

1 2 9 0



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Ana Carolina Pires Marques

**CONVERGÊNCIA DE MÉTODOS DE
DIFERENÇAS FINITAS PARA LEIS DE
CONSERVAÇÃO HIPERBÓLICAS**

Dissertação no âmbito do Mestrado em Matemática, Ramo Análise Aplicada e Computação orientada pelo Professor Doutor Gonçalo Nuno Travassos Borges Alves da Pena e apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia.

Junho de 2022

Convergência de Métodos de Diferenças Finitas para Leis de Conservação Hiperbólicas

Ana Carolina Pires Marques



UNIVERSIDADE DE
COIMBRA

Mestrado em Matemática

Master in Mathematics

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

Junho 2022

Agradecimentos

Gostaria de começar por agradecer ao meu orientador, o Professor Doutor Gonçalo Pena, por todo o apoio e por todas as longas horas que passou comigo. Graças a ele esta experiência tornou-se gratificante e transformadora tanto a nível académico como pessoal.

Preciso de agradecer à ENEIDA.IO por terem proposto este tema e por me terem acolhido de uma forma excepcional. Agradeço à equipa de Data Science que me acompanhou ao longo deste ano, motivando-me todos os dias. E, em especial, à Daniela Jordão, uma excelente profissional, que apesar de todas as tarefas que tinha no seu dia a dia, estava sempre disposta a ajudar-me e a esclarecer qualquer dúvida.

Agradeço ainda a toda a minha família, em particular, aos meus pais e à minha irmã. Sem eles o meu percurso não teria sido possível. Agradeço ao meu companheiro para a vida, ao Renato, por estar sempre disponível e por nunca me ter deixado desistir. E, ainda, agradeço à minha Alice, que me ajuda a crescer e a tornar-me uma pessoa melhor a cada dia.

Aos meus colegas de Mestrado, ao 'WAAO' e a todos os meus amigos que permanecem desde a minha infância um sincero obrigada por todo o apoio e por estarem presentes ao longo desta caminhada.

Por fim, gostaria de agradecer à Câmara Municipal de Mação e ao Rotary Club de Abrantes por terem confiado em mim e por me terem ajudado no decorrer desta etapa.

Resumo

Nesta dissertação estudaremos a convergência de métodos de diferenças finitas para leis de conservação hiperbólicas, isto é, equações diferenciais de derivadas parciais de primeira ordem do tipo hiperbólico.

Estas equações surgem associadas a vários modelos relacionados com problemas físicos. Numa primeira parte, apresentamos alguns resultados de existência e unicidade de solução (no sentido clássico) e é feita a generalização para soluções com regularidade mais fraca. Na segunda parte, são explorados métodos numéricos para aproximar a solução deste tipo de equações (na sua formulação fraca). Dando particular foco a problemas em que o fluxo é não linear, são apresentados resultados de estabilidade e convergência (em certo sentido) para uma classe de métodos numéricos.

Conteúdo

Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
2 Leis de conservação hiperbólicas	5
2.1 Existência de solução	5
2.1.1 Solução fraca: definição e existência	9
2.2 Problemas não lineares	11
2.3 Condições de entropia	14
3 Métodos numéricos para leis de conservação hiperbólicas	17
3.1 Preliminares	17
3.2 Revisão de conceitos para problemas lineares	19
3.3 Caso não linear	24
3.3.1 Métodos conservativos	25
3.3.2 Métodos consistentes	26
3.3.3 Teorema de Lax-Wendroff	26
3.3.4 Estabilidade não linear	35
4 Resultados numéricos	43
4.1 Problemas lineares	43
4.2 Problemas não lineares	46
5 Conclusão	49
Bibliografia	51

Lista de Figuras

2.1	Características referentes ao Exemplo 1.	7
2.2	Características referentes ao Exemplo 2.	12
2.3	Representação da solução (2.18).	13
2.4	Representação das soluções do problema (2.14)-(2.19).	14
4.1	Erro absoluto para as diferentes metodologias numéricas para o problema (4.2). . . .	44
4.2	Erro absoluto para as diferentes metodologias numéricas para o problema (4.3). . . .	45
4.3	Erro absoluto para as diferentes metodologias numéricas para o problema (4.5). . . .	46
4.4	Erro absoluto para as diferentes metodologias numéricas para o problema (4.6). . . .	47

Capítulo 1

Introdução

As leis de conservação modelam a conservação de uma quantidade específica. Em particular, as leis de conservação hiperbólicas são equações diferenciais de derivadas parciais de primeira ordem do tipo hiperbólico. Embora possam ser simplesmente equações de transporte puro, estas equações podem modelar fenómenos tão diversos como a propagação de ondas [4], o tráfego automóvel [6] e o carregamento de veículos elétricos (VEs) [5].

Em Portugal, um relatório publicado pela Eurelectric e a EY [1] projeta mais de meio milhão de carros elétricos em 2030 e defende que um carregamento sem regras e sem gestão, “pode criar problemas para as redes locais e para a qualidade do serviço de eletricidade”. Assim, surge a necessidade de criar um modelo que permita que estes veículos parem de carregar ou, até mesmo, descarreguem e injetem parte da sua energia para a rede.

O carregamento destes veículos pode ser definido através de uma função densidade que contabiliza o número de veículos, em função do estado de energia (SOE) da bateria e do tempo. Assim, denotamos por $x \in [0, 1]$ o estado de energia e introduzimos a variável $u : [0, 1] \times [0, T]$, para algum $T > 0$, como sendo a função densidade dos carros em carregamento. Devido à natureza deste problema, esta equação traduz-se numa lei de conservação hiperbólica.

Seja $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que representa a densidade de determinada propriedade mensurável de um sistema isolado e um segmento infinitesimal $[x_1, x_2]$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Sabemos então que no instante $t \in \mathbb{R}^+$ existem

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx \quad (1.1)$$

unidades desta propriedade. Se $f(u(x, t))$ designar o fluxo da variável u em $x \in \mathbb{R}$ e no instante $t \in \mathbb{R}^+$, como estamos na presença de um sistema isolado, sabemos que a variação de (1.1) depende apenas do fluxo nos pontos x_1 e x_2 e, portanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx = f(u(x_2, t)) - f(u(x_1, t)) \quad (1.2)$$

e ainda,

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2) - u(x, t_1) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(u(x_2, t)) - f(u(x_1, t)) dt.$$

Assumindo $f(u(x,t))$ diferenciável na variável x e utilizando

$$u(x, t_2) - u(x, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dt$$

e

$$f(u(x_2, t)) - f(u(x_1, t)) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}(f(u(x, t))) dx$$

obtemos então:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}(f(u(x, t))) \right) dx dt = 0. \quad (1.3)$$

Como (1.3) é válida para qualquer intervalo $[x_1, x_2]$ e $[t_1, t_2]$, concluímos que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}(f(u(x, t))) = 0. \quad (1.4)$$

Obtemos então a equação diferencial hiperbólica (1.4) onde $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função que descreve a distribuição, por exemplo, no espaço, da variável em estudo num determinado instante t , e a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, designada por fluxo é conhecida e codifica o comportamento do fluxo da variável u .

Embora (1.4) tenha uma expressão aparentemente simples no universo das equações diferenciais, por comparação a outras com derivadas de outras ordens envolvidas, a construção de solução analítica, em sentido a definir, é um problema cuja resposta não é trivial. Como veremos, a resposta a estas questões é fortemente influenciada pela expressão da função f e pela regularidade e comportamento da condição inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \text{ para todo o } x \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

utilizada para complementar (1.4).

Um dos primeiros problemas que se coloca é o que é uma solução do problema de condição inicial (1.4)-(1.5). A definição do que se entende por solução deste problema no sentido clássico é, em muitos casos, demasiado restritiva e exclui muitas aplicações e problemas interessantes. A extensão do conceito de solução clássica à procura de soluções fracas em certo espaço funcional, permite obter soluções para problemas que de outro modo seriam descartados. Ainda assim, as dificuldades inerentes à construção de solução analítica levam-nos a recorrer a métodos numéricos para aproximar a solução deste tipo de problemas.

Aproximar soluções através de métodos numéricos para equações lineares é um problema clássico de Análise Numérica e existe uma base sólida de ferramentas para estabelecer a sua convergência e estabilidade. No entanto, quando consideramos equações e métodos não lineares, a teoria clássica não é aplicável e é necessário encontrar novas estratégias para estabelecer a convergência destes métodos. Em particular, é necessário adequar o conceito de convergência devido à potencial não unicidade de solução do problema.

Esta dissertação está dividida em quatro capítulos. O segundo capítulo consistirá na introdução dos conceitos de solução de (1.4)-(1.5), a sua construção e resultados acerca da existência e unicidade da mesma. O terceiro capítulo será dedicado ao estudo de métodos numéricos de diferenças finitas para este tipo de problemas. Esse capítulo será dividido em duas partes: na primeira fazemos uma

revisão dos conceitos utilizados nos problemas lineares e, na segunda parte, procuramos introduzir conceitos análogos adequados para o caso não linear, nomeadamente, a consistência e a estabilidade por variação total. Concluímos esse capítulo apresentando um resultado que estabelece a convergência duma sucessão de aproximações numéricas não lineares. Por fim, o quarto capítulo apresentará alguns resultados numéricos acerca dos métodos estudados ao longo da tese e serão feitos alguns comentários aos resultados obtidos.

Capítulo 2

Leis de conservação hiperbólicas

Para iniciar o estudo da existência de soluções da lei de conservação sujeita a uma condição inicial, recordemos que o problema que pretendemos abordar é o problema de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}(f(u(x, t))) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

onde f é uma função com regularidade suficiente.

2.1 Existência de solução

Começemos por introduzir alguns espaços de funções necessários para formalizar adequadamente o conceito de solução clássica do problema (2.1)-(2.2).

Sejam $C^k(\Omega)$ e $C^\infty(\Omega)$ os espaços das funções definidas em Ω , k vezes diferenciáveis e infinitamente diferenciáveis, respectivamente, com derivada contínua. No que se segue, consideraremos $\Omega = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R} \times I$, onde I é um intervalo.

Denotamos por $L^\infty(\Omega)$ o espaço das funções mensuráveis com supremo essencial finito e cuja norma é definida por

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in \Omega\}.$$

Podemos agora usar esta notação para introduzir o conceito de solução no sentido clássico para a chamada forma diferencial (2.1).

Definição 1. Uma função $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se solução (no sentido clássico) do problema de Cauchy (2.1)-(2.2) se

1. $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \cap C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$,
2. u satisfaz a equação (2.1) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ e a condição inicial (2.2).

Para construir a solução de (2.1)-(2.2) um método tipicamente utilizado é o método das características.

Método das Características

O método das características permite "propagar" os valores da condição inicial ao longo do domínio, permitindo assim gerar uma expressão para u . Consideremos os casos em que (2.1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$a(x,t,u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x,t,u) \frac{\partial u}{\partial t} = c(x,t,u). \quad (2.3)$$

Suponhamos que u é solução de (2.3). Então, podemos introduzir a superfície que corresponde ao gráfico de u através de $F(x,t,z) = u(x,t) - z = 0$. Como sabemos, o vector gradiente de F ,

$$\nabla F = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, -1 \right),$$

e, portanto, o produto interno $((a,b,c), \nabla F)$ é nulo. Assim, o vector (a,b,c) é tangente à superfície, o que significa que em cada ponto $P = (x,t,u(x,t))$ da superfície definida por $z = u(x,t)$, (a,b,c) é tangente à superfície. Seja \mathcal{C} uma curva que contém o ponto P com vector tangente (a,b,c) e suponhamos que essa curva admite a parametrização seguinte

$$(x(s), t(s), v(s)), \quad s \in \mathbb{R}_0^+.$$

Se $v(s) = u(x(s), t(s))$, então, com base na definição da curva \mathcal{C} obtemos

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds}(s) = a(x(s), t(s), v(s)) \\ \frac{dt}{ds}(s) = b(x(s), t(s), v(s)) \\ \frac{dv}{ds}(s) = c(x(s), t(s), v(s)) \end{cases} \quad (2.4)$$

para $s \in \mathbb{R}^+$. Com base na condição inicial (2.2), fixamos um ponto $\xi \in \mathbb{R}$ para complementarmos (2.4) com as seguintes condições iniciais

$$\begin{cases} x(0) = \xi \\ t(0) = 0 \\ v(0) = u_0(\xi). \end{cases} \quad (2.5)$$

Determinando a solução do sistema (2.4) com as condições iniciais (2.5) conseguimos construir uma solução do problema (2.1)-(2.2). Essencialmente, a solução construída é obtida propagando os valores de u_0 em cada $\xi \in \mathbb{R}$, através das curvas características definidas por $(x(s), t(s)), s \in \mathbb{R}_0^+$.

O método das características apresentado permite construir uma solução u e o teorema seguinte indica condições suficientes para garantir a existência e a unicidade da mesma. A demonstração deste resultado pode ser consultada em [3].

Teorema 1. *Se a, b e c têm derivadas parciais contínuas em $\overline{B_\delta(\xi_0, 0, u_0(\xi_0))}$ ¹, $b(\xi_0, 0, u_0(\xi_0)) \neq 0$, $\xi_0 \in \mathbb{R}$, e u'_0 é contínua, então existe, pelo menos localmente, uma e uma só solução do problema de Cauchy (2.1)-(2.2).*

¹ $\overline{B_\delta(\xi_0, 0, u_0(\xi_0))}$:= Fecho da bola com centro em $(\xi_0, 0, u_0(\xi_0))$ e raio δ .

Através do teorema anterior conseguimos garantir a existência e unicidade de solução localmente. No entanto, é de notar que em certas condições e a partir de certo instante pode deixar de ser possível, através deste método, construir uma solução no sentido que conhecemos. Vejamos um exemplo.

Exemplo 1. A equação de Burgers é definida considerando em (2.1), $f(u) = \frac{1}{2}u^2$, obtendo então

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + u(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0. \quad (2.6)$$

Para t suficientemente pequeno podemos construir a solução no sentido clássico através do método das características. Seja $(x(s), t(s), v(s))$ $s \in \mathbb{R}_0^+$, a parametrização de uma curva tal que:

$$\frac{dx}{ds}(s) = v(s), \quad \frac{dt}{ds}(s) = 1, \quad \frac{dv}{ds}(s) = 0, \quad s \in \mathbb{R}^+ \quad (2.7)$$

e sujeita às condições (2.5). Assim, obtemos um sistema diferencial ordinário cujas incógnitas estão sujeitas a uma condição inicial. Determinando a solução dos sistema, obtemos

$$v(s) = u_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

$$t(s) = s, \quad s \in \mathbb{R}_0^+$$

$$x(s) = u_0(\xi)s + \xi.$$

Se das igualdades anteriores conseguirmos escrever ξ e s em função de x e t , a solução da equação diferencial (2.6) é simplesmente dada por $u(x,t) = u_0(\xi(x,t))$.

Para este exemplo consideremos $u_0(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$, então utilizando o raciocínio mencionado acima obtemos características da forma $x(t) = (1-t)\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$, apresentadas na Figura 2.1.

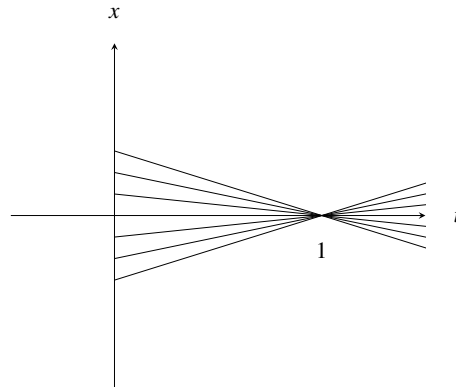


Figura 2.1 Características referentes ao Exemplo 1.

Observando essa figura, notamos que as características vão em direção a $t = 1$ e acabam por se cruzar. Assim, para $t < 1$ teremos como solução

$$u(x,t) = u_0\left(\frac{x}{1-t}\right) = \frac{x}{t-1},$$

que será constante ao longo das características.

Este exemplo pode ser generalizado, mas primeiro é necessário introduzir duas novas definições.

Definição 2. Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Dizemos que S é um conjunto convexo se

$$\forall x, y \in S, \quad x + ty \in S, \quad \text{qualquer que seja } t \in [0, 1].$$

Definição 3. Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é convexa em S se

$$\forall \alpha \in [0, 1], \forall x, y \in S, f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Agora estamos em condições de enunciar a proposição seguinte:

Proposição 1. Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$ convexa e $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, com u_0' negativa em algum ponto do seu domínio. Então, existe $u : \mathbb{R} \times [0, t^*) \rightarrow \mathbb{R}$ solução clássica de (2.1)-(2.2) onde

$$t^* = \frac{-1}{\min_{\xi} u_0'(\xi) f''(u_0(\xi))}.$$

Demonstração. Consideremos novamente a equação inicial (2.1). Esta equação pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Então, pelo método das características temos

$$\frac{dx}{ds} = f'(v), \quad \frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dv}{ds} = 0, \quad s \in \mathbb{R}^+$$

com condição inicial (2.5). Resolvendo este sistema obtemos

$$x(s) = f'(u_0(\xi))s + \xi,$$

$$t(s) = s,$$

$$v(s) = u_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Isto significa que este problema tem características definidas por

$$x = f'(u_0(\xi))t + \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Como x depende de ξ e, por hipótese, u_0 é suave, então

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 + t f''(u_0(\xi)) u_0'(\xi) \neq 0 \tag{2.8}$$

Por outro lado, se $u_0' \geq 0$ e f for convexa, então $f'' \geq 0$ e, portanto, $f''(u_0(\xi)) u_0'(\xi) \geq 0$ e a condição (2.8) é sempre satisfeita.

Se tivermos $f''(u_0(\xi)) u_0'(\xi) < 0$, isto é, $u_0'(\xi) < 0$ então (2.8) é satisfeita para

$$t < \frac{-1}{f''(u_0(\xi)) u_0'(\xi)}.$$

Assim, é possível construir uma função $u : \mathbb{R} \times [0, t^*] \rightarrow \mathbb{R}$, onde t^* é dado por

$$t = \frac{-1}{\min_{\xi} f''(u_0(\xi))u_0'(\xi)}, \quad (2.9)$$

que é solução do problema (2.1)-(2.2). □

2.1.1 Solução fraca: definição e existência

Como vimos pela Proposição 1, a partir do instante t definido em (2.9) não é possível construir uma solução no sentido clássico, uma vez que características diferentes propagam valores diferentes para um mesmo ponto (ver Exemplo 1). Deste modo, surge a necessidade de criar um novo conceito de solução, o conceito de solução fraca.

Proposição 2. *Se u é solução no sentido clássico de (2.1)-(2.2) então u satisfaz a seguinte igualdade*

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u(x, t) \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) + f(u(x, t)) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) \right) dx dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, 0) u_0(x) dx, \quad (2.10)$$

qualquer que seja $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$ com suporte compacto.

Demonstração. Seja $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$ uma função com suporte compacto $K \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$. Então existe um retângulo $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$ que contém K e está contido em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$.

Multiplicando a equação diferencial por ϕ e integrando em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$, obtemos

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \phi(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (f(u(x, t))) \phi(x, t) dx dt = 0.$$

Atendendo ao suporte compacto de ϕ , a igualdade anterior pode ser escrita como

$$\int \int_K \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \phi(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (f(u(x, t))) \phi(x, t) dx dt = 0,$$

ou ainda,

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \phi(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (f(u(x, t))) \phi(x, t) dx dt = 0. \quad (2.11)$$

Aplicando o Teorema de Fubini, integrando por partes e atendendo a que $\phi = 0$ fora de K , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \phi(x, t) dx dt &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \phi(x, t) dt dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left([u(x, t) \phi(x, t)]_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} u(x, t) \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) dt \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(-u(x, t_1) \phi(x, t_1) - \int_{t_1}^{t_2} u(x, t) \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) dt \right) dx \end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (f(u(x,t))) \phi(x,t) dx dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left([f(u(x,t))\phi(x,t)]_{x=x_1}^{x=x_2} - \int_{x_1}^{x_2} f(u(x,t)) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t) dx \right) dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} f(u(x,t)) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t) dx dt. \end{aligned}$$

Deste modo a igualdade (2.11) é equivalente a

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} u(x,t) \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,t) + f(u(x,t)) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t) dx dt = \int_{x_1}^{x_2} u(x,t_1) \phi(x,t_1) dx. \quad (2.12)$$

Se o suporte K não intersestar $\mathbb{R} \times \{0\}$ então $\phi(x,t_1) = 0$, para todo o $x \in [x_1, x_2]$. No entanto, se a intersecção de K com $\mathbb{R} \times \{0\}$ for diferente de vazio então tal implica que $t_1 = 0$. Neste caso (2.12) é equivalente a

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} u(x,t) \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,t) + f(u(x,t)) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t) dx dt = - \int_{x_1}^{x_2} u(x,0) \phi(x,0) dx.$$

Finalmente, atendendo ao suporte compacto de ϕ , $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \phi}{\partial t}$, segue-se que

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,t) + f(u(x,t)) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t) dx dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) \phi(x,0) dx.$$

□

A proposição anterior motiva a seguinte definição.

Definição 4. *Seja $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $f \in C^1(\mathbb{R})$. Dizemos que u é solução fraca do problema (2.1)-(2.2) se para todas as funções $\phi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$ com suporte compacto, (2.10) for satisfeita.*

Uma primeira proposição fundamental é a relação que existe entre o conceito de solução clássica e solução fraca.

Proposição 3. *Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$. Se $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \cap C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$ é solução fraca de (2.1), (2.2) então u também será solução do problema no sentido clássico.*

Demonstração. Se u é solução fraca de (2.1)-(2.2) então u satisfaz (2.10) e como vimos anteriormente (2.10) é equivalente a

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,t) dx dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x,t) u(x,t) |_{t=0} dx + \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} f(u(x,t)) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t) dx dt = 0.$$

Como $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ então utilizando integração por partes obtemos

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\phi(x,t) \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \phi(x,t) \frac{\partial}{\partial x} f(u(x,t)) \right) dx dt = 0. \quad (2.13)$$

Como (2.13) é válida para todas as funções teste $\phi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$ com suporte compacto e $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, então concluímos que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} f(u(x,t)) = 0.$$

Usando um argumento semelhante é possível mostrar que $u(\cdot, 0) = u_0$ concluindo finalmente que u é solução no sentido clássico. □

Uma outra questão fundamental é a de saber sob que condições é que podemos garantir a existência de solução fraca. Antes de analisarmos este problema introduziremos uma definição preliminar.

Definição 5. Dizemos que $f \in C^2(\mathbb{R})$ é uma função uniformemente convexa se existir uma constante $\theta > 0$ tal que

$$f'' \geq \theta > 0.$$

Agora estamos em condições de enunciar um teorema que garante a existência de solução fraca. Os detalhes da demonstração do resultado seguinte podem ser consultados em [2].

Teorema 2. Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$ uniformemente convexa e $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Então, o problema (2.1)-(2.2) admite uma solução fraca $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ no sentido da Definição 4.

É importante notar que o teorema anterior garante a existência de solução fraca mas não a sua unicidade. Essa questão será abordada na próxima secção.

2.2 Problemas não lineares

Os problemas não lineares tornam a questão da construção de solução mais complexa, visto que a não linearidade de f pode induzir descontinuidades na solução do problema, mesmo com condições iniciais suaves. Note-se que neste cenário, teremos de abandonar o conceito de solução clássica e focar-nos no conceito de solução fraca.

Para analisarmos como uma descontinuidade na condição inicial se propaga ao longo do domínio de u , consideremos a equação de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + u(x,t) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \tag{2.14}$$

e introduziremos os chamados *problemas de Riemann*, cuja condição inicial é dada por

$$u_0(x) = \begin{cases} v_l, & x < \varepsilon \\ v_r, & x > \varepsilon \end{cases} \tag{2.15}$$

onde u_r e u_l denotam constantes reais e $\varepsilon \in \mathbb{R}$ fixo.

A noção de solução fraca permite, sob certas condições, mostrar a existência de solução, embora, tal solução possa não ser contínua. No entanto, existem outras restrições que devem ser levadas em

consideração para que uma solução de um problema de Riemann seja, de facto, solução. Vejamos um exemplo que nos mostra isso.

Exemplo 2. Consideremos a equação de Burgers (2.14) com a seguinte condição inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 0, & x > 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Utilizando os cálculos feitos no Exemplo 1 relembremos que para a equação de Burgers as características são retas definidas por

$$x(t) = u_0(\xi)t + \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

e a solução era construída por fazer

$$u = u_0(\xi).$$

Começemos por considerar $\xi < 0$. Neste caso teremos $u_0(\xi) = 2$ e características da forma

$$x = 2t + \xi, \quad \xi < 0.$$

Por outro lado, quando temos $\xi > 0$ temos $u_0(\xi) = 0$ e características definidas por

$$x = \xi, \quad \xi > 0.$$

As características que calculámos anteriormente estão apresentadas na Figura 2.2.

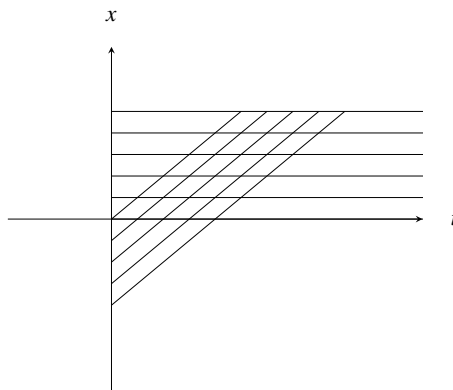


Figura 2.2 Características referentes ao Exemplo 2.

Observando a Figura 2.2 vemos que as características se cruzam em vários pontos. Além disso, dada a condição inicial (2.16) não será lógico esperar que, em geral, exista uma solução contínua para este problema. Assim, como foi mencionado, temos de encontrar técnicas que nos permitam construir uma solução fraca admissível para o problema.

Para conseguirmos construir uma solução fraca admissível para problemas com condições iniciais do tipo (2.15) precisamos perceber como as características se comportam no momento do choque.

Para isso, é necessário estabelecer uma relação entre o valor da função à esquerda da descontinuidade u_l e o valor da função à direita u_r .

Esta relação é chamada de *condição de Rankine-Hugoniot* e é dada por

$$f(u_l) - f(u_r) = \sigma (u_l - u_r), \quad (2.17)$$

onde σ é designado como a velocidade do choque.

Esta condição é formalmente introduzida na proposição seguinte.

Proposição 4. *Se u é uma solução fraca de um problema de Riemann da forma (2.1)-(2.15), então a velocidade do choque, σ deve satisfazer a condição de Rankine-Hugoniot (2.17).*

Exemplo 3. *Retomemos novamente o Exemplo 2 e procuremos uma solução fraca para o problema (2.14)-(2.16) que satisfaça a condição de Rankine-Hugoniot (2.17). Então calculando a velocidade do choque obtemos:*

$$\sigma = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} = 1.$$

Como já sabemos que o choque será transportado com velocidade $\sigma = 1$, podemos provar facilmente utilizando a Definição 4 que a solução fraca de (2.14)-(2.16) é dada por

$$u(x,t) = \begin{cases} 2, & x < t \\ 0, & x > t, \end{cases} \quad (2.18)$$

e encontra-se representada na Figura 2.3.

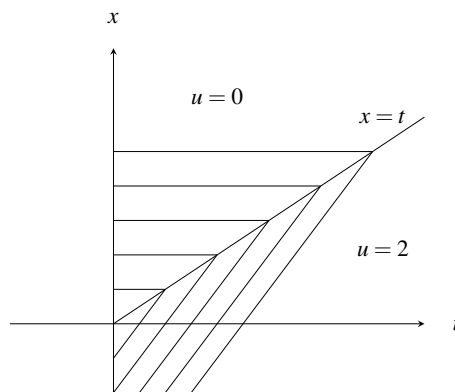


Figura 2.3 Representação da solução (2.18).

Neste caso, a solução dada pelo método das características é uma solução única. No entanto, em certas situações podemos ter mais do que uma solução. Vejamos o próximo exemplo.

Exemplo 4. *Consideremos a equação de Burgers (2.14) com a seguinte condição inicial*

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2, & x > 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Utilizando um raciocínio análogo ao do Exemplo 3, utilizamos o método das características e o conceito de velocidade do choque e obtemos as soluções apresentadas na Figura 2.4.

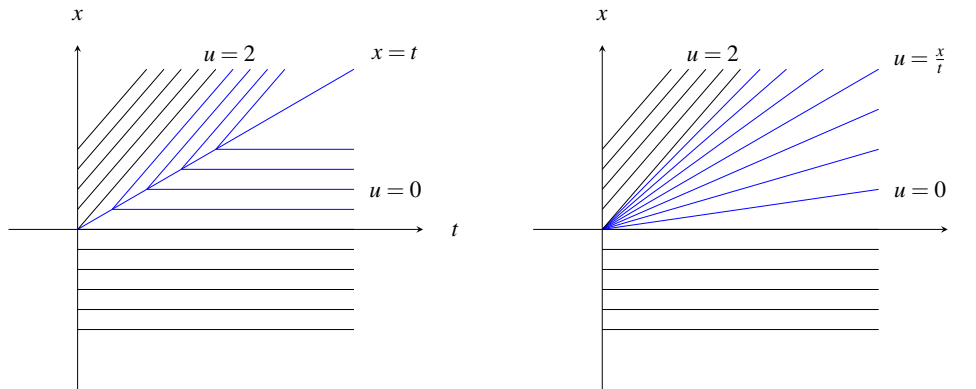


Figura 2.4 Representação das soluções do problema (2.14)-(2.19).

Este exemplo mostra apenas duas das infinitas soluções fracas para este problema. Por esse motivo é necessário estabelecer condições suficientes que permitam determinar de modo único a solução das equações.

No contexto das leis de conservação hiperbólicas, estas condições são chamadas de *condições de entropia*.

2.3 Condições de entropia

Como já foi mencionado procuramos condições para determinar uma única solução das leis de conservação. Neste contexto, isso pode ser feito impondo uma restrição adicional que reproduza um comportamento fisicamente "aceitável".

Definição 6. Uma solução fraca u do problema (2.1), diz-se que satisfaz a condição de entropia se existir $C \geq 0$ tal que para todo $a > 0$, $t \in \mathbb{R}^+$ e $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} \leq C \left(1 + \frac{1}{t} \right). \quad (2.20)$$

Em particular, esta definição pode ser aplicada a um problema mais restrito considerando o caso em que temos um problema de Riemann.

Proposição 5. Seja u uma solução fraca do problema (2.1)-(2.15) com uma descontinuidade que se propaga com velocidade σ , definida em (2.17). Então, u satisfaz a condição de entropia se

$$\frac{f(u) - f(u_r)}{u - u_r} \leq \sigma \leq \frac{f(u) - f(u_l)}{u - u_l}, \quad (2.21)$$

com $u_l \leq u \leq u_r$.

No caso em que temos um problema de Riemann (2.1)-(2.15) onde f uma função convexa podemos refinar ainda mais o resultado anterior.

Proposição 6. *Seja u uma solução fraca do problema (2.1)-(2.15) com uma descontinuidade que se propaga com velocidade σ , definida em (2.17) e cuja função f é convexa. Então, u satisfaz a condição de entropia se*

$$f'(u_r) < \sigma < f'(u_l). \quad (2.22)$$

O conceito de solução de entropia, cuja motivação consiste em impôr uma restrição que torne a solução que a satisfaça, fisicamente aceitável, tem um papel importante na unicidade de solução das leis de conservação. De facto, nas condições de regularidade apresentadas no Teorema 2, juntando a condição de entropia, é possível mostrar que tal solução é única. A demonstração deste resultado pode ser consultada em [2].

Teorema 3. *Se $f \in C^2(\mathbb{R})$ for convexa e $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, então existe no máximo uma única solução fraca de entropia $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ de (2.1)-(2.2).*

Retomemos ao Exemplo 4 e apliquemos as condições de entropia que definimos acima para perceber qual das soluções apresentadas melhor se adequa.

Exemplo 5. *Como estamos a resolver um problema de Riemann e $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ é uma função convexa, basta verificarmos a condição de entropia (2.22) para cada descontinuidade das soluções obtidas no Exemplo 4.*

A solução apresentada do lado esquerdo da Figura 2.4 é descontínua em $x = t$ e a velocidade desta descontinuidade é $\sigma = 1$. Aplicando a condição de entropia (2.22), como $f'(u) = u$, então

$$f'(u_l) = 0 \not> \sigma = 1 \not> f'(u_r) = 2.$$

Concluimos assim que esta solução não satisfaz a condição de entropia e, conseqüentemente, não é uma solução fraca de entropia admissível para o problema.

Por outro lado, a solução apresentada à direita não tem qualquer descontinuidade e, portanto, satisfaz a condição de entropia (2.22). Concluimos então que a solução apresentada no lado direito da Figura 2.4 é a solução fraca de entropia admissível para o problema (2.14)-(2.19).

Capítulo 3

Métodos numéricos para leis de conservação hiperbólicas

Atualmente, a resolução de equações diferenciais parciais através de métodos numéricos é um tópico muito importante na matemática aplicada. Este crescimento constante é alimentado pela grande procura pelas diferentes engenharias e até pela economia, por aproximações precisas e confiáveis para modelos matemáticos envolvendo equações diferenciais parciais (EDPs) cujas soluções exatas são difíceis ou impossíveis de determinar.

O estudo das propriedades de convergência e estabilidade de métodos numéricos para problemas lineares é um problema clássico de Análise Numérica e existe uma base sólida de ferramentas para provar estas propriedades. Embora não seja a única ferramenta, o Teorema de Lax fornece uma forma de provar a convergência de um método transpondo o problema para o estudo da estabilidade e consistência. No entanto, no caso de problemas não lineares, os resultados e técnicas usadas em problemas lineares deixam de ser aplicáveis, sendo necessário o desenvolvimento de novas abordagens para a resolução deste tipo de problema. Nesse sentido, iremos apresentar dois resultados essenciais: o Teorema de Lax-Wendroff e um resultado de convergência que nos permitirá concluir que, sob certas condições, uma sucessão de aproximações numéricas converge (num sentido a definir) para as soluções fracas da equação diferencial.

Assim, começaremos este capítulo com uma breve revisão de conceitos para o caso linear introduzindo toda a notação a utilizar ao longo do capítulo. Na segunda parte, iremos introduzir novos conceitos, em particular de consistência e estabilidade, com o objetivo de estabelecer a convergência de uma classe de métodos numéricos para leis de conservação hiperbólica não lineares.

3.1 Preliminares

Começemos por introduzir alguns espaços de funções e normas necessárias ao restante estudo numérico.

Começemos por introduzir um novo espaço de funções: o espaço $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$. Este espaço é definido por:

$$L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) = \{u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : \|u\|_1 < \infty\},$$

e é munido da norma definida da forma

$$\|u\|_1 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |u(x,t)| dx dt.$$

Podemos ainda estender este espaço a funções definidas em $\mathbb{R} \times (0, T)$, considerando

$$L_{1,T} = \{u : \mathbb{R} \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R} : \|u\|_{1,T} < \infty\},$$

cuja norma é dada por

$$\|u\|_{1,T} = \int_0^T \|u(\cdot, t)\|_1 dt = \int_0^T \int_{-\infty}^\infty |u(x,t)| dx dt.$$

Denotemos também por ℓ o espaço vectorial

$$\ell = \{(\dots, u_{-1}, u_0, u_1, \dots) : u_j \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{Z}\}.$$

Neste contexto, introduzimos dois subconjuntos de particular interesse:

$$\ell_1 = \{u \in \ell : \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_j| < \infty\}$$

e

$$\ell_{1,\Delta x} = \{u \in \ell : \Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_j| < \infty\}$$

munidos, respetivamente, das normas

$$\|u\|_1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_j|$$

e

$$\|u\|_{1,\Delta x} = \Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_j|. \quad (3.1)$$

Para apresentar métodos numéricos de diferenças finitas vamos necessitar de introduzir algumas notações.

Comecemos por considerar o seguinte problema linear

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + a \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in (0, T], T > 0 \quad (3.2)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Seja $\Delta x > 0$. Introduzimos a malha

$$\{x_j = j\Delta x, j \in \mathbb{Z}\}.$$

Seja $N \in \mathbb{N}$, tal que $\Delta t = T/N$ e consideremos os pontos definidos por

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Ao longo deste estudo vamos assumir que $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ é constante.

Assim, denotemos por $U^n \in \ell$ um vector cujas componentes, U_j^n aproximam (num sentido a definir), a solução exata do problema diferencial no ponto (x_j, t_n) , $j \in \mathbb{Z}$, $n = 0, \dots, N$.

3.2 Revisão de conceitos para problemas lineares

No contexto da aproximação do problema diferencial linear (3.2), consideraremos métodos numéricos de dois níveis que podem ser escritos na forma

$$U^{n+1} = H_{\Delta t} U^n, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (3.4)$$

$$U_j^0 = u_0(x_j), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (3.5)$$

onde $H_{\Delta t}$ denota uma matriz com componentes reais e U_j^0 pode ser definido como é apresentado acima ou, em outros casos, pode ser definido como a média de u_0 no intervalo $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$, isto é,

$$U_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u_0(x) dx. \quad (3.6)$$

Esta abordagem é de particular interesse quando u_0 não está necessariamente definido em todos os pontos de \mathbb{R} .

Exemplo 6. O método de Upwind é definido através das relações

$$U_j^{n+1} = U_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_j^n - U_{j-1}^n), \quad j \in \mathbb{Z}, n = 0, \dots, N-1. \quad (3.7)$$

Neste caso, as entradas da matriz $H_{\Delta t} = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ são todas nulas, excepto

$$a_{jj} = 1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad a_{j,j-1} = a \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 7. O método de Lax-Friedrichs é definido da seguinte forma

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} (U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} a (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n), \quad j \in \mathbb{Z}, n = 0, \dots, N-1. \quad (3.8)$$

Assim, para este método as entradas da matriz $H_{\Delta t} = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ são todas nulas, excepto

$$a_{j,j-1} = \frac{1}{2} + a \frac{\Delta t}{2\Delta x}, \quad a_{j,j+1} = \frac{1}{2} - a \frac{\Delta t}{2\Delta x}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Suponhamos agora que o problema diferencial (3.2) admite uma única solução no sentido clássico. Neste caso, seja $E_{\Delta t}^n \in \ell$ definido por

$$E_{\Delta t,j}^n = U_j^n - u(x_j, t_n) \quad (3.9)$$

o erro global associado ao ponto (x_j, t_n) , $j \in \mathbb{Z}$, $n = 0, \dots, N$ e onde u é a única solução do problema.

Com base na definição de erro global podemos agora introduzir o conceito de convergência.

Definição 7. Diz-se que a aproximação numérica definida por (3.4) é convergente para a solução do problema diferencial (3.2), se, para cada t , à medida que $n\Delta t \rightarrow t$

$$\|E_{\Delta t}^n\| \rightarrow 0, \quad n\Delta t \leq T,$$

à medida que $\Delta t \rightarrow 0$, onde $\|\cdot\|$ é uma norma previamente escolhida em ℓ .

Nas condições anteriores, diz-se que o método tem ordem de convergência $p > 0$ se existir uma constante positiva C , independente de Δt , tal que

$$\|E_{\Delta t}^n\| \leq C\Delta t^p.$$

O Teorema de Lax é uma das formas de garantir a convergência de determinado método linear. Para enunciarmos esse teorema é necessário introduzir um novo conceito: a consistência.

Consideremos o operador $R_{\Delta x} : C^0(\mathbb{R}) \rightarrow \ell$, definido por $(R_{\Delta x}u)_j = u(x_j)$, $j \in \mathbb{Z}$, $u \in C^0(\mathbb{R})$.

Assim, seja $L_{\Delta t}^n \in \ell$, $n = 0, \dots, N$ definido por

$$L_{\Delta t,j}^n = \frac{1}{\Delta t} (u(x_j, t_{n+1}) - H_{\Delta t}(R_{\Delta x}u(\cdot, t_n))_j), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (3.10)$$

o erro de truncatura local associado ao ponto (x_j, t_n) .

Definição 8. Diz-se que o método numérico é consistente com a equação diferencial, se

$$\|L_{\Delta t}^n\| \rightarrow 0,$$

à medida que $\Delta t \rightarrow 0$, onde $\|\cdot\|$ é uma norma previamente escolhida em ℓ .

Além disso, diz-se que o método tem ordem de consistência $p > 0$ se existe uma constante positiva C_T , independente de Δt , tal que

$$\|L_{\Delta t}^n\| \leq C_T\Delta t^p, \quad n\Delta t \leq T.$$

Proposição 7. Seja $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, T])$ com suporte compacto solução clássica de

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + a \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T], \quad T > 0 \quad (3.11)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.12)$$

Então a norma do erro de truncatura $L_{\Delta t}$ associado ao método de Upwind é limitada da forma

$$\|L_{\Delta t}\|_{1, \Delta x} \leq C_T\Delta t,$$

para Δt suficientemente pequeno.

Demonstração. Começemos por reescrever o método (3.7) da seguinte forma

$$U_j^{n+1} - U_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} a (U_j^n - U_{j-1}^n) = 0.$$

Agora, substituindo a solução numérica U_j^n pela solução exata $u(x_j, t_n)$, podemos calcular $L_{\Delta t, j}^n$

$$L_{\Delta t, j}^n = \frac{1}{\Delta t} (u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)) + \frac{1}{\Delta x} a (u(x_j, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)).$$

Por hipótese, u terá derivadas de segunda ordem contínuas e, por isso, podemos expandir cada termo do erro de truncatura na Fórmula de Taylor, obtendo assim:

$$L_{\Delta t, j}^n = \frac{1}{\Delta t} \left((u(x_j, t_n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \varepsilon_n)) - u(x_j, t_n) \right) + \frac{1}{\Delta x} a \left(u(x_j, t_n) - (u(x_j, t_n) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\delta_j, t_n)) \right),$$

com $\varepsilon_n \in [t_n, t_{n+1}]$ e $\delta_j \in [x_{j-1}, x_j]$. Simplificando a expressão anterior obtemos:

$$L_{\Delta t, j}^n = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + a \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \varepsilon_n) - a \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\delta_j, t_n).$$

Como u é solução exata do problema então $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ e ficamos com

$$L_{\Delta t, j}^n = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \varepsilon_n) - a \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\delta_j, t_n). \quad (3.13)$$

Atendendo ao seu suporte compacto, u estará contido num conjunto da forma $[-L, L] \times [0, T]$. Portanto, consideremos os índices $N, M \in \mathbb{N}$, tais que $\Delta t N = T$ e $[x_{-M}, x_M] \subseteq [-L, L]$, mas $x_{-M-1} < -L$ e $x_{M+1} > L$.

Assim, aplicando a norma (3.1) na expressão (3.13), obtemos

$$\|L_{\Delta t}\|_{1, \Delta x} = \Delta t \sum_{n=0}^N \left(\Delta x \sum_{j=-M}^M \left| \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \varepsilon_n) - a \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\delta_j, t_n) \right| \right) \quad (3.14)$$

$$\leq \Delta t \Delta x \sum_{n=0}^N \sum_{j=-M}^M \left(\frac{\Delta t}{2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \varepsilon_n) \right| + a \frac{\Delta x}{2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\delta_j, t_n) \right| \right). \quad (3.15)$$

Como $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, T])$ com suporte compacto então $\left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, \varepsilon_n) \right| \leq C_1$ e $\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\delta_j, t_n) \right| \leq C_2$, com C_1, C_2 constantes reais, e portanto podemos dizer que

$$\|L_{\Delta t}\|_{1, \Delta x} \leq \Delta t \Delta x \sum_{n=0}^N \sum_{j=-M}^M \left(C_1 \frac{\Delta t}{2} + a C_2 \frac{\Delta x}{2} \right) \quad (3.16)$$

$$\leq \Delta t \Delta x \left(C_1 \frac{\Delta t}{2} + a C_2 \frac{\Delta x}{2} \right) (N+1) (2M+1) \quad (3.17)$$

$$\leq \Delta t \Delta x \left(C_1 \frac{\Delta t}{2} + a C_2 \frac{\Delta x}{2} \right) 2N 4M. \quad (3.18)$$

Como sabemos $x_M \leq L$, então $M \Delta x \leq L$ e $\Delta t N = T$. Assim,

$$\|L_{\Delta t}\|_{1, \Delta x} \leq 8TL \left(C_1 \frac{\Delta t}{2} + a C_2 \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Relembrando que $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ é constante, seja essa constante designada por C^* , obtemos então

$$\|L_{\Delta t}\|_{1,\Delta x} \leq 8TL \left(C_1 \Delta t + a C_2 \frac{\Delta t}{C^*} \right) \quad (3.19)$$

$$\leq 8TL \left(C_1 + \frac{a C_2}{C^*} \right) \Delta t. \quad (3.20)$$

Por fim, denotemos por $C_T = 16TL \max\{C_1, \frac{a C_2}{C^*}\}$, e obtemos

$$\|L_{\Delta t}\|_{1,\Delta x} < C_T \Delta t.$$

□

De modo análogo, é possível mostrar que tal como o método de Upwind, o método de Lax-Friedrichs tem ordem de consistência 1.

Com o conceito de consistência resta-nos apenas introduzir o conceito de estabilidade para que possamos provar a convergência destes métodos numéricos.

Definição 9. O método diz-se estável se existir uma constante positiva C_E e $\Delta t_0 > 0$ tais que

$$\|H_{\Delta t}^n\| \leq C_E,$$

para todo o $n\Delta t \leq T$ e $\Delta t < \Delta t_0$, onde $\|\cdot\|$ denota uma norma matricial.

Proposição 8. Se $|\frac{\Delta t}{\Delta x}a| \leq 1$, então o método de Lax-Friedrichs (3.8) é estável relativamente à norma $\|\cdot\|_{1,\Delta x}$.

Demonstração. Consideremos o método de Lax-Friedrichs e provemos que este é estável relativamente à norma $\|\cdot\|_{1,\Delta x}$.

Comecemos por relembrar que

$$\|U^{n+1}\|_{1,\Delta x} = \Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} |U_j^{n+1}|.$$

Assim, usando a expressão (3.8), obtemos

$$\begin{aligned} \|U^{n+1}\|_{1,\Delta x} &= \Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{2} (U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} a (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) \right| \\ &= \frac{\Delta x}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} a\right) U_{j-1}^n + \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} a\right) U_{j+1}^n \right| \\ &\leq \frac{\Delta x}{2} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} a\right) U_{j-1}^n \right| + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} a\right) U_{j+1}^n \right| \right) \end{aligned}$$

Se considerarmos $(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} a) \geq 0$ e $(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} a) \geq 0$, isto é, $|\frac{\Delta t}{\Delta x} a| \leq 1$, então:

$$\|U^{n+1}\|_{1,\Delta x} \leq \frac{\Delta x}{2} \left(\left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} a\right) \sum_{j \in \mathbb{Z}} |U_{j-1}^n| + \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} a\right) \sum_{j \in \mathbb{Z}} |U_{j+1}^n| \right).$$

E, aplicando, mais uma vez, a definição de norma

$$\begin{aligned} \|U^{n+1}\|_{1,\Delta x} &\leq \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} a\right) \|U^n\|_{1,\Delta x} + \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} a\right) \|U^n\|_{1,\Delta x} \right) \\ &\leq \|U^n\|_{1,\Delta x}. \end{aligned}$$

Assim, se recordarmos que o método é dado por $U^{n+1} = H_{\Delta t} U^n$, acabámos de provar que $\|U^{n+1}\|_{1,\Delta x} \leq \|U^n\|_{1,\Delta x}$ e portanto $\|H_{\Delta t}\| \leq 1$, onde a norma matricial utilizada é a norma induzida pela norma vectorial $\|\cdot\|_{1,\Delta x}$, e, por sua vez, $\|H_{\Delta t}^n\| \leq 1$, com $n\Delta t \leq T$. Concluimos assim que quando $|\frac{\Delta t}{\Delta x} a| \leq 1$ o método (3.8) é estável. \square

De modo análogo é possível provar a proposição seguinte.

Proposição 9. *Se $0 \leq \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$, então o método de Upwind (3.7) é estável relativamente à norma $\|\cdot\|_{1,\Delta x}$.*

A consistência e a estabilidade são propriedades muito importantes visto que constituem, em conjunto, condições suficientes para garantir a convergência de um método numérico linear.

Teorema 4. *Se um método linear de diferenças finitas de dois níveis da forma (3.4) tiver ordem de consistência $p > 0$ para determinada norma $\|\cdot\|$ e for estável, então é convergente de ordem p em relação a essa norma.*

Demonstração. Pela definição de erro de truncatura, em (3.10), sabemos que

$$R_{\Delta x} u(\cdot, t_n) = H_{\Delta t} R_{\Delta x} u(\cdot, t_{n-1}) + \Delta t L_{\Delta t}^{n-1}. \quad (3.21)$$

Por outro lado, o erro global definido em (3.9) pode ser escrito da forma

$$E_{\Delta t}^n = U^n - R_{\Delta x} u(\cdot, t_n), \quad (3.22)$$

aplicando (3.4) ficamos com:

$$E_{\Delta t}^n = H_{\Delta t} U^{n-1} - R_{\Delta x} u(\cdot, t_n),$$

e, por sua vez, se aplicarmos (3.21):

$$E_{\Delta t}^n = H_{\Delta t} U^{n-1} - H_{\Delta t} R_{\Delta x} u(\cdot, t_{n-1}) - \Delta t L_{\Delta t}^{n-1}.$$

Esta expressão pode ser ainda simplificada aplicando (3.22):

$$E_{\Delta t}^n = H_{\Delta t} E_{\Delta t}^{n-1} - \Delta t L_{\Delta t}^{n-1}.$$

Aplicando esta expressão recursivamente obtemos

$$\begin{aligned} E_{\Delta t}^n &= H_{\Delta t} (H_{\Delta t} E_{\Delta t}^{n-2} - \Delta t L_{\Delta t}^{n-2}) - \Delta t L_{\Delta t}^{n-1} \\ &= H_{\Delta t}^n E_{\Delta t}^0 - \Delta t \sum_{j=0}^{n-1} H_{\Delta t}^j L_{\Delta t}^{n-j}. \end{aligned}$$

Supondo que não existe erro na aproximação inicial obtemos apenas

$$E_{\Delta t}^n = -\Delta t \sum_{j=0}^{n-1} H_{\Delta t}^j L_{\Delta t}^{n-j},$$

e, aplicando normas nos dois lados da equação

$$\|E_{\Delta t}^n\| \leq \Delta t \sum_{j=0}^{n-1} \|H_{\Delta t}^j\| \|L_{\Delta t}^{n-j}\|.$$

Como $j \leq n-1 < n$ e o método é estável então existe uma constante positiva C_E tal que:

$$\|E_{\Delta t}^n\| \leq \Delta t C_E \sum_{j=0}^{n-1} \|L_{\Delta t}^{n-j}\|.$$

Relembrando ainda que o método tem ordem de consistência p , então existe uma constante positiva C_T , independente de Δt tal que:

$$\begin{aligned} \|E_{\Delta t}^n\| &\leq \Delta t C_E C_T \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t^p \\ &\leq \Delta t C_E C_T n \Delta t^p. \end{aligned}$$

Como $n\Delta t \leq T$, então

$$\|E_{\Delta t}^n\| \leq T C_E C_T \Delta t^p,$$

e, se denotarmos $C = T C_E C_T$ uma constante positiva obtemos, finalmente,

$$\|E_{\Delta t}^n\| \leq C \Delta t^p.$$

Concluimos assim que o método é convergente de ordem p .

□

O resultado anterior é apenas uma das implicações do chamado Teorema de Lax que estabelece que a convergência do método é equivalente à sua consistência e estabilidade.

3.3 Caso não linear

Agora que fizemos uma revisão de alguns conceitos numéricos importantes para o caso linear é importante lembrar que os problemas não lineares tornam a questão da construção de solução mais complexa, visto que a não linearidade de f pode induzir descontinuidades na solução do problema, mesmo com condições iniciais suaves. Em termos práticos, isto significa que os resultados teóricos e técnicas usadas em problemas lineares deixam de ser aplicáveis, sendo necessário o desenvolvimento de novas abordagens para a resolução deste tipo de problema.

Por esse motivo, ao longo desta secção vamos procurar estender o sentido dos conceitos aplicados aos casos lineares para os não lineares com o principal objetivo de obter um resultado que nos garanta a convergência dos métodos.

3.3.1 Métodos conservativos

Uma das principais dificuldades inerentes aos problemas não lineares relaciona-se com a possibilidade do método convergir para uma função que não seja solução do problema original. Vejamos um exemplo em que isso, de facto, acontece.

Exemplo 8. Consideremos a equação de Burgers (2.14) e o método de Upwind modificado para podermos aproximar a solução do problema:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} U_j^n (U_j^n - U_{j-1}^n). \quad (3.23)$$

Este método é adequado para soluções suaves mas não irá convergir para soluções fracas descontínuas da equação de Burgers à medida que a malha é refinada. Se tomarmos, por exemplo, a condição inicial dada por

$$U_j^0 = \begin{cases} 1, & j < 0 \\ 0, & j \geq 0 \end{cases}$$

É fácil verificar a partir do método de Upwind (3.23) que $U_j^1 = U_j^0$ para todo o $j \in \mathbb{Z}$. Isso acontecerá em todos os passos sucessivos e, por isso, $U_j^n = U_j^0$ para todo o $j \in \mathbb{Z}$ e $n = 0 \dots N-1$, independentemente do tamanho do passo Δx e Δt . À medida que a malha é refinada, a solução numérica converge para a função u definida por $u(x,t) = u_0(x)$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$, que não é solução fraca da equação de Burgers (2.14).

No exemplo acima, vemos que a a sucessão de aproximações numéricas obtidas não converge para uma solução fraca do problema diferencial. Para evitar este tipo de problema uma das soluções é impôr que o método seja conservativo.

Definição 10. Dizemos que um método numérico do tipo

$$U^{n+1} = H_{\Delta t} U^n, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (3.24)$$

é conservativo se este puder ser escrito da seguinte forma

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n)], \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (3.25)$$

Neste caso, a função F é chamada fluxo numérico.

Esta formulação tenta abordar a equação diferencial escrita na sua forma conservativa (2.1), discretizando convenientemente o fluxo f através do fluxo numérico F .

Exemplo 9. É fácil verificar que o método de Upwind (3.7) é conservativo considerando,

$$F(U_j^n, U_{j+1}^n) = f(U_j^n), \quad (3.26)$$

e, o mesmo acontece com o método de Lax-Friedrichs (3.8) considerando,

$$F(U_j^n, U_{j+1}^n) = \frac{\Delta x}{2\Delta t}(U_j^n - U_{j+1}^n) + \frac{1}{2}(f(U_j^n) + f(U_{j+1}^n)). \quad (3.27)$$

3.3.2 Métodos consistentes

Uma outra propriedade importante no contexto de métodos numéricos conservativos do tipo (3.25) é a noção de consistência, que difere da noção introduzida no caso linear.

A ideia por trás deste conceito é garantir que o fluxo numérico coincide com o fluxo associado à equação, f . Além disso, é ainda necessário exigir uma certa suavidade, isto porque quando dois argumentos de F se aproximam de um valor comum $x \in \mathbb{R}$, o valor de F deve aproximar-se de $f(x)$ suavemente.

Definição 11. O método (3.25) é consistente com a forma original da lei de conservação se tivermos

$$F(x, x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (3.28)$$

e, além disso, deve existir uma constante positiva K , tal que

$$|F(v_1, w_1) - F(v_2, w_2)| \leq K \max\{|v_1 - v_2|, |w_1 - w_2|\}, \quad (3.29)$$

para todo o $(v_i, w_i) \in \mathbb{R}^2$ e $i = 1, 2$.

Observação: Observamos que o método será consistente se o fluxo numérico F se reduzir ao fluxo real f nos casos em que existe fluxo constante.

Exemplo 10. É fácil perceber que para o método de Upwind (3.26) vale a igualdade (3.28) e, por isso, este método será consistente se f for contínua à Lipschitz e, para o caso do método de Lax-Friedrichs valem considerações análogas.

3.3.3 Teorema de Lax-Wendroff

Agora que definimos os conceitos de conservação e consistência estamos em condições de provar um resultado a respeito de sucessões de aproximações numéricas com este tipo de métodos. Dada uma solução numérica do tipo (3.24), podemos construir uma função $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$U(x, t) = U_j^n, \quad x \in \left[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}} \right), \quad t \in [t_n, t_{n+1}), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (3.30)$$

Como veremos mais à frente, esta é uma forma conveniente de denotar uma solução numérica. Mas primeiro precisamos definir um novo conceito: a função de variação total.

Definição 12. Designamos como a função de variação total, $TV : C^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, a função definida por:

$$TV(v) = \sup \sum_{j=1}^N |v(\xi_j) - v(\xi_{j-1})|, \quad (3.31)$$

onde o supremo é tomado sobre todas as subdivisões da reta real $-\infty = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_N = \infty$.

Na prova do resultado que nos dará mais informações acerca da sucessão de aproximações iremos necessitar do seguinte lema.

Lema 1. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^m$ então*

$$\sum_{j=1}^m x_j (y_j - y_{j-1}) = x_m y_m - x_1 y_0 - \sum_{j=1}^{m-1} (x_{j+1} - x_j) y_j.$$

Demonstração. Considerando a expressão do lado direito e rearranjando os termos obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m x_j (y_j - y_{j-1}) &= (x_1 y_1 - x_1 y_0) + (x_2 y_2 - x_2 y_1) + \cdots + (x_m y_m - x_m y_{m-1}) \\ &= -x_1 y_0 + (x_1 y_1 - x_2 y_1) + (x_2 y_2 - x_3 y_2) + \cdots + (x_{m-1} y_{m-1} - x_m y_{m-1}) + x_m y_m \\ &= x_m y_m - x_1 y_0 - \sum_{j=1}^{m-1} (x_{j+1} - x_j) y_j. \end{aligned}$$

□

Finalmente, estamos em condições de provar que se considerarmos uma sucessão de aproximações consistentes e conservativas convergentes (num certo sentido) para uma função, então essa função é solução fraca do problema.

Teorema 5. *Seja $\{U_l : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, l = 1, 2, \dots\}$ uma sucessão de aproximações numéricas obtidas através de um método consistente e conservativo do tipo (3.25), cujas inicializações são definidas por (3.6) e tais que os parâmetros $\Delta t_l, \Delta x_l \rightarrow 0$ quando $l \rightarrow \infty$. Seja $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $f \in C^0(\mathbb{R})$ limitada. Se $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ é, tal que*

- em cada conjunto limitado $\Omega = [a, b] \times [0, T]$,

$$\int_0^T \int_a^b |U_l(x, t) - u(x, t)| dx dt \rightarrow 0 \text{ quando } l \rightarrow \infty$$

- para cada $T > 0$ existe um $R > 0$ tal que

$$TV(U_l(\cdot, t)) < R, \text{ para todo } 0 \leq t \leq T, \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

então u é uma solução fraca para a lei de conservação.

Demonstração. Vamos mostrar que u é solução fraca do problema utilizando a Definição 4, isto é, vamos provar que para todo o $\phi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$ com suporte compacto:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) u(x, t) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) f(u(x, t)) \right] dx dt = - \int_{-\infty}^\infty \phi(x, 0) u(x, 0) dx. \quad (3.32)$$

Seja $\phi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$ uma função com suporte compacto e $U_l, l \in \mathbb{N}$, construída através de um método da forma

$$U_{l,j}^{n+1} = U_{l,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(U_{l,j}^n, U_{l,j+1}^n) - F(U_{l,j-1}^n, U_{l,j}^n)]. \quad (3.33)$$

Para simplificar a notação, daqui para a frente omitiremos o índice l de U_j^n e dos comprimentos de malha Δx e Δt .

Começemos então por multiplicar (3.33) pela função teste no ponto (x_j, t_n)

$$\phi(x_j, t_n) U_j^{n+1} = \phi(x_j, t_n) U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \phi(x_j, t_n) [F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n)],$$

para $j \in \mathbb{Z}, n = 0, 1, 2, \dots$

Somando para todos os $j \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 0$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi(x_j, t_n) (U_j^{n+1} - U_j^n) = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi(x_j, t_n) [F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n)]. \quad (3.34)$$

Consideremos o lado esquerdo da equação (3.34) e consideremos $M \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que possamos escrever

$$\begin{aligned} P_1 &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \phi(x_j, t_n) (U_j^{n+1} - U_j^n) \right) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^M \phi(x_j, t_n) (U_j^{n+1} - U_j^n) \right). \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $m = n + 1$ no somatório, obtemos

$$P_1 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{M+1} \phi(x_j, t_{m-1}) (U_j^m - U_j^{m-1}) \right).$$

Aplicando nesta expressão o Lema 1, obtemos

$$P_1 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\phi(x_j, t_M) U_j^{M+1} - \phi(x_j, t_0) U_j^0 - \sum_{m=1}^M (\phi(x_j, t_m) - \phi(x_j, t_{m-1})) U_j^m \right),$$

e, simplificando, temos:

$$P_1 = - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi(x_j, t_0) U_j^0 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^M (\phi(x_j, t_m) - \phi(x_j, t_{m-1})) U_j^m + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi(x_j, t_M) U_j^{M+1}.$$

Tendo em conta que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$ tem suporte compacto e aplicando, mais uma vez, a mudança de variável para voltarmos à notação original obtemos

$$P_1 = - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi(x_j, t_0) U_j^0 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{M-1} (\phi(x_j, t_{n+1}) - \phi(x_j, t_n)) U_j^{n+1},$$

e ainda, lembrando que $M \in \mathbb{N}$ é suficiente grande concluímos

$$P_1 = - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi(x_j, t_0) U_j^0 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\phi(x_j, t_n) - \phi(x_j, t_{n-1})) U_j^n.$$

Analisemos agora o lado direito da equação (3.34). Uma vez que ϕ tem suporte compacto, tomemos $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que

$$\begin{aligned} P_2 &= -\frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi(x_j, t_n) [F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n)] \\ &= -\frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-k}^k \phi(x_j, t_n) [F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n)], \end{aligned}$$

ao aplicarmos a mudança de variável $l = j + k + 1$ ao somatório obtemos

$$P_2 = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{2k+1} \phi(x_{l-k-1}, t_n) [F(U_{l-k-1}^n, U_{l-k}^n) - F(U_{l-k-2}^n, U_{l-k-1}^n)] \right).$$

Mais uma vez, se aplicarmos a soma por partes, apresentada no Lema 1, temos

$$\begin{aligned} P_2 &= -\frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{n=0}^{\infty} \phi(x_k, t_n) F(U_k^n, U_{k+1}^n) - \phi(x_{-k}, t_n) F(U_{-k}^n, U_{-k+1}^n) \\ &\quad - \sum_{l=1}^{2k} (\phi(x_{l-k}, t_n) - \phi(x_{l-k-1}, t_n)) F(U_{l-k-1}^n, U_{l-k}^n), \end{aligned}$$

e, como $\phi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$ tem suporte compacto, podemos simplificar a expressão anterior e retomar às variáveis originais:

$$P_2 = \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-k}^{k-1} (\phi(x_{j+1}, t_n) - \phi(x_j, t_n)) F(U_j^n, U_{j+1}^n).$$

Por fim, como escolhemos $k \in \mathbb{N}$ grande o suficiente obtemos:

$$P_2 = \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\phi(x_{j+1}, t_n) - \phi(x_j, t_n)) F(U_j^n, U_{j+1}^n).$$

Retomando (3.34) e substituindo pelos factores rearranjados obtemos

$$\begin{aligned} &- \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi(x_j, t_0) U_j^0 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\phi(x_j, t_n) - \phi(x_j, t_{n-1})) U_j^n \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\phi(x_{j+1}, t_n) - \phi(x_j, t_n)) F(U_j^n, U_{j+1}^n) = 0. \end{aligned}$$

Dado o suporte compacto de ϕ , é fácil ver que cada uma destas somas é uma soma finita, e, por isso, podemos reorganizar a equação anterior e ficamos com

$$\begin{aligned} \Delta t \Delta x \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\phi(x_j, t_n) - \phi(x_j, t_{n-1})}{\Delta t} \right) U_j^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\phi(x_{j+1}, t_n) - \phi(x_j, t_n)}{\Delta x} \right) F(U_j^n, U_{j+1}^n) \right] \\ = -\Delta x \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi(x_j, 0) U_j^0. \end{aligned}$$

Para provarmos que u é uma solução fraca do problema basta mostrar que a diferença, termo a termo, entre a expressão anterior e (3.32) tende para zero quando $l \rightarrow \infty$, ou seja, quando $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$. Para fazer isso, vamos analisar cada uma das parcelas e verificar se tendem, de facto, para zero.

Assim, comecemos por mostrar que, quando $l \rightarrow \infty$:

$$T_l^1 = \left| \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) u(x, t) dx dt - \Delta t \Delta x \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\phi(x_j, t_n) - \phi(x_j, t_{n-1})}{\Delta t} \right) U_j^n \right| \rightarrow 0. \quad (3.35)$$

Notemos que

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) u(x, t) dx dt = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) u(x, t) dx dt. \quad (3.36)$$

Tomando em consideração que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$ tem suporte compacto, então existe $L > 0$ e $T > 0$ tais que $\phi(x, t) = 0$ para todo o $(x, t) \notin [-L, L] \times [0, T]$. Assim, existem índices $N, M \in \mathbb{N}$ tais que $[0, t_N] \subseteq [0, T]$ mas $t_{N+1} > T$ e $[x_{-M}, x_M] \subseteq [-L, L]$ mas $x_{M+1} > L$ e $x_{-M-1} < -L$. Assim a expressão (3.36) pode ser escrita da forma:

$$\sum_{n=0}^{N+1} \sum_{j=-M-1}^{M+1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) u(x, t) dx dt.$$

Consideremos agora o segundo termo de (3.35) e, da mesma forma, utilizando o facto de ϕ ter suporte compacto, obtemos

$$\Delta t \Delta x \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\phi(x_j, t_n) - \phi(x_j, t_{n-1})}{\Delta t} \right) U_j^n = \Delta t \Delta x \sum_{n=0}^{N+1} \sum_{j=-M-1}^{M+1} \left(\frac{\phi(x_j, t_n) - \phi(x_j, t_{n-1})}{\Delta t} \right) U_j^n. \quad (3.37)$$

Atendendo a que

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} 1 dx dt = \Delta x \Delta t,$$

a partir de (3.37) concluímos:

$$\sum_{n=0}^{N+1} \sum_{j=-M-1}^{M+1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\phi(x_j, t_n) - \phi(x_j, t_{n-1})}{\Delta t} \right) U_j^n dx dt.$$

Retomando (3.35) e substituindo pelas expressões que desenvolvemos obtemos:

$$T_l^1 \leq \sum_{n=0}^{N+1} \sum_{j=-M-1}^{M+1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) u(x, t) - \left(\frac{\phi(x_j, t_n) - \phi(x_j, t_{n-1})}{\Delta t} \right) U_j^n \right| dx dt.$$

Considerando apenas a expressão dentro do módulo, temos

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) u(x, t) - \left(\frac{\phi(x_j, t_n) - \phi(x_j, t_{n-1})}{\Delta t} \right) U_j^n \pm u(x, t) \left(\frac{\phi(x_j, t_n) - \phi(x_j, t_{n-1})}{\Delta t} \right) \right| \\ = & \left| u(x, t) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) - \frac{\phi(x_j, t_n) - \phi(x_j, t_{n-1})}{\Delta t} \right) + \left(\frac{\phi(x_j, t_n) - \phi(x_j, t_{n-1})}{\Delta t} \right) (u(x, t) - U_j^n) \right| \end{aligned} \quad (3.38)$$

e, como U pode ser definido por (3.30), então

$$|u(x, t)| \left| \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) - \frac{\phi(x_j, t_n) - \phi(x_j, t_{n-1})}{\Delta t} \right| + \left| \frac{\phi(x_j, t_n) - \phi(x_j, t_{n-1})}{\Delta t} \right| |U(x, t) - u(x, t)|.$$

Pelo Teorema do Valor Médio como ϕ é diferenciável em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ então $\exists \xi_n \in (t_{n-1}, t_n)$ tal que:

$$\phi(x_j, t_n) - \phi(x_j, t_{n-1}) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(x_j, \xi_n) \Delta t.$$

Assim,

$$\left| \frac{\phi(x_j, t_n) - \phi(x_j, t_{n+1})}{\Delta t} \right| = \left| \frac{\partial \phi}{\partial t}(x_j, \xi_n) \right| \leq \left\| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\|_{\infty},$$

e,

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) - \frac{\phi(x_j, t_n) - \phi(x_j, t_{n+1})}{\Delta t} \right| \leq \left| \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial \phi}{\partial t}(x_j, \xi_n) \right| \quad (3.39)$$

$$\leq \left| \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial \phi}{\partial t}(x_j, \xi_n) \pm \frac{\partial \phi}{\partial t}(x_j, t) \right| \quad (3.40)$$

$$\leq \left| \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial \phi}{\partial t}(x_j, t) \right| + \left| \frac{\partial \phi}{\partial t}(x_j, t) - \frac{\partial \phi}{\partial t}(x_j, \xi_n) \right|. \quad (3.41)$$

E, mais uma vez, invocando o Teorema do Valor Médio, existem α_j a pertencer ao intervalo definido por x_j e x e β_j a pertencer ao intervalo definido por t e ξ_n , tais que:

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) - \frac{\phi(x_j, t_n) - \phi(x_j, t_{n+1})}{\Delta t} \right| \leq \left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right\|_{\infty} \Delta x + \left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right\|_{\infty} \Delta t.$$

Retomando (3.38) e substituindo pelas expressões que desenvolvemos

$$\begin{aligned} T_l^1 \leq & \sum_{n=0}^{N+1} \sum_{j=-M-1}^{M+1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \left(\left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right\|_{\infty} \Delta x + \left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right\|_{\infty} \Delta t \right) |u(x, t)| \\ & + \left\| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\|_{\infty} |U(x, t) - u(x, t)| dx dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leq & \left(\left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right\|_{\infty} \Delta x + \left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right\|_{\infty} \Delta t \right) \int_0^{t_{N+2}} \int_{x_{-M-\frac{3}{2}}}^{x_{M+\frac{3}{2}}} |u(x,t)| dx dt \\ & + \left\| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\|_{\infty} \int_0^{t_{N+2}} \int_{x_{-M-\frac{3}{2}}}^{x_{M+\frac{3}{2}}} |U(x,t) - u(x,t)| dx dt. \end{aligned}$$

Supondo que $\Delta t \leq \frac{T}{4}$ e $\Delta x \leq \frac{L}{2}$, então $t_{N+2} < 2T$, $x_{M+\frac{3}{2}} < 2L$ e $x_{-M-\frac{3}{2}} > -2L$ e obtemos:

$$T_l^1 \leq \left(\left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right\|_{\infty} \Delta x + \left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right\|_{\infty} \Delta t \right) \int_0^{2T} \int_{-2L}^{2L} |u(x,t)| dx dt + \left\| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\|_{\infty} \int_0^{2T} \int_{-2L}^{2L} |U(x,t) - u(x,t)| dx dt.$$

Como $u \in L^{\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ então $\int_0^{2T} \int_{-2L}^{2L} |u(x,t)| dx dt \leq 8TL \|u\|_{\infty}$ e obtemos:

$$T_l^1 \leq \left(\left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right\|_{\infty} \Delta x + \left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right\|_{\infty} \Delta t \right) 8TL \|u\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\|_{\infty} \int_0^{2T} \int_{-2L}^{2L} |U(x,t) - u(x,t)| dx dt. \quad (3.42)$$

Por hipótese $\int_0^{2T} \int_{-2L}^{2L} |U_l(x,t) - u(x,t)| dx dt \rightarrow 0$ quando $l \rightarrow \infty$, e além disso, quando $l \rightarrow \infty$, $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, portanto, (3.42) resume-se à multiplicação de constantes por valores que tendem para zero e, por isso, T_l^1 tende para zero, provando (3.35).

Avançemos para a segunda parte da prova onde pretendemos provar que quando $l \rightarrow \infty$:

$$T_l^2 = \left| \Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi(x_j, 0) U_j^0 - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, 0) u_0(x) dx \right| \rightarrow 0. \quad (3.43)$$

Começemos por substituir U_j^0 por (3.6) e, de modo análogo ao que já foi feito, podemos escrever (3.43) da forma:

$$\begin{aligned} & \left| \Delta x \sum_{j=-M-1}^{M+1} \phi(x_j, 0) \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u_0(x) dx - \sum_{j=-M-1}^{M+1} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \phi(x, 0) u_0(x) dx \right| \\ & \leq \sum_{j=-M-1}^{M+1} \left| \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u_0(x) (\phi(x_j, 0) - \phi(x, 0)) dx \right|. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Mais uma vez, aplicando o Teorema do Valor Médio, existe ε_j entre x_j e x , tal que:

$$\begin{aligned} T_l^2 & \leq \sum_{j=-M-1}^{M+1} \left| \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u_0(x) \frac{\partial \phi}{\partial x}(\varepsilon_j, 0) (x_j - x) dx \right| \\ & \leq \Delta x \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|_{\infty} \sum_{j=-M-1}^{M+1} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} |u_0(x)| dx, \end{aligned}$$

e, por sua vez, utilizando o mesmo raciocínio concluímos

$$\begin{aligned} T_l^2 &\leq \Delta x \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|_{\infty} \int_{x_{-M-\frac{3}{2}}}^{x_{M+\frac{3}{2}}} |u_0(x)| dx \\ &\leq \Delta x \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|_{\infty} \int_{-2L}^{2L} |u_0(x)| dx. \end{aligned}$$

Finalmente, como $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ então $\int_{-2L}^{2L} |u_0(x)| \leq 4L \|u_0\|_{\infty}$ e, juntando isso, ao facto de $\Delta x \rightarrow 0$ quando $l \rightarrow \infty$ então podemos concluir (3.43).

Por fim, resta-nos apenas provar que quando $l \rightarrow \infty$:

$$T_l^3 = \left| \Delta x \Delta t \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\phi(x_{j+1}, t_n) - \phi(x_j, t_n)}{\Delta x} \right) F(U_j^n, U_{j+1}^n) - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) f(u(x, t)) dx dt \right| \rightarrow 0. \quad (3.45)$$

De modo análogo ao que fizemos anteriormente podemos escrever

$$T_l^3 \leq \sum_{n=0}^{N+1} \sum_{j=-M-1}^{M+1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \left| \left(\frac{\phi(x_{j+1}, t_n) - \phi(x_j, t_n)}{\Delta x} \right) F(U_j^n, U_{j+1}^n) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) f(u(x, t)) \right| dx dt. \quad (3.46)$$

Considerando apenas a expressão dentro do módulo, se somarmos e subtrairmos um novo factor, obtemos

$$\left| \frac{\phi(x_{j+1}, t_n) - \phi(x_j, t_n)}{\Delta x} (F(U_j^n, U_{j+1}^n) - f(U_j^n)) \right| + \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) f(u(x, t)) - \frac{\phi(x_{j+1}, t_n) - \phi(x_j, t_n)}{\Delta x} f(U_j^n) \right|. \quad (3.47)$$

Consideremos apenas a primeira parte da expressão (3.47). Pelo Teorema do Valor Médio existe δ_j entre x_{j+1} e x_j tal que:

$$\left| \frac{\phi(x_{j+1}, t_n) - \phi(x_j, t_n)}{\Delta x} (F(U_j^n, U_{j+1}^n) - f(U_j^n)) \right| \leq \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|_{\infty} |F(U_j^n, U_{j+1}^n) - f(U_j^n)|.$$

Além disso, como o método que estamos a considerar é consistente, existe uma constante $K > 0$ tal que:

$$\left| \frac{\phi(x_{j+1}, t_n) - \phi(x_j, t_n)}{\Delta x} (F(U_j^n, U_{j+1}^n) - f(U_j^n)) \right| \leq \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|_{\infty} K |U_{j+1}^n - U_j^n|.$$

Considerando a segunda parte da expressão (3.47) e somando e subtraindo um novo membro obtemos

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) \left| f(u(x, t)) - f(U_l(x, t)) \right| + |f(U_j^n)| \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) - \frac{\phi(x_{j+1}, t_n) - \phi(x_j, t_n)}{\Delta x} \right| \right|. \quad (3.48)$$

Comecemos por considerar a primeira parte de (3.48). Como o método é consistente existe $P > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) \left| f(u(x, t)) - f(U(x, t)) \right| \right| \leq \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|_{\infty} P |U(x, t) - u(x, t)|. \quad (3.49)$$

Consideremos agora a segunda parte de (3.48) e apliquemos o Teorema do Valor Médio, portanto existe $\theta_j \in (x_{j-1}, x_j)$ tal que:

$$|f(U_j^n)| \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) - \frac{\phi(x_{j+1}, t_n) - \phi(x_j, t_n)}{\Delta x} \right| \leq |f(U_j^n)| \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(\theta_j, t_n) \right|.$$

Como f é limitada é possível estabelecer que

$$\begin{aligned} |f(U_j^n)| \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) - \frac{\phi(x_{j+1}, t_n) - \phi(x_j, t_n)}{\Delta x} \right| &\leq \|f\|_\infty \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(\theta_j, t_n) \pm \frac{\partial \phi}{\partial x}(\theta_j, t) \right| \\ &\leq \|f\|_\infty \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(\theta_j, t) \right| + \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(\theta_j, t) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(\theta_j, t_n) \right|. \end{aligned}$$

Invocando, novamente, o Teorema do Valor Médio, concluímos que existe ζ_j entre x e θ_j e ρ_n entre t e t_n tal que:

$$|f(U_j^n)| \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) - \frac{\phi(x_{j+1}, t_n) - \phi(x_j, t_n)}{\Delta x} \right| \leq \|f\|_\infty \left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right\|_\infty \Delta x + \left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right\|_\infty \Delta t$$

Substituindo em (3.46) as expressões que desenvolvemos, obtemos

$$T_L^3 \leq \sum_{n=0}^{N+1} \sum_{j=-M-1}^{M+1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|_\infty K |U_{j+1}^n - U_j^n| + \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|_\infty P |U(x, t) - u(x, t)| \quad (3.50)$$

$$+ \|f\|_\infty \left(\left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right\|_\infty \Delta x + \left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right\|_\infty \Delta t \right) dx dt. \quad (3.51)$$

Podemos simplificar a segunda parcela de (3.50), fazendo

$$\sum_{n=0}^{N+1} \sum_{j=-M-1}^{M+1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|_\infty P |U(x, t) - u(x, t)| dx dt \leq \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|_\infty P \int_0^{2T} \int_{-2L}^{2L} |U(x, t) - u(x, t)| dx dt.$$

E simplificando as últimas duas parcelas de (3.50), obtemos

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{N+1} \sum_{j=-M-1}^{M+1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \|f\|_\infty \left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right\|_\infty \Delta x + \left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right\|_\infty \Delta t dx dt \\ &\leq \int_0^{2T} \int_{-2L}^{2L} \|f\|_\infty \left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right\|_\infty \Delta x + \left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right\|_\infty \Delta t dx dt \\ &\leq 8TL \|f\|_\infty \left(\left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right\|_\infty \Delta x + \left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right\|_\infty \Delta t \right), \end{aligned}$$

Falta ainda analisar a primeira parcela de (3.50), então

$$\sum_{n=0}^{N+1} \sum_{j=-M-1}^{M+1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|_\infty K |U_{j+1}^n - U_j^n| dx dt \leq \Delta x \Delta t K \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|_\infty \sum_{n=0}^{N+1} \sum_{j=-M-1}^{M+1} |U_{j+1}^n - U_j^n|.$$

Considerando a hipótese de $TV(U_l(\cdot, t)) < R$, então

$$\sum_{j=-M-1}^{M+1} |U_{j+1}^n - U_j^n| \leq TV(U(\cdot, t)) < R$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta t K \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|_{\infty} \sum_{n=0}^{N+1} \sum_{j=-M-1}^{M+1} |U_{j+1}^n - U_j^n| &\leq \Delta x \Delta t \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|_{\infty} KR(N+2) \\ &\leq 2\Delta x T KR \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|_{\infty} \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo em (3.50) pelas expressões que desenvolvemos obtemos

$$\begin{aligned} T_l^3 &\leq 2\Delta x T KR \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\|_{\infty} P \int_0^{2T} \int_{-2L}^{2L} |U(x, t) - u(x, t)| dx dt \\ &\quad + 8TL \|f\|_{\infty} \left(\left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right\|_{\infty} \Delta x + \left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right\|_{\infty} \Delta t \right). \end{aligned}$$

Como, por hipótese $\int_0^{2T} \int_{-2L}^{2L} |U(x, t) - u(x, t)| dx dt \rightarrow 0$ quando $l \rightarrow \infty$ e $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$. Então, concluímos que (3.45) é verdade.

Assim de (3.35), (3.43) e (3.45) concluímos que u é uma solução fraca. \square

Observação: Se a função fluxo numérico F depender de mais que dois argumentos é necessário estender a noção de consistência de modo natural a um fluxo numérico dependente de mais variáveis.

Como referimos anteriormente o teorema que enunciamos apenas garante que em condições de regularidade adequadas, se uma sucessão de aproximações consistentes e conservativas tem um limite, então esse limite é solução fraca do problema diferencial. Para conseguirmos garantir a convergência é necessário algum tipo de propriedade de estabilidade. Ainda assim, o Teorema de Lax-Wendroff é um resultado importante uma vez que nos dá condições que transmitem confiança em relação às soluções numéricas calculadas.

Vamos agora introduzir um conceito de estabilidade que com o tipo de aproximações consistentes e conservativas que definimos até agora, permitirá concluir um resultado de convergência, num sentido a determinar.

3.3.4 Estabilidade não linear

Neste contexto consideremos o seguinte problema

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}(f(u(x, t))) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in (0, T] \quad (3.52)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.53)$$

Assim, de modo análogo ao caso em que $t \in \mathbb{R}_0^+$ definimos o conceito de solução fraca e, portanto, dizemos que $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))$ é solução fraca se $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ e se para todas as funções

$\phi \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$ com suporte compacto,

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u(x, t) \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) + f(u(x, t)) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) \right) dx dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, 0) u_0(x) dx.$$

É interessante notar que caso exista mais do que uma solução fraca, no sentido que referimos acima, a definição de erro global que definimos em (3.9) deixa de fazer sentido. Deste modo, a noção intuitiva que temos de convergência de um método numérico deve ser adaptada. Um primeiro passo natural será definir o que entendemos por convergência neste contexto.

Seja

$$W = \{w : w(x, t) \text{ é solução fraca da lei de conservação}\}$$

e, dada $U_l : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ uma aproximação numérica do tipo (3.24), definamos

$$dist(U_l, W) = \inf_{w \in W} \|U_l - w\|_{1, T}. \quad (3.54)$$

Assim, o nosso principal objetivo será mostrar que

$$dist(U_l, W) \rightarrow 0.$$

Agora que estabelecemos a noção de convergência neste contexto vamos introduzir um novo conceito de estabilidade que possa ser aplicado nestas situações.

Denotemos por TV_T a variação total em $[0, T]$ definida por

$$TV_T(u) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x + \varepsilon, t) - u(x, t)| dx dt \quad (3.55)$$

$$+ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t + \varepsilon) - u(x, t)| dx dt. \quad (3.56)$$

Consideremos o operador $\text{Supp}(f)$ como o suporte da função f e consideremos ainda o seguinte conjunto:

$$\mathcal{K} = \{u \in L_{1, T} : TV_T(u) \leq R \text{ e } \text{Supp}(u(\cdot, t)) \subset [-M, M], \forall t \in [0, T]\}, \quad (3.57)$$

para todo o $R, M > 0$.

Por fim, estamos em condições de definir o conceito de *estabilidade por variação total*.

Definição 13. *Seja $U_l : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, l = 1, 2, \dots$ uma sucessão de aproximações geradas por um método do tipo (3.24). Dizemos que o método numérico é TV-estável ou estável por variação total se todas as aproximações U_l , para $l \geq l_0$ pertencerem a um conjunto fixo do tipo (3.57).*

Existem condições suficientes que permitem garantir que um método é TV-estável. Nesse sentido, comecemos por introduzir o seguinte lema.

Lema 2. *Seja U^n a aproximação numérica seccionalmente constante obtida através de um método consistente e conservativo, com a condição inicial, u_0 , com suporte compacto. Nestas condições a*

restrição

$$TV(U^n) \leq R \quad \forall n, \Delta t \text{ com } \Delta t < \Delta t_0, \quad n\Delta t \leq T \quad (3.58)$$

implica a existência de $\alpha > 0$ tal que

$$\|U_j^{n+1} - U_j^n\|_{1,\Delta x} \leq \alpha \Delta t \quad \forall n, \Delta t \text{ com } \Delta t < \Delta t_0, \quad n\Delta t \leq T. \quad (3.59)$$

Demonstração. Na forma conservativa um método é da forma

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n)] \quad (3.60)$$

e, ao aplicarmos a norma, obtemos:

$$\|U_j^{n+1} - U_j^n\|_{1,\Delta x} = \Delta t \sum_{j=-\infty}^{\infty} |F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n)|. \quad (3.61)$$

Vamos provar que $|U_j^n| \leq \frac{R}{2}$ para todo o $j \in \mathbb{Z}$.

Suponhamos, por absurdo, que existe $j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $|U_{j_0}^n| > \frac{R}{2}$. Combinando o suporte compacto de U^0 com o facto de $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ ser constante, como a velocidade de propagação é finita, U_j^n também terá um suporte compacto e portanto a partir de um certo índice N , $U_{-N}^n = 0$ e $U_{N+1}^n = 0$.

Então

$$\begin{aligned} \frac{R}{2} &< |U_{j_0}^n| - |U_{-N}^n| = |U_{-N+1}^n| + \dots + |U_{j_0}^n| - |U_{-N}^n| - \dots - |U_{j_0-1}^n| \\ &= \sum_{j=-N}^{j_0-1} (|U_{j+1}^n| - |U_j^n|) \leq \sum_{j=-N}^{j_0-1} |U_{j+1}^n - U_j^n|. \end{aligned}$$

E, por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{R}{2} &< |U_{j_0}^n| - |U_{N+1}^n| = |U_{j_0}^n| + \dots + |U_N^n| - |U_{j_0+1}^n| - \dots - |U_{N+1}^n| \\ &= \sum_{j=j_0}^N (|U_j^n| - |U_{j+1}^n|) \leq \sum_{j=j_0}^N |U_{j+1}^n - U_j^n|. \end{aligned}$$

Finalmente, como $TV(U^n) \leq R$, obtemos

$$\sum_{j=-N}^{j_0-1} |U_{j+1}^n - U_j^n| + \sum_{j=j_0}^N |U_{j+1}^n - U_j^n| = \sum_{j=-N}^N |U_{j+1}^n - U_j^n| \leq R,$$

o que contradiz a hipótese de $|U_{j_0}^n| > \frac{R}{2}$ para algum j_0 .

Como F é consistente então

$$\begin{aligned} |F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n)| &\leq K \max\{|U_j^n - U_{j-1}^n|, |U_{j+1}^n - U_j^n|\} \\ &\leq K \sum_{i=0}^1 |U_{j+i}^n - U_{j+i-1}^n| \end{aligned}$$

Além disso, considerando (3.61) e substituindo pela expressão anterior obtemos

$$\begin{aligned}
\|U^{n+1} - U^n\|_{1,\Delta x} &= \Delta t \sum_{j \in \mathbb{Z}} |F(U_j^n, U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n, U_j^n)| \\
&\leq \Delta t K \sum_{i=0}^1 \sum_{j \in \mathbb{Z}} |U_{j+i}^n - U_{j+i-1}^n| \\
&= \Delta t K \sum_{i=0}^1 TV(U^n) \\
&\leq \Delta t K 2R = \alpha \Delta t,
\end{aligned}$$

com $\alpha > 0$ visto que $R, K > 0$.

□

Agora que provámos este lema, podemos enunciar o teorema que nos dá condições suficientes para que um método seja TV-estável.

Teorema 6. *Seja $U_l : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, l = 1, 2, \dots$ uma sucessão de aproximações geradas por um método consistente e conservativo do tipo (3.60). Se u_0 tiver suporte compacto e existir algum $\Delta t_0, R > 0$ tal que*

$$TV(U^n) \leq R \quad \forall n, \Delta t \text{ com } \Delta t < \Delta t_0, \quad n\Delta t \leq T, \quad (3.62)$$

então o método é TV-estável.

Demonstração. As aproximações U_l são definidas por (3.30), por isso, a definição de TV_T apresentada em (3.55) pode ser escrita da forma

$$TV_T(U^n) = \sum_{n=0}^{T/\Delta t} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\Delta t |U_{j+1}^n - U_j^n| + \Delta x |U_j^{n+1} - U_j^n| \right),$$

e, por sua vez,

$$TV_T(U^n) = \sum_{n=0}^{T/\Delta t} \left[\Delta t TV(U^n) + \|U^{n+1} - U^n\|_{1,\Delta x} \right].$$

Aplicando as expressões (3.59) e (3.62) na equação anterior obtemos

$$\begin{aligned}
TV_T(U^n) &\leq \sum_{n=0}^{T/\Delta t} [\Delta t R + \alpha \Delta t] \\
&\leq \Delta t (R + \alpha) \left(\frac{T}{\Delta t} + 1 \right) \\
&= (R + \alpha)T + \Delta t (R + \alpha).
\end{aligned}$$

para todo o $\Delta t < \Delta t_0$, mostrando que $TV_T(U^n)$ é uniformemente limitado quando $\Delta t \rightarrow 0$. Como u_0 tem suporte compacto, utilizando o facto da velocidade de propagação ser finita, u também terá um suporte compacto e, assim, todos os U_l encontram-se num conjunto da forma (3.57) para todo o $\Delta t < \Delta t_0$ e, por definição, o método é TV-estável. □

Finalmente, utilizando o conceito de TV-estabilidade é possível provar a convergência, em certo sentido, para este tipo de métodos. A prova desse resultado encontra-se em [6].

Teorema 7. *Suponhamos que $U_l : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, l = 1, 2, \dots$ é uma sucessão gerada por um método consistente e conservativo do tipo (3.60). Se o método for TV-estável, então o método é convergente, isto é, $\text{dist}(U_l, W) \rightarrow 0$, quando $l \rightarrow \infty$.*

Proposição 10. *Consideremos o método de Upwind na forma conservativa e consistente*

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f(U_j^n) - f(U_{j-1}^n)], \quad (3.63)$$

e u_0 uma função contínua com suporte compacto, com $TV(u_0) < \infty$. Se

$$0 \leq \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(u) \leq 1$$

para qualquer u entre $\min_j (U_j^n, V_j^n) \leq u \leq \max_j (U_j^n, V_j^n)$ então o método é TV-estável.

Demonstração. Consideremos duas aproximações numéricas U e V obtidas através do método (3.63). Assim, podemos escrever também

$$V_j^{n+1} = V_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f(V_j^n) - f(V_{j-1}^n)].$$

Denotemos $W_j^n = U_j^n - V_j^n$ e obtemos

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(f(U_j^n) - f(V_j^n)) - (f(U_{j-1}^n) - f(V_{j-1}^n))]. \quad (3.64)$$

Como o método é consistente, então por hipótese f é uma função suave e, por isso, pelo Teorema do Valor Médio existe θ_j^n entre U_j^n e V_j^n tal que:

$$f(U_j^n) - f(V_j^n) = f'(\theta_j^n) (U_j^n - V_j^n) = f'(\theta_j^n) W_j^n. \quad (3.65)$$

Aplicando a expressão anterior a (3.64), obtemos:

$$\begin{aligned} W_j^{n+1} &= W_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f'(\theta_j^n) W_j^n - f'(\theta_{j-1}^n) W_{j-1}^n] \\ &= \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(\theta_j^n)\right) W_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(\theta_{j-1}^n) W_{j-1}^n. \end{aligned}$$

Como θ_j^n se encontra em $\min_j (U_j^n, V_j^n) \leq u \leq \max_j (U_j^n, V_j^n)$ então

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(\theta_j^n)\right) > 0$$

e

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} f'(\theta_{j-1}^n)\right) > 0$$

e, portanto, se denotarmos $\alpha_j = \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(\theta_j^n)$ então obtemos:

$$|W_j^{n+1}| \leq (1 - \alpha_j) |W_j^n| + \alpha_{j-1} |W_{j-1}^n|.$$

Somando para todos os j , obtemos:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |W_j^{n+1}| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |W_j^n| - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j |W_j^n| + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_{j-1} |W_{j-1}^n|,$$

e multiplicando por Δx , ficamos com

$$\Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} |W_j^{n+1}| \leq \Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} |W_j^n| - \Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j |W_j^n| + \Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_{j-1} |W_{j-1}^n|.$$

Como $W_j^n = 0$ para $|j|$ suficientemente grande, então:

$$\Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} |W_j^{n+1}| \leq \Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} |W_j^n|,$$

e, por sua vez,

$$\|W^{n+1}\|_{1, \Delta x} \leq \|W^n\|_{1, \Delta x}. \quad (3.66)$$

Consideremos agora uma aproximação numérica Y tal que $Y_j = U_{j-1}$ para qualquer $j \in \mathbb{Z}$. Assim, utilizando a definição de variação total (3.31), podemos escrever

$$TV(U) = \frac{1}{\Delta x} \|U - Y\|_{1, \Delta x}$$

e, mais uma vez, considerando $Y_j^n = U_{j-1}^n$, é válido:

$$TV(U^{n+1}) = \frac{1}{\Delta x} \|U^{n+1} - Y^{n+1}\|_{1, \Delta x}.$$

Pela desigualdade (3.66), podemos ainda escrever

$$TV(U^{n+1}) \leq \frac{1}{\Delta x} \|U^n - Y^n\|_{1, \Delta x} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |U_j^n - U_{j-1}^n| = TV(U^n). \quad (3.67)$$

Assim, como u_0 é contínua, então

$$TV(U^{n+1}) \leq TV(U^n) \leq TV(U^0) \leq 2TV(u_0). \quad (3.68)$$

Assim, ao considerarmos $R = 2TV(u_0)$ pelo Teorema 6 podemos concluir que o método de Upwind é TV-estável, desde que

$$0 \leq \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(u) \leq 1$$

para qualquer u entre $\min_j (U_j^n, V_j^n) \leq u \leq \max_j (U_j^n, V_j^n)$.

□

De modo análogo, é possível provar que o método de Lax-Friedrichs é TV-estável se

$$\left| \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(u) \right| \leq 1$$

para qualquer u entre $\min_j (U_j^n, V_j^n) \leq u \leq \max_j (U_j^n, V_j^n)$.

Capítulo 4

Resultados numéricos

Neste capítulo apresentaremos algumas simulações numéricas utilizando os métodos Upwind e Lax-Friedrichs anteriormente estudados e analisaremos os seus resultados. Ao contrário do que fizemos até agora, estas simulações terão de ser feitas utilizando um domínio espacial limitado (x_{min}, x_{max}) . Deste modo, sejam $N, M \in \mathbb{N}$, tais que, $\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{M}$ e $\Delta t = \frac{T}{N}$. Utilizando essa discretização do domínio simularemos soluções numéricas de problemas do tipo

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}(f(u(x, t))) = 0, & x \in (0, 1), t \in (0, 0.5] \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (4.1)$$

Tendo em conta que o domínio espacial é um intervalo limitado, será necessário complementar (4.1) com uma condição de fronteira.

Neste capítulo começaremos por analisar alguns exemplos numéricos em que a função f é linear, comparando o decaimento do erro absoluto ao refinar a malha. Na segunda parte, será considerado o caso em que f é não linear e será feita uma análise análoga. Nos dois casos, iremos considerar condições iniciais contínuas e descontínuas.

4.1 Problemas lineares

Começemos por considerar o problema linear cuja função fluxo é dada por $f(u) = 0.5u$ e consideremos a condição inicial contínua: $u(x, 0) = \exp(-100(x - 0.4)^2)$, $x \in (0, 1]$, que reproduz uma densidade normal.

Então o problema que consideraremos é definido por

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + 0.5 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0, & x \in (0, 1), t \in (0, 0.5] \\ u(x, 0) = \exp(-100(x - 0.4)^2), & x \in [0, 1] \\ u(0, t) = 0, & t \in (0, 0.5]. \end{cases} \quad (4.2)$$

Para resolver este problema, começámos por inicializar a aproximação numérica fazendo $U_j^0 = u_0(x_j)$, para $j = 0, \dots, M$. No que se segue, apresentaremos resultados numéricos usando os métodos de Upwind e Lax-Friedrichs, cuja implementação foi feita em Matlab. É de notar, no entanto, que no

método de Lax-Friedrichs temos o cuidado de calcular as aproximações $U_M^n, n = 1, \dots, N$, recorrendo ao método de Upwind.

De modo a não violar a condição de estabilidade estabelecida no capítulo anterior, iremos admitir que $\Delta t = \Delta x$. Assim, com o objetivo de estimar a ordem de convergência destes métodos, procurámos estudar como decresce a norma do erro global definido em (3.9) ao considerar malhas sucessivamente mais finas.

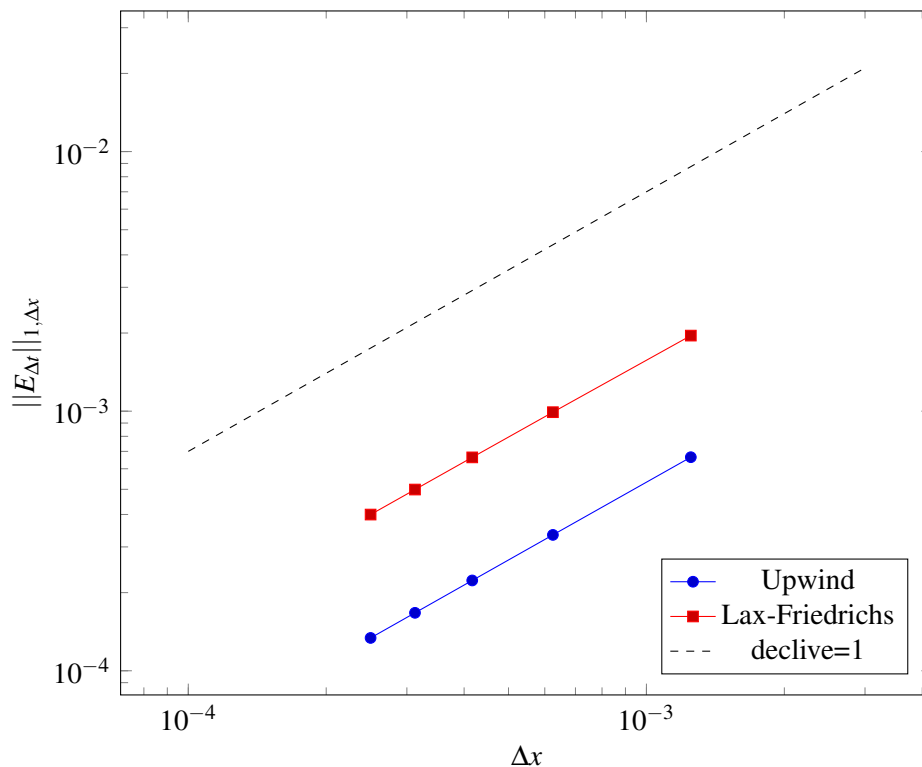


Figura 4.1 Erro absoluto para as diferentes metodologias numéricas para o problema (4.2).

Na Figura 4.1 apresentamos os valores da norma do erro obtidos para os dois métodos implementados e apresentamos também o gráfico de $y = C_1 x$, onde C_1 é uma constante conveniente. É de notar que esta curva é representada como uma reta tracejada na Figura 4.1 e permite ter uma ideia da ordem de convergência estimada destes métodos. Além disso, para cada método, fizemos o ajuste (no sentido dos mínimos quadrados) dos dados a uma curva da forma $y = Cx^n$.

Como vemos na Figura 4.1 o comportamento do erro referente a estes métodos aproxima-se bastante do comportamento da reta com declive 1. Além disso, os declives obtidos no ajuste (no sentido dos mínimos quadrados) vão de encontro aos resultados obtidos e apresentados na Figura 4.1.

Tendo em conta que no capítulo anterior mostrámos que os métodos em análise têm ordem de consistência 1 para a norma $\|\cdot\|_{1, \Delta x}$ e que a condição de estabilidade é satisfeita, embora o problema em análise não seja o mesmo, os resultados que obtemos estão de acordo com essas estimativas.

Condição Inicial Descontínua Consideremos agora o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + 0.5 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, & x \in (0,1), t \in (0,0.5] \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [0,1] \\ u(0,t) = 1, & t \in (0,0.5], \end{cases} \quad (4.3)$$

com

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 0.5 \\ 0, & 0.5 < x < 1. \end{cases} \quad (4.4)$$

Aplicando o mesmo raciocínio que utilizámos no problema (4.2) obtemos o gráfico apresentado na Figura 4.2.

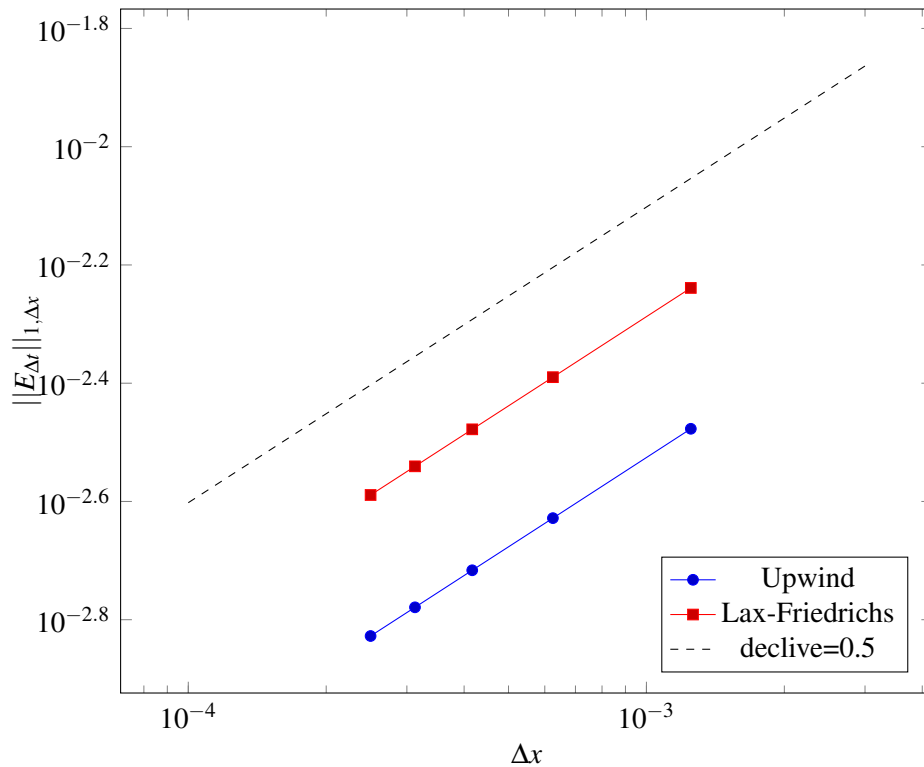


Figura 4.2 Erro absoluto para as diferentes metodologias numéricas para o problema (4.3).

Ao observarmos o gráfico notamos que o comportamento do erro absoluto aproxima-se do comportamento da reta com declive 0.5. De acordo com estes resultados concluímos que quando consideramos condições iniciais descontínuas a ordem de convergência estimada parece ser penalizada em comparação com o que vimos para condições iniciais suaves. De acordo com [6], considerando o domínio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, o erro absoluto, para condições iniciais descontínuas é da ordem de $\Delta x^{1/2}$ para os métodos de Upwind e Lax-Friedrichs. Ao compararmos os resultados teóricos com os resultados apresentados na Figura 4.2 podemos concluir que apesar de estarmos a considerar o domínio fechado e limitado $[0,1] \times [0,T]$, a ordem de convergência destes métodos é consistente com tais resultados teóricos.

Ainda assim, é importante notar que para condições iniciais descontínuas da forma (4.3) teremos uma ordem de convergência estimada inferior e, por isso, será necessária uma malha mais refinada para obter resultados equiparáveis aos do problema anterior.

4.2 Problemas não lineares

Como temos vindo a analisar, aproximar soluções numéricas para problemas não lineares não é tão simples como para os problemas lineares. Neste contexto, os métodos de Upwind e Lax-Friedrichs foram implementados na sua forma conservativa. Outro factor que deve ser tomado em conta é que estamos a considerar uma nova forma de convergência, visto que poderá existir mais do que uma solução fraca.

Começemos por considerar o problema seguinte

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}(f(u(x,t))) = 0, & x \in (0,1), t \in (0,0.5] \\ u(x,0) = x, & x \in [0,1] \\ u(0,t) = 0, & t \in (0,0.5], \end{cases} \quad (4.5)$$

com $f(u) = \frac{u^2}{2}$, $u \in \mathbb{R}$.

Utilizando a mesma metodologia usada no caso linear, obtemos os valores da norma do erro para cada um dos métodos e estes são apresentados na Figura 4.3.

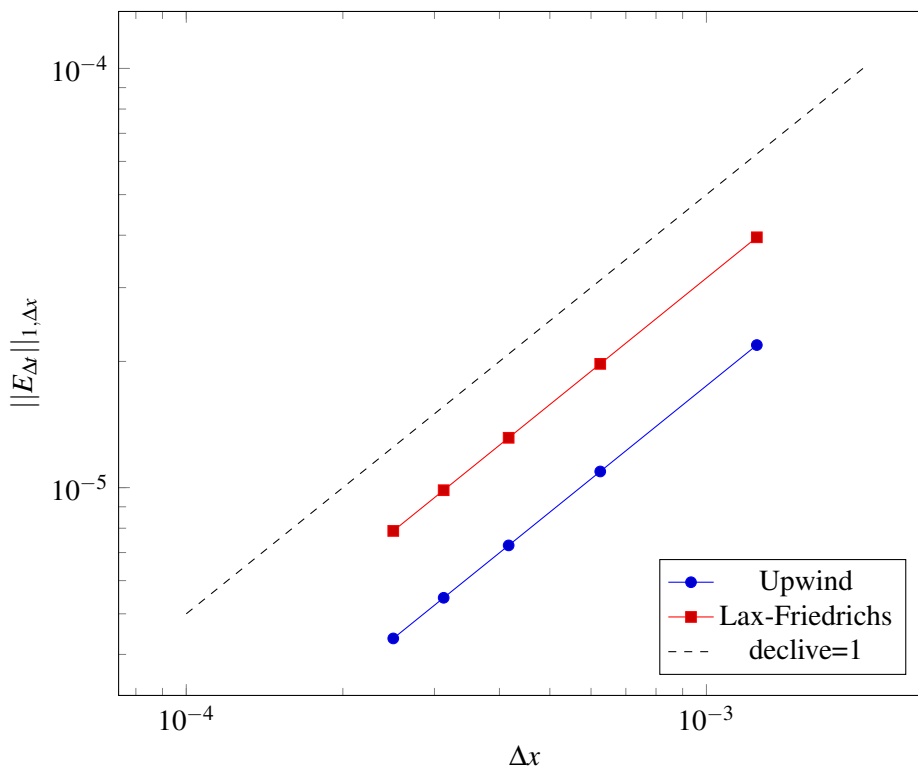


Figura 4.3 Erro absoluto para as diferentes metodologias numéricas para o problema (4.5).

Como vemos na Figura 4.3 o comportamento do erro referente a estes métodos aproxima-se do comportamento da reta com declive 1. Além disso, os declives obtidos no ajuste (no sentido dos mínimos quadrados) vão de encontro aos resultados apresentados no gráfico. Assim, podemos concluir que, tal como no caso linear, estimamos a ordem de convergência do método em 1.

Condição Inicial Descontínua Vejamos como se comporta a norma do erro das aproximações com condições iniciais descontínuas. Com isso em mente, consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}(f(u(x,t))) = 0, & x \in (0,1), t \in (0,0.5] \\ u(x,0) = u_0, & x \in [0,1] \\ u(0,t) = 1, & t \in (0,0.5], \end{cases} \quad (4.6)$$

onde u_0 é definida por (4.4) e $f(u) = \frac{u^2}{2}, u \in \mathbb{R}$.

Tal como nos restantes exemplos, calculámos o erro na norma (3.1) à medida que refinámos a malha e obtemos o gráfico apresentado na Figura 4.4.

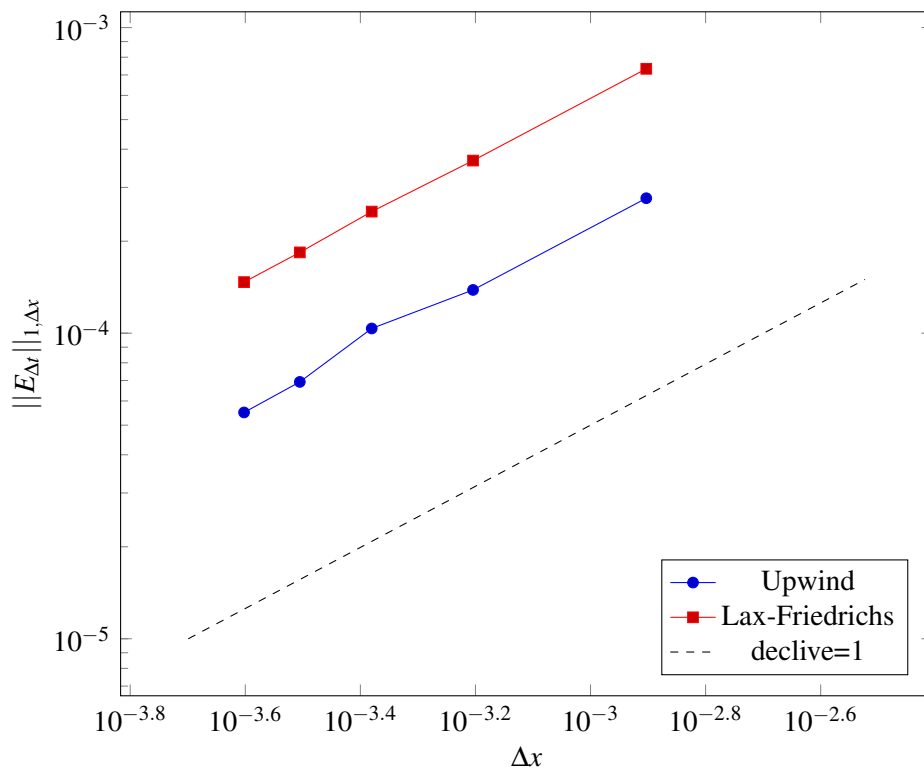


Figura 4.4 Erro absoluto para as diferentes metodologias numéricas para o problema (4.6).

Mais uma vez, ao observarmos o gráfico notamos que o comportamento do erro associado a estes métodos aproxima-se da reta com declive 1. Além disso, os declives calculados no ajuste (no sentido dos mínimos quadrados) também se aproximam de 1. De acordo com estes resultados concluímos que quando consideramos condições iniciais descontínuas para a equação de Burgers, a ordem de convergência estimada é igual a 1.

Estes resultados são muito interessantes. Apesar de, no caso linear considerado, a ordem de convergência estimada para condições iniciais descontínuas seja 0.5, no caso não linear isso não acontece, preservando a ordem de convergência (estimada) 1 do caso da condição inicial contínua. Este comportamento inesperado leva-nos a conjecturar que a ordem de convergência do método possa ter alguma dependência da função fluxo do problema.

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho estudamos métodos numéricos para leis de conservação hiperbólicas, isto é, equações diferenciais de derivadas parciais de primeira ordem do tipo hiperbólico. Estas equações modelam fenômenos dos mais variados ramos das ciências, em particular, modelam o carregamento de carros elétricos.

Começamos esta tese por deduzir a equação associada a estes problemas e por estudar questões de existência, unicidade e construção de solução no sentido clássico. Nesse sentido, percebemos a necessidade de criar um novo conceito de solução que admitisse soluções e condições iniciais descontínuas - a solução no sentido fraco. Sob certas condições de regularidade nos dados do problema, foi estabelecido que tal solução fraca existe e foi possível estabelecer a sua unicidade introduzindo o conceito de condição de entropia.

A dificuldade inerente ao cálculo destas soluções, levou-nos a debruçar sobre métodos numéricos de diferenças finitas para resolver estes problemas. Assim, foi feita uma breve revisão dos conceitos de consistência e estabilidade no caso linear e, estabelecemos que a estabilidade e consistência dos métodos é suficiente para a sua convergência (uma das implicações do Teorema de Lax). No caso não linear, redefinimos alguns conceitos e provamos que se um método for consistente e conservativo e a sucessão de aproximações tiver um limite então esse limite é solução fraca do problema (Teorema de Lax-Wendroff). Para garantir a convergência para essa solução foi introduzido um tipo de estabilidade: a TV-estabilidade. Combinadas estas propriedades e regularidade suficiente nos dados iniciais, foi apresentado um resultado de convergência para o conjunto das soluções fracas do problema diferencial.

No quarto capítulo, implementamos os métodos de Upwind e Lax-Friedrichs e analisamos os resultados no caso linear e não linear para condições iniciais contínuas e descontínuas, comparando-os com alguns resultados conhecidos e apresentados no capítulo 3. No caso não linear, os resultados foram inesperados, visto que obtemos a mesma ordem de convergência estimada entre a condição inicial contínua e descontínua, ao contrário do caso linear.

Embora este trabalho faça uma digressão sobre alguns conceitos e resultados sobre leis de conservação hiperbólicas e métodos de diferenças finitas para aproximar as suas soluções, bastantes questões ficaram em aberto e não foram objeto de estudo, nomeadamente, salientamos resultados teóricos de existência e unicidade de solução para problemas definidos em conjuntos limitados; a relação das condições de entropia com os métodos numéricos; e a relação entre a função fluxo e a ordem de convergência dos métodos.

Bibliografia

- [1] (2022). Com 130 milhões de carros elétricos na europa em 2035 será que a rede aguenta? <https://expresso.pt/economia/2022-02-08-com-130-milhoes-de-carros-eletricos-na-europa-em-2035-sera-que-a-rede-aguenta->. Accessed: 29-06-2022.
- [2] Evans, L. (2010). *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society.
- [3] Ferreira, J. A. M. (2020-2021). *Métodos Matemáticos da Física e da Biologia*. Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra.
- [4] Kim, A. D. (2004). Transport theory for light propagation in biological tissue. *JOSA A*, 21(5):820–827.
- [5] Le Floch, C., Kara, E. C., and Moura, S. (2018). Pde modeling and control of electric vehicle fleets for ancillary services: A discrete charging case. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 9(2):573–581.
- [6] LeVeque, R. J. and Leveque, R. J. (1992). *Numerical methods for conservation laws*, volume 132. Springer.