de estruturas de aço com elementos constituídos por placas EC3-1-5

## 3.1 Generalidades

As estruturas de aço com secção transversal variável ao longo do seu comprimento fornecem soluções eficientes para vigas de grande vão, uma vez que permitem ajustar a características das seções transversais à distribuição do momento fletor, levando a uma distribuição mais uniforme das tensões, podendo resultar numa poupança significativa dos materiais. Este tipo de elementos é caracterizado por um design leve e esbelto. O progresso dos processos de soldadura permitiu o aumento do uso deste tipo de estruturas.

Para a análise da resistência das seções é necessária a sua classificação de forma a determinar o procedimento de cálculo a adotar. As seções de classe 4 apresentam uma maior complexidade relativamente às seções da classe 1 a 3, uma vez que são aquelas em que ocorre a encurvadura local antes de se atingir a tensão de cedência numa ou mais partes da secção transversa (EN 1993-1-1, cláusula 5.5.2(1)).

Para as seções abordadas, a determinação direta da resistência de barras sujeitas a ações incorporando a possibilidade de ocorrência de fenómenos de encurvadura local é complexa, não sendo opção para uma utilização corrente. Face ao exposto, a EN 1993-1-1 cláusula 5.5.2(2), define que para o cálculo das seções de classe 4 poderão adotar-se seções efetivas para ter em consideração os efeitos da encurvadura local, permitindo que todos os procedimentos de cálculo sejam os definidos para seções da classe 3 com as propriedades geométricas da secção efetiva, preconizados na EN1993-1-5 "Projeto de estruturas de aço - Elementos estruturais constituídos por placas".

De acordo com a EN 1993-1-5, o dimensionamento de estruturas esbeltas implica que sejam considerados nos estados limites últimos, de utilização ou de fadiga, os efeitos do shear lag e da encurvadura local das seções (cláusula 2.2(1)). Os efeitos da encurvadura local têm de ser considerados ao nível da análise global e ao nível da avaliação da resistência dos elementos para o estado limite último. Os efeitos da encurvadura de placa na análise global elástica poderão ser tomados em consideração através da utilização de áreas efetivas das seções transversais dos seus elementos comprimidos (cláusula 2.2(4)).

### 3.2 Bases de projeto

#### 3.2.1 Modelos de largura efetiva para análise global

De acordo com a cláusula 2.2(3) do EC3-1-5, para cada tramo da barra, a largura efetiva dos banzos deverá ser tomada como o menor dos seguintes valores: largura total L/8 de cada lado da alma, em que L é o vão ou o dobro da distância entre o apoio e a extremidade de uma consola.

A cláusula 2.2(5) refere que a redução das seções transversais só necessita ser considerada na análise global quando a secção efetiva de um elemento comprimido for inferior a 50% da área bruta da secção transversal do mesmo elemento.





#### 3.2.2 Membros uniformes e não uniformes

De acordo com a cláusula 2.3 do EC3-1-5, ao determinar a resistência de elementos estruturais uniformes aos estados limites últimos, poderão ser utilizados modelos de largura efetiva para tensões normais, modelos de resistência para a encurvadura por esforço transverso, modelos de resistência para a encurvadura devida cargas transversais ou modelos para ter em conta a interação entre estes fenómenos desde que:

- os painéis sejam retangulares e os banzos paralelos;
- o diâmetro de qualquer abertura não reforçada ou entalhe não excede 0.05*b* em que *b* é a largura do painel.

No caso de painéis não retangulares, a mesma regra poderá ser utilizada desde que o angulo  $\alpha$  seja inferior a 10°.

Figura 8 - Definição do angulo  $\alpha$ 



Se o ângulo for maior do que 10°, o painel pode ser tratado de forma conservadora como se fosse retangular com a largura igual à maior das larguras em ambas as extremidades do painel.



#### 3.2.3 Método das tensões reduzidas

Como alternativa aos modelos de largura efetiva para as tensões normais, as seções transversais poderão ser consideradas como sendo da classe 3, desde que as tensões em cada painel não excedam os limites específicos na secção 10 da EN1993-1-5.

# 3.3 Modelação e análise por elementos finitos EC3-1-5 Anexo C

#### 3.3.1 Generalidades

No âmbito da Engenharia de Estruturas, o Método dos Elementos Finitos (MEF) tem como objetivo a determinação do estado de tensão e de deformação de um sólido de geometria arbitrária sujeito a ações exteriores. Este tipo de cálculo tem a designação genérica de análise de estruturas e surge, por exemplo, no estudo de edifícios, pontes, barragens, etc. Na análise de uma estrutura é usual, de forma iterativa, proceder-se a uma série de verificações e alterações das características, de forma a alcançar a melhor solução tendo em conta os pré-requisitos no que diz respeito à funcionalidade, economia e cumprimento das disposições regulamentares.

O desenvolvimento informático nas últimas décadas foi acompanhado pelo desenvolvimento de software de dimensionamento de estruturas metálicas, permitindo o uso do método de elementos finitos que até então, se limitava a formulações matemáticas complexas, deixando de estar apenas restrito a propósitos de pesquisa.

No âmbito das estruturas metálicas constituídas por seções de parede fina, a utilização de elementos de casca constitui a opção lógica para ultrapassar as insuficiências da teoria de peças lineares.

Para levar esta tendência em conta, o anexo C da EN1993-1-5 propõe algumas orientações detalhadas, permitindo efetuar verificações de segurança em relação a estados limites últimos (ELU), estados limites de utilização (ELS) ou a fadiga de estruturas constituídas por placas.

As aplicações mais comuns do MEF para estruturas metálicas são:

• Análise elástica linear (LA):

A estrutura é modelada com a sua geometria inicial sem imperfeições, o comportamento do aço é elástico e a influência da estrutura deformada na definição da carga não é tida em conta quando a carga é aumentada (análise de 1ª ordem).

Exemplos de cálculo: efeito de "shear lag" elástico, resistência elástica.

- Análise materialmente não linear (MNA) (coeficiente α<sub>ult</sub> = F<sub>y</sub>/F<sub>Ed</sub>): Neste tipo de análise apenas o comportamento do aço é modificado de forma a ter em consideração o seu campo de tensões. Exemplos de cálculo: Resistência plástica para ELU.
- Análise elástica bifurcacional (LBA) (coeficiente α<sub>crit</sub> = F<sub>cr</sub>/F<sub>Ed</sub>):
   A estrutura é modelada com a sua geometria teórica sem consideração das imperfeições e tendo em conta o comportamento elástico do aço.

O objetivo é conhecer todas as formas modais da estrutura sob um determinado caso de carga. Para este tipo de análise o uso de um software de elementos finitos é justificado se

a geometria da estrutura for complexa. Caso contrário, os modos críticos da estrutura podem ser determinados mais facilmente por outro tipo de programa. Exemplos de cálculo: carga crítica de encurvadura de placa.

- Análise elástica geometricamente não linear com imperfeições (GNIA) Neste tipo de análise são introduzidas as imperfeições iniciais no modelo EF, o comportamento do aço é considerado elástico e a influência da estrutura deformada é tida em conta na definição da carga (teoria de segunda ordem). Exemplos de cálculo: Resistência elástica á encurvadura de placa.
- Análise geométrica e materialmente não linear com imperfeições (GMNIA)
   Este é o caso mais geral onde imperfeições, tensões geométricas e residuais são introduzidas no modelo EF, considerando o comportamento do aço não linear. A análise é realizada como uma análise de segunda ordem. Este tipo de análise é mais utilizado para fins de pesquisa, como os softwares de FE estão cada vez mais "user friendly", o uso deste tipo de análise em gabinetes de projeto pode-se tornar mais recorrente no futuro. Exemplos de cálculo: Resistência elastoplástica no estado limite último.

O quadro seguinte resume os tipos de análise:

Quarto / = Tipos de analise					
Tipo de análise	Comportamento do material	Comportamento geométrico	Imperfeições	Exemplos de utilização	
LA	Linear	Linear	Não	Efeito de "shear lag" Elástico, resistência elástica	
MNA	Não linear	Linear	Não	Resistência plástica para ELU	
LBA	Linear	Não linear	Não	Carga crítica de encurvadura de placa	
GNIA	Linear	Não linear	Sim	Resistência elástica à encurvadura de placa	
GMNIA	Não linear	Não linear	Sim	Resistência elastoplástica no estado limite último	

Quadro 7 – Tipos de análise

#### 3.3.2 Utilização

A utilização do MEF deve ter em especial atenção os seguintes aspetos (cláusula C2(1)):

- a modelação da estrutura ou elemento estrutural e as suas condições de fronteira;
- a escolha do programa de cálculo e da documentação de apoio;
- a consideração das imperfeições;
- a modelação das propriedades dos materiais;
- a modelação de cargas;
- a consideração dos critérios relativos aos estados limites;
- os coeficientes parciais de segurança a aplicar.

#### 3.3.3 Modelação

A modelação consiste em relacionar a estrutura real com um modelo computacional capaz de descrever seu comportamento com a precisão adequada. Características como o comportamento do material, imperfeições, condições de fronteira ou carregamento devem ser corretamente incluídas no modelo. A precisão dos resultados está relacionada com a qualidade do modelo.

Em teoria seria possível utilizar exclusivamente uma família de elementos sólidos tridimensionais que implementassem todas as equações e leis constitutivas. Com a capacidade de cálculo atualmente disponível não é possível lidar de forma consequente com a dimensão dos problemas daí resultantes (número de equações, volume dos resultados, tempos de cálculo, etc.), em paralelismo com os desenvolvimentos teóricos que conduziram às teorias de peças lineares, de placas ou cascas, assim como é necessário escolher entre os tipos de elementos a utilizar para modelar parte ou a totalidade de uma estrutura (cláusula C.3(2)).

O tipo de análise também deve estar de acordo com o comportamento expectável da estrutura, a necessidade de incluir ou não alguma linearidade ou efetuar uma análise dependente do tempo, e deve ser avaliada para cada caso em concreto.

Outro aspeto importante a ter em conta é o refinamento da malha de elementos finitos, uma vez que de acordo com a EN 1993-1-5 (Cláusula C.3(1)), a escolha dos modelos de elementos finitos (casca ou tridimensionais) e da diminuição da malha condicionam a precisão dos resultados. Para efeitos de validação, poderão ser efetuadas análises de sensibilidade com refinamento progressivo da malha. Em teoria quanto mais apertada for a malha mais precisos são os resultados, contudo não é normalmente possível, uma vez que conduz a tempos de cálculo desnecessariamente longos. A dimensão da malha pode ser ajustada com maior precisão em alguma zona específica da estrutura e menos precisa no restante.

Assim de forma a tomar as melhores opções de modelação na utilização dos métodos dos elementos finitos é necessário:

- identificar qual a função estrutural dos vários componentes da estrutura, quais a funções essenciais e secundárias;
- definir o detalhe que é necessário representar a estrutura e os materiais;
- definir quais são os objetivos da análise.

De forma a despistar erros grosseiros devem ser utilizados modelos simples de resolução manual de forma a definir os resultados expetáveis.

Uma vez estabelecidos os principais objetivos, a discretização da estrutura pressupõe:

- O elemento finito deve estar de acordo com o problema a resolver e deve ser avaliado em função da formulação do elemento, da convergência, do grau, dos nós e incógnitas, da compatibilidade com outros elementos e da sua performance e limitações. Os elementos finitos quadrilaterais são preferíveis aos elementos triangulares, sendo mais precisos.
- Uma boa malha deve ser regular, evitar distorções ou desproporções geométricas dos elementos (ângulos reentrantes, raso ou muito pequenos, cruzamentos e sobreposições, elementos alongados, forma trapezoidais, etc), adaptar-se às características dos elementos, assegurar a concordância e assegurar transições suaves entre zonas de malha mais larga para zonas de malha mais apertada.
- Para igual número de graus de liberdade, os elementos de grau mais elevado fornecem melhores resultados. Para problemas não lineares, como os elementos de grau mais elevado aumentam o sistema global de equações, o tempo de resolução pode tornar-se excessivo.

#### 3.3.4 Tipos de elementos de casca para modelação de seções de parede fina

No âmbito do método dos elementos finitos, os elementos de casca fina curvos representam a classe mais complexa de estruturas a serem analisadas, o que levou ao desenvolvimento de um grande número de abordagens ao tipo de elementos. De uma forma geral, a geometria da casca apresenta normalmente dupla curvatura que varia ao longo da superfície da casca. Esta casca exibe habitualmente uma combinação de ações de membrana e de flexão, as quais interagem devido à sua curvatura quando carregada.

Num contexto histórico, o desenvolvimento de elementos de casca foi inicialmente estabelecido no desenvolvimento dos denominados elementos de casca planos ("flat facet"). A casca curva é modelada através de uma assemblagem de elementos planos localizados, de tal forma que os seus vértices coincidem com o plano médio da estrutura real.

No entanto com maior popularidade, surgiu a abordagem baseada em elementos sólidos isoparamétricos ("degenerate continuum") que exige normalmente integração reduzida de forma a evitar "shear locking". Ambas as abordagens permitem formulações não lineares através de abordagens co-rotacionais.

#### 3.3.5 Escolha do programa de cálculo

No contexto da análise pelo MEF, estão disponíveis no mercado uma série de softwares em que a sua adequação para diferentes tarefas é variável.

Para resolver problemas não lineares são importantes os seguintes recursos:

- Solucionador robusto para resolver um sistema de equações não lineares, por exemplo método de Riks (método do comprimento do arco);
- Possuir forma simples de definir as imperfeições (geométricas e materiais).

Outro aspeto importante na escolha do software prende-se com a fiabilidade do mesmo, que de acordo com a cláusula C.4 (1), deve ser demonstrada através de ensaios de validação apropriados. De acordo com a cláusula C.4 (2), a dimensão da malha, o carregamento, as condições de fronteira, assim como outros dados de entrada e resultados, devem ser devidamente documentados de forma a poderem ser verificados e reproduzidos por terceiros.

#### 3.3.6 Utilização das imperfeições

A consideração das imperfeições constitui um dos maiores obstáculos à utilização do método dos elementos finitos como ferramenta corrente.

Por definição, as imperfeições devem ser consideradas de todas as formas possíveis de forma a conduzir à envolvente dos efeitos mais desfavoráveis.

As imperfeições são de duas origens diferentes de acordo com a cláusula C.5(1):

• Imperfeições geométricas devido à construção e tolerâncias de fabrico.

As imperfeições geométricas podem basear-se na forma dos modos de encurvadura de placa, com amplitudes definidas no Anexo Nacional. Recomenda-se um valor de 80% das tolerâncias geométricas de fabrico (NP EN 1090-2, 2013) e a cláusula C.5(2) da NP EN 1993-1-5. A direção de aplicação das imperfeições deve ser tal que conduza à resistência mínima (cláusula C.5(3)).

• Tensões residuais devido ao processo de fabrico (processos de laminação, corte à chama, soldadura).

As tensões residuais podem ser representadas pelo campo de tensões com amplitudes equivalentes aos valores médios expectáveis (Cláusula C.5(2)). Normalmente podem utilizar-se imperfeições geométricas equivalentes, a menos que se pretenda uma análise mais refinada das imperfeições geométricas e das imperfeições da estrutura.

A definição das imperfeições geométricas equivalentes poderá ser feita de acordo com o quadro 8 e a figura 6.

Tipo de imperfeição	Componente	Forma da imperfeição	Amplitude
Global	Elemento de comprimento l	arco	Ver a EN 1993-1-1 Quadro 5.1
Global	Reforço longitudinal de comprimento a	arco	min(a/400, b/400)
Local	Painel ou painel secundário de lado menor a ou b	Modo de encurvadura	min(a/200,b/200)
Local	Reforço ou banzo solicitados à torção	Modo de encurvadura de torção	1/50

Quadro 8 - Imperfeições geométricas equivalentes



De acordo com a cláusula C.5(5), ao combinar diferentes imperfeições deverá ser escolhida uma imperfeição principal e os valores das restantes imperfeições (secundárias) poderão ser reduzidos para 70%. De salientar que qualquer imperfeição pode assumir o papel de imperfeição base e as

restantes imperfeições poderão ser consideradas secundárias. O principal problema para o engenheiro é que cada combinação deve ser verificada de forma a obter o resultado mais conservador, aumentando o número de análises a efetuar.

#### 3.3.7 Propriedades dos materiais

Na definição das propriedades dos materiais o desafio é estabelecer uma curva tensão-deformação do aço de forma a definir o limite de elasticidade característico  $f_v$ .

Na escolha dos materiais deve-se ter em atenção as suas propriedades e os seus valores característicos de acordo com a cláusula C.6(1), exceto para o modulo de elasticidade, cujo valor nominal deve ser o utilizado.

De acordo com a EN1993-1-5(2), dependendo da precisão requerida e do nível de deformação permitido na análise, poderão ser utilizadas as seguintes hipóteses para o comportamento dos materiais (ver figura 11).

- Elastoplástico sem endurecimento
- Elastoplástico com um patamar de inclinação nominal
- Elastoplástico com um endurecimento linear
- Curva de tensão-deformação verdadeira calculada a partir de resultados de ensaios

$$\begin{split} \sigma_{true} &= \sigma(1+\varepsilon) \\ \varepsilon_{true} &= \ln(1+\varepsilon) \end{split}$$



Figura 11 - Modelação do comportamento dos materiais

Na opção a), o endurecimento por deformação não é considerado e o patamar de cedência é horizontal.

Na opção b), para evitar problemas de instabilidade quando o patamar de cedência é horizontal, pode ser usado com um declive muito pequeno (E/1000) para o patamar de cedência.

A opção c) considera o endurecimento por deformação usando uma inclinação de E/100 e desprezando o patamar de cedência.

As curvas  $d_1$ ) e  $d_2$ ) representam as curvas tensão-deformação mais realistas (podem ser obtidas através de ensaios a provetes de aço). A diferença entre as duas é a influência da redução de área durante o ensaio de tração que é considerado em  $d_1$ ); em  $d_2$ ) a tensão de cedência é calculada com base na área inicial do provete.

Na prática o software FE tem uma base de dados de tensões de materiais e a sua introdução do cálculo não apresenta um obstáculo, o problemático é a definição do estado limite relevante da estrutura em análise com base nos resultados obtidos.

Critérios a serem verificados:

- A carga máxima na curva de carga-deformação para compressão de elementos suscetíveis a encurvadura.
- O valor limite dos deslocamentos

#### 3.3.8 Cargas

As cargas aplicadas às estruturas deverão incluir os fatores de cargas e os coeficientes de combinação de cargas adequados. Como simplificação, poderá ser utilizado um único multiplicativo de carga  $\alpha$  (cláusula C.7(1)). É de salientar que para análises não lineares não é legítimo combinar esforços e deslocamentos, uma vez que não é valido o princípio de sobreposição de efeitos. Adicionalmente, para elasto-plásticas, num problema conservativo poderá ser necessário definir múltiplas estratégias de incrementação das cargas e determinar a envolvente de resultados.

#### 3.3.9 Critérios relativos aos estados limites

De acordo com o anexo C.8 da NP EN1993-1-5, para os estados limites últimos deverão ser utilizados os seguintes critérios:

- Para estruturas suscetíveis a fenómenos de encurvadura: atingir-se a carga máxima;
- Para zonas tracionadas: atingir-se um valor limite de extensão de membrana principal, o valor recomendado é 5%.



Figura 12 - Definição do critério relativo ao estado limite segundo a prEN1993-1-14

#### 3.3.10 Coeficientes parciais de segurança

De acordo com C.9 da NP EN1993-1-5 os coeficientes parciais de segurança devem seguir os seguintes requisitos:

O coeficiente de majoração de carga  $\alpha_u$ , para o estado limite último, deverá ser suficiente para se atingir a fiabilidade requerida.

O coeficiente de majoração  $\alpha_u$  deverá constituído por dois fatores:

•  $\alpha_1$  destinado a cobrir a incerteza do modelo de elementos finitos utilizado;

•  $\alpha_2$  destinado a cobrir a dispersão dos modelos de carga e de resistência. Poderá ser considerado igual a  $\gamma_{M1}$  no caso de a encurvadura ser condicionante e a  $\gamma_{M2}$  no caso de a resistência ser condicionante.

Deve-se garantir que:

 $\alpha_u > \alpha_1 \alpha_2$ 

# Capítulo 4 - Caso de estudo

# 4.1 Descrição geral

#### 4.1.1 Esquema Estrutural

A estrutura em estudo é constituída por um pórtico com 47m de vão, os pilares possuem uma altura de 7m e cada travessa tem uma inclinação de 7<sup>°</sup>, com uma altura máxima do pórtico no cume de cerca de 9.88m. Os pórticos encontram-se afastados entre si cerca de 7.5m.

As seções transversais dos pórticos variam ao longo de cada elemento da estrutura e as mesmas são constituídas por perfis soldados sendo as soldaduras desprezadas na análise.

As seções transversais das travessas são constituídas por perfis I de altura e espessura variável, com banzos de largura constante igual a 300mm e espessura variável.

As madres estão dispostas de 2 em 2 m e servem de contraventamento do banzo superior. O banzo inferior encontra-se igualmente com contraventamentos torsionais afastados de igual forma.

A secção transversal do pilar é constituída por perfis I de altura e espessura variável, alma com 6mm de espessura e banzos de largura constante igual a 300mm e espessura de 20mm. As bases dos pilares constituem rótulas nos apoios.



Figura 13 - Condições de apoio nas colunas

O aço utilizado é S355 de acordo com os Eurocódigos estruturais.







Quadro 9 – Características das seçõe	Quadro 9	$\partial - C$	aracterí	sticas	das	seçõe	25
--------------------------------------	----------	----------------	----------	--------	-----	-------	----

Secção	Caracter	ísticas	Classe
Saccão A	b = 300mm	$t_f = 20mm$	Classe
Secçao A	h = 600mm	$t_w = 6mm$	- Clusse 4
Saccão P'	b = 300mm	$t_f = 20mm$	Classo
Secçao d	h = 1400mm	$t_w = 6mm$	- Clusse 4
Saccão P	b = 300mm	$t_f = 20mm$	Classo
Secça D	h = 1400mm	$t_w = 9mm$	- Clusse 4
Seccão R''	b = 300mm	$t_f = 20mm$	Classe
Secçao D	h = 650mm	$t_w = 9mm$	- Clusse 4
Saccão P'' - C	b = 300mm	$t_f = 25mm$	Classo
Secçau D - C	h = 650mm	$t_w = 7mm$	- Clusse 4
Saccão C	b = 300mm	$t_f = 20mm$	Classo
Sec ça C	h = 650mm	$t_w = 6mm$	- Clusse 4
Seccio D	b = 300mm	$t_f = 20mm$	Classo
Secça <b>u D</b>	h = 1000mm	$t_w = 6mm$	- ciusse 4

As ligações entre os pilares e a travessa foram consideradas como soldadas tendo sido desprezados os cordões de soldadura na análise.





Na modelação da estrutura, de forma evitar a sobreposição dos elementos fugindo aos problemas de convergência, os elementos que constituem o modelo foram modelados de forma independente e utilizando a função *assembly* conectados uns aos outros, posteriormente com a função *merge* foi criado de forma automática um modelo único onde todas as sobreposições são ignoradas.

Após obtenção do modelo de casca foram criados planos paralelos às seções transversais do pórtico com o afastamento dos contraventamentos já referidos. Nos nós resultantes da intersecção do plano com os elementos foram aplicados apoios que impossibilitam os deslocamentos e rotações perpendiculares ao plano da estrutura.



Figura 17 - Condições de apoio nos contraventamentos

#### 4.1.2 Propriedades dos Materiais

O material definido no estudo foi o aço S355. De acordo com a EN1993-1-1, a tensão de cedência  $f_y$  em aços com espessura nominal  $t \le 40mm$  não sofre alteração do seu valor, pelo que foi considerado 355 MPa.

Para a simulação deste material recorreu-se a um comportamento elástico-linear para as análises LA, LBA e GNIA e um comportamento elástico-perfeitamente plástico para as análises MNA e

GMNIA, considerando-se o módulo de elasticidade (E) de 210 GPa e um coeficiente de Poisson (v) de 0,3.

#### 4.1.3 Carregamento

A quantificação das ações foi feita à luz da EN 1990 (2002), EN 1991-1-1 (2002), EN 1991-1-3 (2003) e EN 1991-1-4 (2005). As ações permanentes correspondem ao peso da estrutura e elementos não estruturais, nomeadamente a cobertura e as ações variáveis correspondentes à sobrecarga de utilização, neve, ação do vento e imperfeições.

Os valores de cálculo das ações são obtidos através das três combinações seguintes:

Combinação 1 - Ação de base sobrecarga



Figura 18 - Combinação de ações 1

Combinação 2 – Ação de base vento transversal





#### Combinação 3 - Ação de base vento longitudinal



Figura 20- Combinação de ações 3

No modelo as cargas foram aplicadas sob a forma de *surface traction* aplicada no banzo superior da travessa e pilares.

# 4.2 Modelo Barras

De forma a validar os valores obtidos no modelo de casca, todos os procedimentos e cálculos são também efetuados no modelo de barras.

#### Modelo

Na modelação do pórtico, os membros (colunas e vigas) foram subdivididos e a modelação dos elementos de barra foi feita com seções constantes equivalentes.





Elemento	Secção	Características		
Coluna	Sacaña A	b = 300mm	$t_f = 20mm$	
Colulia	Colulia Secção A -		$t_w = 6mm$	
Colum	Saccão P	b = 300mm	$t_f = 20mm$	
Colulia	Secção D	h = 1000mm	$t_w = 9mm$	
Columa	Saccão C	b = 300mm	$t_f = 20mm$	
Colulia	Secçao L	h = 1400mm	$t_w = 6mm$	
Travaga	Sagaño D	b = 300mm	$t_f = 20mm$	
Travessa 2	Secçao D	h = 1025mm	$t_w = 9mm$	
Trovocco	$T_{rovoso} = S_{acc} \tilde{a} \sigma F$		$t_f = 20mm$	
Travessa	Secção L <sub>esq</sub>	h = 650mm	$t_w = 9mm$	
Travassa	Seccão F., — F	b = 300mm	$t_f = 25mm$	
Havessa	Seeçao L <sub>dir</sub> Tesq	h = 650mm	$t_w = 7mm$	
Trovocco	Saccão E	b = 300mm	$t_f = 20mm$	
Travessa	Travessa Secção F <sub>dir</sub>		$t_w = 6mm$	
Travassa	Transa		$t_f = 20mm$	
1147554	Secçao o	h = 825mm	$t_w = 6mm$	
Travassa	Saccão H	b = 300mm	$t_f = 20mm$	
TTavessa	Secção H	h = 1000mm	$t_w = 6mm$	

Quadro 10 - Seções

Quadro 11 - Seções equivalentes dos elementos

Elemento	Secção	Características		
Caluna	Sagaão A D	b = 300mm	$t_f = 20mm$	
Coluna	Secçao A – B	h = 800mm	$t_w = 6mm$	
Colum	Saccão R — C	b = 300mm	$t_f = 20mm$	
Colulia	Secçao B – C	h = 1200mm	$t_w = 9mm$	
Trovocco	Sagaão C D	b = 300mm	$t_f = 20mm$	
Travessa	Secçao L – D	h = 1212,5mm	$t_w = 9mm$	
Trovocco Sagaão D		b = 300mm	$t_f = 20mm$	
Travessa	Secçao D – E	h = 837.5mm	$t_w = 9mm$	
Travaga	Sagaño E - E	b = 300mm	$t_f = 25mm$	
$\frac{11}{2} \frac{11}{2} \frac$		h = 650mm	$t_w = 7mm$	
Trovocco	Sagaão E - C	b = 300mm	$t_f = 20mm$	
Travessa	Secçao r – G	h = 737,5mm	$t_w = 6mm$	
<b>T</b>	Saccão C — H	b = 300mm	$t_f = 20mm$	
Travessa	Secçao G – H –	h = 912,5mm	$t_w = 6mm$	





À semelhança da análise do modelo de casca, foi analisada a influência da aplicação das imperfeições globais utilizando:

- Força equivalente
- Deslocamentos
- LBA

Na análise efetuou-se a modelação do pórtico considerando a força equivalente aplicada no banzo do topo do pilar com o sentido mais desfavorável, sendo a força aplicada 1,19 kN.



Figura 23 - Aplicação da imperfeição global sob forma de carga equivalente

O cálculo da imperfeição geométrica equivalente através do primeiro modo de encurvadura global é obtido da análise LBA.

Para inserir no software esta imperfeição é preciso extrair os deslocamentos (U) de todos os nós de cada um dos modos de encurvadura da análise LBA, através do seguinte código:

\*node file U Posteriormente inseriu-se a devida imperfeição nas análises GNIA e GMNIA (keyword \*IMPERFECTION), através do deslocamento do modo de encurvadura com o correspondente valor desejado para a amplitude, por intermédio do seguinte código:

\*imperfection, file=LBA, Step=1 4,22.911

A sintaxe da keyword contém o ficheiro (FILE) cuja origem provém da análise LBA e o respetivo STEP em que os deslocamentos são lidos. Na linha seguinte é introduzido o modo de encurvadura a ser lido (148° modo) e a escala desse deslocamento, sendo importante salientar que o deslocamento máximo nos modos de encurvadura apresenta um valor unitário apresentado no exemplo em milímetros.



Figura 24 - Deformada por encurvadura no plano utilizada na análise das imperfeições globais (modelo

Outra forma de introduzir as imperfeições globais consiste em aplicar o valor do deslocamento em cada nó ao longo das colunas, e para o efeito criou-se um ficheiro com os respetivos deslocamentos sendo os mesmos inseridos no software através do seguinte código:

\* IMPERFECTION, SYSTEM = R, INPUT = IMP.inp



# 4.3 Modelo Casca

#### Tipo de Elemento de Malha

De forma analisar a influência do tamanho da malha adotada na obtenção dos resultados, foi efetuada a análise linear do pórtico utilizando malhas com diversas dimensões e comparados os valores de momento, esforço axial e esforço transverso num dos apoios.



		•		
Dimensão da malha	Nº de Elementos	<b>F</b> <sub>x</sub> [kN]	F <sub>y</sub> [kN]	<b>M</b> [kN.m]
100	10556	383,0	367,8	9,81
50	36020	383,0	367,8	7,15
25	141293	383,0	367,8	2,90
20	224211	383.0	367.8	2.79

Quadro 12 - Apoio A

#### 4.3.1 Condições de Suporte

De acordo com o esquema estrutural, os apoios foram considerados com rotulados bloqueando as translações nas três direções bem como todas as rotações à exceção do plano da estrutura. Para modelar tais condições foi necessário criar um *rigidy body* em que se define que os nós das seções da base (definidos pela discretização da base) estão rigidamente ligados ao ponto de referência definido a meio da alma da extremidade da coluna. Desta forma, consegue-se garantir que a secção se conserva plana, quando ela roda sobre o apoio, rodando como um, tendo qualquer ponto a mesma rotação.

#### 4.3.2 Imperfeições

De acordo com a NP EN1993-1-1(5.3), a análise estrutural deverá incorporar os efeitos das imperfeições, incluindo tensões residuais e imperfeições geométricas. De acordo com a cláusula 5.3.1(2), as imperfeições podem ser consideradas através da aplicação de imperfeições geométricas equivalentes, com valores que traduzam todos os possíveis efeitos de todos os tipos de imperfeições. As imperfeições devem ser consideradas com a forma e direção a que conduzem aos efeitos mais desfavoráveis.

Assim de acordo com a cláusula 5.3.1(3) do EC3-1-,1 nos pórticos e sistemas de contraventamento devem ser consideradas as imperfeições globais, ao contrário que em elementos considerados individualmente devem ser consideradas as imperfeições locais.

Para o cálculo das imperfeições existem vários procedimentos um dos quais passa por ter em conta as imperfeições geométricas, outro pelas imperfeições materiais e ainda a metodologia preconizada na cláusula 5.3.2, que tem em consideração as imperfeições globais e locais obtidas a partir dos modos de encurvadura elástico do pórtico no plano de encurvadura considerado. Isto corresponde a utilizar os modos de encurvadura adequados obtidos a partir da análise elástica bifurcacional (LBA).

As imperfeições podem ainda ser consideradas através de imperfeições globais equivalentes, como a forma de uma inclinação lateral inicial das colunas do pórtico, e de deformadas iniciais dos seus elementos.

Os efeitos das imperfeições iniciais globais e locais podem ser substituídos por sistemas de forças horizontais equivalentes aplicados em cada coluna.

#### 4.3.3 Imperfeições Globais

De acordo com a cláusula 5.3.2(3), em pórticos suscetíveis à ocorrência de modos de encurvadura com deslocamentos laterias, o efeito das imperfeições deverá ser incorporado na análise global do pórtico, através de uma imperfeição equivalente com a forma de uma inclinação lateral inicial das colunas do pórtico (imperfeição global), e de deformadas iniciais dos seus elementos imperfeições locais. A falta de verticalidade do pórtico é definida pelo angulo  $\phi$  obtido através da seguinte expressão:

 $\phi = \phi_0 \alpha_h \alpha_m$ 

Onde:

 $\begin{aligned} \phi_0 & \text{valor de base } \phi_0 = \frac{1}{200}; \\ \alpha_h & \text{coeficiente de redução calculado em função da altura, é dado por:} \\ \alpha_h = \frac{2}{\sqrt{h}} \max \frac{2}{3} \le \alpha_h \le 1.0; \\ h & \text{é a altura da estrutura, em m;} \\ \alpha_m & \text{Coeficiente de redução associado ao número de colunas num piso é dado por:} \end{aligned}$ 

$$\alpha_m = \sqrt{0.5\left(1 + \frac{1}{m}\right)}$$

m número de colunas num piso, incluindo apenas aquelas que estão submetidas a um esforço axial  $N_{Ed}$  superior ou igual a 50% do valor médio por coluna no plano vertical considerado.

Cálculo das imperfeições globais do pórtico:

$\alpha_h$	$\alpha_h$	φ
0,756	0,866	0,003273

No quadro 13 são resumidas as imperfeições para as diversas combinações

Quadro 13 - Valores das in	nperfeições por	carregamento
	Combinação 1	
<b>F</b> <sub><i>i</i></sub> [kN]	1,19	

As forças indicadas no quadro são plicadas no topo dos pilares com o sentido mais desfavorável.

Relativamente às imperfeições globais, verificou-se qual o primeiro modo de encurvadura com deslocamentos laterais resultantes da análise LBA. Indicar 1º modo de encurvadura.

Com o objetivo de avaliar a influência das imperfeições geométricas equivalentes, efetuou-se a análise global do pórtico utilizando nas imperfeições globais:

- Força equivalente
- Deslocamentos
- LBA

Na análise efetuou-se a modelação do pórtico considerando a força equivalente aplicada no banzo do topo do pilar com o sentido mais desfavorável, sendo a força aplicada 1,19 kN.



Figura 31 - Aplicação de forças equivalentes na análise de imperfeições globais

O cálculo da imperfeição geométrica equivalente através do primeiro modo de encurvadura global obtido da análise LBA.

Para inserir no software esta imperfeição é preciso extrair os deslocamentos (U) de todos os nós de cada um dos modos de encurvadura da análise LBA, através do seguinte código:

\*node file U

Posteriormente inseriu-se a devida imperfeição nas análises GNIA e GMNIA (keyword \*IMPERFECTION), através do deslocamento do modo de encurvadura com o correspondente valor desejado para a amplitude, por intermédio do seguinte código:

\*imperfection, file=LBA, Step=1 148,22.911

A sintaxe da keyword contém o ficheiro (FILE) cuja origem provém da análise LBA e o respetivo STEP em que os deslocamentos são lidos. Na linha seguinte é introduzido o modo de encurvadura a ser lido (148° modo) e a escala desse deslocamento, sendo importante salientar que o deslocamento máximo nos modos de encurvadura apresenta um valor unitário apresentado no exemplo em milímetros.



Figura 32 - Deformada por encurvadura no plano utilizada na análise das imperfeições globais (modelo

Outra forma de introduzir as imperfeições globais consiste em aplicar o valor do deslocamento em cada nó ao longo das colunas. Para o efeito criou-se um ficheiro com os respetivos deslocamentos e os mesmos são inseridos no software através do seguinte código:

#### \* IMPERFECTION, SYSTEM = R, INPUT = IMP.inp



#### 4.3.4 Deformada inicial da estrutura

De acordo com a cláusula 5.3.2 (3) b), as imperfeições locais dos elementos, associados à encurvadura por flexão devem ser traduzidas por uma imperfeição definida por  $\frac{e_0}{L}$ , em que  $e_0$  é a amplitude máxima do deslocamento inicial e L representa o comprimento do elemento. Os valores de cálculo das amplitudes das imperfeições locais podem ser consultados no quadro 5.1 do EC3-1-1 tanto para a análise elástica como para a análise plástica.

Assim sendo, a amplitude da imperfeição local é dada em função do tipo de análise e da curva de encurvadura da secção transversal. De acordo com a geometria dos elementos, estes são soldados e a espessura é inferior a 40mm, sendo o material S355. De acordo com o quadro 6.2 do EC3, verifica-se que as curvas de encurvadura são "b" e "c" para o eixo de maior inércia e menor inércia, respetivamente.

	Figura 57 – Escollia da curva de encurvadura em função da secção transversar						
	Secção transversal	Limites	Limites Encurvadura em relação ao eixo en		Curva de encurvadura		
		t < 1.0mm	y - y	b	b		
Perfis soldados	y - y - y - y - y - y - y - y - y - y -	lf <u>s</u> Ionan	z - z	С	С		
		$t_f > 40mm$	y - y	С	С		
			z - z	d	d		

Figura 37 - Escolha da curva de encurvadura em função da secção transversal

Assim, para uma análise elástica, tem-se uma amplitude para a imperfeição local de L/250 no eixo de maior inércia e L/200 no eixo de menor inércia. Para a análise plástica, o eixo de maior inércia vai ter uma amplitude para a imperfeição de L/200, enquanto no eixo de menor inércia, esta será de L/150.

De forma conservativa, efetuou-se a análise plástica considerando o valor relativamente ao eixo de menor inércia L/150. Assim considerou-se para as colunas 7000/150 = 46,67mm e para a travessa 47000/150 = 313,33mm

A deformada inicial é avaliada recorrendo à aplicação de uma carga distribuída definida de acordo com o preconizado no EC3.

Figura 38 - Substituição das imperfeições iniciais por forças horizontais equivalentes



Carga aplicada nas colunas

$$Q = \frac{8 \times N_{Ed} \times e_0}{L^2} = \frac{8 \times 364000 \times 46,67}{7000^2}$$
$$Q = 2,78 N.m$$

Carga aplicada na travessa

$$Q = \frac{8 \times N_{Ed} \times e_0}{L^2} = \frac{8 \times 410900 \times 313,33}{47000^2}$$
$$Q = 0,466 N.m$$

Figura 39 - Aplicação de esforços para análise da deformada inicial











#### 4.3.5 Imperfeições locais

Na análise GMNIA com imperfeições locais é feita a combinação com vários tipos de imperfeição local representados nas figuras 39 a 45.













#### **Resultados:**











# 4.4 Análise estrutural

#### 4.4.1 Análise elástica linear

Com recurso ao programa comercial ABAQUS efetuou-se a análise linear de 1ª ordem para as três combinações tendo-se apenas comparado os valores obtido para a combinação 1.

Manual			Abaqus Modelo Casca			ca	Abaqus Modelo Barras			
Nó	M <sub>y</sub> [kNm]	$N_x$ [kN]	M <sub>y</sub> [kNm]	%	$N_x$ [kN]	%	M <sub>y</sub> [kNm]	%	$N_x$ [kN]	%
А	0,0	376,7	2,8		364,8	-3%	0,0	0%	377,2	0%
Β′	2083,7	366,4	2068,5	-1%	364,8	0%	2110,0	1%	363,5	-1%
B <sub>pil</sub>	2520.5	363,6					25626	1.0/	363,5	0%
B <sub>tra</sub>	2329,3	417,6					2302,0	1%	418,5	0%
B''	687,1	405,0	730,3	6%	410,9	1%	630,6	-8%	405,4	0%
С	716,9	381,2	669,7	-7%	387,7	2%	752,8	5%	381,0	0%
D <sub>dir</sub>	(55.0	374,3	(77 (	20/	380,3	2%	716.0	00/	374,4	0%
D <sub>esq</sub>	033,8	374,3	077,0	3%	380,3	2%	/10,8	9%	374,4	0%
E	716,9	381,2	670,0	-7%	387,7	2%	747,6	4%	381,9	0%
F''	687,1	405,0	732,2	7%	410,9	1%	630,6	-8%	405,4	0%
F <sub>tra</sub>	2520.5	417,6					25626	1.0/	418,5	0%
F <sub>pil</sub>	2529,5	363,6					2302,0	1%	363,5	0%
F′	2083,7	366,4	2068,5	-1%	380,1	4%	2110,0	1%	363,5	-1%
G	0	376,7	3,6		370,8	-2%	0,0	0%	377,2	0%

Quadro 14 – Resultados da análise elástica de 1ª Ordem (comparação)

#### Efeitos de 2ª Ordem

A determinação das cargas críticas encontra-se definida no quadro 15.

Quadro 15 Cargas enticas (comparação)											
	$\alpha_{cr}^1$	$\alpha_{cr}^2$	$\alpha_{cr}^3$	$\alpha_{cr}^4$	$\alpha_{cr}^5$						
C1 (manual)	7,31	20,14	23,65	31,19	37,42						
C1 (ABAQUS)	9,19	23,36									

Quadro 15 - Cargas críticas (comparação)

Figura 57 - Primeiro modo de instabilidade





Pelos resultados, podemos concluir que a estrutura é sensível aos efeitos de 2ª Ordem devendo ser considerados no dimensionamento.

$$\alpha_{cr} = < 10$$

O quadro 16 apresenta os resultados obtidos da análise elástica de 2ª Ordem.

	Manual		Abaqus Modelo Casca				Abaqus Modelo Barras			
Nó	M <sub>y</sub> [kNm]	$N_{\chi}$ [kN]	M <sub>y</sub> [kNm]	%	$N_x$ [kN]	%	M <sub>y</sub> [kNm]	%	$N_x$ [kN]	%
А	0,0	372,3	3,0		367,8	-1%	0,0	0%	360,0	-3%
B′	2125,9	362,6	2116,3	0%	367,8	1%	2160,4	2%	363,6	0%
B <sub>pil</sub>	2578,6	358,7					2620,4	2%	364,7	2%
B <sub>tra</sub>		432,2							424,2	-2%
Β″	719,4	417,1	768,3	7%	414,8	-1%	695,6	-3%	408,5	-2%
С	753,9	391,8	709,8	-6%	391,5	0%	795,0	5%	387,5	-1%
D <sub>dir</sub>	694,5	380,7	721.0	4%	388,0	2%	760,4	9%	380,9	0%
D <sub>esq</sub>		380,7	/21,9		388,0	2%			380,9	0%
E	753,9	391,8	709,8	-6%	391,5	0%	788,9	5%	388,3	-1%
F″	719,4	417,1	768,3	7%	414,8	-1%	695,6	-3%	408,5	-2%
F <sub>tra</sub>	- 2578,6	432,2					2620,4	2%	424,2	-2%
F <sub>pil</sub>		358,7							364,7	2%
F′	2125,9	362,6	2116,3	0%	367,8	1%	2160,4	2%	363,6	0%
G	0	372,3	3,5		367,8	-1%	0,0	0%	360,0	-3%

Quadro 16 - Resultados da análise elástica de 2ª Ordem (comparação)
#### 4.4.2 Resistência das seções

#### Classificação da secção transversal

O quadro 17 apresenta as características geométricas das seções transversais.

	A	B'	В	<b>B</b> ''	С	D
$h_w [cm]$	56	136	136	60	60	96
<i>t</i> <sub>w</sub> [ <i>cm</i> ]	0,6	0,6	0,9	0,7	0,7	0,6
<i>b</i> [ <i>cm</i> ]	30	30	30	30	30	30
<i>t<sub>f</sub></i> [ <i>cm</i> ]	2	2	2	2,5	2,5	2

Quadro 17 - Características geométricas das seções transversais

## Classificação secção D (ABAQUS)

Para a secção *D* na travessa, a alma encontra-se sujeita a flexão e compressão, pelo que as tensões máximas na secção conduz aos seguintes valores:

$$\psi = -0.65$$

Alma

$$\frac{c}{t_w} = 160,00$$

 $Limite \rightarrow \frac{42\varepsilon}{0,67+0,33\psi} = 66,81$ 

## Alma é de **classe 4**

Banzo

$$\frac{c}{t_f} = 7,35$$

*Limite*  $\rightarrow 14\varepsilon = 14 \times 0.81 = 11.3$ 

#### Alma é de classe 3 ou superior

	A		B'		$B^{\prime\prime}$		С		D		
	Manual	Abaqus	Manual	Abaqus	Manual	Abaqus	Manual	Abaqus	Manual	Abaqus	
$M_{Ed} [kNm]$	0	2,98	2125,90	2116,30	719,35	768,30	753,89	709,80	694,48	721,90	
$N_{Ed} [kN]$	372,33	367,8	362,61	367,80	417,12	414,80	391,80	391,50	380,66	388,0	
ψ	1,00	0,94	-0,84	-0,84	-0,74	-0,74	-0,77	-0.74	-0,66	-0,65	
$c/t_w$	93,33	93,33	226,67	226,67	85,71	85,71	85,71	85,71	160,00	160,00	
Limite	34,02	34,71	86,94	86,61	80,04	75,17	82,20	75,17	75,21	66,81	
Classe	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	

Quadro 18-Classificação das seções transversais

#### Cálculo das propriedades da secção efetiva

A área efetiva é calculada considerando a secção em compressão uniforme. Os banzos são de classe igual ou superior a 3 sendo as suas áreas totalmente efetivas. Considerando a alma sujeita a compressão uniforme:

$$\psi$$
 = 1,0  $e k_{\sigma}$  = 4

$$\bar{\lambda}_p = \frac{c/t_w}{28,4\varepsilon\sqrt{k_\sigma}} > 0,673$$

$$\frac{160}{28,4 \times 0,81 \times \sqrt{4}} = 3,48 > 0,673$$

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0,055 \times (3 + \psi)}{\bar{\lambda}_p^2}$$

$$\rho = \frac{3,48 - 0,055 \times (3 + 1)}{3,48^2} = 0,269$$

$$b_{eff} = \rho \times c = 0,269 \times 96 = 25,8cm$$

$$A_{eff} = 0,0170m^2$$

Como a secção é simétrica, o centro de gravidade mantem-se inalterado,  $e_{y,N} = e_{z,N} = 0$ .

O modulo efetivo de flexão é determinado considerando a secção em flexão simples:

$$\psi = -1,0 \ e \ k_{\sigma} = 23,9$$

$$\bar{\lambda}_p = \frac{c/t_w}{28,4\varepsilon\sqrt{k_\sigma}} > 0,673$$

$$\frac{160}{28,4 \times 0,81 \times \sqrt{23,9}} = 1,42 > 0,673$$

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0.055 \times (3 + \psi)}{\bar{\lambda}_p^2} < 1.0$$

$$\rho = \frac{1,42 - 0,055 \times (3 - 1)}{1,42^2} = 0,65 \le 1,0$$

$$b_{eff} = \rho \times b_c = 0.65 \times \frac{96}{2} = 31.1cm$$

$$b_{e1} = 0.4 \times b_{eff} = 0.4 \times 31.1 = 12.5 cm$$

 $b_{e2} = 0.6 \times b_{eff} = 0.6 \times 31.1 = 18.7 cm$ 

$$I_{y,eff} = 0,0032m^4$$

$$W_{eff,y,min} = 0,00671m^3$$

Verificação da resistência da secção transversal à flexão composta Como  $M_{z,Ed} = 0$ ;  $e_{y,N} = 0 \ e \ e_{z,N}$  então:

$$\eta_{1} = \frac{N_{ed}}{f_{y}} + \frac{M_{y,Ed} + N_{Ed} \times e_{y,N}}{f_{y}} \le 1,00$$
$$\eta_{1} = \frac{388,00}{355000 \times 0,0170/1,0} + \frac{721,90}{35000 \times 0,0049/1,0}$$

$$\eta_1 = 0.40 \le 1.00$$

Quadro 19 - Verificação da resistência da secção transversal à flexão composta

	A		<b>B</b> ′		<b>B</b> ′		С		D	
	Manual	Abaqus	Manual	Abaqus	Manual	Abaqus	Manual	Abaqus	Manual	Abaqus
$\eta_1$	0,08	0,08	0,75	0,75	0,48	0,51	0,50	0,47	0,39	0,40

#### Capítulo 4

#### Verificação da resistência da secção à encurvadura por esforço transverso

Para uma dada secção:

$$\frac{h_w}{t_w} > 72\frac{\varepsilon}{\eta}$$

$$\frac{0.96}{0.006} = 160 > 72\frac{0.81}{1.2} = 48.6$$

A resistência à encurvadura por esforço transverso é dada pela expressão:

$$V_{b,Rd} = V_{bw,Rd} + V_{bf,Rd}$$

Onde  $V_{bw,Rd}$  é a contribuição da alma e  $V_{bf,Rd}$  é a contribuição dos banzos, onde:

$$V_{b,Rd} \le \frac{\eta f_{yw} h_w t}{\sqrt{3} \gamma_{M1}}$$

$$\frac{1,2 \times 355000 \times 0,96 \times 0,006}{\sqrt{3} \times 1,0} = 1416,68 \, kN$$

Não havendo reforços transversais  $k_{\tau} = 5,34$ 

$$\bar{\lambda}_w = \frac{h_w}{37,4 \times t_w \times \varepsilon \sqrt{k_\tau}}$$

$$\frac{0,96}{37,4 \times 0,006 \times 0,81 \sqrt{5,34}} = 2,29$$

Onde:

$$\chi_w = \frac{0.83}{\bar{\lambda}_w} = 0.36$$

V<sub>bw.Rd</sub> é dado por:

$$V_{bw,Rd} = \frac{\chi_w f_{yw} h_w t_w}{\sqrt{3}\gamma_{M1}}$$

$$V_{bw,Rd} = \frac{0.36 \times 355000 \times 0.96 \times 0.006}{\sqrt{3} \times 1.0} = 425.0 \ kN$$

Ignorando a contribuição dos banzos, a resistência das seções transversais é dada por:

$$\bar{\eta}_3 = \frac{V_{Ed}}{V_{bw,Rd}} = 0,1$$

_		ί.	3		3					
	A		<b>B</b> ′		<b>B</b> ''		С		D	
	Manual	Abaqus	Manual	Abaqus	Manual	Abaqus	Manual	Abaqus	Manual	Abaqus
$\overline{\eta}_3$	0,88	0,88	0,88	0,88	0,35	0,35	0,03	0,03	0,48	0,1

Quadro 20 - Verificação da resistência da secção transversal

Atendendo que todas as seções, à exceção das seções A e B'têm  $\bar{\eta}_3 < 0,5$ , não é necessário reduzir resistência à flexão por efeito do esforço transverso. Para as seções A e B' é necessário fazer a verificação segundo a seguinte expressão:

$$\bar{\eta}_1 + \left(1 - \frac{M_{f,Rd}}{M_{pl,Rd}}\right) (2\bar{\eta}_3 - 1)^2 \le 1$$

atendendo que na secção A o momento fletor é nulo, apenas se vai verificar a secção B'. Como  $N_{ed} < 0.25 N_{pl,Rd}$  e  $N_{ed} < \frac{0.5 h_w t_w f_y}{\gamma_{M0}}$  de acordo com a cláusula 6.29 da EN 1993-1-1 não é necessário reduzir o momento plástico  $(M_{pl,Rd})$ .

De acordo com a cláusula 5.4(2) da EN 1993-1-5, o momento fletor dos banzos deve ser reduzido na presença de esforço axial de acordo com as seguintes expressões:

$$M_{f,Rd,red} = M_{f,Rd} \left( 1 - \frac{N_{Ed}}{(A_{f1} + A_{f2})f_{yf}/\lambda_{M0}} \right)$$

e

$$\bar{\eta}_1 + \left(1 - \frac{M_{f,Rd}}{M_{pl,Rd}}\right) (2\bar{\eta}_3 - 1)^2 \le 1$$

De realçar que,

$$\bar{\eta}_1 = \frac{M_{Ed}}{M_{pl,Rd}} < \frac{M_{f,Rd}}{M_{pl,Rd}}$$

Pelo que a interação entre o esforço transverso e o momento fletor não é significativa, uma vez que:  $M_{f,Rd,red} > M_{Ed}$ .

#### 4.4.3 Estabilidade das travessas

A verificação da estabilidade das travessas é feita de acordo com os critérios definidos na cláusula 4.6(2) da EN 1993-1-1, como  $e_{y,N} = e_{z,N} = 0 e M_{z,Ed} = 0$ :

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} M_{y,Rk} / Y_{M1}} \le 1,00$$

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} + k_{zy} \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} M_{y,Rk} / Y_{M1}} \le 1,00$$

Tendo em conta que a travessa é um elemento de secção variável, as expressões anteriores não são estritamente aplicáveis, no entanto podem ser utilizadas de forma aproximada sendo uma abordagem pelo lado da segurança. Assim, na verificação considerou-se uma secção crítica, os esforços nela atuantes e assumiu-se a secção uniforme ao longo da travessa com as características dessa secção.

Nos parágrafos seguintes o procedimento é aplicado à secção B.

#### Comprimento de encurvadura

Para a encurvadura no plano, considerando para o comprimento de encurvadura o comprimento real do elemento, tem-se conservativamente,  $L_{cr,y} = 23,68m$ . Relativamente à encurvadura fora do plano, como a estrutura encontra-se contraventada de 2 em 2m, os comprimentos de encurvadura serão  $L_{cr,z} = L_{cr,LT} = 2,00m$ .

#### Encurvadura em torno de y - y

$$N_{cr,y} = \frac{\pi^2 E I_y}{L_{cr,y}^2} = \frac{\pi^2 \times 210E6 \times 3,32E - 3}{23,68^2} = 12286,06 \, kN$$

$$\bar{\lambda}_y = \sqrt{\frac{A_{eff} \times f_y}{N_{cr,y}}} = \sqrt{\frac{0,0136 \times 355000}{12286,06}} = 0,63$$

$$\phi_y = 0.5 \left[ 1 + \alpha_y \left( \bar{\lambda}_y - 0.2 \right) + \bar{\lambda}_y^2 \right] = 0.5 \left[ 1 + 0.34 (0.63 - 0.2) + 0.63^2 \right] = 0.77$$

$$\chi_y = \frac{1}{\phi_y + \sqrt{\phi_y^2 - \bar{\lambda}_y^2}} = \frac{1}{0.77 + \sqrt{0.77^2 - 0.63^2}} = 0.82$$

$$N_{b,Rd,y} = \chi_y \times A_{eff} \times \frac{f_y}{\gamma_{M1}} = 0.82 \times 0.0136 \times \frac{355000}{1} = 3963.51 \ kN$$

#### Encurvadura em torno de z - z

$$N_{cr,z} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_{cr,z}^2} = \frac{\pi^2 \times 210E6 \times 9,0E - 5}{2^2} = 46642,83 \ kN$$

$$\bar{\lambda}_z = \sqrt{\frac{A_{eff} \times f_y}{N_{cr,z}}} = \sqrt{\frac{0,0136 \times 355000}{46642,83}} = 0,32$$

$$\phi_z = 0.5 \left[ 1 + \alpha_z (\bar{\lambda}_z - 0.2) + \bar{\lambda}_z^2 \right] = 0.5 \left[ 1 + 0.49(0.32 - 0.2) + 0.32^2 \right] = 0.58$$

$$\chi_z = \frac{1}{\phi_z + \sqrt{\phi_z^2 - \bar{\lambda}_z^2}} = \frac{1}{0.58 + \sqrt{0.58^2 - 0.32^2}} = 0.94$$

$$N_{b,Rd,z} = \chi_z \times A_{eff} \times \frac{f_y}{\gamma_{M1}} = 0.94 \times 0.0136 \times \frac{355000}{1} = 4513.79 \, kN$$

#### **Encurvadura lateral**

O momento crítico para elementos com seções simétricas, submetidos a flexão em torno do eixo de maior inércia, pode ser determinado por:

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 E I_z}{L_{cr,LT}^2} \sqrt{\frac{I_w}{I_z} + \frac{L_{cr,LT}^2 G I_T}{\pi^2 E I_z}}$$

Sendo  $C_1$  um fator derivado da relação entre os momentos de extremidade:  $\psi = \frac{M_1}{M_2} \approx 0,7$  onde  $C_1 = 1,14$ 

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 E I_z}{L_{cr,LT}^2} \sqrt{\frac{I_w}{I_z} + \frac{L_{cr,LT}^2 G I_T}{\pi^2 E I_z}}$$
$$M_{cr} = 1.14 \frac{\pi^2 \times 210E6 \times 9.01E - 5}{2^2} \sqrt{\frac{4.28E - 5}{9.01E - 5} + \frac{2^2 \times 80.77 \times 1.89E - 6}{\pi^2 \times 210 \times 9.01E - 5}}$$
$$M_{cr} = 36807.62 \text{ kN.m}$$

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{w_{eff} \times f_y}{M_{cr}}} = \sqrt{\frac{0,0099 \times 355000}{36807,62}} = 0,31$$

$$\phi_{LT} = 0.5 \left[ 1 + \alpha_{LT} \left( \bar{\lambda}_{LT} - 0.2 \right) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right] = 0.5 \left[ 1 + 0.76(0.31 - 0.2) + 0.32^2 \right] = 0.59$$

Capítulo 4

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}} = \frac{1}{0.59 + \sqrt{0.59^2 - 0.31^2}} = 0.92$$

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \times W_{eff,y} \times \frac{f_y}{\gamma_{M1}} = 0.92 \times 0.0099 \times \frac{355000}{1.0} = 3233.34$$

# Cálculo dos fatores de interação

De acordo com o método 2 do Anexo B da EN 1993-1-1, com  $C_{my} = 1,00$  e  $C_{mLT} = 0,4$ , vem  $k_{yy} = 1,01$  e  $K_{zy} = 0,99$ 

Verificação da interação entre o esforço axial e o momento fletor

$$\frac{426,6}{5007,28} + 1,01\frac{2140,96}{3233,34} = 0,75 \le 1,00$$

$$\frac{426,6}{5117,33} + 0,99\frac{2140,96}{3233,34} = 0,74 \le 1,00$$

Manual:

$$\frac{432,15}{5007,28} + 1,01\frac{2578,60}{3233,34} = 0,90 \le 1,00$$

$$\frac{432,15}{5117,33} + 0,99\frac{2578,60}{3233,34} = 0,87 \le 1,00$$

#### 4.4.5 Estabilidade dos pilares

A verificação da estabilidade dos pilares é feita de acordo com os mesmos critérios utilizados para as travessas, sendo  $e_{y,N} = e_{z,N} = 0 \ e \ M_{z,Ed} = 0$ ,

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_{y}N_{Rk}/\gamma_{M1}} + k_{yy}\frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT}M_{y,Rk}/Y_{M1}} \le 1,00$$

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} + k_{zy} \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} M_{y,Rk} / Y_{M1}} \le 1,00$$

Seguindo o procedimento utilizado na verificação da travessa, foram analisadas as seções A e B'.

#### Determinação do comprimento de encurvadura

Considerando para o comprimento de encurvadura o comprimento real do elemento, tem-se  $L_{cr,y} =$  7,00*m*. Relativamente à encurvadura fora do plano, como a estrutura encontra-se contraventada a meia altura, os comprimentos de encurvadura serão  $L_{cr,z} = L_{cr,LT} = 2,90m$ .

#### Encurvadura em torno de y - y

$$N_{cr,y} = \frac{\pi^2 E I_y}{L_{cr,y}^2} = \frac{\pi^2 \times 210E6 \times 6,97E - 6}{7^2} = 294819,2 \, kN$$

$$\bar{\lambda}_y = \sqrt{\frac{A_{eff} \times f_y}{N_{cr,y}}} = \sqrt{\frac{0,0136 \times 355000}{294819,2}} = 0,13$$

Sendo  $\bar{\lambda}_y = 0,13 < 0,20$  não é necessário verificar a encurvadura no plano da secção, considerando-se assim  $\chi_y = 1,00$ 

$$N_{b,Rd,y} = \chi_y \times A_{eff} \times \frac{f_y}{\gamma_{M1}} = 1,00 \times 0,0136 \times \frac{355000}{1,00} = 4828,0 \ kN$$

Encurvadura em torno de z - z

$$N_{cr,z} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_{cr,z}^2} = \frac{\pi^2 \times 210E6 \times 9,00E - 5}{2,9^2} = 22180,2 \ kN$$

$$\bar{\lambda}_z = \sqrt{\frac{A_{eff} \times f_z}{N_{cr,z}}} = \sqrt{\frac{0.0136 \times 355000}{22180.2}} = 0.47$$

$$\phi_z = 0.5 \left[ 1 + \alpha_z \left( \bar{\lambda}_z - 0.2 \right) + \bar{\lambda}_z^2 \right] = 0.5 \left[ 1 + 0.49(0.47 - 0.2) + 0.47^2 \right] = 0.68$$

Capítulo 4

$$\chi_z = \frac{1}{\phi_z + \sqrt{\phi_z^2 - \bar{\lambda}_z^2}} = \frac{2}{0.68 + \sqrt{0.68^2 - 0.47^2}} = 0.85$$

$$N_{b,Rd,z} = \chi_z \times A_{eff} \times \frac{f_y}{\gamma_{M1}} = 0.85 \times 0.0136 \times \frac{355000}{1.00} = 4103.8 \, kN$$

## Encurvadura lateral

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 E I_z}{L_{cr,LT}^2} \sqrt{\frac{I_w}{I_z} + \frac{L_{cr,LT}^2 G I_T}{\pi^2 E I_z}}$$

Sendo  $C_1$  um fator derivado da relação entre os momentos de extremidade:  $\psi = \frac{M1}{M2} \approx 0,5$  e  $C_1 = 1,31$ 

Onde:

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 E I_z}{L_{cr,LT}^2} \sqrt{\frac{I_w}{I_z} + \frac{L_{cr,LT}^2 G I_T}{\pi^2 E I_z}}$$

$$M_{cr} = 1,31 \frac{\pi^2 210E6 \times 9,00E - 5}{2,9^2} \sqrt{\frac{4,28E - 5}{9,00E - 5} + \frac{2,9^2 \times 80,77 \times 1,65E - 6}{\pi^2 \times 210 \times 9,00E - 5}}$$
$$M_{cr} = 20163,41 \ kN. m$$

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{w_{eff} \times f_y}{M_{cr}}} = \sqrt{\frac{0,0088 \times 355000}{20163,41}} = 0,39$$

$$\phi_{LT} = 0.5 \left[ 1 + \alpha_{LT} \left( \bar{\lambda}_{LT} - 0.2 \right) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right] = 0.5 \left[ 1 + 0.76(0.39 - 0.2) + 0.39^2 \right] = 0.64$$

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}} = \frac{1}{0.64 + \sqrt{0.64^2 - 0.39^2}} = 0.87$$

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \times w_{eff,y} \times \frac{f_y}{\gamma_{M1}} = 0.87 \times 0.0088 \times \frac{355000}{1.0} = 2717.88 \text{ kN. m}$$

#### Cálculo dos fatores de interação

De acordo com o método 2 do Anexo B da EN 1993-1-1, com  $C_{mLT} = 0,4$ , vem  $k_{yy} = 1,01$  e  $K_{zy} = 0,99$ 

#### Verificação da interação entre o esforço axial e o momento fletor fora do plano da secção

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk}/\gamma_{M1}} + k_{zy} \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} M_{y,Rk}/Y_{M1}} \le 1,00$$
$$\frac{367,8}{4103,8} + 0.99 \frac{2116,3}{2717,88} = 0.86 \le 1,00$$

Manual:

$$\frac{362,61}{4103,8} + 0.99 \frac{2125,90}{2717,88} = 0.86 \le 1,00$$

Pelos resultados obtidos, a segurança da coluna para a secção crítica B' está garantida. No que diz respeito à secção critica A, atendendo que o valor do momento fletor é muito baixo e sendo o apoio rotulado, considera-se na verificação que o momento fletor é nulo, bastando assim verificar a encurvadura por compressão.

Encurvadura em torno de y - y

$$N_{cr,y} = \frac{\pi^2 E I_y}{L_{cr,y}^2} = \frac{\pi^2 \times 210E6 \times 1,10E - 3}{7^2} = 46528,1 \, kN$$

$$\bar{\lambda}_y = \sqrt{\frac{A_{eff} \times f_y}{N_{cr,y}}} = \sqrt{\frac{0.0135 \times 355000}{46528.1}} = 0.32$$

 $\phi_y = 0.5 \left[ 1 + \alpha_y \left( \bar{\lambda}_y - 0.2 \right) + \bar{\lambda}_y^2 \right] = 0.5 \left[ 1 + 0.34(0.32 - 0.2) + 0.32^2 \right] = 0.57$ 

$$\chi_y = \frac{1}{\phi_y + \sqrt{\phi_y^2 - \bar{\lambda}_y^2}} = \frac{1}{0.57 + \sqrt{0.57^2 - 0.32^2}} = 0.96$$

$$N_{b,Rd,y} = \chi_y \times A_{eff} \times \frac{f_y}{\gamma_{M1}} = 0.96 \times 0.0135 \times \frac{355000}{1.00} = 4600.8 \ kN_{M1}$$

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd,y}} < 1,0$$
$$\frac{367,8}{4600,8} = 0,08 < 1,00$$

Manual:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd,y}} = 0,08 < 1,00$$

Encurvadura em torno de z - z

$$N_{cr,z} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_{cr,z}^2} = \frac{\pi^2 \times 210E6 \times 9,00E - 5}{2,9^2} = 22180,2 \ kN$$

$$\bar{\lambda}_z = \sqrt{\frac{A_{eff} \times f_z}{N_{cr,z}}} = \sqrt{\frac{0.0135 \times 355000}{22180.2}} = 0.46$$

$$\phi_z = 0.5[1 + \alpha_z(\bar{\lambda}_z - 0.2) + \bar{\lambda}_z^2] = 0.5[1 + 0.49(0.46 - 0.2) + 0.46^2] = 0.67$$

$$\chi_z = \frac{1}{\phi_z + \sqrt{\phi_z^2 - \bar{\lambda}_z^2}} = \frac{1}{0.67 + \sqrt{0.67^2 - 0.46^2}} = 0.86$$

$$N_{b,Rd,z} = \chi_z \times A_{eff} \times \frac{f_y}{\gamma_{M1}} = 0.86 \times 0.0135 \times \frac{355000}{1.0} = 4121.55 \ kN$$

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd,z}} < 1,0$$
$$\frac{367,8}{4121,55} = 0,09 < 1,0$$

Manual:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd,z}} = 0,09 < 1,0$$

Pelos resultados obtidos, a segurança das colunas está garantida.

# Capítulo 5 – Resultados e Discussão

# 5.1 Resultados Obtidos Através da Análise Numérica Não Linear por Elementos Finitos

# 5.1.1 Análise Static-General

## Tensões

Na análise GMNIA é utilizado o conceito de "Load Proportionality Factor" (LPF) que corresponde ao valor a partir do qual o carregamento aplicado é multiplicado por um determinado incremento.

Para a obtenção dos resultados é feita uma análise Static-general, onde a carga aplicada vai sendo aumentada em cada incremento até a carga atingir um LPF com valor unitário. Esta análise é concluída quando é atingido esse patamar de carga.

Na análise foram tidas as seguintes considerações:

- Carga aplicada 10 vezes superior aos esforços obtidos nas combinações de ações
- Malha adotada 25
- Imperfeição global e deformada inicial aplicadas sob a forma de força equivalente
- Imperfeição local de acordo com a figura 55 (GMNIA Imp 7)

Da análise dos resultados constata-se que para o número máximo de incrementos obtidos, o limite da extensão é 0,005, sendo, de acordo com o preconizado no anexo C.9 da NP EN1993-1-5 e prEN 1993-1-14 o máximo é 0,05.



Para uma melhor interpretação dos resultados, de seguida serão apresentadas as tensões divididas na componente horizontal e vertical relativamente aos pontos A, B e C representados na figura 60, que relaciona o deslocamento e o LPF a meio vão. Adicionalmente, dentro de cada uma delas apresentam-se separadamente as tensões de compressão, tração e tangenciais da análise em estudo.





Da análise da figura 60 no ponto A correspondente a 90% do valor da carga aplicada é atingida a tensão de cedência de cerca de 253*MPa* à compressão e tração horizontais (figura 61), 210*MPa* à compressão e tração verticais (figura 62), 162*MPa* para as tensões tangenciais (figura 63) e 355*MPa* para o valor das tensões de Von Mises (figura 64).





No ponto B, correspondente a 105% do valor da carga aplicada, é atingida a tensão de cedência de cerca de 265*MPa* à compressão e tração horizontais (figura 65), 247*MPa* à compressão e tração verticais (figura 66), 201*MPa* para as tensões tangenciais (figura 67) e 355*MPa* para o valor das tensões de Von Mises (figura 68).

Figura 65 - Tensões de compressão e trações horizontais no plano da estrutura LPF = 1,05



Figura 66 - Tensões de compressão e trações verticais *LPF* = 1,05





No ponto C, correspondente a 120% do valor da carga aplicada, é atingida a tensão de cedência de cerca de 313*MPa* à compressão e tração horizontais (figura 69), 318*MPa* à compressão e tração verticais (figura 70), 204*MPa* para as tensões tangenciais (figura 71) e 355*MPa* para o valor das tensões de Von Mises (figura 72).



Figura 73 – Tensões Von Mises no pórtico LPF = 0.9

Step: Step-1 Increment 13: Step Primary Var: S. Mises

Step: Step Increment Primary Va



# Capítulo 6 – Conclusão e trabalhos futuros

#### 6.1 Conclusões

Dos resultados obtidos na verificação da influência do tipo de aplicação das imperfeições globais no pórtico, pode-se concluir que no caso de estudo não existia divergência nos resultados, pelo que a escolha do método de aplicação da imperfeição pode ser arbitrário. Contudo, deve-se adotar aquele que induz menos erro na análise do pórtico (método das forças equivalentes).

No que diz respeito à influência da dimensão da malha, e com os resultados obtidos na verificação dos esforços no apoio, conclui-se que quanto maior é a malha, maior é o momento nesse mesmo ponto. Tratando-se um apoio rotulado, era expectável que o valor do momento nesse ponto fosse zero, o que não se verificou na análise do modelo. No entanto, tendo em conta a proporcionalidade do valor obtido relativamente aos restantes valores para os momentos ao longo dos elementos, este pode ser desprezado.

Relativamente aos resultados obtidos na análise GMNIA, estes confirmam o dimensionamento elástico do pórtico que é efetuado de acordo com a NP EN 1993-1-1. O pórtico atinge o primeiro ponto de plastificação quando é aplicada 90% da carga. Não obstante, a estabilidade do pórtico não é posta em causa, podendo este ser sujeito à aplicação de pelo menos 120% da carga sem que ocorra rutura global do mesmo.

# 6.2 Recomendações práticas para a modelação e análise com a utilização de software de análise por elementos finitos

Com a execução deste trabalho é possível inferir um conjunto de recomendações com vista à minimização dos erros cometidos durante a análise e modelação de pórticos pelo o método de elementos finitos nomeadamente:

1. Modelação da estrutura recorrendo a elementos de casca onde serão atribuídas as caraterísticas físicas e materiais dos elementos;

Ex: No caso de estudo foi adotado um modelo de casca onde foram aplicadas todas as características dos elementos (Características dos materiais, dimensões e espessuras dos elementos que constituem os perfis)

2. Desenvolver um modelo computacional simplificado que permita validar as opções tomadas no modelo de cálculo real;

Ex: No caso de estudo foi adotado um modelo de barras simplificado que permitiu validar algumas das decisões tomadas

 Adotar a dimensão da malha que permita a obtenção de resultados confiáveis com o mínimo esforço computacional possível;

Ex: No caso de estudo foi adotada uma malha de dimensão 25 que corresponde a  $\frac{L_{coluna}}{280}$ 

4. Aplicar no modelo todas as variáveis de cálculo da forma mais simples possível Ex: No caso de estudo na definição das imperfeições foi adotada a imperfeição equivalente sob a forma de força por ser mais fácil de implementar no modelo.

#### **6.3 Trabalhos futuros**

Como trabalhos futuros sugere-se a avaliação do comportamento dos materiais na análise GMNIA, para isso propõe-se a realização de dois modelos de cálculo distintos onde se deverá considerar num o comportamento do material com patamar de cedência e outro com endurecimento. Adicionalmente poderá ser feita a comparação dos resultados de uma curva de um material com um comportamento elastoplástico com endurecimento linear e uma curva tensão-deformação verdadeira.

Uma questão que necessita de ser avaliada é as combinações de imperfeições, pelo que se sugere um trabalho neste âmbito, isto é, explorar fatores de combinação dos diversos tipos de imperfeições considerados na análise global que permitam obter resultados seguros e ao mesmo tempo realistas.

Outro trabalho futuro a realizar seria a análise do pórtico tendo em conta tensões residuais de forma explicita.

Posteriormente sugere-se a evolução para pórticos de edifícios de múltiplos andares. O objetivo seria realizar todo o dimensionamento com os métodos do novo prEC3-1-14 comparando com os resultados obtidos numa análise GMNIA num modelo validado.

# **Bibliografia**

- 1. ABAQUS User's manual Version 6.11 (2011). Dassault Systèmes Simulia Corp., USA
- Amorim, M. A. L. (2017). "Análise da estabilidade de um pórtico metálico com elementos de secção variável através de métodos avançados por elementos finitos". Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Coimbra, Coimbra.
- Azevedo, A. F. M. (2003). 1<sup>a</sup> Edição "Método dos elementos finitos". Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Beg, D., Kuhlmann, U., et al. (2010) 1<sup>a</sup> Edição. "Design of Plated Structures Eurocode 3: Design of Steel Structures Part 1-5 – Design of Plated Structures", ECCS.
- 5. CEN (2006). "Eurocode 3, EN-1993-1-5:2006, Eurocode 3: Plated structural elements", European Committee for Standardization, Brussels, Belgium.
- CEN. (2010). Eurocódigo, NP EN-1993-1-1:2010. "Eurocódigo 3: Projecto de estruturas de aço-Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios". Comité Eurpeu da Normalização, de Bruxelas, Bélgica.
- Marques, L., L. Simões da Silva, et al. (2010). "Métodos avançados de análise por elementos finitos para verificação da estabilidade de estruturas metálicas". VII Congresso de Construção Metálica e Mista.
- Simões da Silva, L. e Gervásio, H. (2007). "Manual de Dimensionamento de Estruturas Metálicas: Métodos Avançados; Eurocódigo 3: Projecto de Estruturas de Aço; Parte 1 - 1: Regras gerais e regras para edifícios; Parte 1 - 5: Estruturas constituídas por placas": CMM - Associação Portuguesa da Construção Metálica e Mista.
- Simões da Silva L., Gervásio H. e Simões R. (2010b). "Design of Steel Structures , Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings", ECCS.
- Simões, R. A. (2014). "Manual de Dimensionamento de Estruturas Metálicas: Eurocódigo
   Projecto de estruturas metálicas: Parte 1-1: Regras Gerais e Regras para Edifícios". CMM, Coimbra, Portugal.