



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Inês Marques Monteiro

**HETEROSCEDASTICIDADE CONDICIONAL
AUTO-REGRESSIVA GENERALIZADA
NA MODELAÇÃO DE SÉRIES TEMPORAIS**

**Dissertação no âmbito do Mestrado em Matemática, Ramo da Estatística,
Otimização e Matemática Financeira orientada pela Professora Doutora Maria
Esmeralda Elvas Gonçalves e apresentada ao Departamento de Matemática da
Faculdade de Ciências e Tecnologia.**

Junho de 2022

Heteroscedasticidade Condicional Auto-Regressiva Generalizada na modelação de séries temporais

Inês Marques Monteiro



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Mestrado em Matemática

Master in Mathematics

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

Junho 2022

Agradecimentos

A realização desta dissertação de mestrado marca mais uma etapa na minha vida e representa o culminar do meu percurso académico. Não poderia deixar de agradecer a todos aqueles que, direta ou indiretamente, me ajudaram e motivaram para alcançar os meus objetivos.

Em primeiro lugar gostaria de agradecer à minha família, em especial, aos meus pais e irmãos, à minha madrinha, prima e avós. Obrigada pela paciência, apoio e pelo amor, sem eles não teria chegado até aqui.

Ao Dinis, que acompanhou muitos dos momentos deste caminho, quero agradecer o esforço, o suporte, o apoio incondicional e a sua dedicação. Mais que isso, obrigada por me motivares sempre a ser a melhor versão de mim.

A todos, muito obrigada, são os pilares da minha vida!

Em segundo lugar, agradeço aos meus amigos pelas palavras de conforto e incentivo.

Por último, mas não menos importante, a todos os Professores do Departamento de Matemática com quem tive o privilégio de cruzar ao longo desta jornada.

Um especial agradecimento à minha orientadora, Professora Doutora Maria Esmeralda Elvas Gonçalves, pela paciência, dedicação e constante ajuda no desenvolvimento desta tese. Fico eternamente grata por me ter encorajado e ajudado neste percurso. Muito obrigada!

Resumo

Os processos estocásticos com formulações Auto-Regressivas Condicionalmente Heteroscedásticas (ARCH), introduzidos por Engle em 1982, têm vindo a desempenhar um papel importante na análise de séries temporais. O estudo destes modelos além de ter sido muito útil para diversas áreas científicas tem vindo a ter especial interesse no domínio das séries de natureza financeira.

Em 1986, Bollerslev propõe uma generalização dos modelos ARCH, que designou por GARCH. Desde então têm surgido na literatura muitas variantes destes modelos.

Nesse sentido, o presente trabalho inclui uma breve descrição de algumas das principais variações e extensões dos modelos GARCH, mais concretamente os modelos EGARCH (modelos GARCH exponenciais) e os modelos GTARCH (modelos GARCH com níveis).

Será ainda apresentado o modelo GARCH (1, 1), base do estudo dos modelos GARCH clássicos, e uma nova variante de tais modelos, recentemente proposta por Voutilainen et al. (2021). Seguindo o estudo destes autores, serão obtidas condições que assegurem a existência e a unicidade de soluções estritamente estacionárias e fracamente estacionárias.

Incluído nesse estudo está também a construção de estimadores para os parâmetros do modelo com base em funções de autocovariância. Para tal, considera-se uma caracterização AR(1) do modelo que conduz a equações quadráticas do tipo Yule-Walker. Provar-se-á que esta abordagem permite obter estimadores com boas propriedades. A fim de avaliar o comportamento dos estimadores obtidos para os parâmetros do modelo serão efetuados estudos de simulação.

Para terminar, consideramos um conjunto de dados reais correspondentes à empresa Corticeira Amorim. Procedemos ao ajustamento dos dados através de um modelo da classe dos GARCH clássicos, recorrendo ao software estatístico *Eviews*, e através desta nova proposta de Voutilainen et al. (2021), recorrendo ao MATLAB. Os modelos estimados resultantes serão brevemente comparados.

Palavras Chave: Estacionaridade Estrita, Estacionaridade Fraca, Estimadores, Formulações Auto-Regressivas Condicionalmente Heteroscedásticas, Séries Temporais

Abstract

Stochastic processes with Autoregressive Conditionally Heteroscedastic (ARCH) formulations, introduced by Engle in 1982, have been playing an important role in time series analysis. The study of these models, in addition to having been very useful for several scientific areas, has been of special interest in the field of financial series.

In 1986, Bollerslev proposed a generalization of the ARCH models, which he designated by GARCH. Since then, many variants of these models have appeared in the literature.

In this sense, this paper includes a brief description of some of the main variations and extensions of the GARCH models, more specifically the EGARCH models (exponential GARCH models) and the GTARCH models (GARCH models with levels).

We will also present the GARCH (1, 1) model, the basis of the study of classical GARCH models, and a new variant of such models, recently proposed by Voutilainen et al. (2021). Following the study of these authors, we will obtain conditions that ensure the existence and uniqueness of strictly stationary and weakly stationary solutions.

Included in this study is also the construction of estimators for the model parameters based on autocovariance functions. For this, an AR(1) characterization of the model that leads to quadratic equations of the Yule-Walker type is considered. It will be proved that this approach leads to estimators with good properties. In order to evaluate the behavior of the estimators obtained for the model parameters, simulation studies will be carried out.

Finally, we consider a set of real data corresponding to the company Corticeira Amorim. We proceed to the adjustment of the data through a model of the classic GARCH class, using the statistical software *Eviews*, and through this new proposal by Voutilainen et al. (2021), using MATLAB. The resulting estimated models are briefly compared.

Keywords: Strict Stationarity, Weak Stationarity, Estimators, Conditionally Heteroscedastic Autoregressive Formulations, Time Series

Conteúdo

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
2 Modelos GARCH	3
2.1 Definição do modelo GARCH	3
2.2 Outros modelos Condicionalmente Heteroscedásticos	5
2.2.1 Modelo GARCH exponencial	5
2.2.2 Modelo GTARCH	6
2.3 Modelo GARCH(1,1)	7
2.3.1 Estacionaridade do modelo GARCH(1,1)	8
3 Uma generalização dos modelos GARCH	13
3.1 Definição do modelo	13
3.2 Estacionaridade e unicidade	14
3.3 Parâmetros do modelo e equações do tipo Yule-Walker	22
3.3.1 Estimadores para os parâmetros do modelo	27
3.4 Movimento Browniano Fracionário	39
3.5 Simulações	42
3.6 Aplicação: Corticeira Amorim	45
Bibliografia	51
Anexo A Códigos	53
A.1 Simulações	53
A.2 Estimação dos parâmetros da Corticeira Amorim	55

Lista de Figuras

2.1	Trajectoria e resumos descritivos do modelo GARCH(1,1) com $\alpha_1 = 0.1$ e $\beta = 0.2$	12
2.2	Trajectoria e resumos descritivos do modelo GARCH(1,1) com $\alpha_1 = 0.4$ e $\beta = 0.5$	12
3.1	Modelo 3.1 com $N = 100$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0.1$ e $\beta = 0.5$	43
3.2	Modelo 3.1 com $N = 1000$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0.1$ e $\beta = 0.5$	44
3.3	Modelo 3.1 com $N = 10000$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0.1$ e $\beta = 0.5$	45
3.4	Correlograma da série das diferenças das cotações de fecho diárias da Corticeira Amorim	46
3.5	Teste à heteroscedasticidade dos resíduos	46
3.6	Correlação dos resíduos ao quadrado	47
3.7	Estimação dos parâmetros do modelo GARCH (1,1) clássico	47
3.8	Correlograma dos resíduos (esquerda) e teste à heteroscedasticidade dos resíduos (direita) após modelação GARCH	48

Lista de Tabelas

3.1	Média e desvio padrão das estimativas dos parâmetros do modelo (3.1) para $N = 100$	44
3.2	Média e desvio padrão das estimativas dos parâmetros do modelo (3.1) para $N = 1000$	44
3.3	Média e desvio padrão das estimativas dos parâmetros do modelo (3.1) para $N = 10000$	45
3.4	Média das estimativas dos parâmetros do modelo (3.1) com $N = 100$	45
3.5	Estimação dos parâmetros do modelo (3.1)	49
3.6	Resumo dos valores obtidos	49

Capítulo 1

Introdução

A observação sucessiva de fenómenos que evoluem de forma aleatória com o tempo, matematicamente caracterizada como uma série temporal, motiva o estudo de modelos matemáticos que permitem descrever e prever tais características.

Uma importante contribuição para o desenvolvimento de propriedades e métodos para a análise de séries temporais deve-se ao trabalho de Yule [12] (1927), que introduziu os primeiros modelos intitulados Auto-Regressivos (AR). Desde então existe um grande interesse em encontrar modelos que se adequem o melhor possível aos conjuntos de dados disponíveis.

Numa primeira fase estes estudos foram dominados pelos modelos lineares, os modelos Auto-Regressivos Médias Móveis (ARMA). Posteriormente, verificou-se que estes processos eram insuficientes para a análise de séries reais, onde geralmente predomina a não linearidade. Posto isto, surgiram na literatura várias classes de modelos capazes de ter em conta esta característica, em particular os modelos Condicionalmente Heteroscedásticos (CH).

É em 1982 que surgem os modelos auto-regressivos condicionalmente heteroscedásticos propostos por Engle [3]. Esta nova classe de processos pretendia responder à evidência de que a variância condicional ao passado dos dados não é, na maioria dos casos, constante ao longo do tempo, o que é conhecido como heteroscedasticidade condicional.

A particularidade destes modelos passa por considerar a variância condicional ao passado do processo no instante t como uma função linear dos quadrados dos valores do processo anteriores àquele instante t , isto é, de um modo geral, dado um processo estocástico real $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ tal que $E(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) = 0$ com $\underline{\varepsilon}_t$ a tribo gerada por $(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots)$, dizemos que ε segue um modelo com Heteroscedasticidade Condicional Auto-Regressiva de ordem $q \in \mathbb{N}$, (ARCH (q)), se

$$\forall t \in \mathbb{Z}, V(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2,$$

com $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, q$.

Contudo, a formulação da variância condicional deste modelo, sendo baseada em relações auto-regressivas, na prática requer, em geral, a utilização de muitos parâmetros.

Com vista a minimizar tal problema, Bollerslev [2] (1986) sugeriu uma generalização para os modelos ARCH, o chamado modelo GARCH, onde é considerada uma dinâmica auto-regressiva média móvel, introduzindo, na variância condicional, as variâncias condicionais passadas, e possibilitando

mais flexibilidade ao modelo, no sentido de se utilizarem menos parâmetros, nomeadamente

$$\forall t \in \mathbb{Z}, V(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

com $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, q$ e $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, p$.

Apesar desta generalização já ser muito completa e desenvolvida em questões probabilistas e estatísticas, apresenta ainda assim algumas limitações. Nesse ponto de vista, surgiram extensões dos modelos GARCH clássicos que incluem, fundamentalmente, transformações da expressão da variância condicional.

Neste trabalho apresentaremos um estudo sobre os modelos GARCH e algumas das variantes que surgiram entretanto na literatura.

O capítulo seguinte introduz os modelos GARCH (Engle [3], 1982, Bollerslev [2], 1986) e destaca uma representação interessante para o processo ao quadrado, $\varepsilon^2 = (\varepsilon_t^2, t \in \mathbb{Z})$. Inclui também as definições dos modelos EGARCH, propostos por Nelson [8] (1991), que visavam aligeirar as restrições de positividade impostas aos parâmetros, e as definições dos modelos GARCH com níveis (GTARCH), introduzidos por Zakoian [14] (1994) para terem em conta reações diversas consoante o sinal do processo, tão frequentes em séries de mercados financeiros, por exemplo. Ainda neste capítulo, apresentamos o modelo GARCH(1,1) acompanhado por dois resultados que nos oferecem condições que garantem a existência e unicidade de solução estacionária nos dois sentidos, ou seja, solução estritamente e fracamente estacionária. São também exibidas duas trajetórias simuladas do modelo GARCH(1,1).

No capítulo 3 apresentamos uma variante dos modelos GARCH recentemente proposta por Voutilainen et al. [10], concentrada no modelo GARCH clássico de ordens $p = q = 1$. Veremos que estes autores sugerem incluir na expressão da variância um processo positivo, L . Exibido o novo modelo passamos então ao estudo da existência e unicidade de solução bem como da sua estacionaridade (estrita e fraca). De seguida, desenvolvemos um método de estimação para os parâmetros do modelo baseado numa caracterização AR(1) que conduz a equações quadráticas do tipo Yule-Walker. Nesse sentido, faremos esse estudo começando por obter expressões para os coeficientes, utilizando as funções de autocovariância e, posteriormente, construímos estimadores que apresentam boas propriedades, isto é, provaremos que são consistentes.

Para ilustrar e analisar numericamente os estimadores obtidos, consideramos que o processo L é construído através do movimento Browniano fracionário e mostramos que, nestas condições, os pressupostos dos resultados apresentados são válidos. Assim, realizamos algumas simulações para diferentes tamanhos de amostras.

Concluimos este estudo com um exemplo prático, onde consideramos um conjunto de dados reais, mais concretamente, os dados relativos às cotações diárias de fecho das ações da Corticeira Amorim, durante o período de 31 de Maio de 2019 a 2 de Maio de 2022, e aplicamos o modelo proposto em Voutilainen et al. [10], e um modelo da classe dos GARCH clássicos. O objetivo será perceber se algum dos modelos estimados resultantes se adequa melhor aos dados em estudo. O procedimento de estimação com o modelo da classe dos GARCH clássicos foi realizado através do *Eviews* mas para o modelo de Voutilainen et al. [10] foi necessário recorrer ao MATLAB. Todos os códigos utilizados estão disponíveis no Anexo A.

Capítulo 2

Modelos GARCH

Até ao início dos anos 80 a maior parte do estudo de séries temporais era centrada nos modelos lineares. No entanto, para modelar sistemas reais estes modelos viriam a ser considerados insuficientes, nomeadamente em situações em que o comportamento condicional do passado apresentava forte variabilidade. Para ter em conta estas situações, e complementar os modelos lineares, Engle introduz os modelos ARCH ⁽¹⁾ que mais tarde, em 1986 foram generalizados por Bollerslev, os quais designou de GARCH ⁽²⁾.

Estes últimos foram, e ainda são nos dias de hoje, um grande objeto de estudo e utilização, principalmente nas áreas da economia e das finanças, já que são modelos bastante completos no que diz respeito a resultados teóricos estabelecidos e que têm revelado bom desempenho na análise de séries temporais e correspondente previsão.

2.1 Definição do modelo GARCH

De um modo geral, a formulação da variância condicional dos modelos GARCH é expressa como função do passado do processo e do seu próprio passado.

Seja $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ um processo estocástico real e $\underline{\varepsilon}_t = \sigma(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots)$ a tribo gerada por $(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots)$.

Definição 2.1.1. *O processo $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ segue um modelo GARCH de ordens p e q , com $p, q \in \mathbb{N}$, abreviadamente GARCH (p, q) , se existirem os dois primeiros momentos condicionais tais que:*

$$\begin{cases} \mathbb{E}(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) = 0 \\ \sigma_t^2 = \mathbb{V}(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2, \end{cases} \quad (2.1)$$

com constantes $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, q$ e $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, p$.

Se $p = 1$ e $\beta_1 = 0$, dizemos que ε segue um modelo ARCH de ordem q .

Notemos que a partir desta formulação da variância condicional é possível obter uma representação

⁽¹⁾ARCH do inglês AutoRegressive Conditionally Heteroscedastic model.

⁽²⁾GARCH do inglês Generalized AutoRegressive Conditionally Heteroscedastic model.

do tipo linear para o processo $\varepsilon^2 = (\varepsilon_t^2, t \in \mathbb{Z})$.

Com efeito, quando consideramos a inovação do quadrado do processo, ou seja,

$$\begin{aligned} v_t = \varepsilon_t^2 - \mathbb{E}(\varepsilon_t^2 | \underline{\varepsilon}_{t-1}^2) &= \varepsilon_t^2 - \mathbb{E}(\mathbb{E}(\varepsilon_t^2 | \underline{\varepsilon}_{t-1}) | \underline{\varepsilon}_{t-1}^2), \text{ porque } \underline{\varepsilon}_{t-1}^2 \subset \underline{\varepsilon}_{t-1} \\ &= \varepsilon_t^2 - \mathbb{E}(\sigma_t^2 | \underline{\varepsilon}_{t-1}^2) \\ &= \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2, \text{ pois } \sigma_t^2 \text{ é função de } (\varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}^2, \dots), \end{aligned}$$

vem, tendo em conta que $\sigma_t^2 = \varepsilon_t^2 - v_t$ e substituindo em (2.1),

$$\begin{aligned} \varepsilon_t^2 &= \sigma_t^2 + v_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \varepsilon_{t-j}^2 - \sum_{j=1}^p \beta_j v_{t-j} + v_t \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^r (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^p \beta_j v_{t-j} + v_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

onde $r = \max(p, q)$, com $\alpha_i = 0$ se $i > q$ e $\beta_i = 0$ se $i > p$. Assim, obtivemos uma representação do tipo ARMA para o processo ε^2 , mais concretamente um ARMA (r, p) . Esta representação é particularmente útil na identificação das ordens p e q do modelo.

Podemos ainda representar a variância condicional de (2.1) do seguinte modo

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 = \alpha_0 + \alpha(L) \varepsilon_t^2 + \beta(L) \sigma_t^2$$

onde L é o operador atraso⁽³⁾, α e β representam os polinómios $\alpha(L) = \sum_{i=1}^q \alpha_i L^i$ e $\beta(L) = \sum_{j=1}^p \beta_j L^j$, respetivamente. Introduzindo o processo de inovação de ε^2 vem então

$$\varepsilon_t^2 - v_t = \alpha_0 + \alpha(L) \varepsilon_t^2 + \beta(L) (\varepsilon_t^2 - v_t) \iff (1 - \alpha(L) - \beta(L)) \varepsilon_t^2 = \alpha_0 + (1 - \beta(L)) v_t.$$

Estas representações revelam-se úteis no estudo probabilista destes modelos (como a estacionariedade e os momentos, por exemplo).

De seguida apresentamos uma definição relativa aos modelos GARCH de ordens p e q que é mais restrita no sentido em que nos oferece um processo solução do modelo (2.1) e, portanto, facilita o estudo teórico destes modelos.

Definição 2.1.2. *Seja $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$ uma sucessão de variáveis aleatórias reais independentes e identicamente distribuídas (v.a.r.i.i.d.), centradas e reduzidas. O processo $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ segue um modelo GARCH forte de ordens $p, q \in \mathbb{N}$, abreviadamente GARCH (p, q) forte, se*

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{cases} \quad (2.2)$$

com $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, q$ e $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, p$.

⁽³⁾O operador atraso L associado a ε é tal que: $L\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}$.

Vejamus que quando consideramos a sucessão $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$ de v.a.i.i.d., centradas e reduzidas e sob a condição de η_t ser independente de $\underline{\varepsilon}_{t-1}$ concluímos que ε_t é, de facto, uma solução do modelo GARCH (p, q) dado por (2.1). Com efeito, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) &= \mathbb{E}(\sigma_t \eta_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) = \sigma_t \mathbb{E}(\eta_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}), & \text{pois } \sigma_t \text{ é função de } (\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots) \\ &= \sigma_t \mathbb{E}(\eta_t), & \text{pois } \eta_t \text{ é independente de } \underline{\varepsilon}_{t-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) &= \mathbb{E}(\varepsilon_t^2 | \underline{\varepsilon}_{t-1}) = \mathbb{E}\left[(\sigma_t \eta_t)^2 \mid \underline{\varepsilon}_{t-1}\right] \\ &= \sigma_t^2 \mathbb{E}\left[\eta_t^2 \mid \underline{\varepsilon}_{t-1}\right] \\ &= \sigma_t^2 \mathbb{E}(\eta_t^2), & \text{pois } \eta_t^2 \text{ é independente de } \underline{\varepsilon}_{t-1} \\ &= \sigma_t^2, \end{aligned}$$

porque $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$ é uma sucessão de variáveis centradas e reduzidas.

Observamos ainda que, quando consideramos tal processo solução, $\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t$, é possível obter uma equação de recorrência linear para o modelo GARCH (p, q) com coeficientes aleatórios. De facto, quando substituímos $\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t$ na expressão da variância condicionada em (2.1) vem:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \sigma_{t-i}^2 \eta_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} f_i(\eta_{t-i}) \sigma_{t-i}^2, \end{aligned}$$

onde $f_i(\eta_{t-i}) = \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \beta_i$, $i = 1, \dots, \max(p, q)$.

No estudo que se segue adotamos a Definição (2.1.2), isto é, a partir deste momento, sempre que mencionamos modelo GARCH (p, q) estamos a referir-nos à Definição 2.1.2.

2.2 Outros modelos Condicionalmente Heteroscedásticos

Após a introdução dos modelos GARCH (p, q) clássicos, definidos na secção anterior, muitos foram os autores que sugeriram formulações alternativas para a evolução da variância condicional.

O objetivo desta secção passa por apresentar algumas modelações condicionalmente heteroscedásticas que tentaram responder a algumas limitações dos modelos clássicos.

2.2.1 Modelo GARCH exponencial

O modelo GARCH exponencial, abreviadamente EGARCH, foi proposto por Nelson [8].

Este autor percebeu que as formulações quadráticas não permitiam ter em conta o sinal do processo, isto é, apresentavam um aspeto simétrico resultante da formulação quadrática retida pela expressão

da variância condicional. Esta propriedade de simetria contradiz, muitas vezes, o comportamento de séries reais, nomeadamente as séries financeiras em que valores positivos (geralmente associados a boas notícias) trazem valores positivos e valores negativos (más notícias) induzem valores negativos. Por outro lado, a exigência da positividade dos coeficientes pode gerar problemas na sua fase de estimação.

Posto isto, Nelson [8] propõe os modelos EGARCH (p, q) :

Definição 2.2.1. *Seja $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$ uma sucessão de v.a.r.i.i.d., centradas e reduzidas. O processo $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ segue um modelo EGARCH (p, q) , se*

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i g(\eta_{t-i}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \log(\sigma_{t-j}^2) \end{cases} \quad (2.3)$$

onde

$$g(\eta_{t-i}) = \theta \eta_{t-i} + \gamma (|\eta_{t-i}| - \mathbb{E}(|\eta_{t-i}|)), \quad (2.4)$$

com $\alpha_0, \alpha_i, i = 1, \dots, q, \beta_j, j = 1, \dots, p, \theta$ e γ constantes reais.

Notemos que a modelação de tal processo passa a ser efetuada pelo logaritmo da volatilidade condicional permitindo, assim, que a variância condicional σ_t^2 seja positiva independentemente dos valores dos seus coeficientes. Deste modo, conseguimos relaxar algumas restrições da Definição 2.1.2.

A função $g(\eta_{t-i})$ é responsável pela modelação da assimetria que poderá estar presente nas séries em estudo. De facto, tem-se

$$g(\eta_{t-i}) = \begin{cases} (\theta + \gamma)\eta_{t-i} - \gamma \mathbb{E}(|\eta_{t-i}|) & \text{se } \eta_{t-i} \geq 0, \\ (\theta - \gamma)\eta_{t-i} - \gamma \mathbb{E}(|\eta_{t-i}|) & \text{se } \eta_{t-i} < 0. \end{cases}$$

2.2.2 Modelo GTARCH

Uma outra variação do modelo GARCH foi proposta em Zakoian [14] (1994) também com o objetivo de modelar possíveis assimetrias na variância condicional. Tal variação inclui na sua definição níveis ou limiares do processo (threshold). Esta classe de modelos foi designada por TARCH ⁽⁴⁾ generalizada, abreviadamente GTARCH ou TGARCH.

A variância condicional dos processos GARCH com limiares tem prevista uma dinâmica diferente consoante o valor do processo é positivo ou negativo.

Seja $\varepsilon_t^+ = \max(\varepsilon_t, 0)$ e $\varepsilon_t^- = \min(\varepsilon_t, 0)$, $t \in \mathbb{Z}$.

⁽⁴⁾TARCH do inglês Threshold Autoregressive Conditionally Heteroscedastic model.

Definição 2.2.2. Seja $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$ uma sucessão de v.a.r.i.i.d., centradas e reduzidas. O processo $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ segue um modelo GTARCH (p, q) , se

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_{i,+} \varepsilon_{t-i}^+ - \sum_{i=1}^q \alpha_{i,-} \varepsilon_{t-i}^- + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j} \end{cases} \quad (2.5)$$

com $\alpha_0 > 0$, $\alpha_{i,+} \geq 0$, $\alpha_{i,-} \geq 0$, $i = 1, \dots, q$ e $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, p$.

À semelhança do que foi feito nos modelos GARCH clássicos fortes, também aqui é possível obter uma equação de recorrência linear, para o desvio padrão condicional, com coeficientes aleatórios. Com efeito, tem-se

$$\varepsilon_t^+ = \sigma_t \eta_t^+ \quad \text{e} \quad \varepsilon_t^- = \sigma_t \eta_t^-,$$

e, conseqüentemente

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_{i,+} \sigma_{t-i} \eta_{t-i}^+ - \sum_{i=1}^q \alpha_{i,-} \sigma_{t-i} \eta_{t-i}^- + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j} \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} f_i(\eta_{t-i}) \sigma_{t-i} \end{aligned}$$

com $f_i(\eta_{t-i}) = \alpha_{i,+} \eta_{t-i}^+ - \alpha_{i,-} \eta_{t-i}^- + \beta_i$, para $i = 1, \dots, \max(p, q)$.

2.3 Modelo GARCH(1, 1)

Como já foi referido, os modelos GARCH de ordens p e q assumem um papel preponderante no domínio de séries temporais. O estudo geral destes modelos que, para além de outros aspetos, inclui a prova da existência de soluções estacionárias, estritas e fracas, é de algum modo complexo.

Desta forma, fazemos o estudo do modelo GARCH (1, 1) por ser possível apresentar resultados e provas mais explícitas do que no caso geral.

Também é importante referir que, segundo a literatura (Francq and Zakoian [4]), o modelo GARCH(1, 1) é dos mais utilizados dado que, apesar de ser o mais simples e ter poucos parâmetros, conduz geralmente a um bom ajustamento de séries temporais observadas.

Da Definição 2.1.2, com $p = q = 1$ obtemos o modelo GARCH(1, 1):

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.6)$$

com $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\beta \geq 0$ e $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$ uma sucessão de v.a.r.i.i.d., centradas e reduzidas. Consideremos ainda que η_t é independente de ε_{t-1} .

2.3.1 Estacionaridade do modelo GARCH(1,1)

Para o estudo da estacionaridade do modelo GARCH(1,1) clássico vamos seguir Francq and Zakoian [4] e Gonçalves and Mendes-Lopes [5]. Começemos por mostrar que σ_t^2 , dado por (2.6), verifica a seguinte equação de recorrência:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 \left(1 + \sum_{j=1}^p A_{t-1} A_{t-2} \dots A_{t-j} \right) + A_{t-1} \dots A_{t-p-1} \sigma_{t-p-1}^2, \quad (2.7)$$

com $A_t = \alpha_1 \eta_t^2 + \beta$, $t \in \mathbb{Z}$.

Com efeito, tem-se

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 \eta_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 \eta_{t-1}^2 + \beta) \sigma_{t-1}^2 \\ &= \alpha_0 + A_{t-1} \sigma_{t-1}^2 \\ &= \alpha_0 + A_{t-1} (\alpha_0 + A_{t-2} \sigma_{t-2}^2), \end{aligned} \quad (2.8)$$

e portanto, recursivamente obtemos (2.7).

Teorema 2.3.1. *Se $\gamma = \mathbb{E}(\ln(A_t)) < 0$, então o processo $h = (h_t, t \in \mathbb{Z})$ tal que*

$$h_t = \alpha_0 \left(1 + \lim_{p \rightarrow +\infty} (q.c.) \sum_{j=1}^p A_{t-1} A_{t-2} \dots A_{t-j} \right)$$

converge quase certamente e é a única solução fortemente estacionária da equação (2.7). Assim, o processo ε definido por $\varepsilon_t = \sqrt{h_t} \eta_t$ é a única solução fortemente estacionária do modelo (2.6).

Demonstração. Para ver que h_t está bem definido é suficiente verificar que a série

$$\sum_{j=1}^{+\infty} A_{t-1} A_{t-2} \dots A_{t-j} \quad (2.9)$$

converge quase certamente. De facto, pelas propriedades do logaritmo vem

$$(A_{t-1} A_{t-2} \dots A_{t-l})^{\frac{1}{l}} = e^{\frac{1}{l} \log \left(\prod_{i=1}^l (A_{t-i}) \right)} = e^{\frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \log(A_{t-i})}$$

e, como as v.a.r. $\log(A_{t-i})$, $i = 1, 2, \dots, l$, são i.i.d. e têm valor médio, decorre do Teorema de Kolmogorov⁽⁵⁾ que

$$\frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \log(A_{t-i}) \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\log(A_t)) = \gamma < 0 \quad \text{q.c.}$$

⁽⁵⁾Seja (X_n) uma sucessão de v.a.r.i.i.d. . Se $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$, $\bar{X}_n \rightarrow \mathbb{E}(X_1)$ q.c. (Resnick [9], Corolário 7.5.1, p.220).

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow +\infty} (q.c.) (A_{t-1} A_{t-2} \dots A_{t-l})^{\frac{1}{l}} &= e^{\lim_{l \rightarrow +\infty} (q.c.) \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \log(A_{t-i})} \\ &= e^{\gamma} < 1, \end{aligned}$$

e pelo critério de Cauchy concluímos que a série (2.9) é quase certamente convergente.

h é solução de (2.7) uma vez que se tem $h_t = \alpha_0 + A_{t-1} h_{t-1}$, tal como $\sigma_t^2 = \alpha_0 + A_{t-1} \sigma_{t-1}^2$ (provado em (2.8)). Relativamente à estacionaridade estrita, tem-se que $(h_t, t \in \mathbb{Z})$ é uma função mensurável de $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$ pois a série é q.c. convergente. Como η é um processo estritamente estacionário, pois é uma sucessão de v.a.i.i.d., então h é estritamente estacionário.

Falta provar que h é a única solução estritamente estacionária q.c. de (2.7). Suponhamos, então, que existe uma outra solução $\tilde{h} = (\tilde{h}_t, t \in \mathbb{Z})$ estritamente estacionária da equação (2.7). De (2.7) vem

$$\tilde{h}_t = h_t(p) + A_{t-1} \dots A_{t-p-1} \tilde{h}_{t-p-1}^2, \quad \text{com } h_t(p) = \alpha_0 \left(1 + \sum_{j=1}^p A_{t-1} A_{t-2} \dots A_{t-j} \right).$$

Então

$$\tilde{h}_t - h_t = (h_t(p) - h_t) + A_{t-1} \dots A_{t-p-1} \tilde{h}_{t-p-1}^2.$$

Ora, notemos que

- i) $(h_t(p) - h_t)$ converge quase certamente para zero quando $p \rightarrow +\infty$.
- ii) $A_{t-1} \dots A_{t-p-1}$ converge quase certamente para zero quando $p \rightarrow +\infty$. De facto, visto que $\mathbb{E}(\ln(A_t))$ é estritamente negativa, do teorema da convergência de Kolmogorov, tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow +\infty} (q.c.) A_{t-1} A_{t-2} \dots A_{t-p-1} &= \lim_{p \rightarrow +\infty} (q.c.) e^{\sum_{i=1}^{p+1} \ln(A_{t-i})} \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} (q.c.) e^p \left(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p+1} \ln(A_{t-i}) \right) = 0. \end{aligned}$$

- iii) A lei de \tilde{h}_{t-p-1}^2 não depende de p pela estacionaridade. Então

$$(h_t(p) - h_t) + A_{t-1} \dots A_{t-p-1} \tilde{h}_{t-p-1}^2$$

converge em probabilidade para zero quando $p \rightarrow +\infty$.

Provámos assim que $\tilde{h}_t - h_t$ converge para zero em probabilidade quando $p \rightarrow +\infty$. Mas, como $\tilde{h}_t - h_t$ não depende de p , concluímos que $\tilde{h}_t = h_t, \forall t$ q.c. .

Sendo $\varepsilon_t = \sqrt{h_t} \eta_t = \left[\alpha_0 \left(1 + \lim_{p \rightarrow +\infty} (q.c.) \sum_{j=1}^p A_{t-1} A_{t-2} \dots A_{t-j} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \eta_t$, com $A_{t-i} = \alpha_1 \eta_{t-i}^2 + \beta$, vemos que ε_t é uma função mensurável de $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$ que é estritamente estacionário. Assim o processo ε é estritamente estacionário.

Deste modo, se $\mathbb{E}(\ln(A_t)) < 0$, então existe uma solução única estritamente estacionária, ε , do

modelo (2.6), definida a partir da solução única h_t da equação (2.7) por

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} \eta_t, t \in \mathbb{Z}.$$

□

Observamos que a condição $\mathbb{E}(\ln(A_t)) = \mathbb{E}(\ln(\alpha_1 \eta_t^2 + \beta)) < 0$ implica $\beta < 1$. Por outro lado, se $\alpha_1 + \beta < 1$ então decorre da Desigualdade de Jensen⁽¹¹⁾ que

$$\mathbb{E}(\ln(A_t)) \leq \ln(\mathbb{E}(A_t)) = \ln(\alpha_1 + \beta) < 0,$$

isto é, se $\alpha_1 + \beta < 1$, decorre do Teorema 2.3.1 que o modelo (2.6) tem uma única solução estritamente estacionária.

Teorema 2.3.2. *Se $\alpha_1 + \beta < 1$, então o processo ε definido no Teorema 2.3.1 é a única solução fracamente estacionária do modelo GARCH(1,1) dado em (2.6). Além disso, ε é um ruído branco.*

Demonstração. Suponhamos que ε segue um modelo GARCH(1,1) clássico dado por (2.6). Se o processo é fracamente estacionário então é de segunda ordem e tem-se

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\varepsilon_t^2 | \varepsilon_{t-1})) = \mathbb{E}(\sigma_t^2) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta)\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^2)$$

logo,

$$(1 - \alpha_1 - \beta)\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^2) = \alpha_0.$$

Assim, da positividade de α_0 e da variância concluímos que $(1 - \alpha_1 - \beta) > 0 \iff \alpha_1 + \beta < 1$.

Agora, consideremos a desigualdade $\alpha_1 + \beta < 1$. Sob esta condição mostramos que $\mathbb{E}(\ln(A_t)) < 0$ e portanto $\varepsilon_t = \sqrt{h_t} \eta_t$ é a única solução estritamente estacionária.

Assim, para concluirmos que o processo ε é fracamente estacionário basta provar que é de segunda ordem, ou seja, mostrar que

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \mathbb{E}(h_t) = \alpha_0 \left(1 + \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} A_{t-1} A_{t-2} \dots A_{t-j} \right) \right) < +\infty.$$

Pelo Teorema da Convergência Monótona⁽⁶⁾ e, visto que o processo η é uma sucessão de v.a.r.i.i.d., centradas e reduzidas vem

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) &= \alpha_0 \left[1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{E}(A_{t-1} A_{t-2} \dots A_{t-j}) \right] = \alpha_0 \left[1 + \sum_{j=1}^{+\infty} (\mathbb{E}(A_t))^j \right] \\ &= \alpha_0 \left[1 + \sum_{j=1}^{+\infty} (\alpha_1 \mathbb{E}(\eta_t^2) + \beta)^j \right] \\ &= \alpha_0 \left[1 + \sum_{j=1}^{+\infty} (\alpha_1 + \beta)^j \right] = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta)}, \end{aligned}$$

⁽⁶⁾Teorema da Convergência Monótona (Versão Séries): Se $\xi_j \geq 0$ são v.a. não negativas, então $\mathbb{E}(\sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{E}(\xi_j)$ (Resnick [9], Corolário 5.3.1, p.131)

pois $\alpha_1 + \beta < 1$. Consequentemente, ε é fracamente estacionário.

Quanto à unicidade de solução fracamente estacionária, consideremos h_t e $\tilde{h} = (\tilde{h}_t, t \in \mathbb{Z})$ duas soluções fracamente estacionárias de (2.7). Ora, como as variáveis A_t são i.i.d. e os processos h_t e \tilde{h}_t são fracamente estacionários vem

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|h_t - \tilde{h}_t|) &= \mathbb{E}(A_{t-1} \dots A_{t-p-1} |h_{t-p-1} - \tilde{h}_{t-p-1}|) \leq \mathbb{E}(A_{t-1} \dots A_{t-p-1} (|h_{t-p-1}| + |\tilde{h}_{t-p-1}|)) \\ &= \mathbb{E}(A_{t-1} \dots A_{t-p-1}) (\mathbb{E}|h_t| + \mathbb{E}|\tilde{h}_t|) \\ &= (\alpha_1 + \beta)^{p+1} (\mathbb{E}|h_t| + \mathbb{E}|\tilde{h}_t|). \end{aligned}$$

Tem-se $(\mathbb{E}|h_t| + \mathbb{E}|\tilde{h}_t|) < +\infty$ e, uma vez que $(\alpha_1 + \beta)^{p+1}$ converge para 0, quando $p \rightarrow +\infty$ então $\mathbb{E}(|h_t - \tilde{h}_t|) = 0$. Assim, provámos que $|h_t - \tilde{h}_t|$ converge para zero em \mathcal{L}_1 quando $p \rightarrow +\infty$. Mas, como $|h_t - \tilde{h}_t|$ não depende de p , concluímos que $h_t = \tilde{h}_t, \forall t$ q.c. .

Finalmente, ε é um ruído branco. Com efeito,

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1})) = 0 \quad \text{e} \quad \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta)}$$

e ainda, para $h > 0$, tem-se

$$\begin{aligned} Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t+h} | \underline{\varepsilon}_{t+h-1})) \\ &= \mathbb{E}(\varepsilon_t \mathbb{E}(\varepsilon_{t+h} | \underline{\varepsilon}_{t+h-1})), \text{ porque } \varepsilon_t \subset \underline{\varepsilon}_{t+h-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da estacionaridade fraca do processo, obtemos $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}) = Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h})$. □

O facto de estes processos serem ruídos brancos leva a que sejam incluídos nas modelações ARMA, conduzindo a modelos dito mistos (ARMA-GARCH) com melhor desempenho no estudo de séries reais do que os modelos ARMA tradicionais.

De forma a analisarmos o comportamento que a variância condicionada tem consoante os valores dos seus parâmetros efetuámos no *EvIEWS* duas simulações do modelo GARCH(1, 1) dado por (2.6).

Relativamente ao processo η considerámo-lo ser gaussiano, centrado e de variância unitária, isto é, $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Esta escolha foi feita para ser realizada uma comparação das duas simulações nas mesmas circunstâncias. Fixemos $\alpha_0 = 1$ e amostras de tamanho 1000.

Para uma primeira análise, consideramos $\alpha_1 = 0.1$ e $\beta = 0.2$, pelo que o processo é estacionário nos dois sentidos. Na Figura 2.1 apresentamos a trajetória relativa ao processo ε e o respetivo resumo descritivo.

Agora, alterando os valores de α_1 e β de modo a que a soma destes se aproxime do valor 1, consideramos $\alpha_1 = 0.4$ e $\beta = 0.5$ e obtemos a trajetória presente na Figura 2.2 com o respetivo resumo descritivo.

Constatamos pela observação da Figura 2.2 e tendo em conta a escala do eixo OY, que valores de α_1 e β cuja soma se aproxime de 1 conduzem a processos com zonas onde a volatilidade é acentuada.

Relativamente aos resumos descritivos de ambos os processos verificamos que nos dois casos as

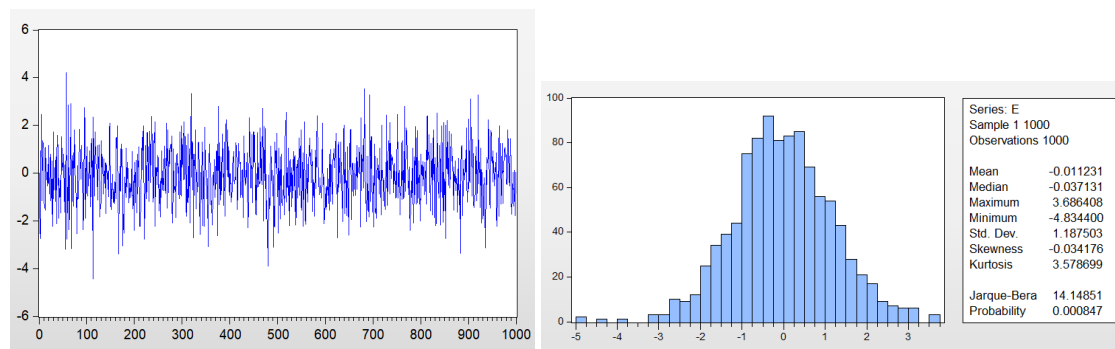


Fig. 2.1 Trajetória e resumos descritivos do modelo GARCH(1,1) com $\alpha_1 = 0.1$ e $\beta = 0.2$

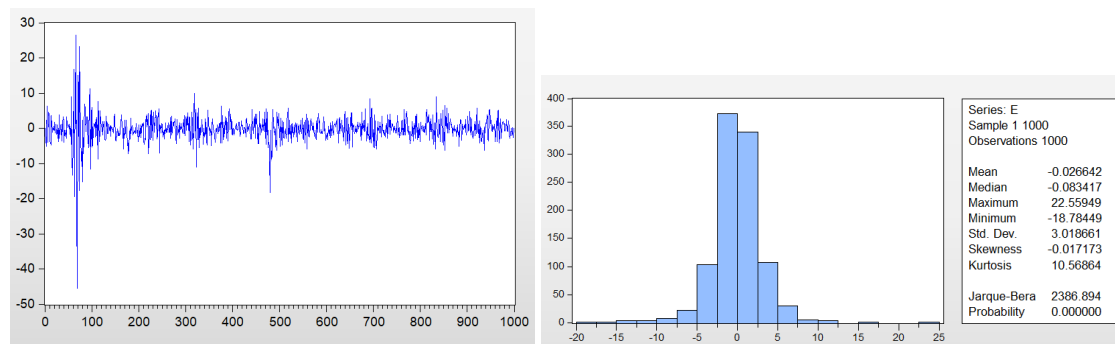


Fig. 2.2 Trajetória e resumos descritivos do modelo GARCH(1,1) com $\alpha_1 = 0.4$ e $\beta = 0.5$

médias empíricas são praticamente nulas.

Os testes de Jarque-Bera, cuja hipótese nula é a de normalidade, conduzem à rejeição da mesma, aos níveis de significância usuais. Tal facto pode ser também corroborado pelo valor da curtose, que nos indica que estamos perante uma distribuição leptocúrtica (curtose superior a três).

No capítulo seguinte abordaremos o modelo GARCH(1,1) introduzido por Voutilainen et al. [10] em 2021 que atesta o interesse atual das modelações condicionalmente heteroscedásticas.

Capítulo 3

Uma generalização dos modelos GARCH

Embora os modelos GARCH clássicos forneçam um conjunto de ferramentas eficazes para modelar e analisar séries temporais, existem várias extensões e variações destes modelos, como aquelas referidas no capítulo anterior, que respondem de forma diferente a certas características evidenciadas pelas séries em estudo.

Sendo este um tema bastante atual, decidimos apresentar uma generalização proposta por Voutilainen et al. [10] (2021). Quando nos deparamos com o modelo proposto por estes autores, a principal alteração, comparativamente com os modelos GARCH clássicos, passa por considerarem um processo estacionário positivo, designado por $L = (L_t, t \in \mathbb{Z})$ ⁽⁷⁾, que é incluído na expressão de σ_t^2 .

3.1 Definição do modelo

Seja $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ um processo estocástico real tal que:

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta L_{t-1} \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\beta \geq 0$ e L é um processo positivo e independente de $\eta = (\eta_t, t \in \mathbb{Z})$.

Relativamente ao processo η consideramos que as suas componentes são independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), centradas e reduzidas.

Esta formulação coincide com a Definição 2.1.2 para $p = q = 1$ a menos do processo L . Notamos que não é possível considerar $L_{t-1} = \sigma_{t-1}^2$ em (3.1) pois L e η não seriam independentes.

Seja $A_t = \alpha_1 \eta_t^2$ e $B_t = \alpha_0 + \beta L_t$, $t \in \mathbb{Z}$. Assim, σ_t^2 pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 \eta_{t-1}^2 + \beta L_{t-1} = A_{t-1} \sigma_{t-1}^2 + B_{t-1} \\ &= A_{t-1} A_{t-2} \sigma_{t-2}^2 + A_{t-1} B_{t-2} + B_{t-1}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

⁽⁷⁾Os autores designam por $(L_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ a liquidez do processo.

Recursivamente e com a convenção $\prod_{j=0}^{-1} A_{t-j} = 1$ obtemos:

$$\sigma_{t+1}^2 = A_t \sigma_t^2 + B_t = \left(\prod_{i=0}^k A_{t-i} \right) \sigma_{t-k}^2 + \sum_{i=0}^k \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (3.3)$$

Desta forma, é também possível neste modelo obter uma equação de recorrência para σ_t^2 .

3.2 Estacionaridade e unicidade de solução

Uma vez apresentado o modelo, é importante encontrar condições que assegurem a existência e a unicidade de soluções. Assim, de seguida vão ser apresentados alguns resultados bem como as suas demonstrações.

Começamos com um lema que vai ser útil na prova dos teoremas.

Lema 3.2.1. *Suponhamos que $\alpha_1 < 1$ e $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(\sigma_t^2) \leq M_1 < +\infty$. Então, quando $k \rightarrow +\infty$ vem*

$$\left(\prod_{i=0}^k A_{t-i} \right) \sigma_{t-k}^2 \longrightarrow 0 \quad (3.4)$$

em \mathcal{L}_1 ⁽⁸⁾. Além disso, se $\alpha_1 < \frac{1}{\sqrt{\mathbb{E}(\eta_0^4)}}$ e $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(\sigma_t^4) \leq M_2 < +\infty$, então a convergência é quase certa.

Observação 1. A condição $\alpha_1 < \frac{1}{\sqrt{\mathbb{E}(\eta_0^4)}}$ é mais restrita que a primeira condição, $\alpha_1 < 1$. Com efeito, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz vem

$$1 = \mathbb{E}(\eta_0^2) = \mathbb{E}(\eta_0^2 \times 1) < \sqrt{\mathbb{E}(\eta_0^4)}.$$

Logo, $\alpha_1 < \frac{1}{\sqrt{\mathbb{E}(\eta_0^4)}} < 1$.

Demonstração. Para provar o Lema 3.2.1 é preciso ter em conta que η_t é independente de σ_s para $s \leq t$. De facto, sabemos que A_t e B_t são independentes. Mais, $A_t, A_{t-1}, \dots, A_{t-k}$ são independentes entre si e independentes de σ_{t-k}^2 , que envolve $\eta_{t-k-1}, \dots, \eta_{t-k}, \dots$ e valores de σ^2 anteriores a $t-k$. Assim, η e σ são processos independentes um do outro.

Posto isto, para a prova da convergência em \mathcal{L}_1 de (3.4) utilizamos a positividade dos termos, a independência e a distribuição das variáveis da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| \left(\prod_{i=0}^k A_{t-i} \right) \sigma_{t-k}^2 \right| \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\prod_{i=0}^k \alpha_1 \eta_{t-i}^2 \right) \sigma_{t-k}^2 \right] = \mathbb{E} \left[\left(\prod_{i=0}^k \alpha_1 \eta_{t-i}^2 \right) \right] \mathbb{E}(\sigma_{t-k}^2) \\ &= \alpha_1^{k+1} \prod_{i=0}^k \mathbb{E}(\eta_{t-i}^2) \mathbb{E}(\sigma_{t-k}^2) = \alpha_1^{k+1} \prod_{i=0}^k \mathbb{E}(\eta_0^2) \mathbb{E}(\sigma_{t-k}^2) \\ &= \alpha_1^{k+1} \mathbb{E}(\sigma_{t-k}^2) \leq \alpha_1^{k+1} M_1 \quad (\text{por hipótese}). \end{aligned}$$

⁽⁸⁾Uma sucessão (X_n) de variáveis aleatórias converge para X em \mathcal{L}_p se $\mathbb{E}(|X_n - X|^p) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$ (Resnick [9], p.180).

Consequentemente, quando $k \rightarrow +\infty$ temos que $\alpha_1^{k+1} M_1 \rightarrow 0$, pois $\alpha_1 < 1$ por hipótese. Da definição de convergência em \mathcal{L}_1 decorre o pretendido.

Quanto à prova da segunda parte, comecemos por mostrar que $\mathbb{V}\left[\left(\prod_{i=0}^k A_{t-i}\right) \sigma_{t-k}^2\right] < +\infty$. De facto, de novo pela independência e distribuição das variáveis temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\left(\prod_{i=0}^k A_{t-i}\right) \sigma_{t-k}^2\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\prod_{i=0}^k \alpha_1^2 \eta_{t-i}^4\right) \sigma_{t-k}^4\right] = \mathbb{E}\left[\left(\prod_{i=0}^k \alpha_1^2 \eta_{t-i}^4\right)\right] \mathbb{E}(\sigma_{t-k}^4) \\ &= \prod_{i=0}^k \alpha_1^2 \mathbb{E}(\eta_{t-i}^4) \mathbb{E}(\sigma_{t-k}^4) \\ &= \alpha_1^{2k+2} (\mathbb{E}(\eta_0^4))^{k+1} \mathbb{E}(\sigma_{t-k}^4) \\ &\leq (\alpha_1^2 \mathbb{E}(\eta_0^4))^{k+1} M_2 < +\infty, \end{aligned}$$

por hipótese. Já vimos que $\mathbb{E}\left[\left(\prod_{i=0}^k A_{t-i}\right) \sigma_{t-k}^2\right] < +\infty$. Logo pela fórmula de Koenig vem

$$\mathbb{V}\left[\left(\prod_{i=0}^k A_{t-i}\right) \sigma_{t-k}^2\right] < +\infty.$$

Posto isto, decorre da desigualdade de Bienaymé-Tchebychev ⁽⁹⁾, para $\forall \delta > 0$

$$\begin{aligned} P\left(\left|\left(\prod_{i=0}^k A_{t-i}\right) \sigma_{t-k}^2 - \alpha_1^{k+1} \mathbb{E}(\sigma_{t-k}^2)\right| > \delta\right) &\leq \frac{\mathbb{V}\left[\left(\prod_{i=0}^k A_{t-i}\right) \sigma_{t-k}^2\right]}{\delta^2} \\ &= \frac{\mathbb{E}\left[\left(\left(\prod_{i=0}^k A_{t-i}\right) \sigma_{t-k}^2\right)^2\right] - \left[\mathbb{E}\left(\left(\prod_{i=0}^k A_{t-i}\right) \sigma_{t-k}^2\right)\right]^2}{\delta^2} \\ &\leq \frac{(\alpha_1^2 \mathbb{E}(\eta_0^4))^{k+1} M_2}{\delta^2}. \end{aligned}$$

Consideremos $d_k = \frac{(\alpha_1^2 \mathbb{E}(\eta_0^4))^{k+1} M_2}{\delta^2}$ e $\tilde{A}_k = \left(\left|\left(\prod_{i=0}^k A_{t-i}\right) \sigma_{t-k}^2 - \alpha_1^{k+1} \mathbb{E}(\sigma_{t-k}^2)\right| > \delta\right)$.

Temos portanto a seguinte inequação: $P(\tilde{A}_k) \leq d_k$. Ora,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} d_k = \frac{1}{\delta^2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (\alpha_1^2 \mathbb{E}(\eta_0^4))^{k+1} M_2 \right)$$

e, dado que por hipótese, tem-se $\alpha_1 \sqrt{\mathbb{E}(\eta_0^4)} < 1$, a série de termo geral d_k é geométrica de razão $r_1 = \alpha_1^2 \mathbb{E}(\eta_0^4) < 1$.

⁽⁹⁾Seja X uma v.a.r. tal que $\mathbb{V}(X) < +\infty$. Então $\forall \lambda > 0$, $P[|X - \mathbb{E}(X)| > \lambda] \leq \mathbb{V}(X)/\lambda^2$ (Gonçalves and Mendes-Lopes [6], p.105).

Então $\sum_{k=0}^{+\infty} d_k$ converge e, conseqüentemente, vem $P(\tilde{A}_k) \leq d_k \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} P(\tilde{A}_k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} d_k < +\infty$.

Desta forma concluímos ⁽¹⁰⁾ que $\left(\prod_{i=0}^k A_{t-i}\right) \sigma_{t-k}^2 - \alpha_1^{k+1} \mathbb{E}(\sigma_{t-k}^2) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$, quase certamente.

Mas, mostrámos no início desta demonstração que $\alpha_1^{k+1} \mathbb{E}(\sigma_{t-k}^2) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$, q.c. logo

$$\left(\prod_{i=0}^k A_{t-i}\right) \sigma_{t-k}^2 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0, \text{ q.c. .}$$

□

De seguida, apresentamos um teorema que nos fornece uma solução para o modelo (3.1) quando consideramos que L é um processo de segunda ordem.

Teorema 3.2.1. *Consideremos que $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(L_t^2) < +\infty$ e $\alpha_1 < 1$. Então,*

$$\sigma_{t+1}^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j}\right) B_{t-i} \quad (3.5)$$

é a única solução do modelo (3.1) na classe dos processos que verificam $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(\sigma_t^2) < +\infty$.

Demonstração. A demonstração deste teorema vai ser feita em duas partes: primeiramente mostraremos que (3.5) está bem definido q.c. e depois veremos que é a única solução de (3.1).

Notemos que σ_{t+1}^2 é expresso como uma soma de termos não negativos e por isso o limite se existir, será uma variável aleatória não negativa.

Substituindo $B_{t-i} = \alpha_0 + \beta L_{t-i}$ na expressão (3.5) vem

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j}\right) B_{t-i} = \alpha_0 \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j}\right) + \beta \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j}\right) L_{t-i} = \alpha_0 \sum_{i=0}^{+\infty} b_i + \beta \sum_{i=0}^{+\infty} a_i,$$

com $b_i = \prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j}$ e $a_i = \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j}\right) L_{t-i} = b_i L_{t-i}$.

Com o objetivo de aplicar o critério de Cauchy a estas séries temos, utilizando as propriedades do logaritmo, o seguinte:

$$\begin{aligned} b_i^{\frac{1}{i}} &= e^{\ln(b_i)^{\frac{1}{i}}} = e^{\frac{1}{i} \ln\left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j}\right)} = e^{\frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} \ln A_{t-j}}, \\ a_i^{\frac{1}{i}} &= L_{t-i}^{\frac{1}{i}} b_i^{\frac{1}{i}} = L_{t-i}^{\frac{1}{i}} e^{\frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} \ln A_{t-j}}. \end{aligned}$$

Ora, as v.a.r. $\ln(A_{t-j}) = \ln(\alpha_1 \eta_{t-j}^2)$ são i.i.d., pois resultam de transformações contínuas das v.a.r.i.i.d. η_t . Mais, $\mathbb{E}(\ln(A_0)) < +\infty$ porque como o logaritmo é uma função côncava obtemos, por

⁽¹⁰⁾Se para $\forall \varepsilon > 0$, a série de termo geral $P(|X_n - X| > \varepsilon)$ é convergente, então a sucessão $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para a v.a.r X q.c. quando $n \rightarrow +\infty$ (Gonçalves and Mendes-Lopes [6], Teorema 5.10, p.262).

aplicação da Desigualdade de Jensen⁽¹¹⁾

$$\mathbb{E}(\ln(A_0)) = \mathbb{E}(\ln(\alpha_1 \eta_0^2)) \leq \ln(\mathbb{E}(\alpha_1 \eta_0^2)) = \ln \alpha_1.$$

Assim, decorre do Teorema de Kolmogorov⁽⁵⁾

$$b_i^{\frac{1}{i}} = e^{\frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} \ln A_{t-j}} \longrightarrow e^{\mathbb{E}(\ln A_0)} = \alpha_1 e^{\mathbb{E}(\ln \eta_0^2)}, \quad \text{quase certamente.}$$

Por outro lado, de novo pela Desigualdade de Jensen vem

$$\alpha_1 e^{\mathbb{E}(\ln \eta_0^2)} \leq \alpha_1 e^{\ln \mathbb{E}(\eta_0^2)} = \alpha_1 e^0 < 1 \quad (\text{por hipótese}).$$

Então, $\lim_{i \rightarrow +\infty} \sqrt[i]{b_i} < 1$ q.c. e portanto, pelo critério de Cauchy, $\sum_{i=0}^{+\infty} b_i$ converge quase certamente. Notemos que acabámos de mostrar o seguinte:

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} \ln A_{t-j}} < 1 \quad \text{q.c.} \quad (3.6)$$

e portanto, para provar que $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ converge falta fazer o estudo de $L_{t-i}^{\frac{1}{i}}$. Para tal, consideremos o seguinte desenvolvimento de L_t :

$$L_{t-i}^{\frac{1}{i}} = \mathbb{1}_{L_{t-i} < 1} L_{t-i}^{\frac{1}{i}} + \mathbb{1}_{L_{t-i} \geq 1} L_{t-i}^{\frac{1}{i}} \leq 1 - \mathbb{1}_{L_{t-i} \geq 1} + \mathbb{1}_{L_{t-i} \geq 1} L_{t-i}^{\frac{1}{i}}. \quad (3.7)$$

Agora, deduzimos que⁽¹²⁾:

$$P\left(\left|\mathbb{1}_{L_{t-i} \geq 1} L_{t-i}^{\frac{1}{i}} - \mathbb{1}_{L_{t-i} \geq 1}\right| \geq \delta\right) \leq \frac{\mathbb{E}[(\mathbb{1}_{L_{t-i} \geq 1} L_{t-i}^{\frac{1}{i}} - \mathbb{1}_{L_{t-i} \geq 1})^2]}{\delta^2} = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{L_{t-i} \geq 1} (L_{t-i}^{\frac{1}{i}} - 1)^2]}{\delta^2}. \quad (3.8)$$

O objetivo agora passa por simplificar a parcela que está dentro desta última esperança. Este passo requer alguma atenção, já que não é direto e será analisado primeiramente num contexto genérico.

Seja $f(y) = a^y$ com $a \geq 1$ e $y \geq 0$. Assim sendo, temos $\frac{d}{dy} f(y) = a^y \log(a)$. Mais, sucede do Teorema do Valor Médio⁽¹³⁾, para $b \in]0, y^*[$, o seguinte:

$$\begin{aligned} f(y^*) - f(0) = f'(b) y^* &\implies |f(y^*) - f(0)| = |f'(b)| y^* \\ &\leq \max_{0 \leq b \leq y^*} |f'(b)| y^* = y^* f'(y^*) = y^* a^{y^*} \log(a). \end{aligned}$$

⁽¹¹⁾Desigualdade de Jensen: Seja $u(\cdot)$ uma função crescente, côncava e admitindo segunda derivada. Dada uma v.a. X com média finita, tem-se $\mathbb{E}(u(X)) \leq u(\mathbb{E}(X))$ (Resnick [9])

⁽¹²⁾Seja X uma v.a.r. e g uma função positiva em $]0, +\infty[$. Para qualquer $a \geq 0$ tem-se $P(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(g(X))}{g(a)}$ (Gonçalves and Mendes-Lopes [6], p.104).

⁽¹³⁾Teorema do Valor Médio: Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Então $\exists c \in]a, b[$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Deste modo, usando este raciocínio para o nosso caso com $a = L_{t-i}$, isto é, $f(y) = L_{t-i}^y$ vem em $y^* = \frac{1}{i}$

$$\left| f\left(\frac{1}{i}\right) - f(0) \right| = |L_{t-i}^{\frac{1}{i}} - 1| \leq \frac{1}{i} L_{t-i}^{\frac{1}{i}} \log(L_{t-i})$$

e, conseqüentemente, para a expressão que se encontra dentro da referida esperança em (3.8) tem-se

$$\mathbb{1}_{L_{t-i} \geq 1} (L_{t-i}^{\frac{1}{i}} - 1)^2 \leq \mathbb{1}_{L_{t-i} \geq 1} \left[\frac{1}{i} L_{t-i}^{\frac{1}{i}} \log(L_{t-i}) \right]^2 = \mathbb{1}_{L_{t-i} \geq 1} \frac{1}{i^2} L_{t-i}^{\frac{2}{i}} [\log(L_{t-i})]^2. \quad (3.9)$$

Por outro lado, notemos também que para $i \geq 2$ se verificam as seguintes desigualdades:

$$\frac{L_{t-i}^{\frac{2}{i}} [\log(L_{t-i})]^2}{L_{t-i}^2} \leq \frac{[\log(L_{t-i})]^2}{L_{t-i}} < 1. \quad (3.10)$$

Com efeito, $\frac{L_{t-i}^{\frac{2}{i}}}{L_{t-i}^2} = L_{t-i}^{\frac{2}{i}-2}$ e como $0 < \frac{1}{i} \leq \frac{1}{2} \iff -2 < \frac{2}{i} - 2 \leq -1$ concluímos que $\frac{L_{t-i}^{\frac{2}{i}}}{L_{t-i}^2} \leq \frac{1}{L_{t-i}}$.

Relativamente à última desigualdade de (3.10) verificamos, através do cálculo da primeira derivada, que a função $g(x) = \frac{(\log(x))^2}{x}$ tem um maximizante em e^2 . Então $g(e^2) = \frac{4}{e^2} < 1$.

Finalmente, de (3.9) e (3.10) tem-se

$$\mathbb{1}_{L_{t-i} \geq 1} (L_{t-i}^{\frac{1}{i}} - 1)^2 < \mathbb{1}_{L_{t-i} \geq 1} \frac{1}{i^2} L_{t-i}^2.$$

Posto isto, substituindo em (3.8) vem

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{L_{t-i} \geq 1} (L_{t-i}^{\frac{1}{i}} - 1)^2]}{\delta^2} &< \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{L_{t-i} \geq 1} L_{t-i}^2]}{\delta^2 i^2} \leq \frac{\mathbb{E}(L_{t-i}^2)}{\delta^2 i^2} \\ &\leq \frac{C}{\delta^2 i^2}, \end{aligned}$$

pois $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(L_t^2) < +\infty$. Este procedimento permite afirmar que, a partir de (3.8),

$$\sum_{i=2}^{+\infty} P\left(\left|\mathbb{1}_{L_{t-i} \geq 1} L_{t-i}^{\frac{1}{i}} - \mathbb{1}_{L_{t-i} \geq 1}\right| \geq \delta\right) \leq \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{C}{\delta^2 i^2} < +\infty,$$

e portanto, tal como na prova do lema anterior, decorre (10)

$$\mathbb{1}_{L_{t-i} \geq 1} L_{t-i}^{\frac{1}{i}} - \mathbb{1}_{L_{t-i} \geq 1} \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0 \text{ quase certamente.}$$

Assim, do desenvolvimento de L_t em (3.7) tem-se $L_{t-i}^{\frac{1}{i}} < 1$ quase certamente e por isso

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} L_{t-i}^{\frac{1}{i}} < 1 \text{ q.c. .} \quad (3.11)$$

Consequentemente, dado que $\lim_{i \rightarrow +\infty} \sqrt[i]{a_i} = \lim_{i \rightarrow +\infty} L_{t-i}^{\frac{1}{i}} e^{\frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} \ln A_{t-j}}$, provém de (3.6) e (3.11) que $\lim_{i \rightarrow +\infty} \sqrt[i]{a_i} < 1$ q.c. . Do critério de Cauchy procede a convergência quase certa da série $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$.

Até aqui provámos que a suposta solução está bem definida. Vamos agora ver que (3.5) é, de facto, solução única do modelo (3.1).

É solução pois verifica a equação de recorrência (3.3):

$$\begin{aligned}
A_t \sigma_t^2 + B_t &\stackrel{(3.5)}{=} A_t \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j-1} \right) B_{t-i-1} + B_t \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^i A_{t-j} \right) B_{t-i-1} + B_t && (A_t \text{ passou para dentro do produto}) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i} + B_t && (\text{Manusear os índices } i \text{ e } j) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i} - B_t + B_t && (\text{Destacar a parcela } i=0) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i} = \sigma_{t+1}^2.
\end{aligned}$$

Quanto à unicidade, suponhamos que existe uma outra solução $\tilde{\sigma}_t^2$ do modelo (3.1) tal que $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(\tilde{\sigma}_t^2) < +\infty$. Então, para $\forall t \in \mathbb{Z}$ e $\forall k \in \mathbb{N}_0$, tem-se de (3.3)

$$|\sigma_{t+1}^2 - \tilde{\sigma}_{t+1}^2| \leq \left(\prod_{i=0}^k A_{t-i} \right) \sigma_{t-k}^2 + \left(\prod_{i=0}^k A_{t-i} \right) \tilde{\sigma}_{t-k}^2.$$

Podemos aplicar o operador esperança matemática pois estamos na presença de funções mensuráveis positivas, vindo

$$\mathbb{E}[|\sigma_{t+1}^2 - \tilde{\sigma}_{t+1}^2|] \leq \mathbb{E}\left[\left(\prod_{i=0}^k A_{t-i}\right) \sigma_{t-k}^2 + \left(\prod_{i=0}^k A_{t-i}\right) \tilde{\sigma}_{t-k}^2\right].$$

Do Lema 3.2.1 sabemos que a parcela do lado direito converge para zero em \mathcal{L}_1 quando $k \rightarrow +\infty$,

$$\left(\prod_{i=0}^k A_{t-i}\right) \sigma_{t-k}^2 \longrightarrow 0, \quad \text{em } \mathcal{L}_1$$

e do mesmo modo se tem

$$\left(\prod_{i=0}^k A_{t-i}\right) \tilde{\sigma}_{t-k}^2 \longrightarrow 0, \quad \text{em } \mathcal{L}_1.$$

Então

$$\left(\prod_{i=0}^k A_{t-i}\right) \sigma_{t-k}^2 + \left(\prod_{i=0}^k A_{t-i}\right) \tilde{\sigma}_{t-k}^2 \longrightarrow 0, \quad \text{em } \mathcal{L}_1.$$

Assim, $\mathbb{E}[|\sigma_{t+1}^2 - \tilde{\sigma}_{t+1}^2|] \longrightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$, em \mathcal{L}_1 . Logo, como aquela esperança é independente de k vem $\mathbb{E}[|\sigma_{t+1}^2 - \tilde{\sigma}_{t+1}^2|] = 0$ e, conseqüentemente, $\sigma_{t+1}^2 = \tilde{\sigma}_{t+1}^2$, em \mathcal{L}_1 , $\forall t \in \mathbb{Z}$.

Em conclusão, σ_t^2 é a única solução de (3.1) na classe dos processos tais que $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(\sigma_t^2) < +\infty$. \square

O resultado anterior dá-nos condições para a existência de uma solução única numa determinada classe de processos. Ora, é também do interesse do estudo de séries temporais verificar a estacionariedade (estrita ou fraca) das soluções. Nesse ponto de vista, serão apresentados dois corolários que nos esclarecem essa questão tendo por base a solução (3.5).

Corolário 3.2.1. *Seja $\alpha_1 < 1$. Se L é um processo estritamente estacionário com $\mathbb{E}(L_0^2) < +\infty$ então a única solução dada por (3.5) é estritamente estacionária.*

Demonstração. Dado que L é um processo estritamente estacionário com $\mathbb{E}(L_0^2) < +\infty$ e $\alpha_1 < 1$ então, decorre do Teorema 3.2.1 que a única solução do modelo (3.1), na classe dos processos que verificam $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(\sigma_t^2) < +\infty$, é dada por

$$\sigma_{t+1}^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i}.$$

Analisemos agora, de modo parcial, a estacionariedade estrita deste processo. Atentemos desde logo que sendo L um processo estritamente estacionário, então $B_t = \alpha_0 + \beta L_t$, $t \in \mathbb{Z}$, também o é. Além disso, $A_t = \alpha_1 \eta_t^2$, $t \in \mathbb{Z}$, é estritamente estacionário já que $(\eta_t, t \in \mathbb{Z})$ é uma sucessão de v.a.i.i.d..

Mais, dado que L_t é independente de η_t , então A_t e B_t são independentes pois estamos perante transformações contínuas de variáveis aleatórias independentes. Deste modo, (A_t, B_t) , $t \in \mathbb{Z}$, é estritamente estacionário.

Posto isto, seja $k \in \mathbb{Z}$ fixo e denotemos $H_{k,t} = \sum_{i=0}^k \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i}$. Ora

$$H_{k,t} = \sum_{i=0}^k \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i} \text{ é igual em lei a } \sum_{i=0}^k \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{-j} \right) B_{-i} = H_{k,0}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

Por outro lado, na prova do Teorema 3.2.1 demonstrou-se que estas séries estavam bem definidas quando $k \rightarrow +\infty$. Assim, para qualquer $t \in \mathbb{Z}$

$$\sigma_{t+1}^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i} \text{ é igual em lei a } \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{-j} \right) B_{-i} = \sigma_1^2.$$

Notemos que para completar a prova deveríamos ainda demonstrar que a lei de $(\sigma_t^2, \dots, \sigma_{t+k}^2)$ é a mesma de $(\sigma_{t+h}^2, \dots, \sigma_{t+k+h}^2) \forall k, \forall h$. \square

Corolário 3.2.2. *Seja $\alpha_1 < \frac{1}{\sqrt{\mathbb{E}(\eta_0^4)}}$ e suponhamos que L é um processo fracamente estacionário. Então a única solução dada por (3.5) é fracamente estacionária.*

Para provar este corolário teremos primeiro de mostrar que a condição $\alpha_1 < \frac{1}{\sqrt{\mathbb{E}(\eta_0^4)}}$ é necessária e suficiente para garantir a existência de momentos de quarta ordem para este modelo, isto é, $\mathbb{E}(\sigma_0^4) < +\infty$. Com tal objetivo consideremos o seguinte lema:

Lema 3.2.2. *Suponhamos que $\mathbb{E}(\eta_0^4) < +\infty$ e que L é estritamente estacionário. Então*

$$\mathbb{E}(\sigma_0^4) < +\infty \Leftrightarrow \alpha_1 < \frac{1}{\sqrt{\mathbb{E}(\eta_0^4)}}.$$

Demonstração. Provemos apenas que se $\mathbb{E}(\sigma_0^4) < +\infty$ então $\alpha_1 < \frac{1}{\sqrt{\mathbb{E}(\eta_0^4)}}$.

Da expressão (3.5) e sabendo que os seus termos são positivos, podemos aplicar o Teorema da Convergência Monótona ⁽⁶⁾ e obtemos o seguinte

$$\begin{aligned} \sigma_{t+1}^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i} &\implies \mathbb{E}(\sigma_{t+1}^4) = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i} \right)^2 \right] \\ &\iff \mathbb{E}(\sigma_{t+1}^4) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right)^2 B_{t-i}^2 \right] + \\ &\quad + \sum_{\substack{i,k=0 \\ i \neq k}}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i} \left(\prod_{j=0}^{k-1} A_{t-j} \right) B_{t-k} \right]. \end{aligned}$$

Vamos ver que apenas vai ser necessário fazer o estudo do primeiro termo, isto é, analisar a expressão $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right)^2 B_{t-i}^2 \right]$. De facto, como $A_t = \alpha_1 \eta_t^2$ e $B_t = \alpha_0 + \beta L_t$, e ainda $A_t, A_{t-1}, \dots, A_{t-(i-1)}$ são independentes entre si e independentes de $B_t, B_{t-1}, \dots, t \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right)^2 B_{t-i}^2 \right] &= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_1^2 \mathbb{E}(\eta_{t-j}^4) \right) \mathbb{E}(B_{t-i}^2) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_1^2 \mathbb{E}(\eta_0^4) \right) \mathbb{E}(B_0^2), \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} (\alpha_1^2 \mathbb{E}(\eta_0^4))^i \mathbb{E}(B_0^2). \end{aligned}$$

pois (η_t^4) são i.d. e L é estritamente estacionário. Esta última série converge se $\alpha_1^2 \mathbb{E}(\eta_0^4) < 1 \Leftrightarrow \alpha_1 < \frac{1}{\sqrt{\mathbb{E}(\eta_0^4)}}$ (pois $\alpha_1 > 0$).

Em suma, caso $\alpha_1 \geq \frac{1}{\sqrt{\mathbb{E}(\eta_0^4)}}$ a série divergia e portanto, independentemente da convergência do segundo termo, $\mathbb{E}(\sigma_{t+1}^4)$ não seria finita. Como consequência da estacionaridade estrita dada pelo Corolário 3.2.1, $\mathbb{E}(\sigma_0^4)$ também não seria finita. \square

Observação 2. Como é referido em Voutilainen et al. [10] a prova da implicação inversa do lema anterior decorre do Teorema 3.2 de Karlsen [7].

Finalmente apresentamos a prova do Corolário 3.2.2.

Demonstração. Começemos por notar que também aqui decorre do Teorema 3.2.1 que a solução única na classe dos processos que verificam $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(\sigma_t^2) < +\infty$ é dada por

$$\sigma_{t+1}^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i},$$

pois como L é fracamente estacionário então é de segunda ordem, isto é, $\mathbb{E}(L_t^2) < +\infty$. Ora,

$$\begin{aligned} \|H_{k,t} - \sigma_{t+1}^2\|_2^2 &= \left\| \sum_{i=0}^k \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i} - \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i} \right\|_2^2 \\ &= \left\| \sum_{i=k+1}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i} \right\|_2^2 \\ &\leq \sum_{i=k+1}^{+\infty} \left\| \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i} \right\|_2^2 \\ &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\left(\left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

que tende para 0 quando $k \rightarrow +\infty$ já que é o resto de uma série convergente, como decorre da prova do Lema 3.2.2. Assim,

$$\mathbb{E}(H_{k,t} - \sigma_{t+1}^2)^2 \longrightarrow 0, \quad \text{quando } k \rightarrow +\infty$$

e, consequentemente, $H_{k,t} \longrightarrow \sigma_{t+1}^2$, em \mathcal{L}_2 , quando $k \rightarrow +\infty$.

Por último, em virtude da estacionaridade fraca de L , deduzimos que para $\forall k$, $H_{k,t}$ é fracamente estacionário pois

$$\mathbb{E}(H_{k,t}) = \sum_{i=0}^k \mathbb{E} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) \mathbb{E}(B_{t-i}) = \sum_{i=0}^k \prod_{j=0}^{i-1} \mathbb{E}(A_{t-j}) (\alpha_0 + \beta \mathbb{E}(L_0)) = \sum_{i=0}^k \alpha_1^i (\alpha_0 + \beta \mathbb{E}(L_0))$$

é apenas função de k e $\mathbb{E}(H_{k,t} H_{k,t+h})$ é apenas função de k e h .

Desta forma, provou-se que (3.5) é a única solução fracamente estacionária do modelo (3.1). \square

3.3 Parâmetros do modelo e equações do tipo Yule-Walker

Nesta secção procuramos expressões, envolvendo os parâmetros do modelo (3.1), que permitam obter estimadores com boas propriedades.

Voutilainen et al. [10] propõe uma abordagem baseada numa caracterização auto-regressiva de ordem 1 utilizando as funções de autocovariância de ε^2 e de L que conduzem a equações quadráticas do tipo Yule-Walker.

No que se segue apresentamos formas de obter os parâmetros α_0 , α_1 e β que constituem a base de construção para estimadores adequados.

A partir deste momento assumiremos que $\mathbb{E}(L_0^2) < +\infty$ e $\alpha_1 < 1$.

Consideremos que a solução σ^2 é estacionária nos dois sentidos e que o processo L é estritamente estacionário com $\mathbb{E}(L_0) = k$. Do modelo (3.1) tem-se

$$\begin{aligned}\varepsilon_t^2 &= \sigma_t^2 \eta_t^2 = \sigma_t^2 \eta_t^2 - \sigma_t^2 + \sigma_t^2 = \sigma_t^2 \eta_t^2 - \sigma_t^2 + \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta L_{t-1} \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \sigma_t^2 (\eta_t^2 - 1) + \beta L_{t-1}\end{aligned}\quad (3.12)$$

e portanto, considerando a esperança matemática vem

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varepsilon_t^2) &= \alpha_0 + \alpha_1 \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^2) + \mathbb{E}(\sigma_t^2 (\eta_t^2 - 1)) + \beta \mathbb{E}(L_{t-1}) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^2) + \mathbb{E}(\sigma_t^2) \mathbb{E}(\eta_t^2 - 1) + \beta \mathbb{E}(L_0),\end{aligned}$$

pois σ_t^2 é independente de η_t^2 e L é estritamente estacionário. Mais, dado que $(\eta_t^2, t \in \mathbb{Z})$ é uma sucessão de variáveis aleatórias com a mesma lei, ou seja, $\mathbb{E}(\eta_t^2) = \mathbb{E}(\eta_0^2) = 1$, obtemos

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^2) + \beta k.$$

Da estacionaridade de σ^2 decorre a estacionaridade de ε^2 , vindo então

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \frac{\alpha_0 + \beta k}{1 - \alpha_1}. \quad (3.13)$$

Seja $Y = (Y_t, t \in \mathbb{Z})$ um processo auxiliar definido por

$$Y_t = \varepsilon_t^2 - \frac{\alpha_0 + \beta k}{1 - \alpha_1}.$$

Ora, usando (3.12) vem

$$\begin{aligned}Y_t &= \varepsilon_t^2 - \frac{\alpha_0 + \beta k}{1 - \alpha_1} = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_1 \frac{\alpha_0 + \beta k}{1 - \alpha_1} + \sigma_t^2 (\eta_t^2 - 1) + \beta L_{t-1} - \frac{\alpha_0 + \beta k}{1 - \alpha_1} \\ &= \alpha_1 Y_{t-1} + \sigma_t^2 (\eta_t^2 - 1) + \beta L_{t-1} + \alpha_0 + (\alpha_1 - 1) \frac{\alpha_0 + \beta k}{1 - \alpha_1} \\ &= \alpha_1 Y_{t-1} + \sigma_t^2 (\eta_t^2 - 1) + \beta (L_{t-1} - k) \\ &= \alpha_1 Y_{t-1} + Z_t,\end{aligned}$$

com $Z_t = \sigma_t^2 (\eta_t^2 - 1) + \beta (L_{t-1} - k)$.

Assim, Y admite a seguinte representação $AR(1)$:

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + Z_t, \quad \text{com } 0 < \alpha_1 < 1.$$

Uma vez determinada a caracterização $AR(1)$ segue-se um resultado que, utilizando a função de autocovariância de ε^2 , dada por $\gamma(n) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2) - \left(\frac{\alpha_0 + \beta k}{1 - \alpha_1}\right)^2$, e de L , dada por $s(n) = \mathbb{E}(L_t L_{t+n}) - k^2$, nos auxilia para o cálculo dos parâmetros α_0 , α_1 e β .

Lema 3.3.1. *Suponhamos que $\mathbb{E}(\eta_0^4) < +\infty$ e $\alpha_1 < \frac{1}{\sqrt{\mathbb{E}(\eta_0^4)}}$. Então para qualquer $n \neq 0$ vem*

$$\alpha_1^2 \gamma(n) - \alpha_1 (\gamma(n+1) + \gamma(n-1)) + \gamma(n) - \beta^2 s(n) = 0 \quad (3.14)$$

e para $n = 0$ vem

$$\alpha_1^2 \gamma(0) - 2\alpha_1 \gamma(1) + \gamma(0) - \frac{\mathbb{E}(\varepsilon_0^4) \mathbb{V}(\eta_0^2)}{\mathbb{E}(\eta_0^4)} - \beta^2 s(0) = 0. \quad (3.15)$$

Demonstração. A prova da igualdade (3.14) segue o Lema 1 de Voutilainen et al. [11]. Note-se que a estacionaridade estrita dos processos Y e Z decorre da estacionaridade estrita do processo σ^2 .

(a) Os processos Y e Z admitem momentos de segunda ordem:

$$\mathbb{E}(Y_t^2) = \mathbb{E}(Y_0^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_0^4) - 2 \frac{\alpha_0 + \beta k}{1 - \alpha_1} \mathbb{E}(\varepsilon_0^2) + \left(\frac{\alpha_0 + \beta k}{1 - \alpha_1} \right)^2.$$

Como σ_t^4 é independente de η_t^4 tem-se

$$\mathbb{E}(\varepsilon_0^4) = \mathbb{E}(\sigma_0^4 \eta_0^4) = \mathbb{E}(\sigma_0^4) \mathbb{E}(\eta_0^4) < +\infty, \text{ por hipótese e pelo Lema 3.2.2.} \quad (3.16)$$

Quanto ao processo Z tem-se, usando os mesmos argumentos,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_t^2) &= \mathbb{E}[\sigma_t^4 (\eta_t^2 - 1)^2] + \beta^2 \mathbb{E}[(L_{t-1} - k)^2] + 2\beta \mathbb{E}[\sigma_t^2 (\eta_t^2 - 1)(L_{t-1} - k)] \\ &= \mathbb{E}(\sigma_t^4 \eta_t^4) - 2\mathbb{E}(\sigma_t^4 \eta_t^2) + \mathbb{E}(\sigma_t^4) + \beta^2 \mathbb{E}(L_{t-1}^2) - 2k\beta^2 \mathbb{E}(L_{t-1}) + k^2\beta^2 + \\ &\quad + 2\beta \mathbb{E}(\sigma_t^2 \eta_t^2 L_{t-1}) - 2k\beta \mathbb{E}(\sigma_t^2 \eta_t^2) - 2\beta \mathbb{E}(\sigma_t^2 L_{t-1}) + 2k\beta \mathbb{E}(\sigma_t^2) \\ &= \mathbb{E}(\sigma_t^4) \mathbb{E}(\eta_t^4) - \mathbb{E}(\sigma_t^4) + \beta^2 \mathbb{E}(L_{t-1}^2) - k^2\beta^2 < +\infty. \end{aligned}$$

(b) Y e Z são processos centrados:

$$\mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E} \left[\varepsilon_t^2 - \frac{\alpha_0 + \beta k}{1 - \alpha_1} \right] = 0$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_t) &= \mathbb{E}[\sigma_t^2 (\eta_t^2 - 1) + \beta(L_{t-1} - k)] = \mathbb{E}[\sigma_t^2 (\eta_t^2 - 1)] + \beta \mathbb{E}(L_{t-1}) - \beta k \\ &= \mathbb{E}(\sigma_t^2) \mathbb{E}(\eta_t^2) - \mathbb{E}(\sigma_t^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Notemos ainda que a função de autocovariância de Y é igual à de ε^2 . Com efeito,

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_t, Y_{t+n}) &= \mathbb{E}(Y_t Y_{t+n}) - \mathbb{E}(Y_t) \mathbb{E}(Y_{t+n}) = \mathbb{E} \left[\left(\varepsilon_t^2 - \frac{\alpha_0 + \beta k}{1 - \alpha_1} \right) \left(\varepsilon_{t+n}^2 - \frac{\alpha_0 + \beta k}{1 - \alpha_1} \right) \right] \\ &= \mathbb{E}(\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2) - 2 \frac{\alpha_0 + \beta k}{1 - \alpha_1} \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) + \left(\frac{\alpha_0 + \beta k}{1 - \alpha_1} \right)^2 \\ &= \mathbb{E}(\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2) - \left(\frac{\alpha_0 + \beta k}{1 - \alpha_1} \right)^2 = \gamma(n). \end{aligned}$$

Assim, dado que os processos Y e Z são centrados e admitem momentos de segunda ordem finitos, multiplicando a equação $Y_n - \alpha_1 Y_{n-1} = Z_n$ por $Z_0 = Y_0 - \alpha_1 Y_{-1}$ e considerando a esperança matemática vem

$$\begin{aligned}
& (Y_n - \alpha_1 Y_{n-1})(Y_0 - \alpha_1 Y_{-1}) = Z_n Z_0 \\
\Rightarrow & \mathbb{E}((Y_n - \alpha_1 Y_{n-1})(Y_0 - \alpha_1 Y_{-1})) = \mathbb{E}(Z_n Z_0) \\
\Leftrightarrow & \mathbb{E}(Y_n Y_0) - \alpha_1 \mathbb{E}(Y_n Y_{-1}) - \alpha_1 \mathbb{E}(Y_{n-1} Y_0) + \alpha_1^2 \mathbb{E}(Y_{n-1} Y_{-1}) = \mathbb{E}(Z_n Z_0) \\
\Leftrightarrow & \alpha_1^2 \gamma(n) - \alpha_1 (\gamma(n+1) + \gamma(n-1)) + \gamma(n) - r(n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{3.17}
\end{aligned}$$

onde $r(n)$ representa a função de autocovariância de Z .

O objetivo agora passa por determinar $r(n)$. Seja $n \geq 1$. Então, uma vez que σ_s^2 é independente de η_t , para $s \leq t$ e os processos η e L são independentes um do outro, vem

$$\begin{aligned}
r(n) &= \text{cov}(Z_t, Z_{t+n}) = \text{cov}(Z_1, Z_{n+1}) = \mathbb{E}(Z_1 Z_{n+1}) \\
&= \mathbb{E}[(\sigma_1^2 (\eta_1^2 - 1) + \beta(L_0 - k))(\sigma_{n+1}^2 (\eta_{n+1}^2 - 1) + \beta(L_n - k))] \\
&= \mathbb{E}[\sigma_1^2 \sigma_{n+1}^2 (\eta_1^2 - 1)(\eta_{n+1}^2 - 1)] + \beta \mathbb{E}[\sigma_1^2 (\eta_1^2 - 1)(L_n - k)] + \\
&\quad + \beta \mathbb{E}[\sigma_{n+1}^2 (\eta_{n+1}^2 - 1)(L_0 - k)] + \beta^2 \mathbb{E}[(L_n - k)(L_0 - k)] \\
&= \beta^2 \mathbb{E}(L_0 L_n - k L_0 - k L_n + k^2) = \beta^2 (\mathbb{E}(L_0 L_n) - k^2) = \beta^2 s(n).
\end{aligned}$$

Deste modo, substituindo $r(n)$ em (3.17) provamos (3.14).

Para mostrar (3.15), calculamos $r(0)$ e, utilizando os mesmos argumentos tem-se

$$\begin{aligned}
r(0) &= \mathbb{V}(Z_t) = \mathbb{E}[(\sigma_1^2 (\eta_1^2 - 1) + \beta(L_0 - k))^2] \\
&= \mathbb{E}(\sigma_1^4) \mathbb{E}(\eta_1^4) - 2\mathbb{E}(\sigma_1^4) \mathbb{E}(\eta_1^2) + \mathbb{E}(\sigma_1^4) + \beta^2 \mathbb{E}(L_0^2) - \beta^2 k^2 \\
&= \mathbb{E}(\sigma_1^4) (\mathbb{E}(\eta_1^4) - 1) + \beta^2 (\mathbb{E}(L_0^2) - k^2) \\
&= \mathbb{E}(\sigma_1^4) \mathbb{V}(\eta_0^2) + \beta^2 s(0).
\end{aligned}$$

Logo, de (3.17) e sabendo que $\gamma(-1) = \gamma(1)$ vem, para $n = 0$,

$$\begin{aligned}
& \alpha_1^2 \gamma(0) - \alpha_1 (\gamma(1) + \gamma(-1)) + \gamma(0) - r(0) = 0 \\
\Leftrightarrow & \alpha_1^2 \gamma(0) - 2\alpha_1 \gamma(1) + \gamma(0) - \mathbb{E}(\sigma_1^4) \mathbb{V}(\eta_0^2) - \beta^2 s(0) = 0. \tag{3.18}
\end{aligned}$$

Segue de (3.16) que $\mathbb{E}(\sigma_0^4) = \frac{\mathbb{E}(\epsilon_0^4)}{\mathbb{E}(\eta_0^4)}$ e assim, substituindo em (3.18) obtemos (3.15). \square

Vamos agora exprimir α_0 , α_1 e β em termos de $\vec{\gamma} = [\gamma(n), \gamma(n+1), \gamma(n-1), \gamma(1), \gamma(0), \mathbb{E}(\varepsilon_0^4)]$. Seja $n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{De (3.15) deduzimos } \beta^2 = \frac{1}{s(0)} \left(\alpha_1^2 \gamma(0) - 2\alpha_1 \gamma(1) + \gamma(0) - \frac{\mathbb{E}(\varepsilon_0^4) \mathbb{V}(\eta_0^2)}{\mathbb{E}(\eta_0^4)} \right) \quad (3.19)$$

e, substituindo em (3.14) vem

$$\begin{aligned} & \alpha_1^2 \gamma(n) - \alpha_1 (\gamma(n+1) + \gamma(n-1)) + \gamma(n) - \frac{s(n)}{s(0)} \left(\alpha_1^2 \gamma(0) - 2\alpha_1 \gamma(1) + \gamma(0) - \frac{\mathbb{E}(\varepsilon_0^4) \mathbb{V}(\eta_0^2)}{\mathbb{E}(\eta_0^4)} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \alpha_1^2 \left[\gamma(n) - \frac{s(n)}{s(0)} \gamma(0) \right] + \alpha_1 \left[2\gamma(1) \frac{s(n)}{s(0)} - (\gamma(n+1) + \gamma(n-1)) \right] + \gamma(n) + \\ & + \frac{s(n)}{s(0)} \left(\frac{\mathbb{E}(\varepsilon_0^4) \mathbb{V}(\eta_0^2)}{\mathbb{E}(\eta_0^4)} - \gamma(0) \right) = 0. \end{aligned}$$

Considerando a seguinte notação:

$$\begin{aligned} a(\vec{\gamma}) &= \gamma(n) - \frac{s(n)}{s(0)} \gamma(0) \\ b(\vec{\gamma}) &= 2 \frac{s(n)}{s(0)} \gamma(1) - (\gamma(n+1) + \gamma(n-1)) \\ c(\vec{\gamma}) &= \gamma(n) + \frac{s(n)}{s(0)} \left(\frac{\mathbb{E}(\varepsilon_0^4) \mathbb{V}(\eta_0^2)}{\mathbb{E}(\eta_0^4)} - \gamma(0) \right), \end{aligned}$$

obtemos então uma equação quadrática que permite o cálculo de α_1 dada por:

$$\alpha_1^2 a(\vec{\gamma}) + \alpha_1 b(\vec{\gamma}) + c(\vec{\gamma}) = 0.$$

Finalmente, assumindo que $a(\vec{\gamma}) \neq 0$, tem-se

$$\alpha_1(\vec{\gamma}) = \frac{-b(\vec{\gamma}) \pm \sqrt{b(\vec{\gamma})^2 - 4a(\vec{\gamma})c(\vec{\gamma})}}{2a(\vec{\gamma})} \quad (3.20)$$

e, consequentemente, decorre de (3.19) que

$$\beta(\vec{\gamma}) = \sqrt{\frac{1}{s(0)} \left(\alpha_1(\vec{\gamma})^2 \gamma(0) - 2\alpha_1(\vec{\gamma}) \gamma(1) + \gamma(0) - \frac{\mathbb{E}(\varepsilon_0^4) \mathbb{V}(\eta_0^2)}{\mathbb{E}(\eta_0^4)} \right)}. \quad (3.21)$$

Para o parâmetro α_0 , usando (3.13) obtemos a seguinte expressão:

$$\alpha_0(\vec{\gamma}, \mu) = \mu(1 - \alpha_1(\vec{\gamma})) - \beta(\vec{\gamma}), \quad \text{com } \mu = \mathbb{E}(\varepsilon_0^2). \quad (3.22)$$

3.3.1 Estimadores para os parâmetros do modelo

É com base nas expressões (3.20), (3.21) e (3.22) que construímos os estimadores para os coeficientes do modelo. Consideremos, sem perda de generalidade, $\mathbb{E}(L_0) = k = 1$.

Numa primeira análise verificamos que estas expressões envolvem a função de autocovariância de ε^2 , γ , e portanto esta deve ser estimada. Para além disso, notamos a presença da função de autocovariância de L que, para este estudo, se assume como sendo totalmente conhecida.

Nesse sentido, o que se segue é relativo ao estimador da função γ que denotaremos por $\hat{\gamma}$. Seja N o tamanho da amostra e $(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \dots, \varepsilon_N^2)$ uma observação da série ε resultante do modelo (3.1). Vamos mostrar que o estimador de $\gamma(n)$ dado por

$$\hat{\gamma}(n) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-n} (\varepsilon_t^2 - \bar{\varepsilon}^2)(\varepsilon_{t+n}^2 - \bar{\varepsilon}^2) \quad \text{para } n \geq 0, \quad (3.23)$$

onde $\bar{\varepsilon}^2$ é a média de tais observações, é consistente, isto é, converge em probabilidade para $\gamma(n)$. Como

$$\hat{\gamma}(n) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-n} [\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2 - \bar{\varepsilon}^2 \varepsilon_t^2 - \bar{\varepsilon}^2 \varepsilon_{t+n}^2 + \bar{\varepsilon}^2 \bar{\varepsilon}^2],$$

analisamos os termos:

- $\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2$
- $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-n} \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2$

De seguida, apresentamos um lema que nos auxilia na demonstração dos dois resultados que respondem à consistência desses termos.

Lema 3.3.2. *Sejam $t, s \in \mathbb{Z}$. Então*

$$\mathbb{E}(\sigma_t^2 L_s) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} + \beta \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_1^i f(t - s - i - 1),$$

com $f(t - s) = \mathbb{E}(L_t L_s) = \text{Cov}(L_t, L_s) + 1 = s(t - s) + 1$.

Demonstração. Dado que $\sigma_t^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j-1} \right) B_{t-i-1}$ com $A_t = \alpha_1 \eta_t^2$ e $B_t = \alpha_0 + \beta L_t$, então

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\sigma_t^2 L_s) &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_1 \eta_{t-j-1}^2 \right) (\alpha_0 + \beta L_{t-i-1}) L_s \right] \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\left(\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_1 \eta_{t-j-1}^2 \right) (\alpha_0 + \beta L_{t-i-1}) L_s \right] \quad (\text{Teorema da Convergência Monótona}) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\left(\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_1 \eta_{t-j-1}^2 \right) \right] \mathbb{E}[(\alpha_0 + \beta L_{t-i-1}) L_s], \end{aligned}$$

pois η_t e L_t são independentes. Logo, como $\mathbb{E}(\eta_t^2) = 1$ e $\mathbb{E}(L_s) = 1$, vem

$$\mathbb{E}(\sigma_t^2 L_s) = \sum_{i=0}^{+\infty} [\alpha_1^i \times (\alpha_0 + \beta \mathbb{E}(L_{t-i-1} L_s))].$$

Assim,

$$\mathbb{E}(\sigma_t^2 L_s) = \alpha_0 \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_1^i + \beta \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_1^i \mathbb{E}(L_{t-i-1} L_s) = \alpha_0 \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_1^i + \beta \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_1^i f(t-i-1-s).$$

Estas últimas séries convergem uma vez que $\alpha_1 < 1$ e $E(L_0^2) < +\infty$. Deste modo, tem-se

$$\mathbb{E}(\sigma_t^2 L_s) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \beta \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_1^i f(t-i-1-s).$$

□

Posto isto, segue-se então o resultado da convergência em probabilidade de $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2$.

Lema 3.3.3. *Suponhamos que $\mathbb{E}(\eta_0^4) < +\infty$ e quando $t \rightarrow +\infty$, $Cov(L_0, L_t) \rightarrow 0$.*

Se $\alpha_1 < \frac{1}{\sqrt{\mathbb{E}(\eta_0^4)}}$ então

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2 \longrightarrow \mathbb{E}(\varepsilon_0^2), \text{ em probabilidade, } N \rightarrow +\infty.$$

Demonstração. A prova deste Lema é feita com recurso a um resultado que se encontra em Voutilainen et al. [10]⁽¹⁴⁾. Começamos por mostrar as hipóteses que são exigidas nesse resultado:

- $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2)$ existe e não depende de t ;
- $\mathbb{V}(\varepsilon_t^2) \leq C$;
- $Cov(\varepsilon_1^2, \varepsilon_{t+1}^2)$ converge para zero quando $t \rightarrow +\infty$,

A alínea a) é imediata uma vez que de (3.13) se tem $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \frac{\alpha_0 + \beta}{1 - \alpha_1}$, para $k = 1$. Quanto à alínea b), sabe-se que $\mathbb{V}(\varepsilon_t^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^4) - (\mathbb{E}(\varepsilon_t^2))^2$. Ora,

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t^4) = \mathbb{E}(\sigma_t^4 \eta_t^4) = \mathbb{E}(\sigma_0^4) \mathbb{E}(\eta_0^4).$$

Dado que por hipótese se tem $\mathbb{E}(\eta_0^4) < +\infty$, L estritamente estacionário e $\alpha_1 < \frac{1}{\sqrt{\mathbb{E}(\eta_0^4)}}$, decorre do Lema 3.2.2 que $\mathbb{E}(\sigma_0^4) < +\infty$ e, portanto,

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t^4) < +\infty.$$

⁽¹⁴⁾Seja (U_1, U_2, \dots) uma sequência de variáveis aleatórias com igual esperança matemática. Consideremos que $\mathbb{V}(U_j) \leq C$ e $|Cov(U_j, U_k)| \leq g(|k-j|)$, onde $g(i) \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$. Então $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k \rightarrow \mathbb{E}(U_1)$ em \mathcal{L}_2 (Voutilainen et al. [10], lema 7, p.217).

Desta forma, concluímos que $\mathbb{V}(\varepsilon_t^2) \leq C$. Relativamente à alínea c), tem-se

$$\text{Cov}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t+1}^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+1}^2) - \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) \mathbb{E}(\varepsilon_{t+1}^2).$$

Começamos por fazer o estudo da $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+1}^2)$. Seja $t \geq 2$. De (3.3) vem para $k = t - 1$

$$\sigma_{t+1}^2 = \left(\prod_{i=0}^{t-1} A_{t-i} \right) \sigma_1^2 + \sum_{i=0}^{t-1} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i}$$

e, conseqüentemente

$$\begin{aligned} \varepsilon_{t+1}^2 &= \sigma_{t+1}^2 \eta_{t+1}^2 = \eta_{t+1}^2 \left[\left(\prod_{i=0}^{t-1} A_{t-i} \right) \sigma_1^2 + \sum_{i=0}^{t-1} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i} \right] \\ &= \eta_{t+1}^2 \left[\left(\prod_{i=0}^{t-2} A_{t-i} \right) \frac{\varepsilon_1^2}{\eta_1^2} \times \alpha_1 \eta_1^2 + \sum_{i=0}^{t-1} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i} \right], \end{aligned}$$

pois $\varepsilon_1^2 = \sigma_1^2 \eta_1^2$ e $A_1 = \alpha_1 \eta_1^2$. Assim,

$$\varepsilon_{t+1}^2 = \eta_{t+1}^2 \left[\left(\prod_{i=0}^{t-2} A_{t-i} \right) \alpha_1 \varepsilon_1^2 + \sum_{i=0}^{t-1} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i} \right].$$

Multiplicando por ε_t^2 e substituindo $B_t = \alpha_0 + \beta L_t$ obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_{t+1}^2 \varepsilon_t^2 &= \eta_{t+1}^2 \left(\prod_{i=0}^{t-2} A_{t-i} \right) \alpha_1 \varepsilon_1^4 + \eta_{t+1}^2 \varepsilon_1^2 \sum_{i=0}^{t-1} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i} \\ &= \eta_{t+1}^2 \left(\prod_{i=0}^{t-2} \alpha_1 \eta_{t-i}^2 \right) \alpha_1 \varepsilon_1^4 + \eta_{t+1}^2 \varepsilon_1^2 \sum_{i=0}^{t-1} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_1 \eta_{t-j}^2 \right) (\alpha_0 + \beta L_{t-i}) \end{aligned}$$

e, aplicando a esperança matemática, vem

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varepsilon_{t+1}^2 \varepsilon_t^2) &= \mathbb{E} \left[\eta_{t+1}^2 \left(\prod_{i=0}^{t-2} \alpha_1 \eta_{t-i}^2 \right) \alpha_1 \varepsilon_1^4 \right] + \alpha_0 \mathbb{E} \left[\eta_{t+1}^2 \varepsilon_1^2 \sum_{i=0}^{t-1} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_1 \eta_{t-j}^2 \right) \right] + \\ &\quad + \beta \mathbb{E} \left[L_{t-i} \eta_{t+1}^2 \varepsilon_1^2 \sum_{i=0}^{t-1} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_1 \eta_{t-j}^2 \right) \right] = \\ &= \alpha_1^t \mathbb{E} \left[\eta_{t+1}^2 \left(\prod_{i=0}^{t-2} \eta_{t-i}^2 \right) \right] \mathbb{E}(\varepsilon_1^4) + \alpha_0 \mathbb{E} \left[\eta_{t+1}^2 \sum_{i=0}^{t-1} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_1 \eta_{t-j}^2 \right) \right] \mathbb{E}(\varepsilon_1^2) + \\ &\quad + \beta \mathbb{E} \left[\eta_{t+1}^2 \sum_{i=0}^{t-1} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_1 \eta_{t-j}^2 \right) \right] \mathbb{E}(L_{t-i} \varepsilon_1^2), \end{aligned}$$

pois η_t é independente de L_t e de σ_s , $s \leq t$. Além disso, como (η_t) são i.i.d com $\mathbb{E}(\eta_0^2) = 1$, concluímos

$$\mathbb{E}(\varepsilon_{t+1}^2 \varepsilon_t^2) = \alpha_1^t \mathbb{E}(\varepsilon_1^4) + \alpha_0 \mathbb{E}(\varepsilon_1^2) \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i + \beta \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i \mathbb{E}(\varepsilon_1^2 L_{t-i}).$$

Mais, visto que $\alpha_1 < 1$, decorre do lema 3.3.2

$$\mathbb{E}(\varepsilon_1^2 L_{t-i}) = \mathbb{E}(\eta_1^2 \sigma_1^2 L_{t-i}) = \mathbb{E}(\eta_1^2) \mathbb{E}(\sigma_1^2 L_{t-i}) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} + \beta \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_1^j f(i-t-j),$$

e assim

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varepsilon_{t+1}^2 \varepsilon_1^2) &= \alpha_1^t \mathbb{E}(\varepsilon_1^4) + \alpha_0 \mathbb{E}(\varepsilon_1^2) \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i + \beta \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i \left(\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} + \beta \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_1^j f(i-t-j) \right) \\ &= \alpha_1^t \mathbb{E}(\varepsilon_1^4) + \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i \left(\alpha_0 \mathbb{E}(\varepsilon_1^2) + \frac{\beta \alpha_0}{1 - \alpha_1} \right) + \beta^2 \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_1^{i+j} f(i-t-j) \\ &= \alpha_1^t \mathbb{E}(\varepsilon_0^4) + \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_1^i \left(\alpha_0 \mathbb{E}(\varepsilon_0^2) + \frac{\beta \alpha_0}{1 - \alpha_1} \right) + \beta^2 \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_1^{i+j} f(i-t-j), \end{aligned}$$

pois o processo ε é fortemente estacionário. Ora, tomando o limite tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\varepsilon_{t+1}^2 \varepsilon_1^2) &= \frac{\alpha_0 \mathbb{E}(\varepsilon_0^2)}{1 - \alpha_1} + \frac{\beta \alpha_0}{(1 - \alpha_1)^2} + \beta^2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_1^{i+j} f(i-t-j) \\ &= \frac{\alpha_0^2 + \alpha_0 \beta}{(1 - \alpha_1)^2} + \frac{\beta \alpha_0}{(1 - \alpha_1)^2} + \beta^2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_1^{i+j} f(i-t-j), \quad \text{pois } \mathbb{E}(\varepsilon_0^2) = \frac{\alpha_0 + \beta}{1 - \alpha_1} \\ &= \frac{\alpha_0^2 + 2\alpha_0 \beta}{(1 - \alpha_1)^2} + \beta^2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_1^{i+j} f(i-t-j). \end{aligned}$$

Dado que $f(t) = s(t) + 1 = \text{Cov}(L_0, L_t) + 1$ e, por hipótese, $\text{Cov}(L_0, L_t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$ então

$$\exists M > 0 : |\alpha_1^{i+j} f(i-t-j)| \leq M \alpha_1^{i+j} \quad \forall i, j, t.$$

Deste modo, utilizando o Teorema da convergência dominada⁽¹⁵⁾ concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_1^{i+j} f(i-t-j) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_1^{i+j} = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_1^i \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_1^j = \frac{1}{(1 - \alpha_1)^2},$$

e portanto,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\varepsilon_{t+1}^2 \varepsilon_1^2) = \frac{\alpha_0^2 + 2\alpha_0 \beta}{(1 - \alpha_1)^2} + \frac{\beta^2}{(1 - \alpha_1)^2} = \left(\frac{\alpha_0 + \beta}{1 - \alpha_1} \right)^2 = [\mathbb{E}(\varepsilon_1^2)]^2.$$

Provamos que, quando $t \rightarrow +\infty$, $\text{Cov}(\varepsilon_1^2, \varepsilon_{t+1}^2) \rightarrow 0$. Assim, aplicando o resultado⁽¹⁴⁾ vem

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2 \longrightarrow \mathbb{E}(\varepsilon_0^2), \quad \text{em probabilidade quando } N \rightarrow +\infty.$$

□

⁽¹⁵⁾Teorema da convergência dominada: Se $X_n \rightarrow X$, e existe uma variável aleatória $Z \in L_1$ tal que $|X_n| \leq Z$, então $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mathbb{E}(X)$. (Resnick [9], Teorema 5.3.3, p.133).

Finalmente, para completar o estudo da consistência de $\hat{\gamma}$ surge um resultado que estabelece condições para a convergência em probabilidade de $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-n} \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2$.

Lema 3.3.4. *Seja $\mathbb{E}(L_0^4) < +\infty$ e $\mathbb{E}(\eta_0^8) < +\infty$. Mais, suponhamos que $\forall n, n_1$ e n_2 fixos se verificam as seguintes convergências quando $t \rightarrow +\infty$:*

- $Cov(L_0, L_t) \rightarrow 0$
- $Cov(L_0 L_n, L_{\pm t}) \rightarrow 0$
- $Cov(L_0 L_{n_1}, L_t L_{t+n_2}) \rightarrow 0$.

Se $\alpha_1 < \frac{1}{\mathbb{E}(\eta_0^8)^{\frac{1}{4}}}$ então

$$\frac{1}{N-n} \sum_{t=1}^{N-n} \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2 \longrightarrow \mathbb{E}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2) \text{ em probabilidade } \forall n \in \mathbb{Z}, N \rightarrow +\infty.$$

Demonstração. Esta prova é semelhante à do Lema 3.3.3, isto é, a ideia é recorrer ao mesmo resultado ⁽¹⁴⁾, para $U_t = \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2$, com $t > n$. Começamos de modo similar ao anterior, ou seja, pretendemos mostrar os seguintes pressupostos:

- a) $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2)$ existe e não depende de t ;
- b) $\mathbb{V}(\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2) \leq C$;
- c) $|Cov(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2, \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2)| \leq g(|t|)$ onde $g(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Para a alínea a), sabendo que $\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2 \eta_t^2$, tem-se de (3.5) e usando o facto de ε ser estritamente estacionário

$$\mathbb{E}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2) = \mathbb{E} \left[\eta_0^2 \sum_{i_1=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-1-j} \right) B_{-1-i_1} \eta_n^2 \sum_{i_2=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i_2-1} A_{n-1-j} \right) B_{n-1-i_2} \right].$$

Uma vez que os termos das somas são não negativos vem pelo teorema da convergência monótona

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2) &= \sum_{i_1=0}^{+\infty} \sum_{i_2=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\eta_0^2 \eta_n^2 \prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-1-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{n-1-j} B_{-1-i_1} B_{n-1-i_2} \right] \\ &= \sum_{i_1=0}^{+\infty} \sum_{i_2=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\eta_0^2 \eta_n^2 \prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-1-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{n-1-j} \right] \mathbb{E}(B_{-1-i_1} B_{n-1-i_2}) \end{aligned}$$

pois η e L são processos independentes. Mas,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_{-1-i_1} B_{n-1-i_2}) &= \mathbb{E}([\alpha_0 + \beta L_{-1-i_1}][\alpha_0 + \beta L_{n-1-i_2}]) \\ &= \alpha_0^2 + \alpha_0 \beta \mathbb{E}(L_{n-1-i_2}) + \alpha_0 \beta \mathbb{E}(L_{-1-i_1}) + \beta^2 \mathbb{E}(L_{n-1-i_2} L_{-1-i_1}) \\ &= \alpha_0^2 + 2\alpha_0 \beta + \beta^2 f(n + i_1 - i_2), \end{aligned}$$

onde a última igualdade resulta da estacionaridade estrita do processo L com $\mathbb{E}(L_0) = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2) &= \sum_{i_1=0}^{+\infty} \sum_{i_2=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\eta_0^2 \eta_n^2 \prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-1-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{n-1-j} \right] (\alpha_0^2 + 2\alpha_0\beta + \beta^2 f(n+i_1-i_2)) \\ &= \sum_{i_1=0}^{+\infty} \sum_{i_2=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\eta_0^2 \eta_n^2 \prod_{j=0}^{i_1-1} \alpha_1 \eta_{-1-j}^2 \prod_{j=0}^{i_2-1} \alpha_1 \eta_{n-1-j}^2 \right] (\alpha_0^2 + 2\alpha_0\beta + \beta^2 f(n+i_1-i_2)) \\ &= \sum_{i_1=0}^{+\infty} \sum_{i_2=0}^{+\infty} \alpha_1^{i_1} \alpha_1^{i_2} \mathbb{E} \left[\eta_0^2 \eta_n^2 \prod_{j=0}^{i_1-1} \eta_{-1-j}^2 \prod_{j=0}^{i_2-1} \eta_{n-1-j}^2 \right] (\alpha_0^2 + 2\alpha_0\beta + \beta^2 f(n+i_1-i_2)) \\ &= \sum_{i_1=0}^{+\infty} \sum_{i_2=0}^{+\infty} \alpha_1^{i_1} \alpha_1^{i_2} (\alpha_0^2 + 2\alpha_0\beta + \beta^2 f(n+i_1-i_2)) \end{aligned}$$

porque o processo η é de componentes i.i.d. com $\mathbb{E}(\eta_0^2) = 1$. Deste forma, visto que $\alpha_1 < 1$ vem, tal como no lema anterior,

$$\mathbb{E}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2) = \frac{\alpha_0^2}{(1-\alpha_1)^2} + \frac{2\alpha_0\beta}{(1-\alpha_1)^2} + \beta^2 \sum_{i_1=0}^{+\infty} \sum_{i_2=0}^{+\infty} \alpha_1^{i_1+i_2} f(n+i_1-i_2).$$

Finalmente, como $\mathbb{E}(L_0^2) < +\infty$ e $\text{Cov}(L_0, L_t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, concluímos que $\mathbb{E}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2)$ existe e é independente de t .

No que toca à $\mathbb{V}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2)$, temos em conta a fórmula de Koenig, e portanto devemos analisar $\mathbb{E}(\varepsilon_0^4 \varepsilon_n^4)$, desenvolvendo cálculos análogos aos anteriores.

Relativamente à alínea c), pretendemos mostrar que

$$\text{Cov}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2, \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2 \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2) - \mathbb{E}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2) \mathbb{E}(\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2).$$

converge para zero quando $t \rightarrow +\infty$.

Dado que $\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t$, sucede de (3.5)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2 \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2) &= \mathbb{E} \left[\sum_{i_1=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-1-j} \right) B_{-1-i_1} \eta_0^2 \times \sum_{i_2=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i_2-1} A_{n-1-j} \right) B_{n-1-i_2} \eta_n^2 \times \right. \\ &\quad \times \sum_{i_3=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i_3-1} A_{t-1-j} \right) B_{t-1-i_3} \eta_t^2 \times \sum_{i_4=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=0}^{i_4-1} A_{t+n-1-j} \right) B_{t+n-1-i_4} \eta_{t+n}^2 \left. \right] \quad (3.24) \\ &= \mathbb{E}(Z_t)^{(16)}. \end{aligned}$$

O objetivo passa por utilizar o teorema da convergência dominada ⁽¹⁵⁾ em (3.24) para concluir que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2 \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2) = [\mathbb{E}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2)]^2$ pois pela estacionaridade estrita de ε , $\mathbb{E}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2)$. Assim, esta prova está dividida em duas partes:

1. Averiguar se existe uma v.a. dominante $Z \in \mathcal{L}_1$ tal que $|Z_t| \leq Z$;
2. Calcular o limite de (3.24), $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Z_t)$.

⁽¹⁶⁾Notação: $Z_t = Z_t(n)$.

Primeiramente, note-se que o Teorema da Convergência Monótona⁽⁶⁾ aplicado a (3.24) permite-nos afirmar que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2 \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2) &= \sum_{i_1=0}^{+\infty} \sum_{i_2=0}^{+\infty} \sum_{i_3=0}^{+\infty} \sum_{i_4=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\left(\prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-1-j} \right) B_{-1-i_1} \eta_0^2 \times \left(\prod_{j=0}^{i_2-1} A_{n-1-j} \right) B_{n-1-i_2} \eta_n^2 \times \right. \\ &\quad \times \left. \left(\prod_{j=0}^{i_3-1} A_{t-1-j} \right) B_{t-1-i_3} \eta_t^2 \times \left(\prod_{j=0}^{i_4-1} A_{t+n-1-j} \right) B_{t+n-1-i_4} \eta_{t+n}^2 \right] \\ &= \sum_{i_1=0}^{+\infty} \sum_{i_2=0}^{+\infty} \sum_{i_3=0}^{+\infty} \sum_{i_4=0}^{+\infty} \mathbb{E} (B_{-1-i_1} B_{n-1-i_2} B_{t-1-i_3} B_{t+n-1-i_4}) \times \\ &\quad \times \mathbb{E} \left[\eta_0^2 \eta_n^2 \eta_t^2 \eta_{t+n}^2 \prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-1-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{n-1-j} \prod_{j=0}^{i_3-1} A_{t-1-j} \prod_{j=0}^{i_4-1} A_{t+n-1-j} \right], \quad (3.25) \end{aligned}$$

pois η e L são processos independentes.

Deste modo, analisamos os seguintes termos separadamente:

$$\mathbb{E} (B_{-1-i_1} B_{n-1-i_2} B_{t-1-i_3} B_{t+n-1-i_4}) \quad (3.26)$$

$$\mathbb{E} \left[\eta_0^2 \eta_n^2 \eta_t^2 \eta_{t+n}^2 \prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-1-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{n-1-j} \prod_{j=0}^{i_3-1} A_{t-1-j} \prod_{j=0}^{i_4-1} A_{t+n-1-j} \right]. \quad (3.27)$$

1. Existência de uma v.a. dominante Z integrável

Relativamente a (3.26) decorre da estacionaridade estrita de B que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (B_{-1-i_1} B_{n-1-i_2} B_{t-1-i_3} B_{t+n-1-i_4}) &= \mathbb{E}[(\alpha_0 + \beta L_{-i_1})(\alpha_0 + \beta L_{n-i_2})(\alpha_0 + \beta L_{t-i_3})(\alpha_0 + \beta L_{t+n-i_4})] \\ &= \alpha_0^4 + 4\alpha_0^3\beta + \alpha_0^2\beta^2 [\mathbb{E}(L_{t-i_3}L_{t+n-i_4}) + \mathbb{E}(L_{n-i_2}L_{t+n-i_4}) + \mathbb{E}(L_{n-i_2}L_{t-i_3}) + \mathbb{E}(L_{-i_1}L_{t+n-i_4}) + \\ &\quad + \mathbb{E}(L_{-i_1}L_{t-i_3}) + \mathbb{E}(L_{-i_1}L_{n-i_2})] + \alpha_0\beta^3 [\mathbb{E}(L_{t+n-i_4}L_{n-i_2}L_{t-i_3}) + \mathbb{E}(L_{-i_1}L_{t-i_3}L_{t+n-i_4}) + \\ &\quad + \mathbb{E}(L_{-i_1}L_{n-i_2}L_{t+n-i_4}) + \mathbb{E}(L_{-i_1}L_{n-i_2}L_{t-i_3})] + \beta^4 \mathbb{E}(L_{-i_1}L_{n-i_2}L_{t-i_3}L_{t+n-i_4}), \quad (3.28) \end{aligned}$$

porque L é um processo fortemente estacionário com $\mathbb{E}(L_0) = 1$.

Ora, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz vem

- $\mathbb{E}(L_m L_z) \leq \sqrt{\mathbb{E}(L_m^2) \mathbb{E}(L_z^2)} \leq \sqrt[4]{\mathbb{E}(L_m^4) \mathbb{E}(L_z^4)}$, com $m, z \in \{-i_1, n-i_2, t-i_3, t+n-i_4\}$ e $m \neq z$.
- $\mathbb{E}(L_m L_z L_p) \leq \sqrt{\mathbb{E}(L_m^2 L_z^2) \mathbb{E}(L_p^2)} \leq \sqrt{\sqrt{\mathbb{E}(L_m^4) \mathbb{E}(L_z^4)} \mathbb{E}(L_p^2)}$, com $m, z, p \in \{-i_1, n-i_2, t-i_3, t+n-i_4\}$ e $m \neq z \neq p$.
- $\mathbb{E}(L_m L_z L_p L_q) \leq \sqrt{\mathbb{E}(L_m^2 L_z^2) \mathbb{E}(L_p^2 L_q^2)} \leq \sqrt{\sqrt{\mathbb{E}(L_m^4) \mathbb{E}(L_z^4)} \sqrt{\mathbb{E}(L_p^4) \mathbb{E}(L_q^4)}}$, com $m, z, p, q \in \{-i_1, n-i_2, t-i_3, t+n-i_4\}$ e $m \neq z \neq p \neq q$.

Assim, uma vez que por hipótese $\mathbb{E}(L_0^4) < +\infty$, concluímos que a expressão (3.26) é limitada.

Para mostrar (3.27) temos em conta as seguintes desigualdades que são obtidas utilizando novamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

- $\mathbb{E}(\eta_0^2) \leq \sqrt{\mathbb{E}(\eta_0^4)}$
- $\mathbb{E}(\eta_0^4) = \mathbb{E}(\eta_0^3 \eta_0) \leq \sqrt{\mathbb{E}(\eta_0^6) \mathbb{E}(\eta_0^2)}$ e portanto $\sqrt{\mathbb{E}(\eta_0^4)}_{\mathbb{E}(\eta_0^2)=1} \leq (\mathbb{E}(\eta_0^6))^{\frac{1}{4}} \leq (\mathbb{E}(\eta_0^8))^{\frac{1}{3}}$, porque $x^{\frac{1}{4}} \leq x^{\frac{1}{3}}$ para $x \geq 1$.
- $\mathbb{E}(\eta_0^4) \leq \sqrt{\mathbb{E}(\eta_0^8)}$, logo $\mathbb{E}(\eta_0^6) = \mathbb{E}(\eta_0^4 \eta_0^2) \leq \sqrt{\mathbb{E}(\eta_0^8) \mathbb{E}(\eta_0^4)} \leq (\mathbb{E}(\eta_0^8))^{\frac{3}{4}}$ e, consequentemente $(\mathbb{E}(\eta_0^6))^{\frac{1}{3}} \leq (\mathbb{E}(\eta_0^8))^{\frac{1}{4}}$.

Deduzimos então

$$1 = \mathbb{E}(\eta_0^2) \leq (\mathbb{E}(\eta_0^4))^{\frac{1}{2}} \leq (\mathbb{E}(\eta_0^6))^{\frac{1}{3}} \leq (\mathbb{E}(\eta_0^8))^{\frac{1}{4}} < +\infty. \quad (3.29)$$

Agora, note-se que, para $n > 0$ vem para (3.27), variando os índices dos produtos,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\eta_0^2 \eta_n^2 \eta_t^2 \eta_{t+n}^2 \prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-1-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{n-1-j} \prod_{j=0}^{i_3-1} A_{t-1-j} \prod_{j=0}^{i_4-1} A_{t+n-1-j} \right] \\ &= \mathbb{E}(\eta_{t+n}^2) \mathbb{E} \left[\eta_0^2 \eta_n^2 \eta_t^2 \prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-1-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{n-1-j} \prod_{j=0}^{i_3-1} A_{t-1-j} \prod_{j=0}^{i_4-1} A_{t+n-1-j} \right] \\ &\leq \mathbb{E}(\eta_{t+n}^2) \mathbb{E}(\eta_t^4) \mathbb{E} \left[\eta_0^2 \eta_n^2 \prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-1-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{n-1-j} \prod_{j=0}^{i_3-1} A_{t-1-j} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-1}}^{i_4-1} A_{t+n-1-j} \right] \\ &\leq \mathbb{E}(\eta_{t+n}^2) \mathbb{E}(\eta_t^4) \mathbb{E}(\eta_n^6) \mathbb{E} \left[\eta_0^2 \prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-1-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{n-1-j} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq t-n-1}}^{i_3-1} A_{t-1-j} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-1 \\ j \neq t-1}}^{i_4-1} A_{t+n-1-j} \right] \\ &\leq \mathbb{E}(\eta_{t+n}^2) \mathbb{E}(\eta_t^4) \mathbb{E}(\eta_n^6) \mathbb{E}(\eta_0^8) \mathbb{E} \left[\prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-1-j} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-1}}^{i_2-1} A_{n-1-j} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq t-n-1 \\ j \neq t-1}}^{i_3-1} A_{t-1-j} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-1 \\ j \neq t-1 \\ j \neq t+n-1}}^{i_4-1} A_{t+n-1-j} \right] \\ &= C_1 \mathbb{E} \left[\prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-1-j} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-1}}^{i_2-1} A_{n-1-j} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq t-n-1 \\ j \neq t-1}}^{i_3-1} A_{t-1-j} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-1 \\ j \neq t-1 \\ j \neq t+n-1}}^{i_4-1} A_{t+n-1-j} \right], \end{aligned}$$

tendo-se também, segundo Voutilainen et al. [10], para $n = 0$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\eta_0^2 \eta_n^2 \eta_t^2 \eta_{t+n}^2 \prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-1-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{n-1-j} \prod_{j=0}^{i_3-1} A_{t-1-j} \prod_{j=0}^{i_4-1} A_{t+n-1-j} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\eta_0^4 \eta_t^4 \prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-1-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{-1-j} \prod_{j=0}^{i_3-1} A_{t-1-j} \prod_{j=0}^{i_4-1} A_{t-1-j} \right] \\ &\leq C_2 \mathbb{E} \left[\prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{-j} \prod_{j=0}^{i_3-1} A_{t-j} \prod_{j=0}^{i_4-1} A_{t-j} \right] \leq C_2 \mathbb{E} \left[\prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{-j} \prod_{j=0}^{i_3-1} A_{-j} \prod_{j=0}^{i_4-1} A_{-j} \right]. \end{aligned}$$

Desta forma, para mostrar que (3.25) é limitada, resta verificar que

$$\sum_{i_1=0}^{+\infty} \sum_{i_2=0}^{+\infty} \sum_{i_3=0}^{+\infty} \sum_{i_4=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{-j} \prod_{j=0}^{i_3-1} A_{-j} \prod_{j=0}^{i_4-1} A_{-j} \right] < +\infty.$$

Mas, segundo [10], tem-se a majoração seguinte:

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1=0}^{+\infty} \sum_{i_2=0}^{+\infty} \sum_{i_3=0}^{+\infty} \sum_{i_4=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{-j} \prod_{j=0}^{i_3-1} A_{-j} \prod_{j=0}^{i_4-1} A_{-j} \right] \\ & \leq 4! \sum_{i_4=0}^{+\infty} \sum_{i_3=0}^{i_4} \sum_{i_2=0}^{i_3} \sum_{i_1=0}^{i_2} \mathbb{E} \left[\prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{-j} \prod_{j=0}^{i_3-1} A_{-j} \prod_{j=0}^{i_4-1} A_{-j} \right]. \end{aligned}$$

Ora, como o processo η é de variáveis independentes e identicamente distribuídas vem para $i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq i_4$, agrupando convenientemente de acordo com os índices,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{-j} \prod_{j=0}^{i_3-1} A_{-j} \prod_{j=0}^{i_4-1} A_{-j} \right] &= \alpha_1^{i_1+i_2+i_3+i_4} \mathbb{E} \left[\prod_{j=0}^{i_1-1} \eta_{-j}^2 \prod_{j=0}^{i_2-1} \eta_{-j}^2 \prod_{j=0}^{i_3-1} \eta_{-j}^2 \prod_{j=0}^{i_4-1} \eta_{-j}^2 \right] \\ &= \alpha_1^{i_1+i_2+i_3+i_4} \mathbb{E}(\eta_0^8)^{i_1} \mathbb{E}(\eta_0^6)^{(i_2-i_1)} \mathbb{E}(\eta_0^4)^{(i_3-i_2)} \mathbb{E}(\eta_0^2)^{(i_4-i_3)} \\ &= \alpha_1^{i_1+i_2+i_3+i_4} \mathbb{E}(\eta_0^8)^{i_1} \mathbb{E}(\eta_0^6)^{(i_2-i_1)} \mathbb{E}(\eta_0^4)^{(i_3-i_2)}, \end{aligned}$$

pois $\mathbb{E}(\eta_0^2) = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} & 4! \sum_{i_4=0}^{+\infty} \sum_{i_3=0}^{i_4} \sum_{i_2=0}^{i_3} \sum_{i_1=0}^{i_2} \mathbb{E} \left[\prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{-j} \prod_{j=0}^{i_3-1} A_{-j} \prod_{j=0}^{i_4-1} A_{-j} \right] \\ &= 4! \sum_{i_4=0}^{+\infty} \sum_{i_3=0}^{i_4} \sum_{i_2=0}^{i_3} \sum_{i_1=0}^{i_2} \alpha_1^{i_1+i_2+i_3+i_4} \mathbb{E}(\eta_0^8)^{i_1} \mathbb{E}(\eta_0^6)^{(i_2-i_1)} \mathbb{E}(\eta_0^4)^{(i_3-i_2)} \\ &= 4! \sum_{i_4=0}^{+\infty} \alpha_1^{i_4} \sum_{i_3=0}^{i_4} (\alpha_1 \mathbb{E}(\eta_0^4))^{i_3} \sum_{i_2=0}^{i_3} \left(\alpha_1 \frac{\mathbb{E}(\eta_0^6)}{\mathbb{E}(\eta_0^4)} \right)^{i_2} \sum_{i_1=0}^{i_2} \left(\alpha_1 \frac{\mathbb{E}(\eta_0^8)}{\mathbb{E}(\eta_0^6)} \right)^{i_1} \\ &= 4! \sum_{i_4=0}^{+\infty} \alpha_1^{i_4} \sum_{i_3=0}^{i_4} z_3^{i_3} \sum_{i_2=0}^{i_3} z_2^{i_2} \sum_{i_1=0}^{i_2} z_1^{i_1}, \end{aligned}$$

onde $z_1 = \alpha_1 \frac{\mathbb{E}(\eta_0^8)}{\mathbb{E}(\eta_0^6)}$, $z_2 = \alpha_1 \frac{\mathbb{E}(\eta_0^6)}{\mathbb{E}(\eta_0^4)}$ e $z_3 = \alpha_1 \mathbb{E}(\eta_0^4)$.

Deste modo, precisamos de provar que

$$\sum_{i_4=0}^{+\infty} \alpha_1^{i_4} \sum_{i_3=0}^{i_4} z_3^{i_3} \sum_{i_2=0}^{i_3} z_2^{i_2} \sum_{i_1=0}^{i_2} z_1^{i_1} < +\infty, \quad (3.30)$$

o que é estabelecido por [10] com argumentos envolvendo séries geométricas.

Concluindo, mostrámos que o termo (3.24) é limitado, isto é, mostrámos que existe Z tal que $|Z_t| \leq Z$, com $\mathbb{E}(Z_t) < +\infty$.

2. Calcular $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Z_t)$

Também aqui, para o cálculo do limite, consideramos os dois termos (3.26) e (3.27) separadamente.

Para (3.26) recorremos ao que foi obtido em (3.28). De relembrar que no Lema 3.3.2 definimos $f(t-s) = \mathbb{E}(L_t L_s) = \text{Cov}(L_t, L_s) + 1 = s(t-s) + 1$ e portanto temos

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(L_{-i_1} L_{n-i_2}) &= f(n-i_2+i_1) \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(L_{t-i_3} L_{t+n-i_4}) &= f(n-i_4+i_3).\end{aligned}$$

As relações seguintes apresentadas em Voutilainen et al. [10],

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(L_{-i_1} L_{t-i_3} L_{t+n-i_4}) &= f(n+i_3-i_4) \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(L_{-i_1} L_{n-i_2} L_{t-i_3} L_{t+n-i_4}) &= f(n+i_1-i_2)f(n+i_3-i_4).\end{aligned}$$

permitem calcular o limite de (3.26), dado por:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(B_{-i_1} B_{n-i_2} B_{t-i_3} B_{t+n-i_4}) &= \alpha_0^4 + 4\alpha_0^3\beta + \alpha_0^2\beta^2[4 + f(n-i_2+i_1) + f(n-i_4+i_3)] + \alpha_0\beta^3[f(n+i_1-i_2) + f(n+i_3-i_4) + \\ &\quad + f(n+i_1-i_2) + f(n+i_3-i_4)] + \beta^4[f(n+i_1-i_2)f(n+i_3-i_4)] \\ &= \alpha_0^4 + 4\alpha_0^3\beta + \alpha_0^2\beta^2[4 + f(n-i_2+i_1) + f(n-i_4+i_3)] + \alpha_0\beta^3[2f(n+i_1-i_2) + \\ &\quad + 2f(n+i_3-i_4)] + \beta^4[f(n+i_1-i_2)f(n+i_3-i_4)] \\ &= (\alpha_0^2 + 2\alpha_0\beta + \beta^2 f(n+i_1-i_2))(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\beta + \beta^2 f(n+i_3-i_4)).\end{aligned}\tag{3.31}$$

Retomando agora para (3.27), temos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\eta_0^2 \eta_n^2 \eta_t^2 \eta_{t+n}^2 \prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-1-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{n-1-j} \prod_{j=0}^{i_3-1} A_{t-1-j} \prod_{j=0}^{i_4-1} A_{t+n-1-j}\right] &= \mathbb{E}\left[\eta_0^2 \eta_n^2 \prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-1-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{n-1-j}\right] \mathbb{E}\left[\eta_t^2 \eta_{t+n}^2 \prod_{j=0}^{i_3-1} A_{t-1-j} \prod_{j=0}^{i_4-1} A_{t+n-1-j}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\eta_0^2 \eta_n^2 \prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-1-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{n-1-j}\right] \mathbb{E}\left[\eta_0^2 \eta_n^2 \prod_{j=0}^{i_3-1} A_{-1-j} \prod_{j=0}^{i_4-1} A_{n-1-j}\right],\end{aligned}\tag{3.32}$$

dado que A é estritamente estacionário.

Finalmente, de (3.31) e (3.32) obtemos para $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Z_t)$ o seguinte

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2 \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2) &= \sum_{i_1=0}^{+\infty} \sum_{i_2=0}^{+\infty} \sum_{i_3=0}^{+\infty} \sum_{i_4=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\eta_0^2 \eta_n^2 \prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-1-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{n-1-j}\right] \times \\ &\quad \times \mathbb{E}\left[\eta_0^2 \eta_n^2 \prod_{j=0}^{i_3-1} A_{-1-j} \prod_{j=0}^{i_4-1} A_{n-1-j}\right] \times \\ &\quad \times (\alpha_0^2 + 2\alpha_0\beta + \beta^2 f(n+i_1-i_2))(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\beta + \beta^2 f(n+i_3-i_4)).\end{aligned}\tag{3.33}$$

Recapitulando, teremos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Cov}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2, \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (\mathbb{E}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2 \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2) - \mathbb{E}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2) \mathbb{E}(\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2)) \\ \Leftrightarrow 0 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (\mathbb{E}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2 \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2) - (\mathbb{E}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2))^2) \end{aligned}$$

devido à estacionaridade do processo ε . Ora

$$\mathbb{E}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2) \stackrel{(3.5)}{=} \sum_{i_1=0}^{+\infty} \sum_{i_2=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\eta_0^2 \eta_n^2 \prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-1-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{n-1-j} \right] \mathbb{E}(B_{-1-i_1} B_{n-1-i_2}), \quad (3.34)$$

pois $\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2 \eta_t^2$. Mas,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_{-1-i_1} B_{n-1-i_2}) &= \mathbb{E}([\alpha_0 + \beta L_{-1-i_1}][\alpha_0 + \beta L_{n-1-i_2}]) \\ &= \alpha_0^2 + \alpha_0 \beta \mathbb{E}(L_{n-1-i_2}) + \alpha_0 \beta \mathbb{E}(L_{-1-i_1}) + \beta^2 \mathbb{E}(L_{n-1-i_2} L_{-1-i_1}) \\ &= \alpha_0^2 + 2\alpha_0 \beta + \beta^2 f(n + i_1 - i_2), \end{aligned}$$

que resulta da estacionaridade estrita do processo L com $\mathbb{E}(L_0) = 1$. Assim, para (3.34) temos

$$\mathbb{E}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2) = \sum_{i_1=0}^{+\infty} \sum_{i_2=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\eta_0^2 \eta_n^2 \prod_{j=0}^{i_1-1} A_{-1-j} \prod_{j=0}^{i_2-1} A_{n-1-j} \right] (\alpha_0^2 + 2\alpha_0 \beta + \beta^2 f(n + i_1 - i_2)),$$

isto é, tem-se, comparando com (3.33),

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2 \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2) = (\mathbb{E}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2))^2.$$

Deste modo, provámos a alínea **c)**, ou seja, quando $t \rightarrow +\infty$, $\text{Cov}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2, \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2) \rightarrow 0$.

Podemos assim concluir⁽¹⁴⁾ que

$$\frac{1}{N-n} \sum_{t=1}^{N-n} \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t+n}^2 \longrightarrow \mathbb{E}(\varepsilon_0^2 \varepsilon_n^2) \quad \text{em probabilidade } \forall n \in \mathbb{Z}, \text{ quando } N \rightarrow +\infty.$$

□

Notemos que a validade das condições do Lema 3.3.4 $\left(\mathbb{E}(\eta_0^8) < +\infty, \alpha_1 < \frac{1}{\mathbb{E}(\eta_0^8)^{\frac{1}{4}}} \right)$ implica a validade das condições do Lema 3.3.3 $\left(\mathbb{E}(\eta_0^4) < +\infty, \alpha_1 < \frac{1}{\sqrt{\mathbb{E}(\eta_0^4)}} \right)$, pois para verificar que $\alpha_1 < \frac{1}{\mathbb{E}(\eta_0^8)^{\frac{1}{4}}}$ implica $\alpha_1 < \frac{1}{\sqrt{\mathbb{E}(\eta_0^4)}}$, basta ter em atenção as desigualdades que foram obtidas em (3.29), onde foi provado que $(\mathbb{E}(\eta_0^4))^{\frac{1}{2}} \leq (\mathbb{E}(\eta_0^8))^{\frac{1}{4}}$.

Assim, quando somos confrontados com a veracidade das hipóteses do lema 3.3.4, podemos afirmar que o estimador $\hat{\gamma}$ é consistente.

Sintetizando, começamos por calcular os parâmetros do modelo em termos da função de autocovariância γ . Fomos então encontrar um estimador consistente para γ . Assim, podemos apresentar a seguinte definição, relativa aos estimadores dos coeficientes do modelo (3.1).

Suponhamos $N \geq 1$ e consideremos as seguintes notações:

$$\hat{\omega} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^4,$$

$$\vec{\gamma} = [\hat{\gamma}(n), \hat{\gamma}(n+1), \hat{\gamma}(n-1), \hat{\gamma}(1), \hat{\gamma}(0), \hat{\omega}] \quad e \quad \vec{\xi} = [\vec{\gamma}, \hat{\mu}] \quad \text{para } n \neq 0 \text{ fixo,}$$

com $\hat{\gamma}$ definido em (3.23).

Definição 3.3.1. Os estimadores para os parâmetros α_1, β e α_0 são dados, respetivamente, por

$$\hat{\alpha}_1 = \alpha_1(\vec{\gamma}) = \frac{-b(\vec{\gamma}) \pm \sqrt{b(\vec{\gamma})^2 - 4a(\vec{\gamma})c(\vec{\gamma})}}{2a(\vec{\gamma})}, \quad (3.35)$$

$$\hat{\beta} = \beta(\vec{\gamma}) = \sqrt{\frac{1}{s(0)} \left(\alpha_1(\vec{\gamma})^2 \hat{\gamma}(0) - 2\alpha_1(\vec{\gamma}) \hat{\gamma}(1) + \hat{\gamma}(0) - \frac{\hat{\omega} \mathbb{V}(\eta_0^2)}{\mathbb{E}(\eta_0^4)} \right)} \quad e \quad (3.36)$$

$$\hat{\alpha}_0 = \alpha_0(\vec{\xi}) = \hat{\mu}(1 - \alpha_1(\vec{\gamma})) - \beta(\vec{\gamma}). \quad (3.37)$$

com $n \neq 0$, α_1, β e α_0 dados por (3.20), (3.21) e (3.22).

Finalizamos esta secção com um resultado que explicita condições que garantem que os estimadores encontrados são consistentes.

Teorema 3.3.1. Suponhamos que $a(\vec{\gamma}) \neq 0$ e $b(\vec{\gamma})^2 - 4a(\vec{\gamma})c(\vec{\gamma}) > 0$. Consideremos ainda que se verificam os pressupostos do Lema 3.3.4, ou seja,

- $\mathbb{E}(L_0^4) < +\infty$ e $\mathbb{E}(\eta_0^8) < +\infty$
- $Cov(L_0, L_t) \rightarrow 0$, $Cov(L_0 L_n, L_{\pm t}) \rightarrow 0$ e $Cov(L_0 L_{n_1}, L_t L_{t+n_2}) \rightarrow 0$, $\forall n, n_1$ e n_2 fixos, quando $t \rightarrow +\infty$
- $\alpha_1 < \frac{1}{\mathbb{E}(\eta_0^8)^{\frac{1}{4}}}$.

Então os estimadores $\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}$ e $\hat{\alpha}_0$ dados, respetivamente, por (3.35), (3.36) e (3.37) são consistentes.

Demonstração. Visto que as hipóteses do Lema 3.3.4 se verificam e, conseqüentemente, também são válidas as do Lema 3.3.3, então todos os estimadores envolvidos nas fórmulas (3.35), (3.36) e (3.37) são consistentes, isto é, o estimador da média, da função de autocovariância γ e do segundo momento de ε_t^2 são consistentes.

Assim, como a convergência em probabilidade é preservada por aplicações contínuas então os estimadores $\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}$ e $\hat{\alpha}_0$ são consistentes. \square

3.4 Movimento Browniano Fracionário

A consistência dos estimadores dos parâmetros foi estabelecida sob várias condições incidentes sobre o processo L presente na definição do modelo (3.1). Voutilainen et al. [10] propõe vários exemplos (movimento Browniano fracionário, o processo de Poisson compensado e o processo de Rosenblatt) considerando

$$L_t = (W_{t+1} - W_t)^2,$$

onde $W = (W_t, t \in \mathbb{R})$ é um processo estocástico com incrementos estacionários⁽¹⁷⁾.

Nesta secção vamos resumir o estudo do movimento Browniano fracionário que utilizaremos depois no estudo de simulações e do caso real.

O Movimento Browniano fracionário [13] é um processo gaussiano $B^H = (B_t^H, t \in \mathbb{R})$ centrado, cuja função de covariância é dada por

$$\text{Cov}(B_t^H, B_m^H) = \mathbb{E}(B_t^H B_m^H) = \frac{1}{2} \left(|t|^{2H} + |m|^{2H} - |t-m|^{2H} \right), \quad t, m \in \mathbb{R}, \quad (3.38)$$

onde $H \in (0, 1)$ é designado por parâmetro de Hurst.

Seja $W_t = B_t^H$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, vem

$$L_t = (B_{t+1}^H - B_t^H)^2, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.39)$$

Notemos que B_t^H é de incrementos estacionários. De facto,

$$\mathbb{E}(B_{t+h}^H - B_{r+h}^H) = 0 = \mathbb{E}(B_t^H - B_r^H),$$

e

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_{t+h}^H - B_{r+h}^H, B_{t_1+h}^H - B_{r_1+h}^H) &= \mathbb{E}[(B_{t+h}^H - B_{r+h}^H)(B_{t_1+h}^H - B_{r_1+h}^H)] \\ &= \frac{1}{2} (|t+h|^{2H} + |t_1+h|^{2H} - |t-t_1|^{2H} - |t+h|^{2H} - |r_1+h|^{2H} \\ &\quad + |t-r_1|^{2H} - |r+h|^{2H} - |t_1+h|^{2H} + |r-t_1|^{2H} + |r+h|^{2H} + \\ &\quad + |r_1+h|^{2H} - |r-r_1|^{2H}) \\ &= \frac{1}{2} (-|t-t_1|^{2H} + |t-r_1|^{2H} + |r-t_1|^{2H} - |r-r_1|^{2H}). \end{aligned}$$

Ora,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_t^H - B_r^H, B_{t_1}^H - B_{r_1}^H) &= \mathbb{E}[(B_t^H - B_r^H)(B_{t_1}^H - B_{r_1}^H)] \\ &= \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |t_1|^{2H} - |t-t_1|^{2H} - |t|^{2H} - |r_1|^{2H} + |t-r_1|^{2H} - |r|^{2H} - \\ &\quad - |t_1|^{2H} + |r-t_1|^{2H} + |r|^{2H} + |r_1|^{2H} - |r-r_1|^{2H}) \\ &= \frac{1}{2} (-|t-t_1|^{2H} + |t-r_1|^{2H} + |r-t_1|^{2H} - |r-r_1|^{2H}). \end{aligned}$$

⁽¹⁷⁾Consideremos que um processo X tem incrementos estacionários se $\forall r < t, \forall h > 0, X_{t+h} - X_{r+h} = X_t - X_r$ em lei.

Como B_t^H é gaussiano concluímos que $B_{t+h}^H - B_{r+h}^H$ tem a mesma lei de $B_t^H - B_r^H$. Verifiquemos que $\mathbb{E}(L_t) = 1$. Para tal, recorremos a (3.38) e obtemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(L_t) &= \mathbb{E}((B_{t+1}^H - B_t^H)^2) \\ &= \mathbb{E}((B_{t+1}^H)^2) - 2\mathbb{E}(B_{t+1}^H B_t^H) + \mathbb{E}((B_t^H)^2) \\ &= |t+1|^{2H} - 2\left[\frac{1}{2}\left(|t+1|^{2H} + |t|^{2H} - 1\right)\right] + |t|^{2H} \\ &= |t+1|^{2H} - |t+1|^{2H} - |t|^{2H} + 1 + |t|^{2H} = 1.\end{aligned}$$

Mais, para $t, m \geq 0$ vem (18)

$$\text{Cov}(L_t, L_m) = \mathbb{E}(L_t L_m) - \mathbb{E}(L_t)\mathbb{E}(L_m) = \mathbb{E}((B_{t+1}^H - B_t^H)^2 (B_{m+1}^H - B_m^H)^2) - 1 = 2r_H^2(t, m), \quad (3.40)$$

$$\text{onde } r_H(t, m) = \frac{1}{2}\left(|t-m+1|^{2H} + |t-m-1|^{2H} - 2|t-m|^{2H}\right).$$

De seguida mostramos que tendo o processo L assim definido são satisfeitas as duas primeiras condições do Lema 3.3.4, onde se estabelece a consistência dos estimadores dos parâmetros do modelo.

Condição 1: $\text{Cov}(L_0, L_t) \rightarrow 0$.

De facto, decorre de (3.40)

$$\text{Cov}(L_0, L_t) = \mathbb{E}(L_0 L_t) - 1 = \mathbb{E}((B_1^H - B_0^H)^2 (B_{t+1}^H - B_t^H)^2) - 1 = 2r_H^2(t, 0).$$

Ora, uma vez que $r_H(t, 0)$ se comporta como t^{2H-2} , para t grande, então, quando $t \rightarrow +\infty$, $r_H(t, 0) \rightarrow 0$ e desta forma concluímos $\text{Cov}(L_0, L_t) \rightarrow 0$.

Condição 2: $\text{Cov}(L_0 L_n, L_{\pm t}) \rightarrow 0$.

De novo, de (3.40) tem-se

$$\begin{aligned}\text{Cov}(L_0 L_n, L_t) &= \mathbb{E}(L_0 L_n L_t) - \mathbb{E}(L_0 L_n)\mathbb{E}(L_t) \\ &= \mathbb{E}((B_1^H - B_0^H)^2 (B_{n+1}^H - B_n^H)^2 (B_{t+1}^H - B_t^H)^2) - \mathbb{E}((B_1^H - B_0^H)^2 (B_{n+1}^H - B_n^H)^2) \\ &= \mathbb{E}((B_1^H - B_0^H)^2 (B_{n+1}^H - B_n^H)^2 (B_{t+1}^H - B_t^H)^2) - 2r_H^2(n, 0) - 1.\end{aligned}$$

Atentemos ao cálculo da $\mathbb{E}((B_1^H - B_0^H)^2 (B_{n+1}^H - B_n^H)^2 (B_{t+1}^H - B_t^H)^2)$. Suponhamos que $n \geq 1$, $t > n$ e consideremos o vetor (Z_1, Z_2) gaussiano com $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $i = 1, 2$. Assim, tem-se (19)

$$Z_2 = \text{Cov}(Z_1, Z_2)Z_1 + \sqrt{1 - \text{Cov}^2(Z_1, Z_2)}N \quad (3.41)$$

(18) Seja $t, s \geq 0$ e B^H o movimento Browniano fracionário com $H \in (0, 1)$. Então $\mathbb{E}((B_{t+1}^H - B_t^H)^2 (B_{s+1}^H - B_s^H)^2) = 2r_H^2(t, s) + 1$ onde $r_H(t, s) = \frac{1}{2}\left(|t-s+1|^{2H} + |t-s-1|^{2H} - 2|t-s|^{2H}\right)$ (Voutilainen et al. [11], Lema 2, p.73).

(19) Se (G_1, G_2) é um vetor gaussiano centrado então $G_2 = \frac{\text{Cov}(G_1, G_2)}{\sqrt{\text{V}(G_1)}}G_1 + \sqrt{\text{V}(G_2) - \frac{\text{Cov}^2(G_1, G_2)}{\text{V}(G_1)}}N_2$, com N_2 uma variável aleatória normal, centrada, reduzida e independente de G_1 (Bahamonde et al. [1], Lema 2, p.73).

onde N é uma variável aleatória normal centrada, reduzida e independente de Z_1 .

Ora, decorre de (3.41)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_1^2 Z_2^2) &= \mathbb{E}\left[Z_1^2 \left(\text{Cov}^2(Z_1, Z_2) Z_1^2 + (1 - \text{Cov}^2(Z_1, Z_2)) N^2 + 2 \text{Cov}(Z_1, Z_2) Z_1 \sqrt{1 - \text{Cov}^2(Z_1, Z_2)} N \right)\right] \\ &= \mathbb{E}(Z_1^4) \text{Cov}^2(Z_1, Z_2) + \mathbb{E}(N^2) \mathbb{E}(Z_1^2) (1 - \text{Cov}^2(Z_1, Z_2)),\end{aligned}$$

pois N e Z_1 são independentes. Mais, tendo em conta que Z_1 e N são gaussianas normais, centradas e reduzidas sabe-se que $\mathbb{E}(Z_1^4) = 3$ e $\mathbb{E}(Z_1^2) = 1 = \mathbb{E}(N^2)$, logo

$$\mathbb{E}(Z_1^2 Z_2^2) = 3 \text{Cov}^2(Z_1, Z_2) + 1 - \text{Cov}^2(Z_1, Z_2) = 1 + 2 \text{Cov}^2(Z_1, Z_2) = 1 + 2(\mathbb{E}(Z_1 Z_2))^2. \quad (3.42)$$

Do mesmo modo, isto é, utilizando (3.41), com (Z_1, Z_2, Z_3) gaussiano, $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $i = 1, 2, 3$, tem-se

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2) &= \mathbb{E}\left[Z_1^2 \left(\text{Cov}^2(Z_1, Z_2) Z_1^2 + (1 - \text{Cov}^2(Z_1, Z_2)) N^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \text{Cov}(Z_1, Z_2) Z_1 \sqrt{1 - \text{Cov}^2(Z_1, Z_2)} N \right) Z_3^2\right] \\ &= \mathbb{E}(Z_1^4 Z_3^2) \text{Cov}^2(Z_1, Z_2) + \mathbb{E}(Z_1^2 Z_3^2) (1 - \text{Cov}^2(Z_1, Z_2)).\end{aligned}$$

Agora, para

$$Z_3 = \text{Cov}(Z_1, Z_3) Z_1 + \sqrt{1 - \text{Cov}^2(Z_1, Z_3)} N$$

vem

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2) &= \mathbb{E}\left[Z_1^4 \left(\text{Cov}^2(Z_1, Z_3) Z_1^2 + (1 - \text{Cov}^2(Z_1, Z_3)) N^2 \right)\right] \text{Cov}^2(Z_1, Z_2) + \\ &\quad + \mathbb{E}\left[Z_1^2 \left(\text{Cov}^2(Z_1, Z_3) Z_1^2 + (1 - \text{Cov}^2(Z_1, Z_3)) N^2 \right)\right] (1 - \text{Cov}^2(Z_1, Z_2)) \\ &= \mathbb{E}(Z_1^6) \text{Cov}^2(Z_1, Z_3) \text{Cov}^2(Z_1, Z_2) + \mathbb{E}(N^2) \mathbb{E}(Z_1^4) (1 - \text{Cov}^2(Z_1, Z_3)) \text{Cov}^2(Z_1, Z_2) + \\ &\quad + \mathbb{E}(Z_1^4) \text{Cov}^2(Z_1, Z_3) (1 - \text{Cov}^2(Z_1, Z_2)) + \\ &\quad + \mathbb{E}(N^2) \mathbb{E}(Z_1^2) (1 - \text{Cov}^2(Z_1, Z_3)) (1 - \text{Cov}^2(Z_1, Z_2)).\end{aligned}$$

O cálculo da $\mathbb{E}(Z_1^6)$ é feito recordando que os momentos de ordem par de uma lei $\mathcal{N}(0, 1)$ são iguais a:

$$\mu_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Assim, dado que $\mathbb{E}(Z_1^6) = 15$ e $\mathbb{E}(Z_1^4) = 3$ obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2) &= 15 \text{Cov}^2(Z_1, Z_3) \text{Cov}^2(Z_1, Z_2) + 3(1 - \text{Cov}^2(Z_1, Z_3)) \text{Cov}^2(Z_1, Z_2) + \\
&\quad + 3 \text{Cov}^2(Z_1, Z_3) (1 - \text{Cov}^2(Z_1, Z_2)) + (1 - \text{Cov}^2(Z_1, Z_3)) (1 - \text{Cov}^2(Z_1, Z_2)) \\
&= 15 [\mathbb{E}(Z_1 Z_3)]^2 [\mathbb{E}(Z_1 Z_2)]^2 + 3 [\mathbb{E}(Z_1 Z_2)]^2 - 3 [\mathbb{E}(Z_1 Z_3)]^2 [\mathbb{E}(Z_1 Z_2)]^2 + 3 [\mathbb{E}(Z_1 Z_3)]^2 - \\
&\quad - 3 [\mathbb{E}(Z_1 Z_3)]^2 [\mathbb{E}(Z_1 Z_2)]^2 + 1 - [\mathbb{E}(Z_1 Z_2)]^2 - [\mathbb{E}(Z_1 Z_3)]^2 + [\mathbb{E}(Z_1 Z_3)]^2 [\mathbb{E}(Z_1 Z_2)]^2 \\
&= 2 [\mathbb{E}(Z_1 Z_2)]^2 + 2 [\mathbb{E}(Z_1 Z_3)]^2 + 10 [\mathbb{E}(Z_1 Z_2)]^2 [\mathbb{E}(Z_1 Z_3)]^2 + 1 \\
&= \mathbb{E}(Z_1^2 Z_2^2) + 2 [\mathbb{E}(Z_1 Z_3)]^2 + 10 [\mathbb{E}(Z_1 Z_2)]^2 [\mathbb{E}(Z_1 Z_3)]^2,
\end{aligned}$$

porque provou-se em (3.42) que $\mathbb{E}(Z_1^2 Z_2^2) = 1 + 2([\mathbb{E}(Z_1 Z_2)]^2)$.

Deste modo, para $Z_1 = B_1^H - B_0^H$, $Z_2 = B_{n+1}^H - B_n^H$ e $Z_3 = B_{t+1}^H - B_t^H$ vem

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}((B_1^H - B_0^H)^2 (B_{n+1}^H - B_n^H)^2 (B_{t+1}^H - B_t^H)^2) = \\
&= \mathbb{E}((B_1^H - B_0^H)^2 (B_{n+1}^H - B_n^H)^2) + 2 [\mathbb{E}((B_1^H - B_0^H)(B_{t+1}^H - B_t^H))]^2 + \\
&\quad + 10 [\mathbb{E}((B_1^H - B_0^H)(B_{n+1}^H - B_n^H))]^2 [\mathbb{E}((B_1^H - B_0^H)(B_{t+1}^H - B_t^H))]^2 \\
&= 2r_H^2(n, 0) + 1 + 2r_H^2(t, 0) + 10 r_H^2(n, 0) r_H^2(t, 0),
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(L_0 L_n, L_t) &= \mathbb{E}((B_1^H - B_0^H)^2 (B_{n+1}^H - B_n^H)^2 (B_{t+1}^H - B_t^H)^2) - 2r_H^2(n) - 1 \\
&= 2r_H^2(n, 0) + 1 + 2r_H^2(t, 0) + 10 r_H^2(n, 0) r_H^2(t, 0) - 2r_H^2(n, 0) - 1 \\
&= 2r_H^2(t, 0) + 2r_H^2(t, n) + 10 r_H^2(n, 0) r_H^2(t, 0).
\end{aligned}$$

Vimos que quando $t \rightarrow +\infty$, r_H converge para 0, e portanto concluímos que $\text{Cov}(L_0 L_n, L_{\pm t}) \rightarrow 0$.

Como é referido em Voutilainen et al. [10] a terceira condição do Lema 3.3.4 tem cálculos muito complexos. Os autores apresentam algumas notas sobre a sua avaliação e afirmam que tal pressuposto vale para o movimento Browniano fracionário.

3.5 Simulações

Uma vez realizado o estudo relativo à estimação dos coeficientes do modelo (3.1) é interessante avaliar, por meio de simulações, o seu comportamento com amostras de dimensões médias e elevadas.

Relembremos que o modelo (3.1) é dado por:

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta L_{t-1} \end{cases}$$

onde $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\beta \geq 0$ e que o processo L para todo $t \in \mathbb{Z}$ é definido como em (3.39).

O parâmetro de Hurst que vamos usar é $H = \frac{4}{5}$. Relativamente ao processo η assumimos que é gaussiano, centrado e de variância unitária, e para os parâmetros do modelo estabelecemos os seguintes valores: $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0.1$ e $\beta = 0.5$. Seja ainda $n = 1$ e $N \in \{100, 1000, 10000\}$ o tamanho das amostras em análise.

As simulações que se seguem foram efetuadas utilizando o MATLAB.

Começamos por gerar B_t^H , usando a função *fbm1d*, disponível em MATLAB, que simula o movimento Browniano fracionário e que permitiu o cálculo de L_t , para $t = 0, 1, \dots, N-2$. De seguida, simulámos η_t para $t = 1, 2, \dots, N-1$.

Posto isto, e considerando a condição inicial $\varepsilon_0^2 = 1.7$, sugerida pela expressão (3.13) quando $k = 1$, gerámos σ_t^2 para $t = 1, \dots, N$ e consequentemente produzimos $\{\varepsilon_0^2, \varepsilon_1^2, \dots, \varepsilon_{N-1}^2\}$. Desta forma temos uma amostra de dimensão N .

O passo seguinte consiste em programar os estimadores dos parâmetros α_0 , α_1 e β . Com esse objetivo começa-se por determinar o estimador para a função de autocovariância de ε^2 dado por (3.23). Desde já notamos que apenas será necessário o cálculo de $\hat{\gamma}(0)$, $\hat{\gamma}(1)$ e $\hat{\gamma}(2)$.

Além disso verificamos, através dos cálculos efetuados na secção 3.3, que precisamos também de determinar a função de autocovariância de L , $s(n)$, para $n = 0$ e $n = 1$.

Notemos que as fórmulas dos estimadores dos parâmetros envolvem raízes quadradas pelo que podem surgir números complexos e portanto, de forma a colmatar tal problema, eliminamos os valores não reais, de modo semelhante ao procedimento adotado em Voutilainen et al. [10].

Foram realizadas 1000 réplicas de amostras de dimensão N e efetuámos os histogramas das estimativas de $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\beta}$.

Na Figura 3.1 apresentamos os três histogramas relativos à dimensão $N = 100$ e verificamos, pela observação da Tabela 3.1, que os valores estimados dos parâmetros são uma boa aproximação dos verdadeiros valores. Constatamos também que nesta simulação 49.1% das iterações resultaram em números complexos.

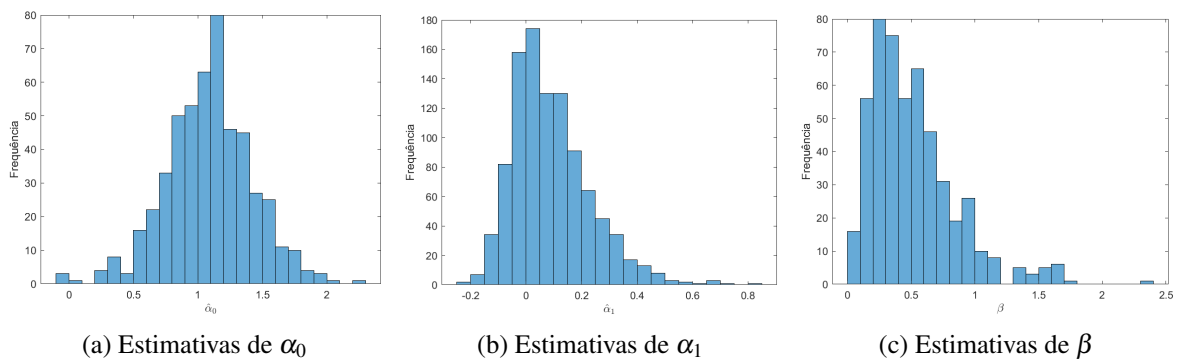


Fig. 3.1 Modelo 3.1 com $N = 100$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0.1$ e $\beta = 0.5$

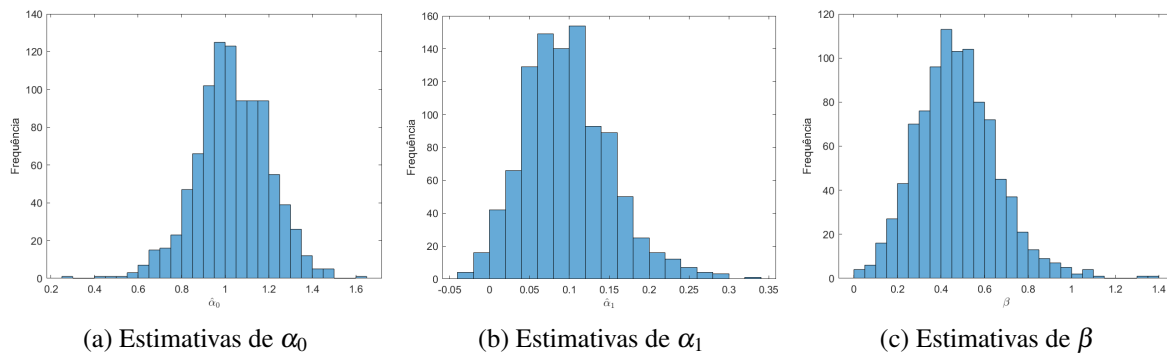
Tabela 3.1 Média e desvio padrão das estimativas dos parâmetros do modelo (3.1) para $N = 100$

	Média	Desvio padrão
$\hat{\alpha}_0$	1.0659	0.3425
$\hat{\alpha}_1$	0.0908	0.1391
$\hat{\beta}$	0.5213	0.3369

A Figura 3.2 é relativa a amostras de dimensão $N = 1000$. A análise da Tabela 3.2 permite-nos concluir que obtivemos melhores resultados para os estimadores $\hat{\alpha}_0$ e $\hat{\alpha}_1$, uma vez que os valores das médias se aproximam mais do valor esperado e existe um decréscimo do desvio padrão.

Quanto ao estimador $\hat{\beta}$ notamos que apesar de existir um decréscimo do desvio padrão, o valor médio afastou-se do esperado.

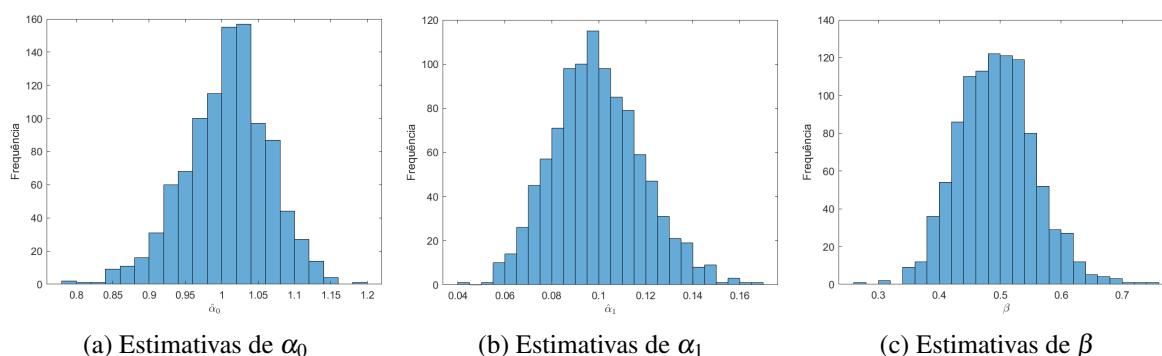
Uma outra diferença notória, comparativamente com a simulação anterior, foi a percentagem de iterações que resultaram em números complexos que desceu de 49.1% para 4.4% (à semelhança do observado em Voutilainen et al. [10]).

Fig. 3.2 Modelo 3.1 com $N = 1000$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0.1$ e $\beta = 0.5$ Tabela 3.2 Média e desvio padrão das estimativas dos parâmetros do modelo (3.1) para $N = 1000$

	Média	Desvio padrão
$\hat{\alpha}_0$	1.0470	0.1667
$\hat{\alpha}_1$	0.0962	0.0540
$\hat{\beta}$	0.4670	0.1805

No que diz respeito ao tamanho $N = 10000$, cujos histogramas se apresentam na Figura 3.3, verificamos, pela observação da Tabela 3.3, uma melhoria nos resultados face aos anteriores. Os valores médios estimados aproximaram-se ainda mais dos verdadeiros valores e o desvio padrão baixou consideravelmente para todos os estimadores.

Para além disso, nesta simulação contrariamente às anteriores não surgiu qualquer número complexo. (este facto também foi observado por Voutilainen et al. [10]).

Fig. 3.3 Modelo 3.1 com $N = 10000$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0.1$ e $\beta = 0.5$ Tabela 3.3 Média e desvio padrão das estimativas dos parâmetros do modelo (3.1) para $N = 10000$

	Média	Desvio padrão
$\hat{\alpha}_0$	1.0052	0.0603
$\hat{\alpha}_1$	0.1013	0.0195
$\hat{\beta}$	0.4922	0.0644

Como já foi referido o parâmetro de Hurst aqui usado foi $H = 0.8$. De forma a analisarmos a influência desse valor nos cálculos dos estimadores, efetuamos outras simulações com $H = 0.1$, $H = 0.5$ e $H = 0.9$. Os resultados obtidos encontram-se na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 Média das estimativas dos parâmetros do modelo (3.1) com $N = 100$

H	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}$
0.1	1.0477	0.0825	0.5588
0.5	1.0206	0.0801	0.5664
0.8	1.0574	0.0943	0.5316
0.9	1.1018	0.1019	0.5323

Podemos concluir que variar o parâmetro H pouco interfere nos valores estimados dos parâmetros do modelo.

3.6 Aplicação: Corticeira Amorim

O objetivo agora passa por aplicar o modelo proposto em Voutilainen et al. [10] e um modelo da classe dos GARCH clássicos a uma mesma série temporal observada, com a finalidade de comparar os modelos estimados resultantes.

A Corticeira Amorim é, atualmente, considerado o maior grupo de transformação de cortiça do mundo. Com uma origem que remonta a 1870, esta empresa é uma das maiores, melhor qualificadas e mais inovadoras multinacionais de origem portuguesa. Atua nas mais diversas atividades como na indústria aeroespacial, automóvel, construção, vinhos e espumantes, entre muitas outras. É também de realçar que esta empresa é uma das englobadas no PSI-20, o principal índice bolsista da Euronext Lisboa.

Consideremos a série temporal relativa às cotações diárias de fecho das ações da Corticeira

Amorim durante o período de 31 de Maio de 2019 a 2 de Maio de 2022, o que totaliza 750 observações.

Recorrendo ao software *Eviews*, verificou-se que a série em questão não era estacionária e portanto considerámos a série das diferenças cujo comportamento evidenciava ser de um ruído branco. Com efeito, constatamos através da análise do correlograma (Figura 3.4) que as autocorrelações não são significativas e portanto estaremos na presença de um ruído branco.

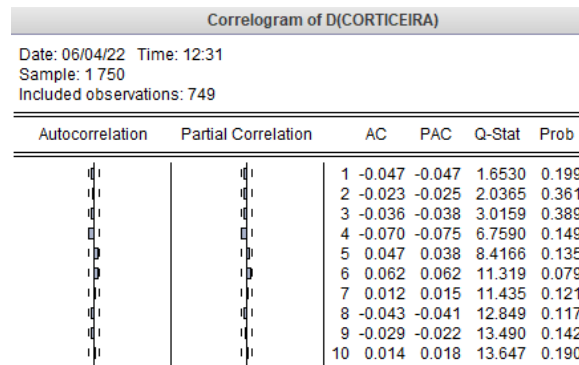


Fig. 3.4 Correlograma da série das diferenças das cotações de fecho diárias da Corticeira Amorim

Seguidamente avaliamos a presença de heteroscedasticidade condicional dos resíduos utilizando o teste ARCH LM que tem como hipótese nula H_0 : Ausência de heteroscedasticidade.

Na Figura 3.5, observamos que o p -valor obtido leva à rejeição da hipótese nula aos níveis de significância usuais.

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	19.25818	Prob. F(1,746)	0.0000
Obs*R-squared	18.82387	Prob. Chi-Square(1)	0.0000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 06/05/22 Time: 12:09
Sample (adjusted): 3 750
Included observations: 748 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.022586	0.002477	9.117343	0.0000
RESID^2(-1)	0.158633	0.036148	4.388415	0.0000

R-squared	0.025166	Mean dependent var	0.026844
Adjusted R-squared	0.023859	S.D. dependent var	0.063098
S.E. of regression	0.062341	Akaike info criterion	-2.709738
Sum squared resid	2.899216	Schwarz criterion	-2.697392
Log likelihood	1015.442	Hannan-Quinn criter.	-2.704980
F-statistic	19.25818	Durbin-Watson stat	2.034318
Prob(F-statistic)	0.000013		

Fig. 3.5 Teste à heteroscedasticidade dos resíduos

O correlograma do quadrado dos resíduos do processo (Figura 3.6) sugere um GARCH(1,1), que foi o modelo que se considerou ser o mais adequado para a série das diferenças, dentro dos GARCH clássicos.

Correlogram of Residuals Squared						
Date: 06/08/22 Time: 14:49						
Sample: 1 750						
Included observations: 749						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
■	■	1	0.159	0.159	18.918	0.000
■	■	2	0.130	0.108	31.703	0.000
■	■	3	0.159	0.128	50.815	0.000
■	■	4	0.002	-0.053	50.818	0.000
■	■	5	0.156	0.139	69.209	0.000
■	■	6	0.070	0.017	72.955	0.000
■	■	7	-0.001	-0.035	72.956	0.000
■	■	8	0.007	-0.039	72.993	0.000
■	■	9	0.010	0.019	73.067	0.000
■	■	10	0.007	0.010	73.000	0.000

Fig. 3.6 Correlação dos resíduos ao quadrado

A equação relativa ao GARCH(1,1) clássico é dada em (2.6): $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$. As estimativas para os parâmetros deste modelo encontram-se na Figura 3.7.

Primeiramente, observamos que os p-valores presentes na Figura 3.7 correspondem ao teste cuja hipótese nula é dada por H_0 : O coeficiente é nulo.

Dependent Variable: D(CORTICEIRA)				
Method: ML ARCH - Normal distribution (BFGS / Marquardt steps)				
Date: 06/08/22 Time: 15:06				
Sample (adjusted): 2 750				
Included observations: 749 after adjustments				
Convergence achieved after 16 iterations				
Coefficient covariance computed using outer product of gradients				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
GARCH = C(1) + C(2)*RESID(-1)^2 + C(3)*GARCH(-1)				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Variance Equation				
C	0.004001	0.001086	3.683642	0.0002
RESID(-1)^2	0.138642	0.032090	4.320380	0.0000
GARCH(-1)	0.714651	0.060258	11.85981	0.0000
R-squared	-0.000017	Mean dependent var		-0.000681
Adjusted R-squared	0.001318	S.D. dependent var		0.163847
S.E. of regression	0.163739	Akaike info criterion		-0.860189
Sum squared resid	20.08110	Schwarz criterion		-0.841690
Log likelihood	325.1409	Hannan-Quinn criter.		-0.853061
Durbin-Watson stat	2.093416			

Fig. 3.7 Estimação dos parâmetros do modelo GARCH (1,1) clássico

Assim, aos níveis de significância usuais, os coeficientes $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\beta}$ tomam os valores 0.004001, 0.138642 e 0.714651, respetivamente.

Após o ajustamento pelo modelo GARCH(1,1) clássico, verificamos que o correlograma dos resíduos produzidos (Figura 3.8) é compatível com o de um ruído branco. Além disso, o p -valor obtido no teste ARCH LM, permite-nos afirmar, aos níveis de significância usuais, que o novo resíduo é homoscedástico (Figura 3.8).

O modelo estimado é, então, sendo X_t a cotação de fecho diária da Corticeira Amorim no dia t ,

$$\varepsilon_t = X_t - X_{t-1},$$

onde ε é um processo de erro condicionalmente heteroscedástico de variância condicional:

$$\sigma_t^2 = 0.004001 + 0.138642\varepsilon_{t-1}^2 + 0.714651\sigma_{t-1}^2.$$

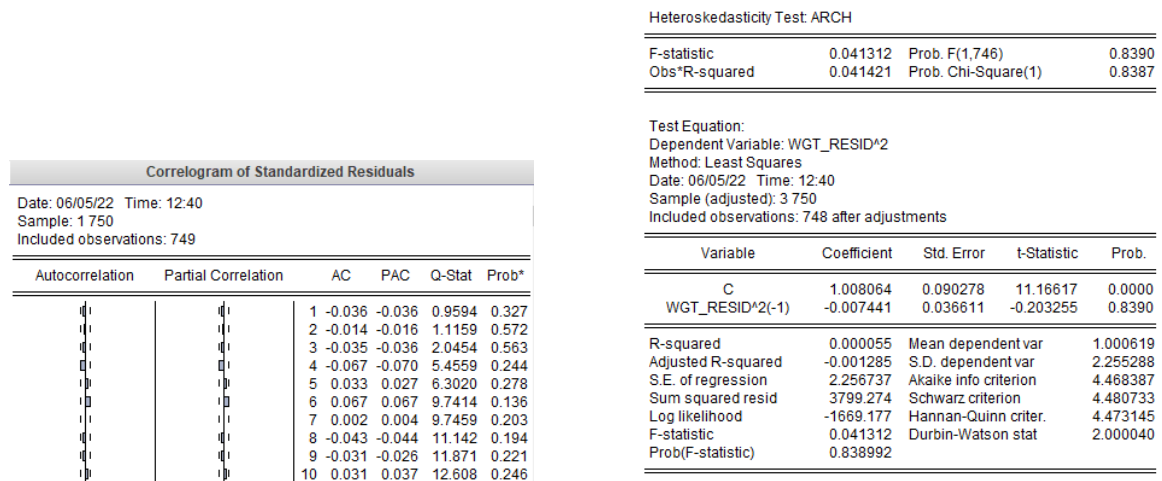


Fig. 3.8 Correlograma dos resíduos (esquerda) e teste à heteroscedasticidade dos resíduos (direita) após modelação GARCH

Notemos que o modelo obtido é fracamente estacionário pois (Teorema 2.3.2)

$$\alpha_1 + \beta = 0.138642 + 0.714651 < 1.$$

Passamos agora à aplicação do modelo (3.1) (Voutilainen et al. [10]) à série das diferenças das cotações de fecho diárias da Corticeira Amorim.

Visto que é um modelo recente, o seu tratamento estatístico não está disponível no *Eviews* e portanto recorreremos ao MATLAB para pôr em execução o procedimento da estimação dos parâmetros estudado na subsecção 3.3.1, relativo ao modelo (3.1): $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta L_{t-1}$.

Para o processo L decidimos, face ao estudo efetuado anteriormente, considerar o Movimento Browniano fracionário, com parâmetro de Hurst H .

Fixámos $n = 1$ e utilizámos as expressões (3.35), (3.36) e (3.37) para o cálculo dos estimadores $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\beta}$.

Uma das dificuldades neste estudo, prende-se com a escolha de H . Por outro lado, para lidar com as questões relativas aos sinais $+$ e $-$, e com a presença de raízes complexas, apontadas na subsecção 3.5, introduzimos as restrições impostas ao modelo (3.1), isto é,

$$\alpha_0 > 0, 0 < \alpha_1 < 1 \text{ e } \beta > 0.$$

Deste modo, realizámos diversos testes variando o parâmetro H , entre 0.1 e 0.9, e consequentemente, obteve-se um conjunto de valores (Tabela 3.5) que, como veremos, conduzem a um bom ajustamento.

Posto isto, já temos alguma informação para fazer uma comparação com a modelação anterior. Ora, sendo as estimativas obtidas para diferentes valores de H tão idênticas fixemo-nos, por exemplo, em $H = 0.7$.

O modelo estimado é então,

$$\varepsilon_t = X_t - X_{t-1},$$

H	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}$
0.1	0.004380624	0.11172728	0.01940270
0.2	0.004122298	0.12318357	0.01935429
0.3	0.003887508	0.13311681	0.01932312
0.4	0.003709623	0.14037287	0.01930672
0.5	0.003636993	0.14327391	0.01930168
0.6	0.003732651	0.13944577	0.01930852
0.7	0.004066875	0.12556718	0.01934589
0.8	0.004700091	0.09666595	0.01948650
0.9	0.005657100	0.04301140	0.01996608

Tabela 3.5 Estimação dos parâmetros do modelo (3.1)

com ε um processo tal que:

$$\sigma_t^2 = 0.004066875 + 0.12556718\varepsilon_{t-1}^2 + 0.01934589L_{t-1},$$

onde L se escreve em função do movimento Browniano fracionário com $H = 0.7$.

Na Tabela 3.6 comparamos as estimativas obtidas para os coeficientes dos dois modelos GARCH(1,1). Incluímos também a média da série ε_t^2 bem como a média estimada para ε_t^2 no modelo GARCH(1,1) clássico $\left(\frac{\hat{\alpha}_0}{1-\hat{\alpha}_1-\hat{\beta}}\right)$ e no novo modelo GARCH(1,1) (Voutilainen et al. [10]) $\left(\frac{\hat{\alpha}_0+\hat{\beta}}{1-\hat{\alpha}_1}\right)$.

Observamos que as estimativas obtidas para α_0 e α_1 com as duas modelações são muito próximas. Em contrapartida tal não acontece para o coeficiente β .

	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}$	Médias
GARCH(1,1) clássico	0.004001	0.138642	0.714651	0.02727672
GARCH(1,1) novo	0.004067	0.125567	0.019346	0.02677480
ε_t^2	-	-	-	0.02677480

Tabela 3.6 Resumo dos valores obtidos

Embora a diferença seja insignificante, verificamos que o modelo proposto por [10] apresenta média estimada mais próxima da média das observações. Assim, este resumo estatístico indica que o novo modelo GARCH(1,1) será também adequado para modelar a série em estudo.

Outros indicadores (autocorrelações dos resíduos, critério de Akaike, critério de Log-verosimilhança,...) seriam necessários para melhor comparar os dois ajustamentos.

Uma maior percepção do processo L (denominado liquidez do processo ε) contribuirá certamente para melhorar o procedimento de estimação (nomeadamente se for um processo observado).

Bibliografia

- [1] Bahamonde, N., Torres, S., and Tudor, C. (2018). Arch model and fractional brownian motion. *Statistics & Probability Letters*, 134(C):70–78.
- [2] Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 37:307–327.
- [3] Engle, R. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of the U.K. inflation. *Econometrica*, 50:987–1008.
- [4] Francq, C. and Zakoian, J. M. (2019). *GARCH models: structure, statistical inference, and financial applications*. John Wiley & Sons Ltd, United Kingdom, second edition.
- [5] Gonçalves, E. and Mendes-Lopes, N. (2008). *Séries Temporais. Modelações lineares e não lineares*. Sociedade Portuguesa de Estatística, Portugal, second edition.
- [6] Gonçalves, E. and Mendes-Lopes, N. (2013). *Probabilidades. Princípios Teóricos*. Escolar Editora, Lisboa, Portugal, second edition.
- [7] Karlsen, H. (1990). Existence of moments in a stationary stochastic difference equation. *Advances in Applied Probability*, 22(1):129–146.
- [8] Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica*, 59:347–370.
- [9] Resnick, S. I. (2005). *A Probability Path*. Birkhauser, New York, USA.
- [10] Voutilainen, M., Ilmonen, P., Torres, S., and Tudor, C. (2021). On the ARCH model with stationary liquidity. *Metrika*, 84:195–224.
- [11] Voutilainen, M., Viitasaari, L., and Ilmonen, P. (2017). On model fitting and estimation of strictly stationary processes. *Modern Stochastics: Theory and Applications*, 4:381–406.
- [12] Yule, G. U. (1927). On a method of investigating periodicities in disturbed series with special reference to wolfer’s sunspot numbers. *Philos. Trans. Royal Society*, London A 226:267–298.
- [13] Yuliya, S. M. (2008). *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [14] Zakoian, J. M. (1994). Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18:931–955.

Anexo A

Códigos

A.1 Simulações

```
%*****INICIALIZACAO DE VARIAVEIS*****
num_sims = 1000;    % Numero de simulacoes
N = 100;           % Tamanho da amostra: N=100, N=1000 ou N=10000
H = 0.8;           % Parametro de Hurst

%***** GERADOR *****
estimadores = zeros(3,num_sims);    % Reservar memoria
% Segue-se um ciclo que ira ser percorrido conforme o numero de simulacoes.
% Para cada simulacao vamos estimar os 3 parametros (alpha_0, alpha_1 e beta).
% A matriz estimadores, sera 3x1000(num_sims), em que a primeira linha ...
    %corresponde aos valores estimados alpha_1, a segunda aos valores de beta ...
    %e a terceira aos valores de alpha_0. Cada coluna corresponde a uma ...
    %simulacao.
for i=1:length(estimadores)
    fbm = fbm1d(H,N,2^ceil(log2(N)));    % Geracao da serie fbm
    fbm = fbm(1:N);    % Corte da serie fbm para considerar apenas N valores
    [alpha1,beta,alpha0] = funcao_estima(fbm,H); % Funcao que recebe a serie ...
        %fbm gerada e devolve os valores estimados (alpha_1, beta e alpha_0)

    estimadores(1,i)=alpha1;
    estimadores(2,i)=beta;
    estimadores(3,i)=alpha0;
end

figure
alpha0s=estimadores(3,:);
alpha0s=alpha0s(alpha0s==real(alpha0s)); % No caso de haver valores complexos ...
    %apenas sao considerados os reais
histogram(alpha0s);
xlabel('$\hat{\alpha}_0$', 'Interpreter', 'latex')
ylabel('Frequencia')

figure
```

```

alphals=estimadores(1,:);
alphals=alphals(alphals==real(alphals)); % No caso de haver valores complexos ...
    %apenas sao considerados os reais
histogram(alphals);
xlabel('$\hat{\alpha}_1$', 'Interpreter', 'latex')
ylabel('Frequencia')

figure
betas=estimadores(2,:);
betas=betas(betas==real(betas)); % No caso de haver valores complexos apenas ...
    %sao considerados os reais
histogram(betas);
xlabel('$\hat{\beta}$', 'Interpreter', 'latex')
ylabel('Frequencia')

fprintf("\t\t a0 \t a1 \t beta\n Esperado\t%.4f \t %.4f %.4f\n Obtido\t\t%.4f ...
    \t %.4f %.4f\n",1,0.1,0.5,mean(alpha0s),mean(alphals),mean(betas));
fprintf("Desvio Padrao\t%.4f\t %.4f\t%.4f",std(alpha0s),std(alphals),std(betas))

%***** FUNCAO QUE ESTIMA OS TRES VALORES DOS PARAMETROS *****
function [alpha1, beta, alpha0]= funcao_estima(f,H)
    L = l(f); % Primeiro passo gerar L;
    [epsilon2] = Epsilon2(L); % Segundo passo gerar epsilon^2
    gama=Gama(epsilon2); % Calcula gama_chapeu

    u2=mean(epsilon2);
    u4=mean(epsilon2.^2);

    % Calculo do s_n (n=0 e n=1)
    s1=s(1,H);
    s0=s(0,H);

    a = gama(2)-(s1/s0)*gama(1);
    b = 2*(s1/s0)*gama(2)-(gama(3)+gama(1));
    c = gama(2)+(s1/s0)*( (u4*2)/3 - gama(1));

    % Estimadores (Definicao 3.3.1)
    alpha1 = (-b-sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a);
    beta = sqrt( (1/s0)*( alpha1^2)*gama(1) - ...
        2*alpha1*gama(2)+gama(1)-(u4*2)/3));
    alpha0 = u2*(1-alpha1) - beta;
end

%***** CALCULO DO L *****
% Recebe como parametro a serie fbm e gera L_t = ( B_(t+1) - B_t )^2
function L = l(f)
    L = zeros(length(f)-1,1); % Reserva de memoria
    for i=1:length(L)
        L(i)=(f(i+1)-f(i))^2; % L_t = ( B_(t+1) - B_t )^2
    end
end

```

```

end

%***** CALCULO DO EPSILON *****
function [epsilon2]=Epsilon2(L)
    eta = normrnd(0,1,length(L)+1,1); % Gera uma Normal(0,1) com tamanho N

    sigma2 = zeros(size(eta)); % Reserva memoria
    epsilon2= zeros(size(eta)); % Reserva memoria

    % Valores iniciais
    epsilon2(1)=1.7;
    sigma2(1)=1;

    for i=2:length(sigma2)
        sigma2(i) = 1 + 0.1*(epsilon2(i-1)) + 0.5*L(i-1); % (sigma_t)^2 = ...
            %alpha_0 + alpha_1*(epsilon_(t-1))^2 + beta*L_(t-1)
        epsilon2(i) = sigma2(i)*eta(i)^2; % epsilon_t = sigma_t * eta_t
    end
end

%***** CALCULO DO GAMA *****
function gama = Gama(epsilon2)
    gama = zeros(size(epsilon2)); % Reserva memoria
    u2=mean(epsilon2);
    for i=0:2 % gama(0), gama(1) e gama(2)
        for j=1:length(epsilon2)-i
            gama(i+1) = gama(i+1) + ((epsilon2(j)-u2)*( epsilon2(j+i) -u2));
        end
        gama(i+1)=gama(i+1)/length(epsilon2);
    end
end

%***** CALCULO DO S_N *****
function s_n = s(n,H)
    s_n = (1/2)*( (abs(-n+1)^(2*H) ) + ( abs(-n-1)^(2*H) ) - 2*( ...
        abs(-n)^(2*H) ) )^2;
end

```

A.2 Estimação dos parâmetros da Corticeira Amorim

```

clear; clc; close all;
data_filename = "CorticeiraAmorim.xlsx";
parametros_filename = "CorticeiraAmorim_resultados.txt";
epsilon = readmatrix(data_filename);
epsilon_dif = [0; diff(epsilon)]; % epsilon diferenciado
epsilon2 = epsilon_dif.^2;

fileid = fopen(parametros_filename, 'w'); % Abertura do ficheiro em modo escrita

```

```

fprintf(fileid,"H\t sinal\t alpha_0\t alpha_1\t beta\t Media_epsilon^2\n"); ...
    % Cabecalho do ficheiro

% Ciclo que varia os valores do parametro de Hurst (H) e o sinal + ou - da
% expressao (3.19). Para cada combinacao destes parametros sao calculados os
% estimadores e escritos num ficheiro.
for H=0.1:0.1:0.9
    for sin=1:2 % variacao do sinal
        if sin==1
            sinal='-';
        else
            sinal = '+';
        end
        [alpha0,alpha1,beta]=funcao_estima_2(epsilon2,H,sinal);

        if isreal(alpha0) && isreal(alpha1) && isreal(beta) % Apenas ...
            %considera reais
            fprintf(fileid,"% .2f\t %s\t %.14f\t %.14f\t %.14f\t %.6f\n", ...
                H,sinal,alpha0,alpha1,beta, (alpha0+beta)/(1-alpha1));
        end
    end
end

fclose(fileid);

function gama = Gama(epsilon2,u2)
    gama = zeros(size(epsilon2)); % Reserva memoria
    for i=0:2 % gama(0), gama(1) e gama(2)
        for j=1:length(epsilon2)-i
            gama(i+1) = gama(i+1) + ((epsilon2(j)-u2)*(epsilon2(j+i)-u2));
        end
        gama(i+1)=gama(i+1)/length(epsilon2);
    end
end

function s_n = s(n,H)
    s_n = (1/2)*( (abs(-n+1)^(2*H) ) + ( abs(-n-1)^(2*H) ) - 2*( ...
        abs(-n)^(2*H) ) )^2;
end

function [alpha0,alpha1,beta]= funcao_estima_2(epsilon2,H,sinal)
    u2=mean(epsilon2);
    u4=mean(epsilon2.^2);

    gama=Gama(epsilon2,u2); % Calcula a funcao gama_chapeu

% Calculo do s_n (n=0 e n=1)
s1=s(1,H);
s0=s(0,H);

a = gama(2)-(s1/s0)*gama(1);
b = 2*(s1/s0)*gama(2)-(gama(3)+gama(1));

```



```
c = gama(2)+(s1/s0)*( (u4*2)/3 - gama(1));
% Estimadores (Definicao 3.3.1)
if sinal=='+'
    alpha1 = (-b+sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a);
else
    alpha1 = (-b-sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a);
end
beta = sqrt( (1/s0)*( (alpha1^2)*gama(1) - ...
    2*alpha1*gama(2)+gama(1)-(u4*2)/3));
alpha0 = u2*(1-alpha1) - beta;
end
```