TERNOS

PITAGÓRICOS

Marta Maria Martins Figueiredo Leitão

Orientador: Prof. Drª Natália Bebiano Providência

Julho 2012

TERNOS

PITAGÓRICOS

Júri:

Ana Paula da Cruz Escada

Natália Isabel Quadros Bebiano Pinheiro da Providência e Costa

José Luís Esteves dos Santos

Resumo

O trabalho aqui desenvolvido é uma viagem pelas demonstrações do Teorema de Pitágoras, suas aplicações e generalizações.

Também os ternos pitagóricos, como uma aplicação do recíproco do Teorema de Pitágoras, são tratados de um modo mais aprofundado com o estudo dos ternos pitagóricos primitivos.

O Último Teorema de Fermat, provando-nos que "*É impossível para um cubo ser escrito como a soma de dois cubos ou uma quarta potência ser escrita como a soma de duas quartas potências ou, em geral, para qualquer número que é uma potência maior do que a segunda, ser escrito como a soma de duas potências com o mesmo expoente."* também aqui é apresentado como argumentação para unicidade do Teorema de Pitágoras.

Ao longo de todo este projeto procurámos fazer uma reflexão da aplicabilidade de cada um dos pontos focados nos diferentes anos de escolaridade e em diferentes realidades escolares aproveitando a experiência de, atualmente, exercer funções no Centro Educativo dos Olivais, sob a tutela da Direção Geral da Reinserção Social. Neste contexto, os jovens encontram-se a cumprir medida tutelar educativa no regime semiaberto ou fechado, abrangidos por Cursos de Educação e Formação Adultos (EFA) ou, de acordo com o ponto 2 do artº 160º da Lei Tutelar Educativa, "*a actividade escolar oficial desenvolvida nos centros educativos deve ser orientada de modo a adaptar-se às particulares necessidades dos menores e a facilitar a sua inserção social".*

Agradecimentos

Ao meu Pai, meu irmão Jorge e aos meus tios…

À minha Mãe, irmãos, sobrinhos e demais família que sempre me incentivaram e me apoiaram.
Pela paciência, carinho, compreensão e, acima de tudo, por preencheram as falhas que fui tendo por força das circunstâncias.

Aos amigos pela compreensão da minha ausência.

Índice

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho surge do desenvolvimento da disciplina Relatório, do Mestrado em Ensino da Matemática 3º Ciclo e Secundário.

Os temas desenvolvidos têm como motivação não só o interesse que eu tinha pelo Teorema de Pitágoras mas também verificar que esse interesse era comum aos meus alunos.

Também a experiência profissional que me encontro a viver, como professora de Matemática para a Vida e Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), em cursos de Educação e Formação para Adultos (EFA), no Centro Educativo dos Olivais, pesou na minha decisão.

Neste centro, as condições de trabalho são bastante diferentes de uma "escola normal": os materiais com que é possível trabalhar são poucos, os jovens com que trabalho têm diferentes níveis de escolaridade e, de um modo geral, uma muito fraca ligação à escola. Também a emotividade está presente em cada hora do dia o que dificulta a planificação e cumprimento de uma atividade.

Com eles, as tarefas têm de ser muito individualizadas, respeitando o nível de escolaridade de cada um e procurando, sempre, fazê-los criar alguns laços com a escola, o pensamento e o trabalho.

Como condicionantes também terei que contar com a mobilidade dos jovens pois muitos ingressam no curso quando este já está a decorrer e muitos outros abandonam o curso quando acabam de cumprir a medida educativa.

Analisando o "Referencial de Competências-Chave" para a Educação e Formação de Adultos, poderei fazer algumas aplicações do trabalho aqui desenvolvido no módulo B de Matemática para a Vida e TIC do curso B3 de Marcenaria, onde procurarei fazer a demonstração do Teorema de Pitágoras por comparação de áreas.

Embora sem recorrer a demonstrações, farei alguns exercícios de aplicação prática do Teorema de Pitágoras, na determinação da diagonal de um quadrado ou retângulo, no cálculo da distância entre dois pontos e na determinação da diagonal do paralelepípedo.

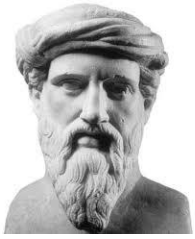
A irracionalidade da $\sqrt{2}$ poderá ser abordada numa perspetiva histórica e de curiosidade matemática sem que, no entanto, seja feita a sua demonstração.

Aproveitando a presença no Centro Educativo de um jovem de 15 anos que se encontrava a frequentar o 10º ano de escolaridade de um curso profissional de Informática de Gestão, e dadas as características do mesmo (capacidade de trabalho individual, autonomia, empenho, interesse e gosto por Matemática e TIC) senti-me na obrigação de adaptar a atividade escolar deste jovem às suas necessidades particulares. Procurarei, assim, desenvolver tarefas mais aprofundadas com ele, nomeadamente, propondo-lhe a realização de algumas demonstrações, dedução de fórmulas e criação de tabelas de ternos pitagóricos com recurso ao Excel.

Salvo todas estas diferenças, e tal como referido pela Drª Natália Bebiano Providência, a minha experiência poderá ser útil para qualquer outro aluno de Matemática.

Volvidos 17 anos de ensino, aproveitando a introdução dos novos programas do Ensino Básico e a facilidade das novas tecnologias no ensino-aprendizagem, considerei estar na altura de “fazer uma reciclagem” do meu conhecimento nesta área, aprofundando a parte científica científico, tendo sempre presente que toda esta aprendizagem deveria ser feita em prol dos meus alunos e do interesse que eles demonstravam por este tema.

2. UM POUCO DE HISTÓRIA…



Pensa-se que Pitágoras nasceu na ilha de Samos, na Grécia, provavelmente cerca de 496 a.C. - 497 a.C.

A sua vida está envolta numa série de lendas já que os seus relatos surgem tardiamente e envoltos em fantasia. Não subsistiram quaisquer fontes primárias, crendo-se que desapareceram.

Segundo os relatos, Pitágoras viajou pelo Egito e Babilónia, fixando-se na ilha de Crotona em Itália, onde fundou a Escola Pitagórica. Aqui se estudava Matemática, Filosofia, Música e outras Ciências.

Pitágoras e os seus discípulos interessavam-se pelos números, considerando que o princípio fundamental que forma todas as coisas é o número, sinónimo de harmonia.

Segundo os Pitagóricos, o universo é regido por relações matemáticas – a observação dos astros sugeriu-lhes que há uma ordem que domina o universo: Se não, como explicar a alternância entre o dia e a noite, a alternância das estações ou o movimento circular perfeito das estrelas?

Nesta perspetiva concluíram que a Terra é uma estrela, esférica. Alguns dos seguidores de Pitágoras chegaram a falar do movimento de rotação da terra em torno de um eixo.

Embora tenham feito descobertas muito interessantes e importantes para a Matemática, tais como os números figurados (representados por uma construção geométrica de pontos equidistantes – o número triangular 10 era místico, uma vez que continha os quatro elementos: ar, terra, fogo e água) e os números perfeitos (números inteiros para os quais a soma dos seus divisores positivos próprios são iguais ao próprio número – 6 é um número perfeito pois 6=1+2+3), a sua maior descoberta prende-se no domínio da Geometria com o Teorema de Pitágoras.

Foi com o Teorema de Pitágoras que os Gregos conseguiram estabelecer uma ligação abstrata entre números e as figuras, provando que o conseguiam demonstrar por argumentos lógicos, e não apenas persuadir, o que representa um grande salto cognitivo.

Deste modo, a Matemática, definida como ***designação genérica das ciências de método essencialmente dedutivo que têm como objeto de estudo os números, figuras geométricas e outras entidades abstratas,***[1] surge com Pitágoras, uma vez que foi o primeiro a concebe-la como um sistema de pensamento, centrado em provas dedutivas.[2]

---

[1] *In* http://www.infopedia.pt

[2] Existem indícios que o Teorema de Pitágoras já era conhecido dos Babilónicos em 1600 a.C., embora esse conhecimento fosse meramente empírico.

3. Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é, possivelmente, o mais antigo resultado geométrico que temos notícia, tendo sido demonstrado por Pitágoras e os seus seguidores, por volta de 500 a.C.
No entanto, há indícios de que o Teorema de Pitágoras já era conhecido dos Babilónicos, mais de um milénio antes da época de Pitágoras.
Conjetura-se que uma forma deste teorema já era conhecida pelo homem do neolítico, na Europa.

Uma das versões mais conhecidas do Teorema de Pitágoras pode ser enunciada do seguinte modo:

"A área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos desses triângulos:

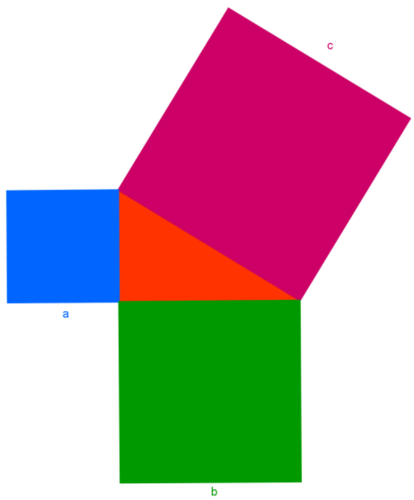


figura 1

Nos manuais do 3º Ciclo, o Teorema de Pitágoras é enunciado do seguinte modo:

"Num triângulo retângulo, o quadrado da medida de comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos comprimentos dos catetos."

Tal como é apresentada sugere-nos que, **se** estivermos perante um triângulo retângulo, **então** podemos determinar a medida de comprimento de um dos lados do triângulo, desde que conheçamos as medidas de comprimento dos outros dois lados.

4. Demonstrações do Teorema de Pitágoras

Elisha Scott Loomis, professor de Matemática em Cleveland, Ohio, durante 20 anos colecionou demonstrações do Teorema de Pitágoras, agrupou-as em dois tipos: algébricas e geométricas, e organizou-as no livro *"The Pythagorean Proposition"* que, na sua primeira edição, de 1927, continha 230 demonstrações e na segunda edição, em 1940, esse número aumentou para 370.

Elon Lages Lima, no seu livro *"Meu Professor de Matemática e outras histórias"*, apresenta cinco dessas demonstrações.

Embora sem certeza absoluta de qual a demonstração apresentada por Pitágoras, a maioria dos historiadores considera que tenha sido uma demonstração geométrica por comparação de áreas.

No 3º ciclo do ensino básico, a demonstração deste teorema faz-se, na maior parte dos manuais, recorrendo àquela que poderá ter sido a demonstração feita por Pitágoras, embora com a introdução dos novos programas já vejamos a apresentação de outras demonstrações não menos belas ou menos simples:

4.1. Demonstração por comparação de áreas:

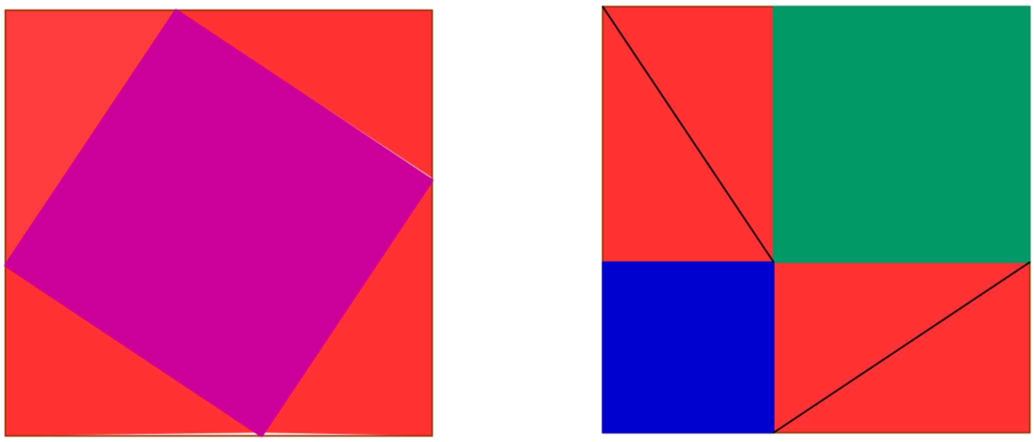


figura 2

Nesta demonstração, partimos da decomposição de dois quadrados equivalentes em triângulos retângulos e quadrados - cuja medida de comprimento do lado é igual à soma das medidas de comprimento dos catetos de triângulos retângulos congruentes - tal como ilustrado na figura 2.

Retirando as áreas ocupadas pelos triângulos retângulos, concluímos que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

A vantagem da utilização desta demonstração na introdução da unidade Teorema de Pitágoras prende-se com o facto de poder ser feita com recurso a materiais manipuláveis ou às novas tecnologias, nomeadamente o quadro interativo multimédia.

No entanto, outras demonstrações interessantes poderão ser abordadas em diferentes anos de escolaridade:

4.2. Demonstração por rearranjo das partes

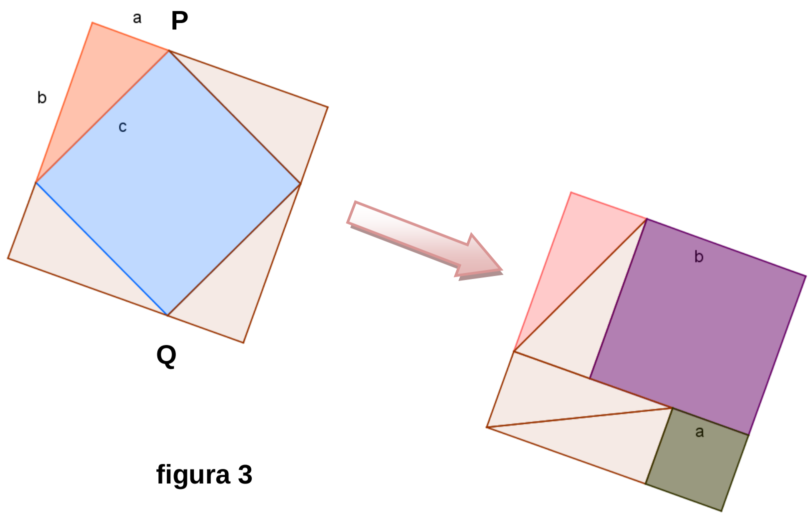


figura 3

Se dispusermos de um programa de Geometria Dinâmica, com uma decomposição de um quadrado, cuja medida de comprimento do lado é igual à soma das medidas de comprimento dos catetos de um triângulo retângulo, em quatro triângulos retângulos e num quadrado de medida de lado igual à hipotenusa, poderemos, por rotação em torno dos pontos **P** e **Q** e amplitude 90º, de cada um de dois triângulos retângulos demonstrar que a área do quadrado construído inicialmente é igual à soma das áreas dos quadrados obtidos após as rotações.

Sem recurso ao programa de Geometria Dinâmica, esta demonstração poderá ser feita recorrendo a materiais manipuláveis, tal como a anterior.

4.3. Demonstração algébrica

Esta demonstração, feita a partir de um único quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo, surge com a decomposição desse quadrado em quatro triângulos congruentes com o triângulo inicial e num quadrado com medida de comprimento de lado igual à diferença dos catetos:

Demonstração:

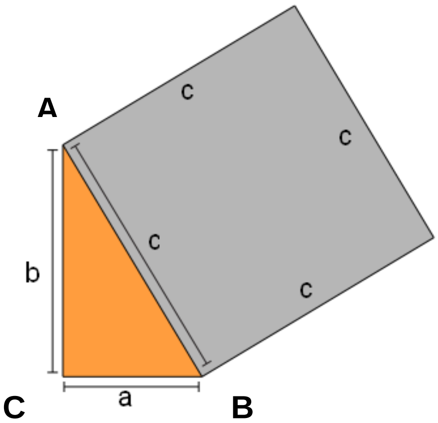


figura 4

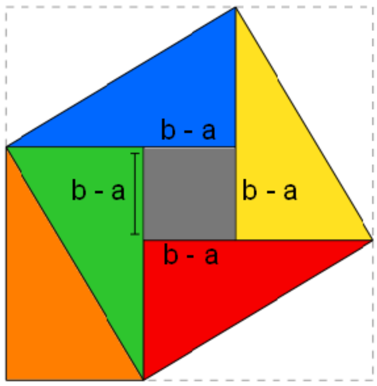


figura 5

Desenhe-se o triângulo [ABC] e construa-se o quadrado sobre a hipotenusa, tal como se ilustra na **figura 4**.

Tem-se que a área desse quadrado é c^2.

Pela **figura 5**:

$$c^2 = 4 \times \frac{ab}{2} + (b-a)^2$$

$$\Leftrightarrow c^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2$$

$$\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

Uma vez que nos manuais de 8º ano de escolaridade, dos novos programas, a unidade Expressões Algébricas e o tema Polinómios são apresentados antes da unidade Teorema de Pitágoras, esta demonstração constitui um bom exercício de desenvolvimento de competências na elaboração de raciocínio dedutivo e da capacidade de estabelecer conexões entre raciocínio algébrico e geométrico.
Acompanhada pela utilização do quadro interativo multimédia e/ou materiais manipuláveis é de acessível compreensão.

4.4. **Demonstração por semelhança de triângulos**

Com o novo programa do Ensino Básico esta demonstração poderá ser usada na introdução da unidade Teorema de Pitágoras pois os alunos já possuem conhecimentos de semelhança de triângulos adquiridos no 7º ano de escolaridade. Embora não tão atrativa como a demonstração geométrica por comparação de áreas, a demonstração por semelhança de triângulos poderá desenvolver competências de raciocínio, resolução de problemas e comunicação matemática, para além de estabelecer conexões entre conteúdos de diferentes anos de escolaridade.

Antes de efetuar a demonstração do Teorema de Pitágoras por semelhança de triângulos, é importante tecer algumas considerações iniciais sobre semelhança de triângulos. Para tal, partimos da definição de figuras e polígonos semelhantes, tal como nos é apresentada nos manuais do 7º ano de escolaridade.

Definição: *Duas figuras são semelhantes se tiverem a mesma forma.*
Assim, para quaisquer figuras semelhantes, a forma manter-se-á, podendo, no entanto, variar o tamanho e a posição.

Definição: *dois polígonos dizem-se semelhantes se os ângulos forem congruentes e os lados correspondentes forem diretamente proporcionais.*

Definição: *Os lados correspondentes de um polígono são diretamente proporcionais se e só se a razão entre os lados correspondentes for constante.*

Os triângulos são um caso particular de polígonos semelhantes, como tal, para provar a semelhança de triângulos, temos os critérios de semelhança de triângulos:

1) Dois triângulos são semelhantes se tiverem, entre si, os três lados diretamente proporcionais **(*lll*).**
2) Dois triângulos são semelhantes se tiverem, entre si, dois lados diretamente proporcionais e o ângulo por eles formado igual **(lal).**
3) Dois triângulos são semelhantes se tiverem, entre si, dois ângulos iguais **(aa).**

Para a demonstração por semelhança de triângulos, iremos utilizar o terceiro critério de semelhança - *Dois triângulos são semelhantes se tiverem, entre si, dois ângulos iguais* – o qual passaremos a demonstrar:

Teorema: *Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e encontra os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.*

Demonstração:

Seja [*ABC*] um triângulo e *DE* paralela a *BC*.

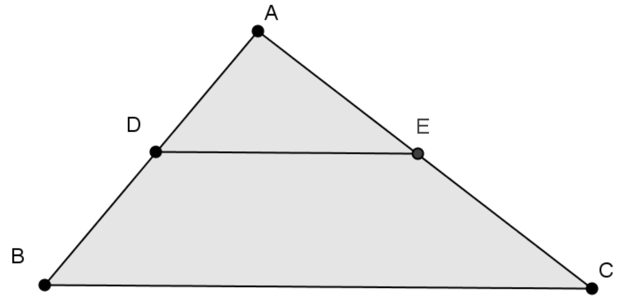


figura 6

Prove-se que os triângulos [*ABC*] e [*ADE*] são semelhantes:

1) $D\hat{A}E = B\hat{A}C$, por construção e é comum aos dois triângulos

$A\hat{B}C = A\hat{D}E$ e $A\hat{C}B = A\hat{E}D$, porque são ângulos de lados paralelos com o mesmo sentido.

Então, os triângulos [*ABC*] e [*ADE*] têm os ângulos iguais.

2) Trace-se a reta *EF* paralela a *AB* e prove-se que os lados dos triângulos [*ABC*] e [*ADE*] são diretamente proporcionais:

$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$, por *DE// BC* (1)

$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}$, por *EF//A B* (2)

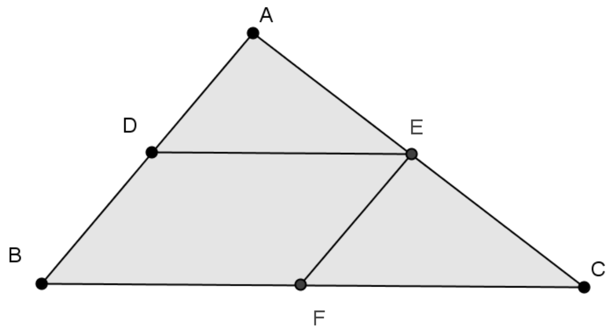


figura 7

O quadrilátero [*BDEF*] é um paralelogramo, logo $\overline{BF} = \overline{DE}$.

Então, substituindo em (2), vem que:

$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$ (3).

Por (1) e (2), temos que $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$, isto é, os lados dos triângulos *ABC* e *ADE* são diretamente proporcionais.

Consideremos os triângulos [*ABC*] e [*A'B'C'*], tais que os $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$.

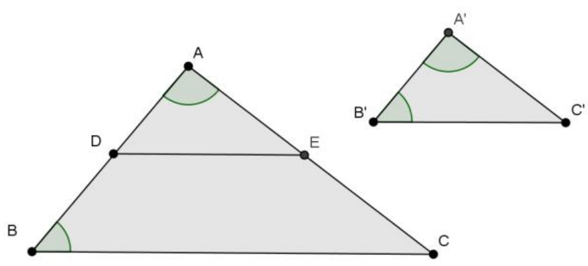


figura 8

No triângulo [*ABC*], trace-se a reta *DE*, paralela a *AC,* de tal modo que $\overline{BD} = \overline{A'B'}$.

Os triângulos *ADE* e *A'B'C'* são congruentes, logo são semelhantes com razão de semelhança 1.
Pelo teorema anterior, os triângulos [*ABC*] e [*ADE*] são semelhantes.
Logo [*ABC*] é semelhante a [*ADE*] e [*ADE*] é semelhante a [*A'B'C'*].
Então [*ABC*] é semelhante a [*A'B'C'*].

Demonstração do teorema de Pitágoras por semelhança de triângulos:

Seja [*ABC*] um triângulo retângulo.

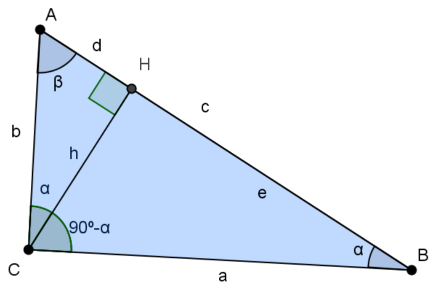


figura 9

No triângulo marcámos a altura referente à hipotenusa *[CH]* e assim formámos três triângulos retângulos semelhantes:

[*ABC*], [*ACH*] e [*BCH*]

Vejamos que os triângulos [*ABC*], [*ACH*] e [*BCH*] são semelhantes:

- O triângulo [*ABC*] é semelhante a [*ACH*] pois têm dois ângulos iguais:

$$A\hat{C}B = A\hat{H}C$$

$$C\hat{A}B = C\hat{A}H$$

- O triângulo [*ABC*] é semelhante a [*BCH*] pois têm dois ângulos iguais:

$$A\hat{C}B = B\hat{H}C$$

$$A\hat{B}C = C\hat{B}H$$

- O triângulo [*ACH*] é semelhante a [*BCH*] pois têm dois ângulos iguais:

Ambos os triângulos têm um ângulo reto em *H*

$A\hat{C}H = C\hat{B}A$, pois $A\hat{C}H = 90º - C\hat{A}H$ e $A\hat{B}C = 90º - C\hat{B}A$

Vejamos as correspondências entre os lados de [*ABC*] e [*BCH*]:

a *corresponde a* ***e***

b *corresponde a* ***h***

c *corresponde a* ***a****.* Logo, $\frac{a}{e}=\frac{c}{a}\Leftrightarrow a^2=ce$

Do mesmo modo, fazendo a correspondência entre os lados dos triângulos [*ABC*] e [*ACH*]:

a *corresponde a* ***h***

b *corresponde a* ***d***

c *corresponde a* ***b*** Assim,

$$\frac{b}{d}=\frac{c}{b}\Leftrightarrow b^2=cd$$

Então $a^2+b^2=ce+cd=c^2$

4.5. Demonstração num espaço com produto interno

Dada a organização curricular do ensino básico e secundário, esta demonstração apenas poderá ser abordada no 11º ano de escolaridade como um excelente exercício de aplicação do produto interno de vetores.

Vetor *é um ente matemático caracterizado por um sentido, direção e comprimento.*

Norma de um vetor: *Geometricamente, a norma de um vetor é o comprimento desse vetor.*

Produto interno de dois vetores:

Sejam $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$ *dois vetores do plano. O produto interno dos vetores* $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$ *é:*

$\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|\cos\theta$ *, sendo* θ *o ângulo formado pelos vetores* $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$ *.*

Demonstração

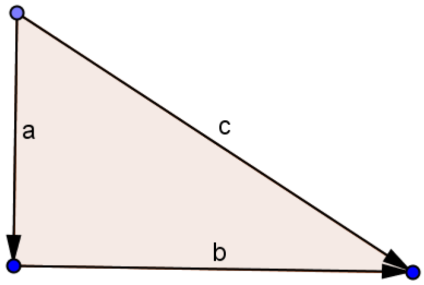


figura 10

Repare-se que:

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$$\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\boldsymbol{.}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b} =$$

$$= \left\|\vec{a}\right\|^2 + \left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|\mathbf{cos}\,90^\circ + \left\|\vec{b}\right\|\left\|\vec{a}\right\|\mathbf{cos}\,90^\circ + \left\|\vec{b}\right\|^2 =$$

$$= \left\|\vec{a}\right\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2$$

4.6. **Demonstração do Presidente:**

Uma das demonstrações apresentadas no livro “O meu Professor de Matemática e outras histórias”, de Elon Lages Lima é a demonstração apresentada por James Abram Garfield, presidente dos Estados Unidos e um apaixonado por matemática.

Garfield começou por considerar dois triângulos congruentes [*ABC*] e [*BDE*], tal como sugere a **figura 11**. De seguida, constrói o trapézio retângulo [*ACDE*]:

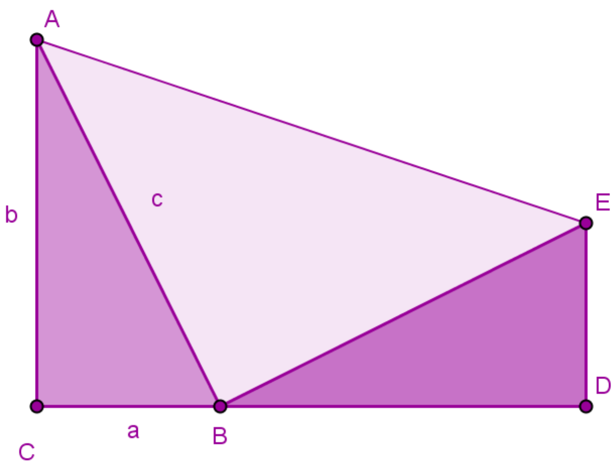


figura 11

Para tal teremos de demonstrar alguns resultados utilizados nesta demonstração:

1) A área de um trapézio é dada pela fórmula:

$$(base\ maior + base\ menor) \times \frac{altura}{2}$$

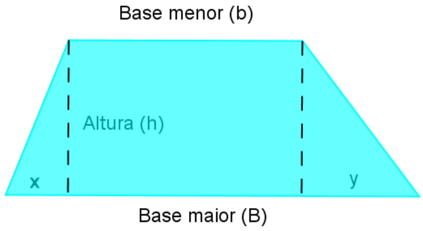


figura 12

Consideremos um trapézio:

Este trapézio pode ser decomposto em triângulos e quadriláteros, tal como ilustrado na **figura 12**.

Então:

$$Area\ do\ trapezio = \frac{xh}{2} + bh + \frac{yh}{2} = (x + 2b + y)\frac{h}{2} = (x + b + y + b)\frac{h}{2}$$

$$Area\ do\ trapezio = (B + b)\frac{h}{2}$$

2) O triângulo [*ABE*] é retângulo em *B*:

Os triângulos [*ABC*] e [*BDE*] são congruentes, isto é, têm a mesma forma e tamanho. Então os ângulos *CAB* e *DBE* têm a mesma amplitude.

Por outro lado, no triângulo [*ABC*], $C\hat{B}A + C\hat{A}B = 90^{\circ}$, pois o triângulo é retângulo em *C*.

Então, $C\hat{B}A + D\hat{B}E = 90^{\circ}$.

Como $C\hat{B}A + A\hat{B}E + D\hat{B}E = 180^{\circ}$, temos que o ângulo ABE é reto.

Demonstração de Garfield:

Pela fórmula da área do trapézio,

$$Area_{trapezio} = (a + b) \times \frac{a + b}{2} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2}$$

Pela decomposição do trapézio em três triângulos retângulos:

$$Area = \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{ba}{2}$$

Igualando as expressões anteriores vem que $\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{c^2}{2}$.

Logo, $a^2+b^2=c^2$

5. Teorema de Pitágoras em triângulos não retângulos

Já por volta do ano 300, Papus apresentou uma demonstração de que o Teorema de Pitágoras poderia ser aplicado a qualquer tipo de triângulos, considerando paralelogramos construídos sobre os lados do triângulo, sendo dois deles quaisquer e exigindo-se que o terceiro cumpra a condição de *CD* ser paralelo a *AH,* tal como ilustra a **figura13.**

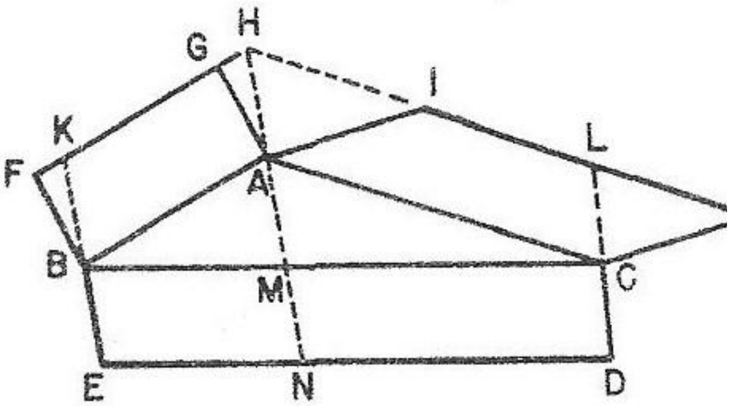


figura 13

Repare-se que os quadrados construídos sobre os catetos do triângulo retângulo são casos particulares de paralelogramos com os lados e os ângulos todos iguais.

Embora interessante, a demonstração de Papus poderá ser de difícil articulação com os programas do ensino básico e secundário, no entanto, a **Lei dos Cosenos**, poderá ser uma interessante generalização do Teorema de Pitágoras a qualquer tipo de triângulos:

" Seja [ABC] um triângulo, de lados opostos aos ângulos internos A, B e C, com medidas a, b e c, respetivamente. São válidas as relações:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C\text{"}$$

Demonstração:

Seja [*ABC*] um triângulo e *h* a altura do triângulo relativamente a [AC].

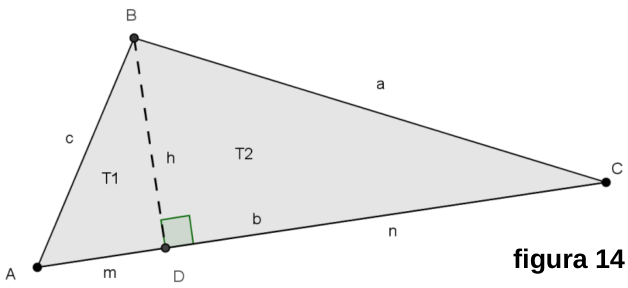


figura 14

Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que:

$$a^2 = h^2 + n^2 \Leftrightarrow a^2 = h^2 + (b-m)^2 \quad \textbf{(1)}$$

- Por outro lado,

$$\cos A = \frac{m}{c} \Leftrightarrow m = c\cos A \quad \textbf{(2)}$$

Então

$$a^2 = h^2 + (b-m)^2 \Leftrightarrow$$

Substituindo em **(1)** a expressão obtida em **(2)**

$$\Leftrightarrow a^2 = h^2 + (b - c\cos A)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2 = h^2 + b^2 - 2bc\cos A + c^2\cos^2 A \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2 = h^2 + c^2\cos^2 A + b^2 - 2bc\cos A \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2 = h^2 + c^2\frac{m^2}{c^2} + b^2 - 2bc\cos A \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2 = h^2 + m^2 + b^2 - 2bc\cos A$$

Como em T1, $h^2 + m^2 = c^2$, substituindo, vem que:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos A$$

De modo análogo, podemos demonstrar as restantes relações.

Embora não seja abordada, em nenhum ano de escolaridade a generalização do Teorema de Pitágoras a triângulos não retângulos, esta abordagem poderia ser feita no 9º ano de escolaridade na unidade de Trigonometria pois, para além de um exercício de desenvolvimento da capacidade de raciocínio matemático em contextos geométricos e trigonométricos, seria um excelente exercício para os alunos compreenderem a noção de demonstração e de desenvolverem o raciocínio dedutivo.

6. O Recíproco do Teorema de Pitágoras

Embora nem sempre devidamente explorado, também o recíproco do Teorema de Pitágoras é válido:

"Se num triângulo o quadrado da medida de comprimento de um dos lados for igual à soma dos quadrados das medidas de comprimento dos outros dois lados restantes do triângulo, o ângulo formado por esses dois lados é reto."

Tal reciprocidade é demonstrada, com facilidade, através da Lei dos Cosenos, já demonstrada anteriormente.

Tal como referido no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico para o 3º ciclo, deverá ser feita *uma referência ao recíproco do Teorema de Pitágoras,* havendo referência nos manuais escolares ao conceito de terno pitagórico considerando que a existência de um terno pitagórico é condição suficiente para a construção de um triângulo retângulo cujos lados são esse terno.

Consultando alguns manuais do 8º ano de escolaridade, com satisfação verificamos que, com os novos programas, pela primeira vez há uma referência explícita ao recíproco do Teorema de Pitágoras como teorema que fundamenta a possibilidade de construção de um triângulo retângulo, dado um terno pitagórico.

No entanto, poderíamos ir mais além nesta abordagem retomando o tema no 9º ano de escolaridade, aprofundando o conhecimento do recíproco do Teorema de Pitágoras e fazendo a sua demonstração.

Demonstração:

Seja [ABC] um triângulo que satisfaz a condição: $c^2 = a^2 + b^2$

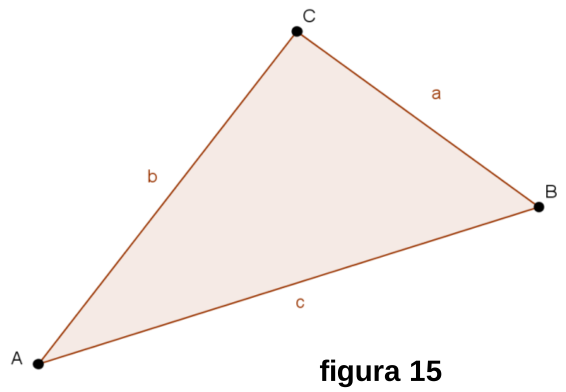


figura 15

Pela Lei dos Cosenos, tem-se que

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

Ora, como por hipótese, $c^2 = a^2 + b^2$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, conclui-se que

$\cos C = 0 \Rightarrow c = 90^o$.

Logo, o triângulo é retângulo em B.

7. Consequências do Teorema de Pitágoras

A riqueza do Teorema de Pitágoras permitiu-nos, ao longo dos séculos, desenvolver as mais variadas aplicações não só na área da geometria plana e espacial, mas também no desenvolvimento da Teoria de Números.

Na geometria plana, poderemos aplicar o Teorema de Pitágoras a qualquer polígono, já que, todos eles poderão ser decompostos em triângulos e quadriláteros.

Na geometria espacial, poderemos também aplicar o Teorema de Pitágoras uma vez que temos sempre três pontos não colineares que definirão um plano no qual estará contido um qualquer triângulo retângulo.

Faremos, a seguir, uma breve viagem por essas aplicações:

7.1. Altura do triângulo equilátero

Embora como aplicação a casos concretos, a determinação da altura de um triângulo isósceles ou equilátero é um exercício bastante usual na unidade Teorema de Pitágoras.

No entanto, a dedução da fórmula da altura do triângulo equilátero não é muito habitual podendo, no entanto, ser proposta aos alunos como mais um exercício de desenvolvimento do raciocínio dedutivo.

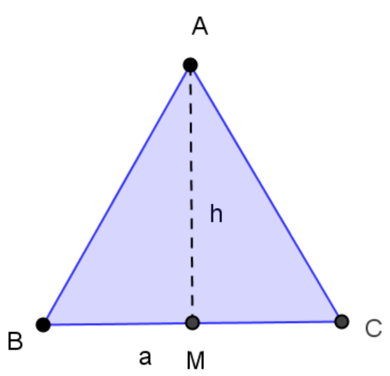


figura 16

A altura do triângulo equilátero divide-o em dois triângulos retângulos congruentes - [*ABM*] e [*ACM*] - pois a reta *AM*, que contém a altura do triângulo, é um eixo de simetria da figura.

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

7.2. Distância entre dois pontos

Também a fórmula da distância entre dois pontos da geometria analítica, surge como uma consequência da aplicação do Teorema de Pitágoras no sistema de coordenadas:

Sejam *A* e *B* dois pontos de coordenadas (x_1,y_1) e (x_2,y_2), respetivamente. A distância entre esses dois pontos pode ser calculada facilmente recorrendo a um terceiro ponto, *C*, de coordenadas (x_1,y_2) e aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo [*ABC*].

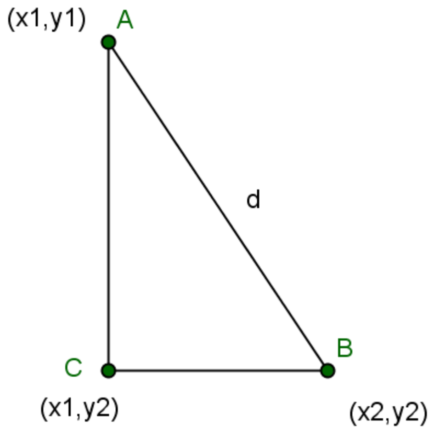


figura 17

Temos que:

$$\overline{AC} = |y_2 - y_1|$$
$$\overline{CB} = |x_1 - x_2|$$

donde se conclui que:

$$\overline{AC}^2 = (y_2 - y_1)^2$$
$$\overline{CB}^2 = (x_1 - x_2)^2$$

Então

$d^2 = (x1 - x2)^2 + (y2 - y1)^2 \Rightarrow d = \sqrt{(x1 - x2)^2 + (y2 - y1)^2}$,fórmula usada para o cálculo da distância entre dois pontos na geometria analítica.

Tal como na aplicação anterior, a determinação da distância entre dois pontos, é muita vez apresentada como um exercício de aplicação do Teorema de Pitágoras a casos concretos de pontos marcados no referencial cartesiano. Sem qualquer dificuldade e, mais uma vez, tendo a preocupação de desenvolver o raciocínio dedutivo dos alunos do 3º ciclo, poderíamos propor a realização do exercício de dedução da fórmula da distância entre dois pontos, tal como acima apresentada.

7.3. Diagonal do quadrado

A determinação da diagonal de um quadrado, ou de um retângulo é, muitas vezes, apresentada nos manuais como um exercício de aplicação do Teorema de Pitágoras. No entanto, raramente é feita a generalização para um quadrado de lado *l,* perdendo-se, mais uma vez, a possibilidade de desenvolver o raciocínio dedutivo dos nossos alunos.

Dado que a diagonal do quadrado o divide em dois triângulos retângulos, cujos catetos são os lados do quadrado e a hipotenusa é a própria diagonal, poderemos usar o Teorema de Pitágoras para determinar a medida de comprimento da diagonal:

$$d^2 = 2l^2 \Leftrightarrow d = \sqrt{2}l$$

7.4. Diagonal do cubo

Um dos objetivos específicos do Novo Programa de Matemática para o 3º ciclo é a *resolução de problemas no plano e no espaço aplicando o Teorema de Pitágoras.*

Nos manuais, com frequência, surgem problemas de determinação da diagonal do paralelepípedo, no entanto, mais uma vez não há muita preocupação de dedução de uma fórmula para a determinação da diagonal do paralelepípedo.

Na minha experiência pessoal, posso dizer que, após a resolução de um exercício concreto de determinação da diagonal do paralelepípedo, procuro deduzir com os alunos a seguinte fórmula:

$D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, onde *D* representa a diagonal do paralelepípedo, ***a***, ***b*** e ***c*** as medidas de comprimento, largura e altura do mesmo. Os alunos acompanham com facilidade a dedução da fórmula e demonstram, de um modo geral, bastante motivação nesta atividade.

Consideremos o cubo de aresta ***a***, tal como ilustra a figura. A diagonal do cubo está representada pelo segmento de reta ***d***. Analisando a figura, constata-se que [*BDD'*] formam um triângulo retângulo em *D*, ao qual poderemos aplicar o Teorema de Pitágoras. No entanto, o cateto [*BD*] (representado por ***f***) coincide com a diagonal da base do cubo.

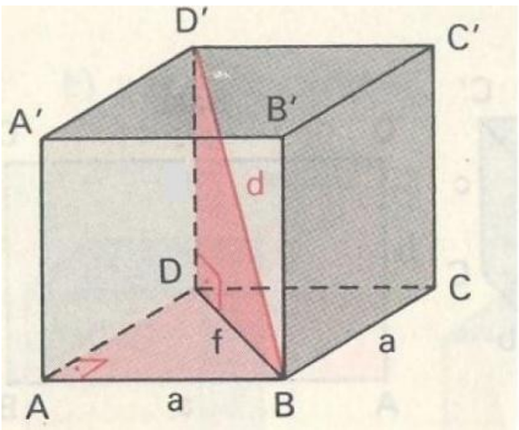


figura 18

Pela diagonal do quadrado, tem-se que $f=\sqrt{2}a$.

Podemos, agora, aplicar o Teorema de Pitágoras ao triângulo [*BDD'*]:

$d^2=f^2+a^2$

Substituindo ***f***, pela diagonal do quadrado, tem-se que $d=\sqrt{3}a$.

7.5. **Números Irracionais**

O problema que esteve na base do descobrimento da $\sqrt{2}$ foi tão simples como calcular a diagonal de um quadrado de lado 1.

Tal descoberta levantou uma crise na escola pitagórica, uma vez que a raiz quadrada de 2 não poderia ser expressa como a razão entre dois números inteiros quaisquer (os únicos números conhecidos nessa altura), levando a que esta descoberta fosse ocultada do mundo exterior.

A primeira descoberta de um número irracional é atribuída a Hipaso de Metaponto, um seguidor de Pitágoras. Ele terá produzido uma demonstração, talvez geométrica, da irracionalidade da $\sqrt{2}$.
Face a esta demonstração, conta-se que Pitágoras terá condenado o seu discípulo ao afogamento, uma vez que não conseguia refutar os argumentos de Hipaso de Metaponto e por outro lado porque a raiz quadrada de 2 "maculava" a perfeição dos números.
Só por volta do ano 300 a.C. os gregos voltaram a estudar os números irracionais sendo o décimo livro de Euclides dedicado à classificação de números irracionais. Apenas em 1872, o matemático alemão Dedekind os fez entrar na Aritmética.

Irracionalidade de $\sqrt{2}$

A irracionalidade de $\sqrt{2}$ é abordada no 9º ano de escolaridade, na unidade "Números Reais". Embora apareça referido nos Novos Programas de Matemática do 3º ciclo, *a abordagem deste tema numa perspetiva histórica ao problema dos incomensuráveis entre os pitagóricos,* apenas é proposto que *os alunos com melhor desempenho matemático podem ter contacto com a demonstração por redução ao absurdo, da irracionalidade.*
De facto, nem sempre a demonstração da irracionalidade da $\sqrt{2}$ é feita - na maioria dos casos por falta de tempo mas também pelas dificuldade dos alunos em aliarem o raciocínio geométrico ao raciocínio algébrico, em raciocinar no abstrato e em fazerem demonstrações.

Antes de demostrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$, teremos de tecer algumas considerações iniciais:

- Dois números inteiros positivos, ***a*** e ***b***, dizem-se primos entre si se não existir nenhum divisor comum, diferente de 1, entre ***a*** e ***b***.

- Se a^2 é par então ***a*** também é par:

  Suponhamos que ***a*** não é par – então existe um número natural ***k*** tal que $a = 2k + 1$. Elevando ambos os membros ao quadrado tem-se que $a^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, isto é, existe um outro número natural ***m*** tal que $m = 2k^2 + 2k$.

  Então $a^2 = 2m + 1$, ou seja, a^2 seria ímpar, o que contrariaria a hipótese de a^2 ser par.

  Logo, se a^2 é par então também ***a*** é par.

Demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$

Se $\sqrt{2}$ for racional, existem dois números inteiros primos entre si, ***a*** e ***b***, tais que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

Então, $2 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow a^2 = 2b^2$, isto é, a^2 é um número par.

Desta forma, existe um número, ***c***, tal que $a = 2c$.

Temos então que $(2c)^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 4c^2 = 2b^2 \Leftrightarrow b^2 = 2c^2$, o que significa que b também é par.

Então a fração $\frac{a}{b}$ não é irredutível, o que contraria o facto de $\sqrt{2}$ ser racional.

7.6. Fórmula Fundamental da Trigonometria

Também na trigonometria do triângulo retângulo, o Teorema de Pitágoras permitiu a demonstração de uma das relações mais importantes deste ramo da Matemática: $sen^2\alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

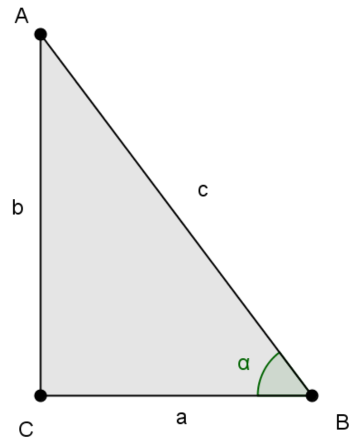


figura 19

$$sen\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{c}$$

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{b^2 + a^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

A demonstração da Fórmula Fundamental da Trigonometria é apresentada aos alunos do 9º ano de escolaridade, havendo a destacar a facilidade com que, de um modo geral, acompanham a dedução da fórmula.

Esta experiência levanta-nos uma questão relativamente ao modo como são abordados os conteúdos, em especial ao nível do 3º ciclo: Será que as dificuldades, tantas vezes referidas, ao nível do raciocínio dedutivo não se prendem com a fraca rentabilização dos conteúdos para desenvolvimento da capacidade de raciocínio dedutivo?

8. Generalização do Teorema de Pitágoras a figuras semelhantes nos três lados

Embora o Teorema de Pitágoras seja enunciado para áreas de quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo, Polya generalizou este resultado para quaisquer figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo:

"Erguendo-se figuras semelhantes nos lados de um triângulo retângulo, então a soma das áreas das duas menores é igual à área da maior."

Intuitivamente, podemos dizer que as figuras semelhantes podem variar no tamanho, mantendo, no entanto, a proporção entre os lados correspondentes, isto é, a razão entre as medidas de comprimento dos lados correspondentes é constante. A esse valor chamamos **razão de semelhança**.

Lema: Dadas duas figuras semelhantes, a razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Demonstração:

Sejam **A** e **B** duas figuras semelhantes e seja **r** a razão de semelhança que transforma **A** em **B.**

Comecemos por decompor a **figura A** em triângulos e quadriláteros.

Cada um dos triângulos ou quadrilátero em que decompusemos a **figura A** tem figura semelhante na **figura B.** Façamos a mesma decomposição na **figura B.**

Como as figuras são semelhantes, para cada um dos segmentos de cada um dos polígonos em que decompusemos as figuras A e B, temos que:

$r = \frac{b}{a}$, onde a e b são quaisquer segmentos correspondentes nas duas figuras.

$Area_A = \sum_{i=1}^{n} A_i$ **,** onde A_i representa a área de cada um dos triângulos ou quadriláteros em que decompusemos a figura ***A.***

Do mesmo modo, $Area_B = \sum_{i=1}^{n} B_i$

Para cada uma dessas áreas temos que:

$A_i = c_i h_i \quad \text{ou} \quad A_i = \dfrac{c_i h_i}{2}$ e $B_i = c'_i\, h'_i \quad \text{ou} \quad B_i = \dfrac{c'_i\, h'_i}{2}$,

onde c_i, h_i representam, respetivamente os comprimentos e as alturas das figuras A_i

e

c'_i, h'_i representam, respetivamente os comprimentos e as alturas das figuras B_i

Então,
$$Area_A = \sum_{i=1}^{k} c_i h_i + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{c_i h_i}{2}$$
$$Area_B = \sum_{i=1}^{k} c'_i\, h'_i + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{c'_i\, h'_i}{2} \qquad \textbf{(2)}$$

Como os triângulos e quadriláteros em que decompusemos as figuras A e B são semelhantes, tem-se que:

$c'_i = rc_i$ e $h'_i = rh_i$, para todo $i = 1, \ldots.n$.

Substituindo em **(2)**, tem-se que:

$$Area_B = \sum_{i=1}^{k} rc_i \times rh_i + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{rc_i \times rh_i}{2} = r^2 \sum_{i=1}^{k} c_i h_i + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{c_i h_i}{2} = r^2 Area_A$$

Demonstração do Teorema de Pitágoras para figuras semelhantes nos três lados:

Sejam A, B e C figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, tal como é ilustrado na figura.

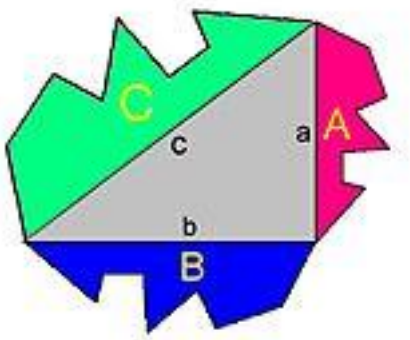


figura 20

Consideremos r_1 a razão de semelhança que aplica a figura A na figura C e r_2 a razão de semelhança que aplica a figura B na figura C.

Temos que:

$$r_1 = \frac{c}{a} \qquad\qquad Area_A = \frac{1}{r_1^2} Area_C$$

e

$$r_2 = \frac{c}{b} \qquad\qquad Area_B = \frac{1}{r_2^2} Area_C$$

$$Area_A + Area_B = \frac{1}{r_1^2} Area_C + \frac{1}{r_2^2} Area_C = \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_1^2 r_2^2} \right) Area_C$$

Substituindo r_1 e r_2, vem:

$$Area_A + Area_B = \frac{\left(\frac{c^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2} \right)}{\frac{c^2}{a^2} \times \frac{c^2}{b^2}} Area_C = \frac{a^2c^2 + b^2c^2}{c^4} Area_C = \frac{a^2 + b^2}{c^2} Area_C = \frac{c^2}{c^2} Area_C = Area_C$$

Embora não seja abordada nos programas do ensino básico, esta generalização poderia ser apresentada ao nível do 3º ciclo do ensino básico pois a sua demonstração é bastante acessível e poderia ser explorada para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas e raciocínio lógico-dedutivo.

9. Teorema de Gua

O matemático francês Jean Paul de Gua Malvez, no século XVIII, descobriu uma generalização do Teorema de Pitágoras ao espaço tridimensional.

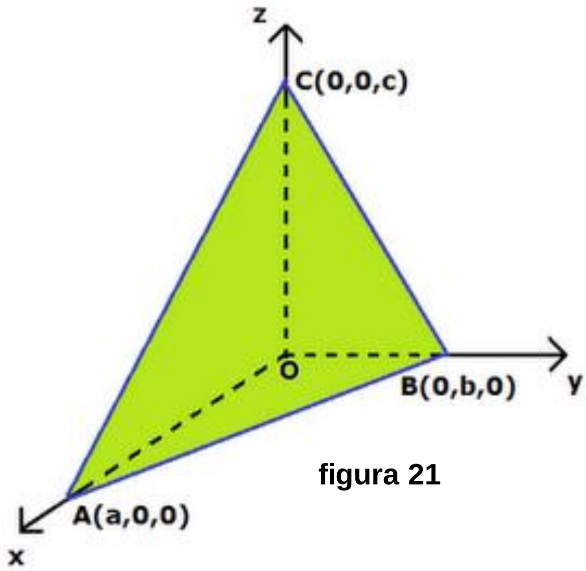


figura 21

Tal teorema pode ser enunciado do seguinte modo:

Se um tetraedro tem um canto com um ângulo reto, então o quadrado da área da face oposta ao canto com ângulo reto é igual à soma das áreas das outras três faces.

Isto é:

$$Area_{ABC}^2 = Area_{AOB}^2 + Area_{AOC}^2 + Area_{COB}^2$$

Demonstração:

Os triângulos [*AOB*], [*AOC*] e [*BOC*] são retângulos em O, então:

No plano AOC, o triângulo [*AOC*] pode ser representado pela **figura 22**. Então:

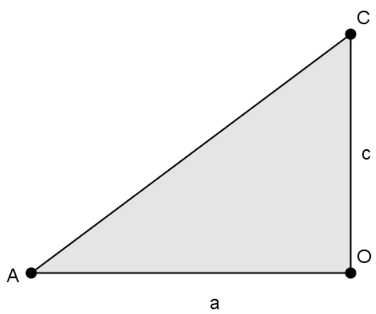


figura 22

$$Area_{AOC}^2 = \frac{a^2c^2}{4}$$

Do mesmo modo, nos planos AOB e BOC temos que:

$$Area_{AOB}^{2}=\frac{a^2b^2}{4}$$

$$Area_{BOC}^{2}=\frac{b^2c^2}{4}$$

Então, $Area_{AOC}^{2}+Area_{AOB}^{2}+Area_{BOC}^{2}=\dfrac{a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2}{4}$

Para determinar a área do triângulo ABC poderemos usar o produto externo dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$

Geometricamente, o comprimento de $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ é entendido como a área do paralelogramo definido por esses vetores.

Por outro lado, sendo

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$

$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ tem-se que:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,-a_1b_3+a_3b_1,a_1b_2-a_2b_1)$$

Assim,

$\overrightarrow{AB}=(0,b,0)-(a,0,0)=(-a,b,0)$

$\overrightarrow{AC}=(0,0,c)-(a,0,0)=(-a,0,c)$ e $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(bc,ac,ab)$

$\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}$ donde vem que

$$Area_{ABC}=\frac{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}{2}.$$

Logo, $Area_{ABC}^{2}=\dfrac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{4}$

10. Ternos Pitagóricos

A noção de terno pitagórico é abordada no 8º ano de escolaridade apenas como uma abordagem do recíproco do Teorema de Pitágoras. No entanto, poderíamos ir mais além e gerar ternos pitagóricos não primitivos, o que seria interessante abordar para determinação de triângulos semelhantes.

Um **terno pitagórico** consiste em três números inteiros positivos *a*, *b*, e *c*, tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Em outras palavras, um terno pitagórico representa as medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo retângulo, onde todos os três lados têm comprimentos inteiros. Este terno é geralmente escrito como (*a*, *b*, *c*). Alguns exemplos bem conhecidos são (3, 4, 5) e (5, 12,13).

Comecemos por verificar que **se (a,b,c) é um terno pitagórico, então**
(ka, kb, kc) é terno pitagórico, para todo $k \in \mathbb{N}$**:**
$(\boldsymbol{ka})^2 + (\boldsymbol{kb})^2 = \boldsymbol{k}^2(\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2) = \boldsymbol{k}^2\boldsymbol{c}^2$, ou seja, $(\boldsymbol{ka})^{\mathbf{2}} + (\boldsymbol{kb})^{\mathbf{2}} = (\boldsymbol{kc})^{\mathbf{2}}$.

Podemos assim gerar ternos pitagóricos, bastando para tal, atribuir valores naturais a ***k*** para gerar triângulos retângulos semelhantes:
Exemplo:
O primeiro terno Pitagórico é (3,4,5). Então:
K=1: (3,4,5)
K=2: (6,8,10)
K=3: (9,12,15)
…

De facto, todos estes ternos são pitagóricos, no entanto, não são primitivos pois têm, pelo menos um divisor comum, diferente de 1- ***k.***

10.1. Ternos Pitagóricos Primitivos

Um **terno pitagórico primitivo** é aquele em que ***a***, ***b*** e ***c*** são primos entre si, isto é, o máximo divisor comum entre a, b e c é 1.

Antes de mais, devemos estar atentos que, num terno pitagórico, a hipotenusa e um dos catetos são números ímpares e o outro cateto é um número par:

- Suponhamos que ambos os catetos são pares:

Então $a = 2p, p \in IN$

$b = 2q, q \in IN$

$a^2 + b^2 = 4p^2 + 4q^2 = 4\left(p^2 + q^2\right)$

Logo, $c = 2\sqrt{p^2 + q^2}$, isto é, ***a, b*** e ***c*** seriam números pares o que contraria o facto de ***a, b*** e ***c*** serem primos entre si.

- Suponhamos que ambos os catetos são ímpares:

$a = 2k + 1, k \in IN$, então, $a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k\left(k+1\right) + 1$

Repare-se que k e k+1 são números consecutivos, logo o seu produto é um número par. Deste modo,

$a^2 = 4k\left(k+1\right) + 1 = 4 \times 2p + 1 = 8p + 1$

Do mesmo modo, $b^2 = 8q + 1$

Então $c^2 = 8p + 8q + 1 = 8\left(p+q\right) + 2$, de onde se conclui que c^2 seria par, não divisível por 4, o que contraria o facto de todo o quadrado de um número par ser divisível por 4.

Assim, **num terno pitagórico primitivo, a hipotenusa e um dos catetos são números ímpares e o outro cateto é um número par.**

10.2. Como gerar os ternos pitagóricos primitivos?

Nos Elementos de Euclides, Livros VII a IX, dedicados à Teoria dos Números, Euclides prova que há uma infinidade de ternos pitagóricos primitivos e encontra a fórmula que gera todos os ternos pitagóricos primitivos:

Teorema:

"Dados dois números naturais m>n, o terno (a, b, c), onde:

$$a = m^2 - n^2$$
$$b = 2mn$$
$$c = m^2 + n^2$$

é pitagórico primitivo se e só se m e n são primos entre si."

Demonstração:

Prove-se que: **SE** (*a,b,c*) é um terno pitagórico primitivo, **ENTÃO** *m* e *n* são primos entre si.

Vejamos que (*a,b,c*) é um terno pitagórico, para todos os valores de *m, n* naturais, com *m>n*:

$$a^2 + b^2 = \ m^2 - n^2 \ ^2 + \ 2mn \ ^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = \ m^2 + n^2 \ ^2 = c^2.$$

Basta-nos, então, provar que *(a, b, c)* é primitivo se e só se ***m, n*** são primos entre si.

- Suponhamos que existem, $m, n \in \mathbb{N}$ com *m>n*, tais que ***m* e *n* não primos** entre si, isto é, existem

$$d, p \text{ e } q \in \mathbb{N} : m = dp$$
$$n = dq$$

Então ***a, b*** e ***c*** escrevem-se na forma:

$$a = d^2 \ p^2 - q^2$$
$$b = 2d^2pq$$
$$c = d^2 \ p^2 + q^2$$

Assim, (a,b,c) é um terno pitagórico não primitivo pois existe um divisor comum a ***a, b*** e ***c***, que é d^2, contrariando a hipótese inicial.

Prove-se que:

SE ***m*** e ***n*** são primos entre si

ENTÃO (a,b,c) é um terno pitagórico primitivo.

- Suponhamos que existe um número primo, ***p,*** que divide ***a*** e ***b*.**

Note-se que $p \neq 2$ (se ***p****=2,* ***a*** e ***b*** seriam números pares, o que contrariaria o facto dos catetos serem de paridade diferente).

Então,

- ***p*** divide $m^2 - n^2$, isto é, *p* divide $(m+n)$ **ou** *p* divide $(m-n)$

e

- **p** divide $2mn$, isto é, *p* divide m **ou** *p* divide n

Se *p* divide $(m+n)$ **e** *p* divide m, então *p* divide *n*, pois $n = m + n - m$

Se *p* divide $(m-n)$ **e** *p* divide m, então *p* divide *n*, pois $n = m - (m-n)$

Se *p* divide $(m+n)$ **e** *p* divide n, então *p* divide *m*, pois $m = m + n - n$

Se *p* divide $(m-n)$ **e** *p* divide n, então *p* divide *m*, pois $m = m - n + n$

Em qualquer das situações geradas se conclui que ***p*** divide ***m*** e ***n****,* o que contraria a hipótese de ***m*** e ***n*** serem primos entre si.

11. Último Teorema de Fermat

Pierre de Fermat , matemático e cientista francês nascido na primeira década do século XVII era um verdadeiro apaixonado pela Teoria de Números, após análise cuidada da igualdade $c^2 = a^2 + b^2$, modificou-a para uma muito semelhante: $c^n = a^n + b^n$, com n>2 e a, b, c números inteiros positivos, chegando à conclusão que, nestas condições, esta equação não tinha soluções.

Esta descoberta levou à formulação do **Último Teorema de Fermat** que, de um modo muito simples pode ser enunciado:

Não existe nenhum conjunto de inteiros positivos *x*, *y*, *z* e *n* com *n* maior que 2 que satisfaz a equação

$$x^n + y^n = z^n.$$

Fermat nunca terá formalizado as suas descobertas, embora fosse aproveitando as margens dos livros para tomar alguns apontamentos.

Junto ao problema que o levou a formular o simples teorema, Fermat terá apresentado a seguinte nota:

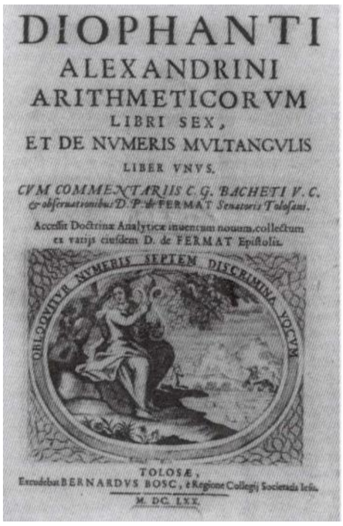
"É impossível para um cubo ser escrito como a soma de dois cubos ou uma quarta potência ser escrita como a soma de duas quartas potências ou, em geral, para qualquer número que é uma potência maior do que a segunda, ser escrito como a soma de duas potências com o mesmo expoente."

(Singh, 1998, p. 82)

Descobri uma demonstração maravilhosa desta proposição que, no entanto, não cabe nas margens deste livro.

(Aczel, 1997)

Embora Fermat não tenha revelado a sua descoberta a outros matemáticos da sua época, seu filho mais velho optou por compilar todas as anotações do seu pai e publicou-as numa edição especial, a *Arithmetica de Diofanto Cantendo Observações por P. de Fermat,* em 1670.



DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

Capa da edição especial com as notas de Fermat e A página que contém a famosa observação

Arithmeticorum Liber II. 61

QVÆSTIO VIII.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

QVÆSTIO IX.

Embora as anotações de Fermat não estivessem demonstradas, foram todas provadas, tendo esta sido a última, razão pela qual ficou conhecida como o último teorema de Fermat. (Singh, 1998).
O comentário de Fermat suscitou grande curiosidade dos matemáticos ao longo dos anos, procurando provar ou refutar a veracidade do teorema.

Esta curiosidade, levou à produção de grande quantidade de matemática nos séculos XVII a XX, séculos em que se tentou provar ou refutar a afirmação de Fermat. Apenas em 1994 foi possível fazer uma demonstração deste teorema, recorrendo a métodos não disponíveis na época de Fermat.

Século	Matemático	Contributo para a demostração do último Teorema de Fermat
XVII	**Fermat**	Esboço da demonstração para n=4
XVIII	**Euler**	Demonstra a veracidade da proposição para n=3
XIX	**Dirichlet**	Demonstra a veracidade da proposição para n=5
	Legendre	Demonstra a veracidade da proposição para n=5
	Dirichlet	Demonstra a veracidade para n=14
	Gabriel Lamé	Sugere uma demonstração para n=7, mas não estava completamente certa
	Sophie Germain	Prova que se p é primo ímpar menor que cem, a equação não tem solução em inteiros não divisíveis por p.
	Kummer	Demonstra para expoentes n que são primos regulares (inclui todos os primos menores que 100 exceto o 37, 59, 67).
XX	**Wagstaff**	Mostra que o teorema é válido para todo o n até 125 000.
	Gerd Faltings	Descobre que para todo o n>3, a existirem soluções da equação de Fermat, estas são em número finito.
	D. R. Heath-Brown	provou que a proporção de inteiros positivos n para os quais a equação não tem soluções, tende para 100% quando n aumenta.

No dia 23 de Junho de 1993, após sete anos de trabalho, o matemático ***Andrew Wiles*** anuncia, numa conferência do Sir Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences em Cambridge, ter encontrado uma demonstração para o resultado enunciado por Fermat mas, pouco tempo depois, é verificada uma pequena falha. Wiles retira-se durante mais um ano e, finalmente, surge com a demonstração reformulada. **Em Novembro de 1994**, depois de alguns meses de apreciação das 200 páginas, a sua **demonstração é definitivamente aceite**. Trata-se de uma demonstração de tal forma técnica que apenas algumas dezenas de matemáticos em todo o mundo estarão em condições de seguir o raciocínio (Aczel, 1997).

(Stewart, 1995)

12. CONCLUSÕES

1. Trabalho Individual

A elaboração deste trabalho foi, de facto, um desafio pessoal que abracei com muita paixão. A cada pequeno passo que dava, novas interrogações iam surgindo, novos desafios iam sendo lançados.

Partindo do tema inicial, "Teorema de Pitágoras e o seu Recíproco", surge logo o primeiro problema: "O que é o recíproco do Teorema de Pitágoras?" Durante dias procurei, uma resposta para esta questão uma vez que sempre tinha entendido o Teorema de Pitágoras como uma proposição do tipo **se** estivermos perante um triângulo retângulo, **então** podemos determinar a medida de comprimento de um dos lados do triângulo, desde que conheçamos as medidas de comprimento dos outros dois lados.

Surgia-me a dúvida: Será que **se** num triângulo retângulo $c^2 = a^2 + b^2$ (considerando que ***a*** e ***b*** são os catetos e c é a hipotenusa**) então** o ângulo formado por ***a*** e ***b*** é reto?

De facto, era esse o Recíproco do Teorema de Pitágoras. Estava feita a primeira descoberta e justificado o porquê de aparecerem, nos manuais do 8º ano dos antigos programas a noção de terno pitagórico e os exercícios de aplicação dos mesmos. Feita a demonstração, nova dúvida – porque é que, até ao ano letivo anterior, não se integrou o recíproco nos programas do ensino básico?

O segundo passo no trabalho, por sugestão da Drª Natália Bebiano Providência, foi desenvolver o conhecimento sobre ternos pitagóricos e ternos pitagóricos primitivos.

Esta foi a proposta de trabalho que mais me aliciou pois foi um verdadeiro desafio para a "reciclagem de conhecimento" que me propus a fazer. Nesta fase, diverti-me imenso testando as minhas capacidades de raciocínio e "exercitando" o cérebro.

Sendo, talvez, a fase do trabalho com menos aplicação às aulas de Matemática do 3º ciclo e Secundário, constituiu para mim uma enorme mais-valia pois, além de ter superado o desafio, enriqueceu o meu conhecimento pessoal.
Quanto à sua aplicação na minha vida profissional, poderei levar os meus alunos mais longe do que nos é pedido pelos programas oficiais e, no momento em que as Tecnologias da Informação e Comunicação desaparecem da organização curricular do 3º ciclo, poderá ser um bom exercício para aliar as potencialidades do Excel ao ensino da matemática e desenvolver competências não só específicas da disciplina mas também da utilização do computador como instrumento de trabalho.

Por fim, foi-me proposto que avançasse no Teorema de Pitágoras: história, demonstrações, aplicações e generalizações.
Embora de grande interesse para a minha vida profissional, nesta fase senti um misto de sentimentos pois oscilei entre as situações que por mim eram trabalhadas no ensino básico e situações que ignorava completamente tais como a imensidão de demonstrações que foram feitas, ao longo dos séculos, do Teorema de Pitágoras, o Teorema de Gua e a generalização do Teorema de Pitágoras a figuras semelhantes nos três lados.
Foi nesta fase que senti o maior medo de não ser capaz de concluir o trabalho.
No entanto, agarrei o desafio e, à medida que ia avançando, o interesse ia aumentando ficando maravilhada com a facilidade com que tais resultados iam surgindo e de como eram de fácil aplicabilidade ao longo dos anos de escolaridade.

Chegou a altura de fazer a *mea culpa*. Preocupada sempre com a gestão de tempo e cumprimento do programa oficial, e apesar do interesse e entusiasmo dos alunos por esta unidade didática concluo que nem sempre fui à procura de mais informação, facilmente transmissível a alunos interessados, e não alarguei o conhecimento dos meus alunos desenvolvendo neles a capacidade de raciocinar dedutivamente e associarem raciocínio algébrico com raciocínio geométrico. Do mesmo modo, sinto que não usei o entusiasmo dos alunos e a facilidade com que deduzem fórmulas na procura de generalizações para a diagonal do quadrado, a altura do triângulo isósceles, a fórmula da distância entre dois pontos e até mesmo a generalização do Teorema de Pitágoras a figuras semelhantes nos três lados quando lecionei a unidade Teorema de Pitágoras. Ao nível do 9º ano de escolaridade, poderia ter ido mais além, na unidade Trigonometria, através da generalização do Teorema de Pitágoras a triângulos não retângulos e da lei dos Cosenos.

2. Aplicação

Face ao período de tempo disponível, apenas fiz a aplicação do trabalho a um aluno que, antes de ingressar no Centro Educativo, frequentava o 10º ano de escolaridade de um curso de Informática de Gestão. As atividades desenvolveram-se nas disciplinas de Matemática para a Vida e Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC).

A aplicação decorreu no período de 10 de maio a 14 de junho de 2012, tendo sempre presente que as atividades poderiam ser interrompidas a qualquer momento, dada a especificidade da escola.

De facto, por diversas vezes foram interrompidas uma vez que o julgamento estava em curso.

A emotividade do jovem também esteve sempre no centro das atenções e procurei respeitar o seu estado de espírito, compreendendo que os seus sentimentos estariam em ebulição e a disponibilidade para as atividades que lhe eram propostas não era sempre a mesma. Por diversas vezes, o jovem me disse, no princípio da aula, que preferia fazer outra atividade, uma vez que este trabalho exigia uma concentração que não dispunha nesse dia. Quando tal me era dito,

respeitava a vontade do aluno pois sabia que era um momento e que o seu interesse na disciplina voltaria na aula seguinte.
Foi neste clima de abertura mutua que se desenvolveram as atividades até à data da leitura da sentença. A partir desse momento, o estado de espírito do aluno sofreu algumas alterações, mostrando-se mais impaciente, mais nervoso e desconcentrado. Seguindo a linha orientadora deste trabalho, interrompi a aplicação pois percebi que, se insistisse na execução das tarefas, poderia comprometer o gosto do aluno pela disciplina.

As aulas de Matemática para a Vida decorreram do seguinte modo: semanalmente, tinha dois blocos de noventa minutos que eram divididos em duas partes: quarenta e cinco minutos em que eu me encontrava com os alunos do curso B3 de Instalador e Reparador de Computadores (onde estava inserido este aluno) e quarenta e cinco minutos em que estes jovens trabalham individualmente, noutra sala, pois eu tinha de acompanhar os jovens que ainda não tinham completado o 2º ciclo do Ensino Básico e prepará-los para a realização do Exame de Matemática.
Dada a especificidade da situação optei por analisar o comportamento do jovem que, tal como referi anteriormente, era interessado pela disciplina de Matemática e tinha um gosto especial nesta disciplina, dando-lhe excertos do trabalho para análise individual e propondo-lhe algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras: demonstração por decomposição de figuras, a demonstração algébrica, a demonstração por semelhança de triângulos e a demonstração de Garfield. Após esta fase, propus a demonstração da lei dos Cosenos e a demonstração do recíproco do Teorema de Pitágoras.
Ainda preparei algumas atividades, nomeadamente, a atividade 7 (ternos pitagóricos) e as atividades 8 e 9 (dedução de fórmulas usando o Teorema de Pitágoras), no entanto, as características do centro e as condicionantes à presença do aluno em todas as aulas

foram determinantes para que estas atividades não fossem realizadas.

Nas aulas de TIC, foi pedido ao jovem que construísse uma tabela de ternos pitagóricos primitivos, dadas as instruções que constam da ficha 1 – TIC e, em seguida, que construísse uma nova tabela onde constassem os ternos pitagóricos da forma (ka, kb, kc), onde (a, b, c) é terno pitagórico primitivo e k é um número natural inferior a 6. Para que, no final, se encontrasse em condições de realizar a tarefa que consta da ficha 3 – TIC.

De qualquer modo, há a salientar alguns aspetos interessantes desta minha experiência:

- **Como aspetos positivos destaco:**

  O interesse demonstrado nas atividades que eram propostas e, após a aplicação do trabalho, o interesse que o tema despertou, conduzindo a diversas intervenções do jovem na aula, questionando situações abordadas, com uma correção de linguagem muito boa;

  A reflexão que o jovem fazia antes de iniciar qualquer tarefa e a facilidade com que expunha as suas dúvidas para que, de seguida, realizasse a tarefa autonomamente;

  A capacidade de raciocínio que demonstrou;

  A crescente autonomia, interesse, motivação e capacidade de trabalho;

  A facilidade com que o aluno comunicava, transmitindo aos colegas conhecimentos adquiridos, intervindo na aula quando o tema Teorema de Pitágoras foi abordado numa aula de Matemática para a Vida do Curso B3 – num momento de improviso, do final da aula, propus ao jovem que demonstrasse o Teorema de Pitágoras aos colegas e, este, de imediato, pegou no giz, nas cartolinas e com muita clareza fez a demonstração por comparação de áreas.

No âmbito da aplicação às TIC, a facilidade com que seguiu as instruções dadas e concluiu as tarefas em tempo inferior ao previsto.

- **Como aspetos negativos destaco:**

  A dificuldade demonstrada em interpretar enunciados e equacionar situações;

  A dificuldade em estabelecer correspondência entre lados de triângulos semelhantes e escrever proporções entre medidas de comprimento dos lados dos triângulos semelhantes;

  A dificuldade em trabalhar em situações abstratas;

  A dificuldade em relacionar diferentes conteúdos.

  No âmbito das TIC a maior dificuldade sentida prendeu-se com a estruturação do pensamento de modo a contemplar todas as combinações possíveis de *m* e *n*, para a formação dos ternos pitagóricos primitivos.

Feito o balanço final, foi uma experiência enriquecedora considerando as limitações inerentes ao funcionamento da instituição. De salientar o interesse e a capacidade de trabalho do único formando envolvido.

Estendendo esta experiência a uma escola normal, considero que seria interessante, num Clube ou Laboratório de Matemática, dada a facilidade de utilização de outros materiais, nomeadamente, quadros interativos e materiais de medição e desenho.

BIBLIOGRAFIA

CONCEIÇÃO, Alexandra e ALMEIDA, Matilde – *Matematicamente Falando 8.* Areal, 2011

COSTA, Belmiro e RODRIGUES, Ermelinda – *Novo Espaço 8º ano*. Porto Editora, 2011

LIMA, Elon Lages - *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* Rio de Janeiro: SBM, 1987

PASSOS, Iolanda Centeno e CORREIA, Olga Flora- Matemática em Ação 8. Lisboa Editora, 2011

PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO. DGIDC – Ministério da Educação, 2007/2008

WEBGRAFIA

http://pt.wikipedia.org/

A Fórmula de Heron. (2009). Acedido em : http://fatosmatematicos.blogspot.pt/2009/11/formula-de-heron.html, entre Janeiro 2012 e Julho 2012

CAVALCANTI, José Airton e BARROS, José Severino de e ALMEIDA, Jaelson Dantas de. (2010). *Ternos Pitagóricos: Aprofundamento de um conceito na educação básica.* Acedido em: http://www.sbempb.com.br/anais/arquivos/trabalhos/MC-19496965.pdf, entre Janeiro 2012 e Julho 2012

OLIVEIRA, Juliane Amaral de. (2008). *Teorema de Pitágoras.* Acedido em: http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia_Juliane.pdf, entre Janeiro 2012 e Julho 2012

Os Elementos de Euclides Livro I. Acedido em: http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/6parte.html, entre Janeiro 2012 e Julho 2012 http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/fermat/ultimo_teorema.htm, Acedido entre Janeiro 2012 e Julho 2012

SÁ, Professor Elydio. Complementos sobre o Teorema de Pitágoras. Acedido em: http://magiadamatematica.com/uerj/licenciatura/15-ternos.pdf, entre Janeiro 2012 e Julho 2012

SANTOS, Professora Sandra Augusta. (2003). *Geometria Plana e Desenho Geométrico*. Acedido em: http://www.ime.unicamp.br/~sandra/MA520/handouts/lab9.pdf , entre Janeiro 2012 e Julho 2012

Teorema de Gua. (2010). Acedido em: http://fatosmatematicos.blogspot.pt/2010/04/o-teorema-de-gua.html, entre Janeiro 2012 e Julho 2012

Triângulos Pitagóricos. Acedido em: http://w3.math.uminho.pt/site/files/historicooutros/1603_Capitulo7(triangulospitagoricos).pdf?PHPSESSID=c1e4957150d40fb878524b22b0cecfc4, entre Janeiro 2012 e Julho 2012

VENEZUELA, António Luís e PALUDETTO, Tânia Regina. (2005). *A lógica da demonstração pela redução ao absurdo.* Acedido em: http://www.feata.edu.br/downloads/revistas/avessodoavesso/v3_artigo04_logica.pdf , entre Janeiro 2012 e Julho 2012

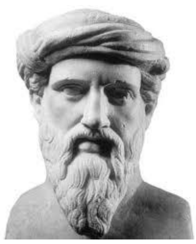
ANEXOS

TEOREMA DE PITÁGORAS

Um dos resultados mais antigos da História da Matemática é o Teorema de Pitágoras.
Também as suas aplicações são imensas!
Proponho que façamos uma breve viagem sobre este tema, usando os conhecimentos que tens vindo a adquirir ao longo da tua escolaridade, com os objetivos de:

- Alargar os teus conhecimentos nesta área;
- Desenvolver o raciocínio Matemático.

I
UM POUCO DE HISTÓRIA…



Pensa-se que Pitágoras nasceu na ilha de Samos, na Grécia, provavelmente cerca de 496 a.C. - 497 a.C.
A sua vida está envolta numa série de lendas já que os relatos da sua vida surgem tardiamente e envoltos em fantasia. Não subsistiram quaisquer fontes primárias, crendo-se que desapareceram.
Segundo os relatos, Pitágoras viajou pelo Egito e Babilónia, fixando-se na ilha de Crotona em Itália, onde fundou a Escola Pitagórica. Aqui se estudava Matemática, Filosofia, Música e outras Ciências.
Pitágoras e os seus discípulos interessavam-se pelos números, considerando que o princípio fundamental que forma todas as coisas é o número, sinónimo de harmonia.
Segundo os Pitagóricos, o universo é regido por relações matemáticas – a observação dos astros sugeriu-lhes que há uma ordem que domina o universo: Se não, como explicar a alternância entre o dia e a noite, a alternância das estações ou o movimento circular perfeito das estrelas?
Nesta perspetiva concluíram que a Terra é uma estrela, esférica. Alguns dos seguidores de Pitágoras chegaram a falar do movimento de rotação da terra em torno de um eixo.

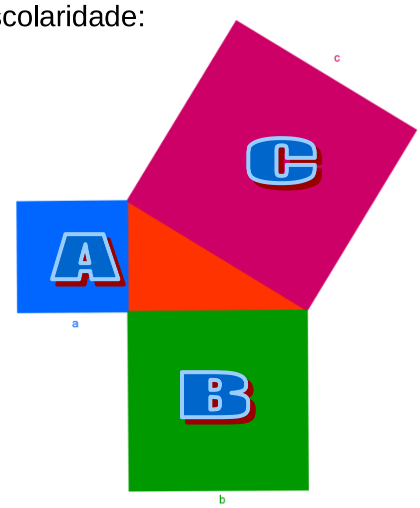
Embora tenham feito descobertas muito interessantes e importantes para a Matemática, tais como os números figurados (representados por uma construção geométrica de pontos equidistantes – o número triangular 10 era místico, uma vez que continha os quatro elementos: ar, terra, fogo e água) e os números perfeitos (números inteiros para os quais a soma dos seus divisores positivos próprios são iguais ao próprio número – 6 é um número perfeito pois 6=1+2+3), a sua maior descoberta prende-se no domínio da Geometria com o Teorema de Pitágoras.

Foi com o Teorema de Pitágoras que os Gregos conseguiram estabelecer uma ligação abstrata entre números e as figuras, provando que o conseguiam demonstrar por argumentos lógicos, e não apenas persuadir, o que representa um grande salto cognitivo.

Deste modo, a Matemática, definida como ***designação genérica das ciências de método essencialmente dedutivo que têm como objeto de estudo os números, figuras geométricas e outras entidades abstratas,*** surge com Pitágoras uma vez que foi o primeiro a concebe-la como um sistema de pensamento, centrado em provas dedutivas.[1]

II
TEOREMA DE PITÁGORAS

1) Decerto que a figura, tal como te é apresentada, já te é familiar do 8º ano de escolaridade:



Esta figura esteve na base numa das versões mais conhecidas do Teorema de Pitágoras, baseada nas áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo.

Assim, o mesmo Teorema de Pitágoras pode ser enunciado do seguinte modo:

A área do quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

2) Escreve a fórmula que te permite calcular a área de cada um dos quadrados apresentados na figura.

Quadrado A: ____

Quadrado B: ____

Quadrado C: ____

---

[1] Existem indícios que o Teorema de Pitágoras já era conhecido dos Babilónicos em 1600 a.C., embora esse conhecimento fosse meramente empírico.

3) Podemos então enunciar o Teorema de Pitágoras de uma forma mais simples:

____

____

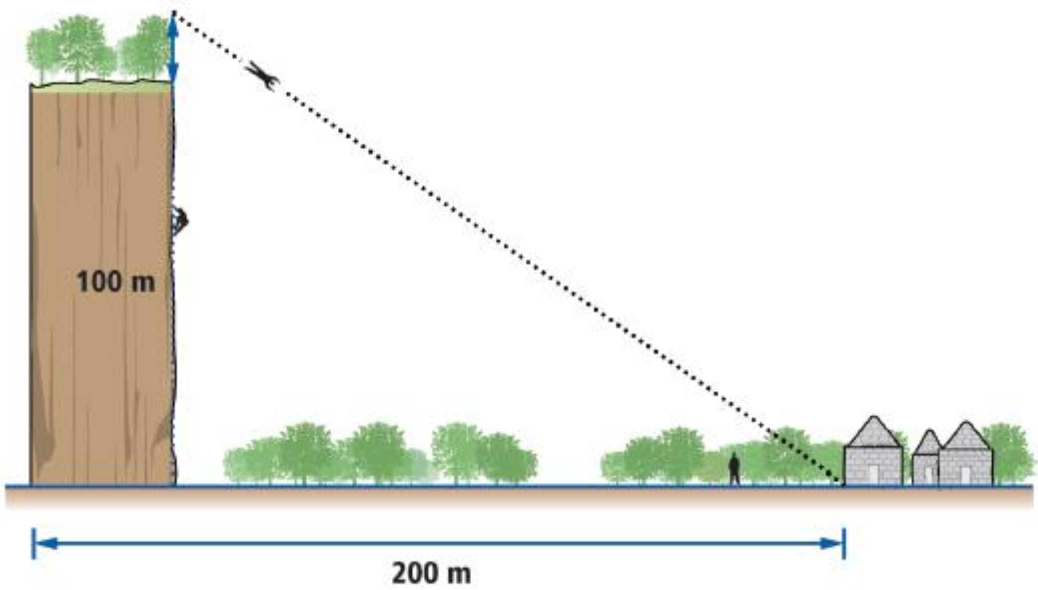
____

____

4) Este tipo de problemas é muito antigo (mais de 2000 anos) e foi reaparecendo em várias civilizações.

O problema seguinte é um antigo problema indiano (com cerca de 1000 anos):

Dois ascetas vivem no alto de um monte com 100 metros de altura e cuja base se encontra a 200 metros de uma povoação vizinha. Um dos ascetas desce do monte e caminha até à povoação; o outro, que é feiticeiro, voa verticalmente até uma altura de ***x*** metros, e depois, daí, em linha reta voa até à povoação. Determina o valor de ***x***, sabendo que os dois percorrem igual distância.



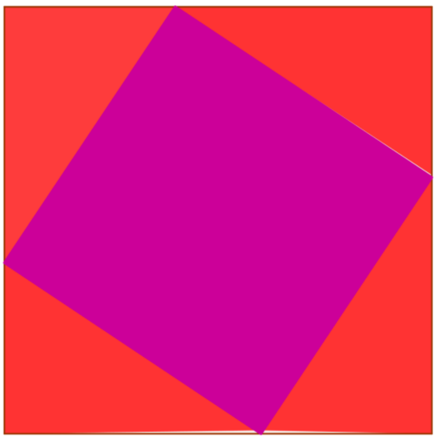
III

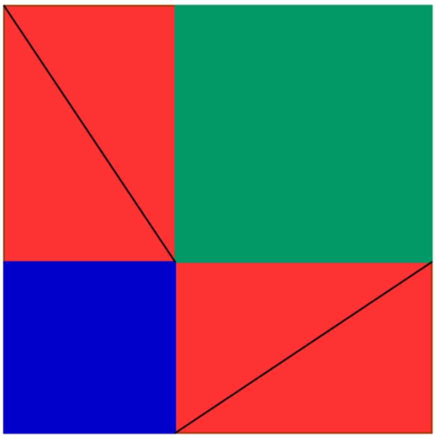
DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Elisha Scott Loomis, professor de Matemática em Cleveland, Ohio, durante 20 anos colecionou demonstrações do Teorema de Pitágoras, agrupou-as em dois tipos: algébricas e geométricas, e organizou-as no livro *“The Pythagorean Proposition”* que, na sua primeira edição, de 1927, continha 230 demonstrações e na segunda edição, em 1940, esse número aumentou para 370.

1) Uma das demonstrações mais conhecidas do Teorema de Pitágoras é feita por **comparação de áreas**:

Nesta demonstração, partimos da decomposição de dois quadrados equivalentes em triângulos retângulos congruentes e quadrados tal como ilustrado na figura:





Explica, por tuas palavras, porque é que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um dos triângulos retângulos é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Ternos Pitagóricos Primitivos

TAREFA:

Elaborar uma tabela de todos os ternos pitagóricos primitivos até 1000 (usando a folha de cálculo)

Antes de elaborar a tabela, deverás estar atento a algumas considerações iniciais:

- Dados dois números naturais m>n, o terno (a, b, c), onde:

  $a = m^2 - n^2$
  $b = 2mn$ é pitagórico primitivo se e só se m e n são primos entre si."
  $c = m^2 + n^2$

- Num terno pitagórico a hipotenusa e um dos catetos são números ímpares e o outro cateto é um número par. Em consequência, m e n terão de ser de paridade diferente;

A tabela deve ter o seguinte aspeto:

m	n	Mdc(m,n)	m^2	n^2	$m^2 - n^2$	2mn	$m^2 + n^2$	a	b	c

Deves:

- introduzir todas as combinações possíveis para os valores de m e n;
- introduzir as funções que te permitirão determinar mdc(m,n), m^2, 2mn, n^2;
- Para o cálculo de a, b e c deves usar as fórmulas respetivas.

Introduz filtros para:

- Mdc(m,n)=1;
- a, b e c serem menores que 1000.

No final, oculta todas as colunas, à exceção das que contêm a, b e c.

1) Muito idêntica à demonstração geométrica por comparação de áreas, a **demonstração algébrica** distingue-se por a partir de um único quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo, ser possível decompor esse quadrado em quatro triângulos congruentes com o triângulo inicial e num quadrado.

Fig.1

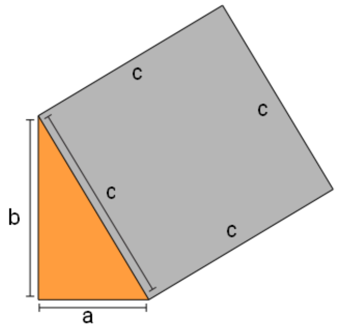
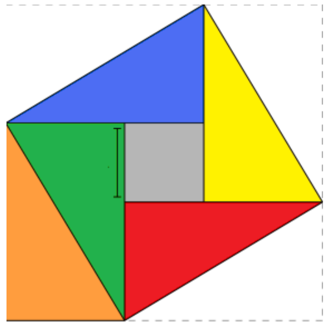


Fig.2



a) Diz porque é verdadeira a seguinte afirmação: “O quadrilátero representado a cinzento na figura 2 é um quadrado.”

b) Determina a medida de comprimento do lado do quadrado cinzento, na figura 2, em função das medidas de comprimento dos lados do triângulo.

c) Observando as figuras 1 e 2, demonstra que $c^2 = a^2 + b^2$.

Centro Educativo dos Olivais

Ano letivo 2011/2012

Disciplina: **TIC**

Nome: ____

Ternos Pitagóricos

TAREFA 1:

Pegando na tabela construída na aula anterior, verifica que

$$a = m^2 - n^2$$
$$b = 2mn$$
$$c = m^2 + n^2$$

formam um terno pitagórico. Para tal, insere duas colunas na tabela onde deverás introduzir fórmulas que calculem: $a^2 + b^2$ e c^2 e comparar os resultados.

TAREFA 2:

Prova-se que, se (a,b,c) é um terno pitagórico, então também (ka, kb, kc) é terno pitagórico, para todo $\mathbf{k} \in \mathbf{N}$:

Na folha 2, faz com que a tabela tome o seguinte aspeto:

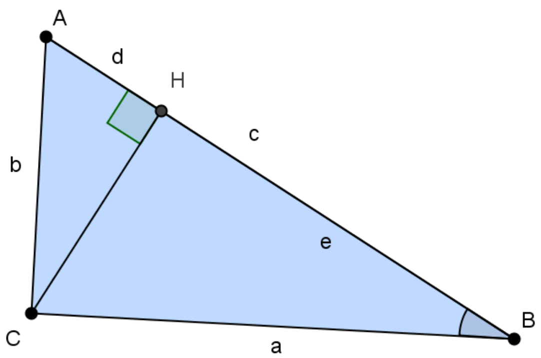
		K=1			K=2			K=3			K=4			K=5		
m	**n**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**	a	b	c	a	b	c	a	b	c
2	1	3	4	5												
3	2	5	12	13												
4	1	15	8	17												
4	3	7	24	25												
5	2	21	20	29												
5	4	9	40	41												
6	1	35	12	37												
6	5	11	60	61												
7	2	45	28	53												
7	4	33	56	65												
7	6	13	84	85												
8	1	63	16	65												
8	3	55	48	73												
8	5	39	80	89												
8	7	15	112	113												
9	2	77	36	85												
9	4	65	72	97												

Introduz as fórmulas necessárias para gerar os ternos pitagóricos, para os diferentes valores de K.

À semelhança do que fizeste com os ternos pitagóricos primitivos, verifica que, também para estes ternos se tem que: $a^2 + b^2 = c^2$.

1) Embora não tão atrativa como a demonstração geométrica por comparação de áreas ou a demonstração algébrica, também podemos demonstrar o Teorema de Pitágoras por **semelhança de triângulos.**

   a) Observa a figura seguinte, onde o triângulo [ABC] é retângulo em C, e prova que os triângulos [ABC], [ACH] e [BCH] são semelhantes entre si.



   b) Observa os triângulos [ABC] e [BCH] e estabelece a relação entre os lados correspondentes:

a corresponde a ___

b corresponde a ___

c corresponde a ___ Logo, $\frac{a}{\_\_\_} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a^2 = \_\_\_\_$ **(1)**

Do mesmo modo, fazendo a correspondência entre os lados dos triângulos [ABC] e [ACH]:

a corresponde a ___

b corresponde a ___

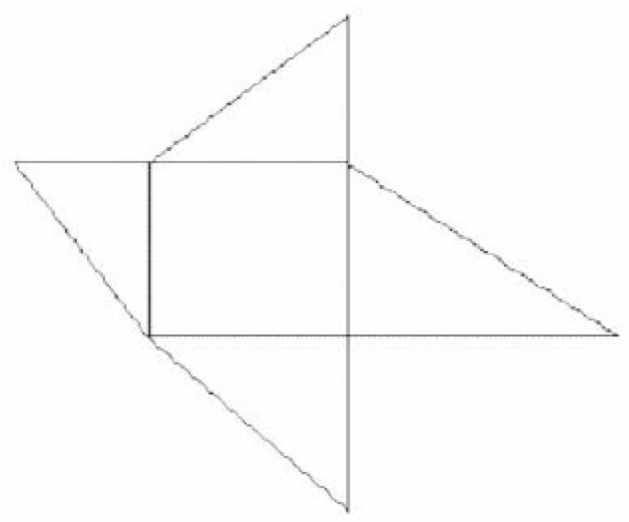
*c corresponde a*___ Assim, $\frac{b}{\_\_\_} = \frac{\_\_\_}{b} \Leftrightarrow b^2 = \_\_\_\_$ **(2)**

   c) Atendendo a **(1)** e **(2)**, prova que $c^2 = a^2 + b^2$.

Tarefa:

Resolve o seguinte problema:

Uma grande quinta tem a forma que pode ser visualizada como um quadrado e quatro triângulos retângulos, de modo que cada um dos triângulos tem um cateto coincidente com um dos lados do quadrado:

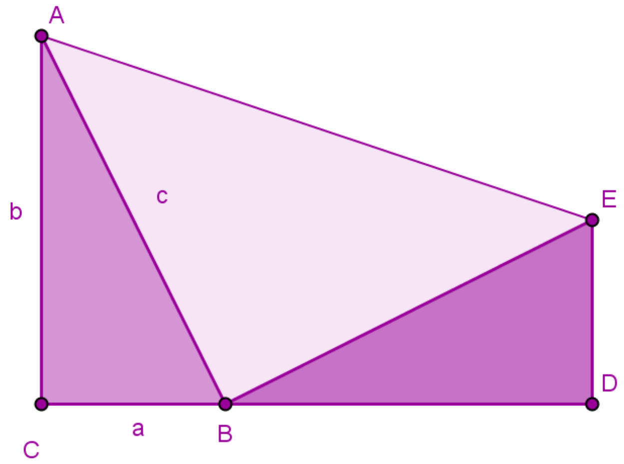


Sabemos que todos os triângulos são diferentes em tamanho, mas com a propriedade de terem os lados expressos num número inteiro de quilómetros-. Qual é o menor perímetro possível para esta fazenda?

Questão extraída de: "A magia da Matemática – Ilydio Pereira de Sá, Ed. Ciência Moderna, 2007.

1) James Abram Garfield, presidente dos Estados Unidos e um apaixonado por matemática apresentou uma demonstração do Teorema de Pitágoras baseada na área do trapézio:

Garfield começou por considerar dois triângulos congruentes [ABC] e [BDE], tal como sugere a figura. De seguida, constrói o trapézio retângulo [ABDE]:



a) Prova que o triângulo [ABE] é retângulo em B.

b) Sabendo que a área do trapézio é dada pela fórmula:

$A = (Base\ Maior + base\ menor) \times \frac{altura}{2}$, prova que

$A_{[ACDE]} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2}$ **(1)**

c) Usando a decomposição do trapézio nos triângulos [ABC], [BDE] e [ABE], prova que a área do trapézio pode ser dada pela fórmula:

$A_{[ACDE]} = ab + \frac{c^2}{2}$.**(2),**

d) Igualando **(1)** e **(2)**, prova que $c^2 = a^2 + b^2$

IV

TEOREMA DE PITÁGORAS EM TRIÂNGULOS NÃO RETÂNGULOS

Embora nunca tenhas abordado o tema, o Teorema de Pitágoras pode ser aplicado a triângulos não retângulos, esta abordagem requer conhecimentos de Trigonometria. Esta generalização pode ser feita através da Lei dos Cosenos:

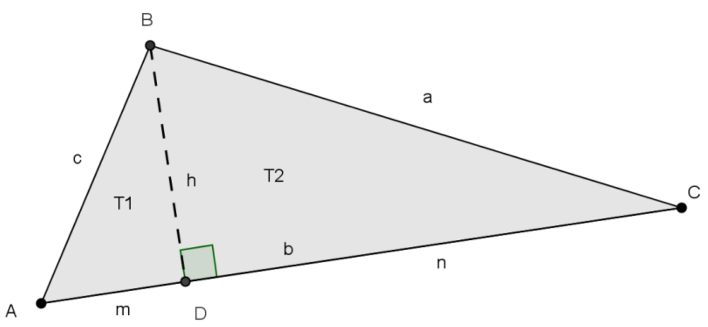
" Seja [ABC] um triângulo qualquer, de lados opostos aos ângulos internos A, B e C, com medidas a, b e c, respetivamente. São válidas as relações:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ **"**

Para a demonstração, começa por considerar um triângulo [ABC], qualquer, tal como ilustrado na figura seguinte:



h representa a altura do triângulo e divide-o em dois triângulos retângulos em D, T_1 e T_2.

a) Aplica o Teorema de Pitágoras a T_2 e prova que $a^2 = h^2 + (b-m)^2$ **(1)**

b) Mostra que, em T_1, $m = c\cos A$ **(2)**

c) Substitui em **(1)** a expressão obtida em **(2)** e prova que

$a^2 = h^2 + m^2 + b^2 - 2bc\cos A$

d) Em T_1, temos que $m^2 + h^2 =$ ______

e) Prova então que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

f) Prova, agora, as igualdades: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

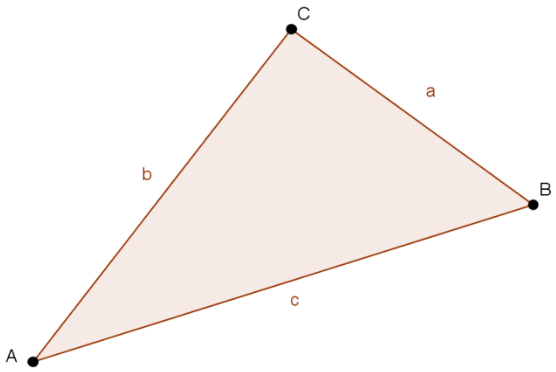
Disciplina: **Matemática**
Nome: ____

O Recíproco do Teorema de Pitágoras

Embora nem sempre explorado, também o recíproco do Teorema de Pitágoras é válido:

"Se num triângulo o quadrado da medida de comprimento de um dos lados for igual à soma dos quadrados das medidas de comprimento dos outros dois lados restantes do triângulo, o ângulo formado por esses dois lados é reto."

Demonstra que se, no triângulo [ABC], $c^2 = a^2 + b^2$ então o triângulo é retângulo.



Sugestão: Utiliza a Lei dos Cosenos.

Aula Nº1 **10/05/12**

Desenvolvimento da aula:

- 45 minutos em que o aluno esteve a estudar, individualmente:
  - História de Pitágoras
  - Teorema de Pitágoras

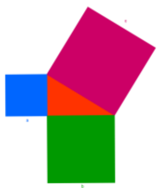
  Neste período de tempo, o jovem conseguiu realizar as tarefas que lhe foram propostas autonomamente.

  Teve ainda tempo para proceder à decomposição dos quadrados iniciais em triângulos e quadrados.

- 45 minutos em que aluno analisou a demonstração do Teorema de Pitágoras por comparação de áreas.
  Uma vez que nestes 45 minutos o jovem contava com a minha presença, questionou-me sobre como compararia a área dos três quadrados.
  Em conjunto, reorganizámos as figuras iniciais e analisámos os triângulos, tendo o jovem concluído, com muita facilidade, que tinham a mesma área.
  Reposicionados os quadrados, de imediato, o jovem concluiu que a área do quadrado de lado C era igual à soma das áreas dos quadrados de lados A e B.
  Foi-lhe pedido que redigisse a sua resposta à questão 1. O jovem pediu algum tempo para organizar o texto e, de seguida, redigiu-o.

  Neste ponto da aula, houve um outro aluno que demonstrou algum interesse na atividade que estava a ser proposta. Pedi, então, que tentasse transmitir ao colega o que estava a concluir. O jovem anuiu e, com muita correção e clareza, consegue transmitir ao colega.

  De seguida, põe-me a seguinte questão: *"A partir da comparação de áreas, como é que Pitágoras chegou ao teorema* ***o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos****?*". Pedi-lhe que pensasse na questão e procurasse, nele próprio, a resposta. O jovem, pegou no papel e redigiu o seguinte: "*A partir da comparação de áreas Pitágoras construiu a seguinte figura:*



E com esta figura ele disse que a área do quadrado A mais a soma do quadrado B seria igual à área do quadrado C.

Como a área do quadrado A é a^2, a área do quadrado B é b^2 e a área do quadrado C será c^2 a fórmula será $c^2=a^2+b^2$."

Conclusões interessantes:

- O jovem demonstrou interesse e autonomia na execução da tarefa;
- Conseguiu elaborar um verdadeiro raciocínio matemático, questionando resultados;
- Conseguiu responder às suas dúvidas;
- Conseguiu transmitir conhecimento a um colega interessado.

Aula Nº1 **04/06/12**

Desenvolvimento da aula:

- Esta aula teve a duração de 45 minutos, tendo, no início da aula, sido dada a ficha de trabalho ao jovem, pedindo-lhe que seguisse as instruções e, aproveitando os seus conhecimentos do curso que frequentava antes de entrar no Centro, construísse a tabela com os ternos pitagóricos primitivos. Uma vez que apenas tinha sido feita uma breve abordagem aos ternos pitagóricos na aula de matemática, foi-lhe relembrado que um terno pitagórico era um terno de números que satisfaziam as condições do Teorema de Pitágoras e que um terno pitagórico primitivo seria um terno em que os lados do triângulo seriam primos entre si, isto é, mdc (a, b, c)=1.

  De imediato o jovem se envolveu na tarefa, reconhecendo a possibilidade de usar as fórmulas matemáticas para construir a tabela. Surge-lhe, então, a dúvida de como dar valores a m e n e de como fazer todas as combinações possíveis entre esses números.

  Sugeri ao jovem que reparasse que esses números teriam de ser de paridade diferente, o que facilitaria a construção da tabela, e que começasse por combinar todos os números pares com 1, depois (como m>n) os números ímpares com 2, …

  Após perceber o modo de estabelecer todas as combinações de números, o jovem cumpriu a tarefa na íntegra.

  Conclusões interessantes:

  - Conseguiu expor com clareza as dúvidas iniciais;
  - O jovem demonstrou interesse e muita autonomia na execução da tarefa;

Aula Nº2 **17/05/12**

Desenvolvimento da aula:

- 45 minutos em que o aluno esteve, individualmente, a procurar corrigir a atividade 4 da aula anterior:
  - História de Pitágoras
  - Teorema de Pitágoras

  No final dos 45 minutos o jovem referiu que o tempo que lhe tinha sido disponibilizado serviu para ler mais atentamente o problema, compreender o que lhe era pedido, no entanto, não tinha sido capaz de equacionar o problema.

- 45 minutos em que, dei um apoio mais individualizado ao aluno, tentando compreender as suas dificuldades e ajudá-lo a equacionar o problema.
  Sugeri ao aluno a realização de dois esboços: um relativo ao asceta que descia o monte e outro relativo ao asceta que voava. Apercebi-me que o jovem demonstrou muita dificuldade em determinar um dos catetos do triângulo relativo à situação em que o asceta voava (x+100).
  No passo seguinte questionou como poderia determinar a hipotenusa desse triângulo, uma vez que tinha uma incógnita num dos catetos. Sugeri-lhe que lesse atentamente a informação que relaciona o caminho percorrido pelos dois ascetas e que identificasse, no esboço feito, o caminho percorrido pelo feiticeiro.
  Dei-lhe, ainda, a informação que o problema seria resolvido por meio de um sistema de duas equações a duas incógnitas.
  A partir daqui, o jovem conseguiu equacionar o problema e resolvê-lo, embora com algumas dúvidas nos casos notáveis da multiplicação.

  Aproveitando um pouco da aula, iniciou a demonstração algébrica do Teorema de Pitágoras, concluindo, com facilidade, que a área do quadrado cinzento, da figura 2, tinha como medida de comprimento de lado ***b-a*** e que a área do quadrado de lado ***c*** era igual à soma das áreas dos quatro triângulos retângulos e do quadrado.

  No final da aula, o jovem referiu que estava a gostar da tarefa que lhe fora proposta e que estava a começar a pensar. “Se pensarmos, até é fácil!”, disse.

Conclusões interessantes:

- O jovem demonstrou muita dificuldade em equacionar o problema;
- Domina a resolução de sistemas de duas equações a duas incógnitas, no entanto, demonstra muitas dificuldades nos casos notáveis da multiplicação (pediu, mesmo, que lhe deduzisse as fórmulas e treinasse com ele algumas situações).
- Conseguiu, com facilidade, elaborar um esquema de raciocínio que o conduzirá à demonstração algébrica do Teorema de Pitágoras.

Aula Nº2 **06/06/12**

Desenvolvimento da aula:

- Esta tarefa foi desenvolvida em 30 minutos, tendo, no início da aula, sido dada a ficha de trabalho ao jovem, que a cumpriu na integra, sem qualquer intervenção da professora.

Aula Nº3 **22/05/12**

Desenvolvimento da aula:

- Nos 45 minutos iniciais da aula o jovem concluiu, com facilidade, a demonstração algébrica do Teorema de Pitágoras.
  De seguida, foi-lhe pedido que procurasse demonstrar o Teorema de Pitágoras por semelhança de triângulos, através da ficha 3.
  Com facilidade, o jovem justificou a semelhança dos triângulos, usando o critério dos dois ângulos iguais, identificando-os com facilidade.

- Nos 45 minutos finais, já sem a minha presença na sala de aula, o jovem tentou demonstrar o Teorema de Pitágoras, no entanto, não conseguiu concluir a demonstração, embora tenha estabelecido a correspondência entre os lados dos triângulos [ABC] e [BCH] e completado a proporção. Já no caso dos triângulos [ABC] e [ACH], o jovem apresentou algumas dificuldades na correspondência entre os catetos dos triângulos e, em consequência, não conseguiu escrever corretamente a proporção.
  De qualquer modo, teve sensibilidade em detetar a existência de um erro que não o deixaria avançar na demonstração.

Conclusões interessantes:

- O jovem demonstrou maior facilidade na aplicação dos casos notáveis e concluiu, individualmente a demonstração algébrica.
- Consegue justificar semelhança de triângulos usando os critérios de semelhança e identificar ângulos iguais.
- Estabelece, com alguma facilidade, correspondência entre lados de triângulos semelhantes, apenas prejudicada por alguma distração que imediatamente inviabiliza a continuação do trabalho. Embora tenha sensibilidade para a existência de erros, não os consegue identificar.

Aula Nº3 **14/06/12**

Desenvolvimento da aula:

- Esta tarefa foi desenvolvida em 45 minutos, tendo, no início da aula, sido dada a ficha de trabalho ao jovem. De imediato, procedeu à leitura do problema e compreendeu que teria de pesquisar, na tabela construída na última aula, quatro ternos pitagóricos em que um dos catetos coincidisse (de modo a que a figura central fosse um quadrado).
- Analisando os ternos pitagóricos primitivos, o jovem encontrou quatro ternos que tinham um cateto igual: (11,60,61), (91,60,109), (221,60,229), (899,60,901).
- Neste momento, fiz a minha primeira intervenção, chamando-lhe à atenção que não seria, obrigatoriamente, o cateto ***b*** a tomar o mesmo valor mas sim qualquer um dos catetos.
- O jovem, sem qualquer hesitação, e uma vez que "já tinha encontrado o valor pretendido", fez uma formatação condicional da tabela de modo a destacar células que continham os catetos ***a*** e ***b*** com o valor 60.
- Nesse momento, voltei a intervir destacando o facto de que não respeitava a condição da quinta ter o **menor perímetro possível**.
- Face a esta minha chamada de atenção o jovem demonstrou alguma desmotivação referindo que isto lhe iria dar muito trabalho e que seria difícil encontrar, nos ternos pitagóricos primitivos, quatro catetos com o mesmo valor.
- Chamei à atenção de que a tabela construída tinha outros ternos pitagóricos que, embora não sendo primitivos representavam medidas de comprimento de lados de triângulos retângulos e dei-lhe a informação de que o lado do quadrado era 12, pois senti que o jovem desistiria perante a necessidade de analisar a tabela.
- De imediato, o jovem concluiu a tarefa referindo que, sem a minha intervenção anterior, demoraria uma eternidade.

Conclusões interessantes:

- Facilidade de trabalhar com a folha de cálculo;
- Rapidez com que concluiu que o cateto teria de ser igual;
- Dificuldade em concluir que o cateto poderia ser a ou b.

- Dificuldade na interpretação de enunciados onde haja mais que uma condição a ser satisfeita;
- Desmotivação perante trabalho de investigação.

Aula Nº4 **24/05/12**

Desenvolvimento da aula:

- Nos 45 minutos iniciais da aula foi dada ao jovem a ficha realizada na aula anterior onde foi feita a identificação do erro cometido. A partir daqui, teria de retificar a correspondência estabelecida e prosseguir na demonstração.
  Mais uma vez, o aluno demonstrou dificuldade em estabelecer a correspondência entre os lados, tendo-me apercebido que a sua dificuldade estaria na escrita da proporção e que estava “a trocar posições”, tal como lhe disse. Senti que, pela primeira vez, estaria a desmotivar.
  Dado que não era o momento em que dispunha de tempo suficiente para lhe prestar o apoio que necessitava, optei por abandonar a demonstração até ao momento em que pudesse sentar-me junto a ele e, calmamente, esclarecer as dúvidas e discutir o problema.

- Nos 45 minutos finais, foi dada ao jovem a ficha 4, com a demonstração de Garfield, tendo o jovem demonstrado, com muita facilidade, o Teorema de Pitágoras. De qualquer modo, teve uma expressão interessante no final, ao ver a alínea d): “Só não percebo como é que a partir do que foi feito, posso chegar ao que é pedido”. Respondi-lhe que teria de ter um objetivo e, a partir daí, era só brincar com as expressões…
  Senti alguma confiança, interesse e motivação para continuar as demonstrações.

  Conclusões interessantes:
  - Dificuldade em escrever proporções entre lados de triângulos semelhantes.
  - Desmotivação face ao insucesso / motivação face ao sucesso.
  - Crescente autonomia e facilidade de lidar com raciocínios dedutivos.

Aula Nº 5 **29/05/12**

Desenvolvimento da aula:

- Nos 45 minutos iniciais da aula foi dada ao jovem a ficha 5 para que o jovem fizesse a demonstração da Lei dos Cosenos, como uma generalização do Teorema de Pitágoras a triângulos não retângulos.

  Após ter lido a introdução, o aluno chamou-me apenas para que lhe relembrasse as razões trigonométricas, pois apenas se lembrava da Fórmula Fundamental da Trigonometria.

  Após lhe ter sido fornecida a informação, o aluno realizou, autonomamente, a tarefa e demonstrou que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

- Nos 45 minutos finais, foi dada a indicação de que deveria demonstrar as restantes igualdades: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ e $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

  Com facilidade, demonstrou que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, no entanto, não conseguiu fazer a demonstração para $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$.

Conclusões interessantes:

- Crescente autonomia na realização de raciocínios dedutivos;
- Importância da imagem para a realização de demonstrações.

Aula Nº 6 **31/05/12**

Desenvolvimento da aula:

- Nesta aula, a atividade desenvolveu-se em apenas 45 minutos, na minha presença. A tarefa que foi dada ao jovem foi a demonstração do recíproco do Teorema de Pitágoras, apenas com a sugestão de usar a Lei dos Cosenos.

  Numa primeira observação da questão que lhe era colocada, o jovem solicitou o meu auxílio apenas para lhe explicar como iria usar a Lei dos Cosenos para demonstrar a igualdade $c^2 = a^2 + b^2$. Sugeri-lhe que começasse por escrever a Lei dos Cosenos e analisar a fórmula, comparando-a com a que teria de demonstrar, pois a partir daí poderia ver as diferenças. O jovem, de imediato, referiu que, a diferença era que não figurava, na igualdade que lhe era pedido que demonstrasse, $-2ab\cos C$. Raciocinando em voz alta, sugeriu que era porque, naquele caso, $-2ab\cos C$=0.

  Aproveitando a conclusão do jovem, de imediato lhe pedi que pensasse quando é que tal sucedia. No mesmo instante, o jovem aplicou a Lei do Anulamento do Produto, concluindo que a $-2ab\cos C$=0 se e só se $\cos C = 0$ e que tal só sucedia se C=90º.

  Foi com satisfação que concluiu que o triângulo teria de ter um ângulo reto.

  Conclusões interessantes:

  - Dificuldade em iniciar a demonstração, não conseguindo traçar uma sequência de tarefas que o conduzam ao resultado.
  - Facilidade na utilização da Lei do Anulamento do Produto.
  - Crescente autonomia na realização de raciocínios dedutivos.
  - Aumento da curiosidade científica.
  - Crescente empenho e interesse na realização das atividades propostas.