1 2 9 0

UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Patrícia Maria Ribeiro Fonseca

ESTUDO COMPARATIVO DAS PROBABILIDADES DE FALÊNCIA E DE *DEFAULT* COM DADOS DE OPÇÕES E DE *CREDIT DEFAULT SWAPS*

VOLUME 1

Dissertação no âmbito do Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças, orientada pela Professora Doutora Ana Margarida Monteiro e pelo Professor Doutor António Alberto Santos e apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia e à Faculdade de Economia.

março de 2022

Estudo comparativo das probabilidades de falência e de *default* com dados de opções e de *Credit Default Swaps*

Patrícia Maria Ribeiro Fonseca

1 2 9 0

UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças

Master in Quantitative Methods in Finance

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

março 2022

Agradecimentos

Aos meus orientadores, a Professora Doutora Ana Margarida Monteiro e o Professor Doutor António Alberto Santos, agradeço do fundo do coração toda a paciência e disponibilidade ao longo destes meses, a vossa ajuda, exigência e encorajamento foram determinantes para a concretização deste trabalho.

Aos meus pais e à minha irmã, um agradecimento muito especial, sem vocês esta conquista não seria possível, o vosso apoio, paciência e carinho foi fundamental para conseguir traçar este percurso.

Aos meus ricos avós paternos e à minha restante família, por todo o apoio e palavras de carinho.

Às minhas estrelinhas, avô e avó, a onde quer que estejam, tenho a certeza que vos deixei muito orgulhosos.

Aos meus amigos, em especial à Francisca, à Beatriz, à Fátima e à Sofia, agradeço por todas as palavras de força e incentivo, obrigada meninas por estes anos maravilhosos.

Às minhas colegas de trabalho, Cláudia, Catarina e Rosa um sincero obrigada pela preocupação, compreensão e motivação.

Resumo

A presente dissertação estuda a estimação das probabilidades de incumprimento (*default*) e falência, associadas a preços de opções financeiras e a *Credit Default Swaps*. Inicialmente, apresenta-se o modelo de Black-Scholes-Merton para atribuição de preços de opções financeiras, bem como algumas extensões a este modelo. A primeira extensão apresentada, denominada de modelo de Merton distância ao *default*, relaciona o risco de *default* com o capital da empresa, introduzindo na sua formulação o conceito de probabilidade de *default*. Por outro lado, são estudadas duas extensões ao modelo de Black-Scholes-Merton através da introdução de um parâmetro a representar a probabilidade de falência. As duas abordagens têm como objetivo a estimação de uma função densidade neutra ao risco que incorpora explícitamente um parâmetro que representa a probabilidade de falência de forma que seja possível atribuir uma probabilidade positiva a um ponto, sendo que a parte ativa corresponde a uma distribuição lognormal ou a uma mistura de duas distribuições. Por fim, através das informações dadas pelos contratos de *Credit Default Swaps* estima-se uma probabilidade de *default*.

Procede-se a uma análise em ambiente de simulação e com dados de mercado. Estima-se as funções densidade neutras ao risco, assim como as probabilidades de falência e as probabilidades de *default* para duas empresas, *Apple* e *GameStop*, atráves da utilização de dados de preços de opções financeiras e de *spreads* relativos a contratos de *Credit Default Swaps*.

Conteúdo

Lista de Figuras **ix**

Lista de Tabelas **xi**

1 Introdução **1**

2 Revisão de literatura **3**

3 Modelo de Black-Scholes-Merton e suas extensões **7**

3.1 Modelo de Merton: distância ao *default* 11
3.2 Método da mistura de distribuições lognormais 12
3.3 Extensões do modelo de Black-Scholes-Merton com probabilidade de falência 14
3.4 *Credit Default Swaps* e probabilidade de *default* 16
3.5 Estimação da função densidade neutra ao risco 17

4 Análise empírica **19**

4.1 Análise em ambiente de simulação 19
4.2 Análise com dados de mercado 25
4.3 Estimação da probabilidade de *default* usando o modelo de Merton DD 30
4.4 Estimação da probabilidade de *default* usando dados dos *spreads* de CDS 31

5 Conclusão **33**

Bibliografia **35**

Lista de Figuras

4.1 Preços teóricos de opções *call* e *put* com perturbação de preços; Função densidade neutra ao risco (densidade lognormal) estimada a partir dos preços de opções *call* e *put* perturbados, gerados segundo o modelo de Black-Scholes-Merton 20

4.2 Preços teóricos de opções *call* e *put* com perturbação de preços; Função densidade neutra ao risco estimada a partir de preços de opções *call* e *put* perturbados, gerados segundo uma mistura de duas distribuições lognormais 21

4.3 Preços teóricos de opções *call* e *put* com perturbação de preços; Função densidade neutra ao risco estimada a partir de preços de opções *call* e *put* perturbados, gerados segundo uma distribuição delta-lognormal com probabilidade de falência 23

4.4 Preços teóricos de opções *call* e *put* com perturbação de preços; Função densidade neutra ao risco estimada a partir de preços de opções *call* e *put* perturbados, gerados segundo uma mistura de duas distribuições com probabilidade de falência 24

4.5 Preços de opções *call* e *put* da empresa *Apple* entre os dias 22 a 25 de fevereiro com maturidade até 17 de junho de 2022 25

4.6 Preços de opções *call* e *put* da empresa *GameStop* entre os dias 25 a 28 de janeiro com maturidade até 17 de junho de 2022 26

4.7 Estimativa da função densidade neutra ao risco para a empresa *Apple*, obtida atavés de uma distribuição delta-lognormal com probabilidade de falência 27

4.8 Estimativa da função densidade neutra ao risco para a empresa *GameStop*, obtida atavés de uma distribuição delta-lognormal com probabilidade de falência 27

4.9 Estimativa da função densidade neutra ao risco para a empresa *Apple*, obtida atavés de uma mistura de duas distribuições lognormais com probabilidade de falência . . . 28

4.10 Estimativa da função densidade neutra ao risco para a empresa *GameStop*, obtida atavés de uma mistura de duas distribuições lognormais com probabilidade de falência 29

4.11 Taxa de *mid spread* para cada empresa, *Apple* e *GameStop*, durante cada ano até à maturidade do contrato CDS de 5 anos 32

Lista de Tabelas

4.1 Comparação entre os parâmetros teóricos e os estimados através de uma mistura de duas distribuições lognormais 21
4.2 Comparação entre os parâmetros teóricos e os estimados através de uma distribuição delta-lognormal com probabilidade de falência 22
4.3 Comparação entre os parâmetros teóricos e os estimados através de uma mistura de duas distribuições lognormais com probabilidade de falência 25
4.4 Estimação dos parâmetros para a empresa *Apple* através de uma distribuição delta-lognormal com probabilidade de falência 26
4.5 Estimação dos parâmetros para a empresa *GameStop* através de uma distribuição delta-lognormal com probabilidade de falência 28
4.6 Estimação dos parâmetros para a empresa *Apple* através de uma mistura de duas distribuições lognormais com probabilidade de falência 28
4.7 Estimação dos parâmetros para a empresa *GameStop* através de uma mistura de duas distribuições lognormais com probabilidade de falência 29
4.8 Probabilidade de *default* para as empresas, *Apple* e *GameStop* 30
4.9 Dados da taxa de *mid spread* para cada empresa, *Apple* e *GameStop*, para o período de 20 de dezembro de 2017 a 20 de dezembro de 2022 (CDS de 5 anos) 31
4.10 Dados da taxa de *mid spread* para cada empresa, *Apple* e *GameStop*, para o período de 20 de dezembro de 2021 a 20 de dezembro de 2022 (CDS de 1 ano) 31
4.11 Comparação entre as probabilidades de *default* para empresas, *Apple* e *GameStop*, com contratos de 1 ano e 5 anos, para taxas de recuperação de 25%, 40% e 50% . . . 32

Capítulo 1

Introdução

À medida que os mercados financeiros se complexificam, o risco a que as empresas estão sujeitas pode assumir cada vez mais, uma maior relevância, neste sentido, torna-se importante estudar os instrumentos financeiros utilizados na sua cobertura e gestão. Deste modo, existem vários tipos de risco, em particular o risco financeiro, que pode afetar a gestão empresarial.

O risco financeiro está associado a alterações nos mercados financeiros que pode ter impactos significativos nos lucros e prejuízos dos investidores, assim como na economia de um país. Os derivados financeiros surgem como instrumentos adicionais de gestão de risco, disponíveis para indíviduos, empresas e estados. São acordos estabelecidos para entrega diferida no tempo de um ou mais ativos denominados por ativos subjacentes, por outras palavras, presume-se que os acordos celebrados neste contexto sejam liquidados numa, ou em várias datas futuras preestabelecidas. Dos derivados financeiros, uma das classes mais importantes corresponde aos contratos de opções. A característica mais distintiva é a possibilidade de o contrato ser exercído ou não, isto é, compra ou venda do ativo subjacente. As opções são negociadas em vários mercados financeiros, podendo revelar as expectativas do mercado sobre o ativo subjcente. Assim, dada a sua importância, as opções não só oferecem oportunidades de escolha aos investidores, como são importantes na cobertura e gestão do risco financeiro.

Na presente dissertação pretende-se analisar o risco financeiro, relativamente às empresas *Apple* e *GameStop*, recorrendo à estimação de uma probabilidade de falência e de uma probabilidade de *default*. No caso da estimação de uma probabilidade de falência, baseamos o nosso estudo na implementação dos métodos de uma distribuição delta-lognormal com probabilidade de falência e de uma mistura de duas distribuições lognormais com probabilidade de falência, apresentados, repetivamente, por Câmara et al. [8] e Taylor et al. [21]. Para estimar uma probabilidade de *default* utilizamos, em alternativa, a implementação do modelo de Merton distância ao *default* e as informações relativas a contratos de *Credit Default Swaps* (CDS). Os CDS são um tipo de derivado de crédito relevante na gestão do risco de uma empresa, visto que fornecem proteção contra um possível *default* da mesma.

No capítulo dois apresentamos uma breve revisão de literatura onde expomos em primeiro lugar alguns conceitos e resultados fundamentais para o nosso trabalho, sendo de seguida realizada uma revisão de literatura explicando a contribuição de alguns autores para as diferentes abordagens e formulações utilizadas. No capítulo três, apresentamos o modelo mais conhecido para atribuição de preços de opções, o modelo de Black-Scholes-Merton, e o seu desenvolvimento até à introdução de

uma função densidade neutra ao risco (FDNR). De seguida, apresentamos também, as extensões ao modelo, nomeadamente o modelo de Merton distância ao *default* e os métodos segundo Câmara et al. [8] e Taylor et al. [21]. Por fim, explicamos o método implementado por Bharath and Shumway [6] na estimação da probabilidade de *default* utilizando dados de CDS. No capítulo quatro, apresentamos uma análise empírica relativamente aos modelos em estudo, recorrendo ao *software* MATLAB. Utilizamos dados de opções e dados de CDS para as empresas *Apple* e *GameStop*. Por último, no capítulo cinco, apresenta-se a conclusão do trabalho.

Capítulo 2

Revisão de literatura

Os derivados financeiros são definidos como instrumentos cujo preço depende do valor de um, ou mais ativos designados por ativos subjacentes (Hull [11]; Etheridge [10]). Entre os principais tipos de derivados temos, os contratos *forward*, os contratos de futuros e os contratos de opções.

Os contratos *forward* e os contratos de futuros são acordos bilaterais de compra ou venda de um bem ou instrumento financeiro, numa data futura, a um preço determinado no presente. No entanto, ambos os contratos diferem em alguns aspectos. Os contratos *forward* são contratos transacionados em mercados descentralizados e informais, possuem uma elevada flexibilidade, o que permite uma adequação das condições do contrato aos interesses das partes envolvidas. Em contrapartida, os contratos de futuros são acordos padronizados, caracterizados pela sua elevada negociabilidade, isto é, são contratos transacionados em mercados formais, organizados e centralizados, o que permite um aumento da sua liquidez e a redução dos custos de transação.

Os contratos de opções envolvem duas partes, um comprador e um vendedor. No caso, de um investidor comprar uma opção dizemos que está perante uma posição longa, por outro lado se vender a opção, dizemos estar perante uma posição curta (Jondeau et al.[13]). Uma opção financeira concede ao comprador o direito, mas não a obrigação, de comprar (opção de compra ou opção *call*) ou vender (opção de venda ou opção *put*) um determinado ativo subjacente, numa data futura ou durante um certo período de tempo, a um preço definido. Uma opção europeia, ou de estilo europeu, só pode ser exercida em uma determinada data futura, enquanto uma opção americana pode ser exercida em qualquer momento até (e incluindo) à sua maturidade. O preço preestabelecido é denominado por preço de exercício. O último dia em que uma opção pode ser exercida é designado por maturidade, no caso das opções europeias é o único dia em que a opção pode ser exercida.

Seja S_T o preço do ativo subjacente na maturidade T, designamos por $\tau = T - t$ o tempo até à maturidade, t o tempo presente e por X o preço de exercício. Uma opção *call* europeia dá ao titular da opção o direito de comprar o ativo sujacente ao preço de exercício na maturidade. Se $S_T < X$ o titular não exercerá a opção de compra (isto é, a opção *call*), uma vez que pode comprar o ativo subjacente no mercado por um valor inferior ao preço exercício, portanto a opção em T terá o valor 0. Caso contrário, se $S_T > X$, o titular exercerá a opção e o seu valor será $S_T - X$. No caso de uma opção *put* europeia, o titular tem o direito de vender o ativo subjacente com preço de exercício na maturidade. A opção *put* será exercida quando $S_T < X$. Se $S_T > X$ o titular não exerce a opção. O valor do *payoff*

das opções *call* e *put* na maturidade, é respetivamente:

$$C(S_T,T,X) = \max(S_T - X, 0), \tag{2.1}$$

$$P(S_T,T,X) = \max(X - S_T, 0). \tag{2.2}$$

Relativamente às opções, podemos classificar os preços em negociação no momento t, como opções *at-the money*, *in-the money* e *out-of-the-money*. No caso de uma opção *call* esta diz-se *at-the money* quando o preço de exercício é igual ou muito próximo do preço do ativo subjacente, isto é, $S_t \approx X$. Se $S_t > X$ diz-se que a opção está *in-the money*, ou seja, a opção poderá ser exercida (no caso de ser de estilo americano) sendo o seu valor igual a $S_t - X$. Caso contrário, se $S_t < X$, diz-se que a opção está *out-of-the-money*. Para uma opção *put*, dizemos que uma opção está *in-the money* se $S_t < X$, *out-of-the-money* se $S_t > X$ e *at-the money* quando $S_t \approx X$.

Black and Scholes [7] e Merton [17] apresentaram uma fórmula que permite calcular o valor do preço de uma opção financeira numa data anterior ao seu vencimento. Cox and Ross [9] no contexto de ausência de oportunidades de arbitragem apresentam uma formulação para o preços das opções. Neste modelo o preço das opções é dado pelo valor esperado dos ganhos futuros sob uma medida neutra ao risco. Se considerarmos a distribuição lognormal, obtemos as fórmulas do preço das opções *call* e *put* do modelo de Black-Scholes-Merton.

A função densidade neutra ao risco (FDNR) no modelo de Black-Scholes-Merton é a lognormal. No modelo de Black-Scholes-Merton a volatilidade é o único parâmetro que não é diretamente observável. No entanto, o pressuposto de que a volatilidade é constante não é válido. Através da inversão da fórmula do modelo de Black-Scholes-Merton, é possível determinar o valor para a volatilidade designado por volatilidade implícita, da qual a sua representação gráfica, em função do preço de exercício com o mesmo ativo subjacente e a mesma maturidade, é usualmente designada por "sorriso da volatilidade". Neste contexto, o modelo de Black-Scholes-Merton apresenta limitações no que diz respeito ao parâmetro da volatilidade. Uma vez que o seu comportamento assume uma importância na determinação de preços de opções financeiras, torna-se fundamental a utilização de métodos alternativos para a estimação da volatilidade para não recorrer apenas ao cálculo da volatilidade implícita pela fórmula do modelo de Black-Scholes-Merton.

Existem vários métodos para estimar a FDNR, métodos estruturais e métodos não estruturais. Os métodos estruturais propõem uma descrição completa para a dinâmica do preço e/ou para o processo de volatilidade. Em contrapartida, os métodos não estruturais produzem uma estimativa para as FDNR sem descrever a dinâmica do preço. Estes podem ser divididos em métodos paramétricos, métodos semiparamétricos e métodos não paramétricos. Os métodos paramétricos propõem uma expressão para a FDNR usando uma família de distribuições, por exemplo, a mistura de distribuições lognormais. Os métodos não paramétricos propôem abordagens sem que seja necessário a atribuição de uma forma explícita para a FDNR. Por último, a estimação por métodos semiparamétricos considera algumas particularidades dos dois métodos anteriores. Nesta dissertação iremos apenas considerar métodos paramétricos, em particular o método da mistura de distribuições lognormais.

A mistura de distribuições lognormais foi proposta inicialmente por Ritchey [19], e seguidamente aplicada, entre outros, em Melick and Thomas [16], Bahra [4], Söderlind and Svensson [20] e Jondeau and Rockinger [14]. Melick and Thomas [16] estimaram a FDNR considerando preços de opções

americanas durante a crise do Golfo Pérsico. Bahra [4] considera uma mistura de duas distribuições lognormais usando opções sobre matérias-primas transacionadas na LIFFE (*London International Financial Futures and Options Exchange*) e opções sobre divisas transacionadas na Bolsa de Valores de Filadélfia (PHLX). Söderlind and Svensson [20] mostram como o método de uma mistura de distribuições lognormais pode ser aplicado a vários ativos financeiros, com a intenção de extrair as informações sobre as expectativas dos preços dos ativos, para fins de política monetária. Por último, Jondeau and Rockinger [14] compararam várias FDNR a partir de diversos modelos paramétricos e não paramétricos.

Merton [18] apresentou uma extensão do modelo de Black-Scholes-Merton, de modo a relacionar o risco de crédito com o capital da empresa. O autor considera que o valor do capital próprio de uma empresa é o valor de uma opção *call* europeia sobre o valor dos seus ativos, com maturidade T. Deste modo, é possível estimar a probabilidade de uma empresa entrar em *default*. Neste contexto, diz-se que uma determinada empresa entra em *default* se o valor dos seus ativos descer para um determinado nível inferior ao da sua dívida. Assim, um aumento do valor da dívida de uma empresa, poderá reduzir o valor de mercado dos seus ativos e aumentar a sua probabilidade de *default*.

No entanto, outra abordagem para analisar o risco, poderá ser recorrendo à estimação de uma probabilidade de falência. A probabilidade de falência pode ser considerada como sendo a probabilidade das ações perderem todo o seu valor e, por consequência, os acionistas perdem todos os seus direitos sobre determinada empresa, sendo o prejuízo restante suportado pelos credores, tal como considerado por Câmara et al. [8]. Os autores apresentam uma modificação do modelo de Black-Scholes-Merton para a estimação de probabilidades de falência, comparando os resultados obtidos com os do modelo de Merton DD e com os dados das agências de *rating*, nomeadamente o *rating* da empresa Moody´s. Os autores assumem que a FDNR é uma densidade delta-lognormal com probabilidade de falência.

Taylor et al. [21] desenvolveram um modelo para a FDNR, que consiste numa mistura de duas densidades lognormais com probabilidade de falência. Os autores mostraram que para a obtenção de estimativas de falência, um modelo de uma mistura de duas distribuições lognormais com uma probabilidade de falência é mais eficaz do que um modelo com uma única lognormal ou do que um modelo de mistura de distribuições lognormais.

Bharath and Shumway [6] monstraram a importância e a contribuição do modelo de Merton distância ao *default* (modelo de Merton DD). Segundo os autores, o modelo de Merton DD é uma aplicação particular do modelo clássico de Black-Scholes-Merton, considerando o valor do ativo subjacente como o valor dos ativos da empresa e o preço de exercício como o valor da dívida. Os autores compararam os resultados dados pelo modelo Merton DD com outros modelos, nomeadamente o modelo KMV utilizado pela agência de *rating*, Moody´s. O modelo KMV propõe algumas alterações ao modelo de Merton DD, nomeadamente no que diz respeito ao uso da dívida de curto e longo prazo. Agarwal and Taffler [1] implementaram o modelo de Merton DD de maneira a conseguir captar diferentes aspectos relacionados com o risco de *default* de uma empresa.

Consideramos no nosso estudo uma análise da probabilidade de *default* através das informações dadas pelos contratos de *Credit Default Swap* (CDS). Berndt et al. [5], Longstaff et al. [15] e Bharath and Shumway [6] utilizam as informações dadas pelos CDS, na estimação de uma probabilidade de *default* para várias empresas. Berndt et al. [5] consideram a estimação do risco de *default* para empresas americanas, através das probabilidades de *default* estimadas pelo método da Moody´s KMV

e pelas informações dadas pelos CDS. Longstaff et al. [15] utilizam as informações dos dados de *spreads* de CDS para perceberem o funcionamento do *default* e do não *default* num determinado conjunto de empresas. Por último, Bharath and Shumway [6] implementaram um modelo que consiste em calcular a probabilidade de *default* de determinada empresa utilizando dados de *spreads* de CDS.

Capítulo 3

Modelo de Black-Scholes-Merton e suas extensões

Neste capítulo apresenta-se os modelos de Black and Scholes [7] e Merton [17]. Tendo em conta que o ativo derivado e o ativo subjacente podem ser negociados em simultâneo, e qualquer ativo derivado pode ser artificialmente replicado pelo ativo subjacente; a venda a descoberto é permitida, a taxa de juro sem risco é conhecida e constante ao longo do tempo, não existem dividendos durante a vida de uma opção, nem custos de transação na compra ou na venda de ativos ou opções e, por fim, assume-se que o mercado é completo.

O modelo de Black-Scholes-Merton assume que o preço do ativo subjacente segue um processo estocástico denominado Movimento Bronwiano Geométrico (MBG),

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t, \tag{3.1}$$

onde dS_t representa a variação do preço do ativo subjacente, dt caracteriza um intervalo de tempo infinitesimal e W_t é um processo de Wiener. O parâmetro μ é a taxa de rentabilidade esperada e σ representa a volatilidade. Tanto o parâmetro μ como o parâmetro σ são considerados constantes ao longo da vida da opção.

Pela aplicação do Lema de Itô à equação (3.1), obtemos:

$$dln(S_t) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dW_t, \tag{3.2}$$

assim

$$ln(S_T) \sim N[ln(S_t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\tau, \sigma\sqrt{\tau}]. \tag{3.3}$$

Seja $f(S_t,t)$ o preço de um ativo derivado, usando novamente o Lema de Itô, $f(S_t,t)$ satisfaz a equação diferencial estocástica,

$$df = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \mu S_t \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t}\right) dt + \sigma S_t \frac{\partial f}{\partial S} dW_t. \tag{3.4}$$

Considerando uma carteira (ou portefólio) constituída por um ativo derivado e por uma posição curta num determinado número de ativos subjacentes a essa opção, o valor do portefólio é dado por

$$B_t = f - \frac{\partial f}{\partial S} S_t, \tag{3.5}$$

ao qual se associa a equação diferencial estocástica

$$dB_t = df - \frac{\partial f}{\partial S} dS_t. \tag{3.6}$$

Através de (3.1) e (3.4), substituindo df e dS_t em (3.6), obtém-se

$$\begin{aligned} dB_t &= \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \mu S_t \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} - \mu S_t \frac{\partial f}{\partial S} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial f}{\partial S} dW_t - \sigma S_t \frac{\partial f}{\partial S} dW_t = \\ &= \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt + 0 dW_t. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Da equação (3.7) concluí-se que o portefólio considerado é sem risco, visto que o coeficiente do termo dW_t é 0.

Para evitar arbitragem o portefólio representado por B_t apresenta uma rentabilidade de um investimento sem risco, representada pela taxa de juro r. A equação diferencial correspondente assume a forma,

$$dB_t = rB_t dt = r\left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S_t \right) dt. \tag{3.8}$$

Com base nas equações (3.7) e (3.8), a equação diferencial de Black-Scholes-Merton que relaciona o preço de uma opção, f, em função do tempo t, e do valor do ativo subjacente S_t, é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(S_t,t) + rS_t \frac{\partial f}{\partial S_t}(S_t,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}(S_t,t) - rf(S_t,t) = 0. \tag{3.9}$$

Note-se que a equação (3.9) não depende do parâmetro, μ. É possível observar que as preferências dos investidores face ao risco não são consideradas. Deste modo, num ambiente neutro ao risco, o retorno esperado é igual à taxa de juro sem risco.

A equação diferencial de Black-Scholes-Merton (3.9) tem múltiplas soluções. Deste modo, para que possua uma única solução, relativamente ao valor do preço de uma opção *call* ou *put*, terão de ser consideradas condições iniciais e condições de fronteira. Na maturidade T, as equações (2.1) e (2.2) dizem respeito ao valor de uma opção *call* e *put*, respectivamente. Assim, estas condições constituem as condições iniciais. As condições de fronteira são impostas quando S_t tende para 0 e para $+\infty$. No caso da opção *call*, quando $S_t \to +\infty$, a opção será exercida, visto que o ativo subjacente, S_t, é muito superior ao preço de exercício, X. Assim, o valor da opção *call* é dado por:

$$C(S_t,t) \approx S_t - Xe^{-r\tau}, \quad t \geq 0. \tag{3.10}$$

Tendo em conta o preço de exercício, X, descontado à taxa de juro sem risco, r, a primeira condição de fronteira será:

$$\lim_{S_t \to +\infty} (S_t - C(S_t,t)) = Xe^{-r\tau}, \quad t \geq 0. \tag{3.11}$$

A primeria condição de fronteira de uma opção *put*, quando $S_t \to +\infty$, é dada por:

$$\lim_{S_t \to +\infty} P(S_t,t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{3.12}$$

de facto, a opção não será exercida quando o valor do ativo subjacente, S_t for igual ou superior ao valor do preço de exercício, X. Quando $S_t \to 0$, a segunda condição de fronteira para a opção *call*, é a seguinte:

$$\lim_{S_t \to 0} C(S_t,t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{3.13}$$

Entende-se que, no caso de uma opção *call*, o preço da opção seja nulo visto que, o valor do seu ativo subjacente também o será.

No caso de uma opção *put*, quando $S_t \to 0$, o preço deverá coincidir com o preço de exercício, X, descontado à taxa de juro, r. Sendo assim, a condição de fronteira para esta opção é dada por:

$$\lim_{S_t \to 0} (P(S_t,t) + S_t) = Xe^{-r\tau}, \quad t \geq 0, \tag{3.14}$$

Podemos obter as fórmulas de Black-Scholes-Merton, para os preços de opções *call* e *put*, a partir das condições descritas anteriormente, tal que:

$$C(S_t,t) = S_t N(d_1) - e^{-r\tau} X N(d_2), \quad S_t > 0, \quad t \in [0,T], \tag{3.15}$$

$$P(S_t,t) = e^{-r\tau} X N(-d_2) - S_t N(-d_1), \quad S_t > 0, \quad t \in [0,T], \tag{3.16}$$

onde

$$d_1 = \frac{ln(S_t/X) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad e \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}, \tag{3.17}$$

e $N(\cdot)$ representa a função de distribuição de uma variável normal padronizada.

O modelo de Black-Scholes-Merton apresenta algumas limitações nomeadamente no que diz respeito ao parâmetro da volatilidade σ. A particularidade de uma volatilidade constante advém da existência de um Movimento Browiano Geométrico (MBG) para o preço do ativo subjacente, que resulta da existência de uma lognormal no modelo.

Uma abordagem para determinar o preço de opções *call* e *put*, consiste na utilização da FDNR para o preço do ativo subjacente na maturidade. Cox and Ross [9], partindo da suposição de um mercado sem arbitragem, consideram que os preços das opções europeias *call* e *put*, no instante t, podem ser determinados através do valor esperado do ganho futuro descontado à taxa de juro sem

risco obtido através da FDNR, isto é:

$$C(X) = e^{-r\tau} \int_X^{+\infty} q(S_T)(S_T - X) dS_T, \tag{3.18}$$

$$P(X) = e^{-r\tau} \int_0^X q(S_T)(X - S_T) dS_T, \tag{3.19}$$

onde q representa a FDNR para o preço do ativo subjacente na maturidade, S_T, dada por:

$$\begin{aligned} q(S_T) &= \frac{1}{S_T \sigma \sqrt{2\pi\tau}} e^{\left(-\frac{ln(S_T)-\zeta}{2\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2} \\ \zeta &= ln(S_t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Considerando a substituição da função (3.20) nas fórmulas (3.18) e (3.19), é possível obter as fómulas de Black-Scholes-Merton (3.15) e (3.16). Assim, para o preço de uma opção *call*

$$C(X) = e^{-r\tau} \int_X^{+\infty} \frac{1}{S_T \sigma \sqrt{2\pi\tau}} e^{\left(-\frac{ln(S_T)-\zeta}{2\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2} (S_T - X) dS_T. \tag{3.21}$$

Da mesma forma obtemos semelhante resultado para o preço de uma opção *put*.

Para calcular o integral em (3.21) considera-se

$$I_1 = e^{-r\tau} \int_X^{+\infty} \frac{S_T}{S_T \sigma \sqrt{2\pi\tau}} e^{\left(-\frac{ln(S_T)-\zeta}{2\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2} dS_T \tag{3.22}$$

$$I_2 = -Xe^{-r\tau} \int_X^{+\infty} \frac{1}{S_T \sigma \sqrt{2\pi\tau}} e^{\left(-\frac{ln(S_T)-\zeta}{2\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2} dS_T \tag{3.23}$$

Efectuando a mudança de variável, $y = ln(S_T)$ a

$$\begin{aligned} I_1 &= e^{-r\tau} \int_{ln(X)}^{+\infty} \frac{e^y}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{\left(-\frac{(y-\zeta)^2}{2\sigma^2\tau}\right)} dy \\ &= e^{-r\tau} e^{\zeta + \frac{\sigma^2\tau}{2}} N(d_1) \end{aligned} \tag{3.24}$$

onde $e^{\zeta + \frac{\sigma^2\tau}{2}} = S_t e^{r\tau}$, obtém-se

$$I_1 = S_t N(d_1). \tag{3.25}$$

Através de um procedimento similar,

$$I_2 = -Xe^{-r\tau} N(d_2). \tag{3.26}$$

Desta forma, para o preço de uma opção *call* obtemos a fórmula (3.15). Do mesmo modo, para o preço de uma opção *put* obtemos a fórmula (3.16). Portanto, pode-se concluir que partindo das equações (3.18) e (3.19), é possivel obter as fórmulas de Black-Scholes-Merton, dadas por (3.15) e (3.16). Neste sentido, poderemos afirmar que a FDNR no modelo de Black-Scholes-Merton é a densidade lognormal considerada em (3.20).

3.1 Modelo de Merton: distância ao *default*

Partindo do estudo de Black and Scholes [7] e Merton [17], nesta secção iremos apresentar uma generalização do modelo de Black-Scholes-Merton que procura estimar a probabilidade de *default* associada a uma determinada empresa. Deste modo, a primeira abordagem proposta por Merton [18] considera que o valor dos ativos da empresa, V_t, é dado pela equação diferencial estocástica (3.1),

$$dV_t = rV_t dt + \sigma_v V_t dW_t,$$

onde V_t representa o valor dos ativos da empresa em t e r a taxa de juro sem risco.

Definindo E_t como sendo o capital próprio de uma empresa em t e K como o valor nominal da dívida com maturidade em T. Então, na maturidade T o valor do capital próprio pode ser considerado como uma opção *call* sobre o valor dos ativos de uma empresa com o preço de exercício igual ao valor da dívida, isto é (Anson et al. [3]; Hull et al. [12]; Agarwal and Taffler [1]):

$$E_T = max\{V_T - K, 0\}. \tag{3.27}$$

Assim sendo, o modelo de Merton distância ao *default* (ou modelo de Merton DD) estipula que no momento t o valor do capital próprio de uma empresa, E_t, satisfaz a equação (3.15)

$$E_t = V_t N(d_1) - e^{-r\tau} K N(d_2), \tag{3.28}$$

sendo

$$d_2 = \frac{ln(V_t/K) + (r - \frac{\sigma_V^2}{2})\tau}{\sigma_V \sqrt{\tau}} \quad e \quad d_1 = d_2 + \sigma_V \sqrt{\tau}. \tag{3.29}$$

Merton [18] considera que uma determinada empresa entra em *default* se o valor dos seus ativos descer para um determinado nível. Por outras palavras, quando o valor dos ativos é inferior ao valor da dívida na maturidade.

Sob as condições do modelo de Merton DD considerou-se que a volatilidade associada ao capital próprio, σ_E, está diretamente relacionada com a volatilidade do valor dos ativos, σ_V, da seguinte forma:

$$\sigma_E = \frac{V_t}{E_t} N(d_1) \sigma_V. \tag{3.30}$$

O modelo de Merton DD considera as equações (3.28) e (3.30), e tem como objetivo determinar o valor dos ativos da empresa, V_t, e a volatilidade, σ_V. Em suma, pretendemos resolver o seguinte sistema de duas equações:

$$\begin{cases} E_t = V_t N(d_1) - e^{-r\tau} K N(d_2) \\ \\ \sigma_E = \frac{V_t}{E_t} N(d_1) \sigma_V, \end{cases} \tag{3.31}$$

sendo d_1 e d_2 dados por (3.29).

O primeiro passo para a implementação do modelo de Merton DD, é a estimação do parâmetro da volatilidade associada ao capital próprio, σ_E, partindo dos dados diários dos rendimentos. No entanto, também é necessário conhecer o valor do capital próprio da empresa, E_t, bem como o valor da sua dívida, K, estes valores são obtidos através dos dados de mercado. Assim, iremos usar o *software* MATLAB, para determinar o valor das duas incógnitas do sistema (3.31), V_t e σ_V, referentes ao valor dos ativos da empresa e à sua volatilidade.

Deste modo, partindo da solução da equação (3.28), a distância ao *default* (*'distance to default'*-DD) é dada por (Vassalou and Xing [22]):

$$DD_t = \frac{ln(V_t/K) + (r - \frac{\sigma_V^2}{2})\tau}{\sigma_V\sqrt{\tau}}. \tag{3.32}$$

Sendo assim, a correspondente probabilidade de *default* é dada por:

$$P_{default} = N\left(-\frac{ln(V_t/K) + (r - \frac{\sigma_V^2}{2})\tau}{\sigma_V\sqrt{\tau}}\right) = N(-DD_t). \tag{3.33}$$

No nosso trabalho, para a obtenção de dados de mercado referentes às empresas, usaremos a base de dados EIKON.

3.2 Método da mistura de distribuições lognormais

O modelo Black-Scholes-Merton apresenta limitações, nomeadamente a suposição de que a volatilidade presente é constante. Assim, de maneira a obter uma melhor aproximação dos preços de opções *call* e *put*, Melick and Thomas [16], Bahra [4] e Söderlind and Svensson [20] encontram-se entre os primeiros autores a descrever uma FDNR como uma mistura de densidades lognormais. Deste modo, Jondeau et al. [13] utilizaram as ideias propostas pelos autores, com a intenção de estimar os valores dos preços das opções financeiras, partindo da generalização de uma mistura de densidades lognormais.

Cada densidade lognormal é definida por:

$$\begin{aligned} l(S_T;\lambda,\sigma) &= \frac{1}{S_T\sigma_i\sqrt{2\pi\tau}} e^{\left(-\frac{ln(S_T)-\lambda}{2\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2} \\ \lambda &= ln(S_t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\tau. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Os autores consideram uma soma ponderada das funções densidade de probabilidade relativa a M densidades lognormais, tal que:

$$q(S_T;\theta) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i l(S_T;\mu_i,\sigma_i), \tag{3.35}$$

onde θ é o vector dos parâmetros (ou variáveis) $\theta = (\alpha_i,\mu_i,\sigma_i)$ e $l(S_T;\mu_i,\sigma_i)$ a i-ésima função densidade de uma distribuição lognormal, com parâmetros μ_i e σ_i. Os pesos da distribuição, α_i, devem

satisfazer as condições $\sum_{i=0}^{M} \alpha_i = 1$, $\alpha_i > 0$ para cada $i = 1, ..., M$. Por outras palavras, a função q será uma combinação convexa de várias densidades lognormais.

Partindo da generalização da equação (3.35) e das equações (3.18) e (3.19), os preços das opções *call* e *put* para a mistura de distribuições são, respetivamente:

$$C(X) = e^{-r\tau} \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \int_X^{+\infty} l(S_T; \mu_i, \sigma_i)(S_T - X) dS_T, \tag{3.36}$$

$$P(X) = e^{-r\tau} \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \int_0^{X} l(S_T; \mu_i, \sigma_i)(X - S_T) dS_T. \tag{3.37}$$

Neste contexto, é possível usar diretamente as fórmulas do modelo de Black-Scholes-Merton, para estimar os preços das opções *call* e *put*:

$$C(X) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \left[S_t N(d_{1,i}) - X e^{-r\tau} N(d_{2,i}) \right], \tag{3.38}$$

$$P(X) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \left[e^{-r\tau} X N(-d_{2,i}) - S_t N(-d_{1,i}) \right]. \tag{3.39}$$

onde

$$d_{1,i} = \frac{ln(S_t/X) + (\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2})\tau}{\sigma_i \sqrt{\tau}} \quad e \quad d_{2,i} = d_{1,i} - \sigma_i \sqrt{\tau}. \tag{3.40}$$

Os autores utilizam as equações (3.38), (3.39) e (3.40) para estimar os parâmetros da distribuição: α, μ_i e σ_i.

Partindo da generalização anterior consideramos o caso particular de uma mistura de duas distribuições lognormais descrita por cinco parâmetros: μ_1, σ_1, μ_2, σ_2 e α. Sendo que μ_1, σ_1, μ_2, σ_2 dizem respeito aos parâmetros das densidades e α define o peso de uma distribuição.

Assim sendo, e de acordo com a equação (3.35), temos a seguinte expressão para a função densidade:

$$q(S_T; \alpha, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2) = \alpha l(S_T; \mu_1, \sigma_1) + (1 - \alpha) l(S_T; \mu_2, \sigma_2). \tag{3.41}$$

Partindo das equações (3.36) e (3.37), obtemos as seguintes equações:

$$C(X) = e^{-r\tau} \int_X^{+\infty} [\alpha l(S_T; \mu_1, \sigma_1) + (1 - \alpha) l(S_T; \mu_2, \sigma_2)](S_T - X) dS_T, \tag{3.42}$$

$$P(X) = e^{-r\tau} \int_0^{X} [\alpha l(S_T; \mu_1, \sigma_1) + (1 - \alpha) l(S_T; \mu_2, \sigma_2)](X - S_T) dS_T. \tag{3.43}$$

As equacões (3.42) e (3.43) apresentam os valores dos preços das opções *call* e *put*, respetivamente. Assim sendo, é fácil de deduzir as fórmulas para estimar os preços de opções *call* e *put* para o caso de

uma mistura de duas distribuições lognormais. De facto, a partir das equações (3.38) e (3.39), temos:

$$C(X) = \alpha\left(S_tN(d_{1,1}) - Xe^{-r\tau}N(d_{2,1})\right) + (1-\alpha)\left(S_tN(d_{1,2}) - Xe^{-r\tau}N(d_{2,2})\right), \tag{3.44}$$

$$P(X) = \alpha(e^{-r\tau}XN(-d_{2,1}) - S_tN(-d_{1,1})) + (1-\alpha)(e^{-r\tau}XN(-d_{2,2}) - S_tN(-d_{1,2})), \tag{3.45}$$

$$d_{1,1} = \frac{ln(\frac{S_t}{X}) + (\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2})\tau}{\sigma_1\sqrt{\tau}}, \quad d_{2,1} = d_{1,1} - \sigma_1\sqrt{\tau} \tag{3.46}$$

$$d_{1,2} = \frac{ln(\frac{S_t}{X}) + (\mu_2 + \frac{\sigma_2^2}{2})\tau}{\sigma_2\sqrt{\tau}}, \quad d_{2,2} = d_{1,2} - \sigma_2\sqrt{\tau}. \tag{3.47}$$

Os autores utilizam as equações (3.46)-(3.47) para estimar os cinco parâmetros da distribuição: μ_1, σ_1, μ_2, σ_2 e α.

Como referido anteriormente, o modelo de Black-Scholes-Merton considera que o retorno esperado μ, representativo das preferências dos investidores face ao risco, deve ser substituído pela taxa de juro sem risco r. Portanto, na utilização do método da mistura de duas distribuições lognormais admite-se que $\mu = r$. Desta forma, pretendemos estimar três parâmetros da distribuição: σ_1, σ_2 e α. No entanto, para proceder à estimação dos respetivos parâmetros é preciso resolver um problema de otimização cuja função objectivo é o quadrado da diferença entre os preços gerados pela mistura de duas distribuições lognormais e os preços observados no mercado.

3.3 Extensões do modelo de Black-Scholes-Merton com probabilidade de falência

Câmara et al. [8] e Taylor et al. [21] apresentaram uma modificação do modelo de Black-Scholes-Merton para a estimação de probabilidades de falência.

Segundo Aitchison [2] o ativo subjacente pode tomar o valor zero com probabilidade constante positiva ou, então seguir um movimento Browiano geométrico com uma certa probabilidade. De acordo com a definição proposta por Aitchison [2], Câmara et al. [8] aplicam este modelo utilizando dados referentes ao preço de opções.

Seja δ a probabilidade de falência considerada por Câmara et al. [8], diz-se que o ativo subjacente pode tomar o valor 0 com uma probabilidade de falência δ, ou segue um movimento Browiano geométrico com probabilidade $1-\delta$. Assim, partindo das fórmulas do modelo de Black-Scholes-Merton (3.15) e (3.16), os preços de opções *call* e *put* considerando a probabilidade de falência δ, são dadas por:

$$C(S_t,t;\delta) = S_tN(d_1) - (1-\delta)^{\tau}e^{-r\tau}XN(d_2) \tag{3.48}$$

$$P(S_t,t;\delta) = [1-(1-\delta)^{\tau}]e^{-r\tau}X + (1-\delta)^{\tau}e^{-r\tau}XN(-d_2) - S_tN(-d_1), \tag{3.49}$$

com

$$d_1 = \frac{ln(S_t/X) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau - ln(1-\delta)^{\frac{\tau}{2}}}{\sqrt{(\sigma^2 + ln(1-\delta))\tau}} \quad e \quad d_2 = d_1 - \sqrt{(\sigma^2 + ln(1-\delta))\tau}, \tag{3.50}$$

As equações (3.48) e (3.49) dependem sobretudo do parâmetro da probabilidade de falência δ e da volatilidade σ, com $\sigma > 0$, $0 < \delta < 1$ e $\sigma^2 + ln(1-\delta) \geq 0$, ou seja, $\delta + e^{-\sigma^2} - 1 \leq 0$.

Sendo assim, S_T segue uma distribuição delta-lognormal neutra ao risco implícita nas equações dos preços de opções, (3.48) e (3.49), dada por:

$$S_T \sim \Delta\left[1-(1-\delta)^{\tau}, ln(S_t) + r\tau - \frac{\sigma^2}{2}\tau - ln(1-\delta)^{\frac{3}{2}\tau}, \sigma^2\tau + ln(1-\delta)^{\tau}\right]. \tag{3.51}$$

Considerando o parâmetro $\delta = 0$ em (3.48) e (3.49) obtemos as equações para determinar o preço de opções *call* e *put* segundo o modelo de Black-Scholes-Merton.

Taylor et al. [21] consideram um modelo para a estimação da probabilidade de falência que consiste em uma mistura de duas distribuições lognormais com uma probabilidade de falência associada. Os autores consideraram dois pesos da distribuição, α_1 e α_2, correspondentes às duas distribuições lognormais, e o restante peso, $1-\alpha_1-\alpha_2$, corresponde à respectiva probabilidade de falência. Assim, a correspondente função de distribuição neutra ao risco para S_T, $Q(S_T)$, é dada por:

$$Q(S_T;\alpha_1,\alpha_2,\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2) = 1-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_1 Q_1(S_T;\mu_1,\sigma_1)+\alpha_2 Q_2(S_T;\mu_2,\sigma_2). \tag{3.52}$$

A função Q é definida pelos parâmetros α_1, α_2, μ_1, μ_2, σ_1, σ_2 e por duas distribuições lognormais, Q_1 e Q_2, tal que:

$$Q_i(S_T;\mu_i,\sigma_i) = N\left(\frac{ln(\frac{S_T}{\mu_i}) + \frac{1}{2}\sigma_i^2\tau}{\sigma_i\sqrt{\tau}}\right), \quad i = 1,2 \tag{3.53}$$

com $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2 > 0$, $\alpha_1,\alpha_2 \geq 0$ e $\alpha_1+\alpha_2 \leq 1$.

Os autores referem a função Q como sendo a mistura de duas distribuições lognormais com probabilidade de falência. Através da equação (3.52), considerando $\alpha_1 \leq 1$ e $\alpha_2 = 0$ é possivel obter a distribuição lognormal com probabilidade de falência proposta por Câmara et al. [8].

De acordo com Taylor et al. [21], assume-se que o preço do ativo subjacente é sempre positivo até à maturidade. No entanto, ocorre falência quando $S_T = 0$ dada a probabilidade $1-\alpha_1-\alpha_2$. Assim, de acordo com esta abordagem é possível calcular os preços de opções *call* e *put* da seguinte forma:

$$C(X;\alpha_1,\alpha_2,\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2) = \alpha_1 C(X,\mu_1,\sigma_1,\tau)+\alpha_2 C(X,\mu_2,\sigma_2,\tau) \tag{3.54}$$

$$P(X;\alpha_1,\alpha_2,\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2) = e^{-r\tau}(1-\alpha_1-\alpha_2)X+\alpha_1 P(X,\mu_1,\sigma_1,\tau)+\alpha_2 P(X,\mu_2,\sigma_2,\tau), \tag{3.55}$$

onde os preços $C(X,\mu_i,\sigma_i,\tau)$ e $P(X,\mu_i,\sigma_i,\tau)$, $i = 1,2$ são obtidos através das fórmulas do modelo de Black-Scholes-Merton (3.15) e (3.16). Deste modo, se ocorrer falência por parte da empresa, as opções *call* não têm qualquer valor, contudo as opções *put* valem X neste caso.

Taylor et al. [21] reconhecem que uma mistura de duas distribuições lognormais com probabilidade de falência, descreve melhor os preços de opções do que, por exemplo, a distribuição delta-lognormal

com probabilidade de falência proposta por Câmara et al. [8]. De facto, a mistura de duas distribuições lognormais com probabilidade de falência apresenta mais parâmetros do que a distribuição delta-lognormal com probabilidade de falência, tornando-se mais flexível de modo a descrever uma melhor aproximação das expectativas do mercado.

Para proceder à estimação dos parâmetros das duas abordagens consideradas anteriormente, é necessário a formulação de problemas de otimização, para de seguida conseguir estimar uma FDNR. Assim sendo, segundo a metodologia de Câmara et al. [8], pretendemos estimar a volatilidade σ e a probabilidade de falência δ. Em contrapartida, segundo o método de Taylor et al. [21], pretendemos estimar as volatilidades da mistura σ_1 e σ_2, e os respetivos pesos da distribuição α_1 e α_2, com a probabilidade de falência de $1-\alpha_1-\alpha_2$.

3.4 *Credit Default Swaps* e probabilidade de *default*

Berndt et al. [5], Longstaff et al. [15] e Bharath and Shumway [6] utilizam os contratos de CDS para estimar a probabilidade de *default* para uma, ou várias empresas. Deste modo, iremos aplicar o método implementado por Bharath and Shumway [6]. Os autores calculam um valor para a probabilidade de *default* partindo dos *spreads* dos contratos de CDS, e de seguida, comparam os resultados obtidos com os resultados do modelo de Merton DD.

Os CDS são um tipo de derivados de crédito que protegem o comprador contra um possível *default* de uma determinada empresa (entidade de referência). O comprador da proteção efetua pagamentos periódicos até que o *default* ocorra, ou até ao fim do contrato de CDS. Em contrapartida, o vendedor irá pagar um montante ao comprador se a entidade de referência entrar em *default*. A taxa de pagamentos realizados por ano pelo comprador da proteção como percentagem do *notional principal* é designada por *spread* do CDS.

Seja s o *spread* do CDS e P_{CDS} a probabilidade de uma empresa entrar em *default*. Consideramos T como a maturidade de um contrato CDS em anos, r a taxa de juro sem risco e ψ a correspondente taxa de recuperação. Deste modo, o valor esperado dos pagamentos feitos é dado por:

$$\sum_{t=1}^{T}(1-P_{CDS})^t e^{-rt}s+(1-P_{CDS})^{t-1}P_{CDS}e^{-r(t-\frac{1}{2})}\frac{1}{2}s. \tag{3.56}$$

O primeiro termo da fórmula anterior, $(1-P_{CDS})^t e^{-rt}s$, representa o valor atual descontado à taxa de juro sem risco dos pagamentos esperados feitos no final de cada ano e o segundo termo, $(1-P_{CDS})^{t-1}P_{CDS}e^{-r(t-\frac{1}{2})}\frac{1}{2}s$, representa o valor atual dos pagamentos acumulados (acruais), no caso de *default*, considerando que o *default* acontece a meio do ano.

Do mesmo modo, o valor atual esperado do ganho é dado por:

$$\sum_{t=1}^{t=T}(1-P_{CDS})^{t-1}P_{CDS}(1-\psi)e^{-r(t-\frac{1}{2})}. \tag{3.57}$$

Para calcular a probabilidade de *default*, P_{CDS}, é necessário igualar a fórmula (3.56) à fórmula (3.57), ou seja,

$$\sum_{t=1}^{T}(1-P_{CDS})^t e^{-rt}s+(1-P_{CDS})^{t-1}P_{CDS}e^{-r(t-\frac{1}{2})}\frac{1}{2}s=\sum_{t=1}^{t=T}(1-P_{CDS})^{t-1}P_{CDS}(1-\psi)e^{-r(t-\frac{1}{2})}. \tag{3.58}$$

Deste modo, dispomos de uma equação não linear com uma incógnita, P_{CDS}. Ainda assim, é fundamental considerar uma taxa de recuperação, ψ, para avaliar o valor do ganho dado pela fórmula (3.57). A mesma taxa de recuperação, ψ, é muitas vezes utilizada para estimar as probabilidades de *default* e o valor dos CDS. No nosso trabalho, tal como em Bharath and Shumway [6], usaremos uma taxa de recuperação ψ de 25%.

3.5 Estimação da função densidade neutra ao risco

Nesta secção, são apresentados três problemas de otimização cujo objetivo é estimar os parâmetros segundo as abordagens referidas na Secção 3.2 e na Secção 3.3. Os problemas de otimização são formulados através do método dos mínimos quadrados. Este método é uma medida de erro que permite minimizar as distâncias entre os preços teóricos de opções *call* e *put* e os preços de mercado, procurando o melhor ajuste para os valores a estimar.

Deste modo, para estimar os parâmetros é preciso resolver um problema de otimização cuja função objectivo é o quadrado da diferença entre os preços estimados pelo método utilizado e os preços observados no mercado. Neste caso, os métodos a utilizar na estimação são uma mistura de duas distribuições lognormais, uma distribuição delta-lognormal com probabilidade de falência e uma mistura de duas distribuições lognormais com probabilidade de falência.

Como referido anteriormente, no modelo de Black-Scholes-Merton a FDNR é a densidade lognormal. Note-se que esta função depende da estimação do parâmetro da volatilidade σ. Este parâmetro não é diretamente observável, por isso é necessário a sua estimação.

No entanto, como o modelo de Black-Scholes-Merton apresenta limitações referentes a este parâmetro, são utilizadas formulações alternativas para contornar o problema, nomeadamente a utilização de uma mistura de duas distribuições lognormais. Para estimar os parâmetros é necessário utilizar as equações (3.46)-(3.47) a representar os preços de opções *call* e *put*. O problema de otimização é dado por:

$$\begin{aligned} \underset{\sigma_1,\sigma_2,\alpha}{\text{minimizar}} \quad & \sum_{i=1}^{NC} w_{ci}\left[C(X_i)-\hat{C}_i\right]^2+\sum_{j=1}^{NP} w_{pj}\left[P(X_j)-\hat{P}_j\right]^2 \\ \text{sujeito a} \quad & 0\leq\alpha\leq 1 \\ & \sigma_1-\sigma_2<0 \end{aligned} \tag{3.59}$$

onde $\hat{C}_i$ e $\hat{P}_j$ representam os preços de opções *call* e *put* observados, $C(X_i)$ e $P(X_j)$ representam os preços teóricos *call* e *put*, calculados segundo uma mistura de duas distribuições lognormais, e por fim, NC e NP representam o número de opções *call* e *put* ao longo do intervalo de preços de exercício observados, respectivamente.

Com o objectivo de obter uma melhor qualidade dos preços de opções observados no mercado, introduzimos o volume de transações à função objectivo dos problemas de otimização. De facto, o volume está relacionado com o interesse dos investidores na compra ou venda de opções financeiras. Deste modo, os preços de opções com um volume de transações inferior ao expectável, representam opções pouco transacionadas. Enquanto que, preços de opções com um elevado volume de transações representam melhor as expectativas dos investidores. Assim, na análise de dados de mercado, consideramos w_{ci} e w_{pj} a representar os parâmetros associadas ao volume de transações dos preços de opções *call* e *put*, respetivamente.

De acordo com o método abordado na Secção 3.3, distribuição delta-lognormal com probababilidade de falência, os preços teóricos são calculados utilizando as fórmulas (3.48), (3.49) e (3.50). Desta forma, pretende-se estimar a volatilidade σ e a probabilidade de falência δ. Para tal, é necessário a resolução de um problema de otimização:

$$\begin{aligned} \underset{\sigma,\delta}{\text{minimizar}} \quad & \sum_{i=1}^{NC} w_{ci}\left[C(X_i)-\hat{C}_i\right]^2 + \sum_{j=1}^{NP} w_{pj}\left[P(X_j)-\hat{P}_j\right]^2 \\ \text{sujeito a} \quad & 0 \leq \delta \leq 1 \\ & \sigma > 0 \\ & \delta + e^{-\sigma^2} - 1 \leq 0 \end{aligned} \tag{3.60}$$

onde $C(X_i)$ e $P(X_j)$ representam os preços teóricos *call* e *put*, respetivamente, calculados segundo uma distribuição delta-lognormal com probabilidade de falência.

Para calcular os preços teóricos de opções *call* e *put*, segundo uma mistura de duas distribuições lognormais com probabilidade de falência, utilizamos as fórmulas (3.54) e (3.55). Note-se que as fórmulas anteriores indicam uma mistura de duas distribuições lognormais, sendo que a fórmula (3.55) apresenta o valor da probabilidade de falência $1-\alpha_1-\alpha_2$, a multiplicar pelo preço de exercício X. Assim, pretende-se estimar as volatilidades, σ_1 e σ_2, de cada distribuição lognormal, tal como os respetivos pesos, α_1 e α_2. Posto isto, é utilizado o problema de otimização:

$$\begin{aligned} \underset{\sigma_1,\sigma_2,\alpha_1,\alpha_2}{\text{minimizar}} \quad & \sum_{i=1}^{NC} w_{ci}\left[C(X_i)-\hat{C}_i\right]^2 + \sum_{j=1}^{NP} w_{pj}\left[P(X_j)-\hat{P}_j\right]^2 \\ \text{sujeito a} \quad & \alpha_1 + \alpha_2 < 1 \\ & \sigma_1 - \sigma_2 < 0 \end{aligned} \tag{3.61}$$

onde $C(X_i)$ e $P(X_j)$ representam os preços teóricos *call* e *put*, respetivamente, calculados segundo uma mistura de duas distribuições lognormais com probabilidade de falência.

Note-se que para a estimação dos parâmetros torna-se fundamental a introdução de restrições nos problemas de otimização (3.59), (3.60) e (3.61). As consequências da não utilização, refletem na não convergência de soluções ótimas. Em particular, no caso do método de uma distribuição delta-lognormal com probabilidade de falência, é indispensável a utilização da restrição de desigualdade dada por $\delta + e^{-\sigma^2} - 1 \leq 0$, uma vez que garante a positividade da raiz quadrada no problema.

Capítulo 4

Análise empírica

Neste capítulo é efetuada uma aplicação considerando os resultados apresentados anteriormente. Pretendemos estimar funções densidade neutras ao risco utilizando uma mistura de duas distribuições lognormais, uma distribuição delta-lognormal com probabilidade de falência, e por último, uma mistura de duas distribuições lognormais com probabilidade de falência. Será efetuada uma à análise comparativa dos métodos anteriores, nomeadamente na estimação da probabilidade de falência segundo os métodos de Câmara et al. [8] e Taylor et al. [21], utilizando preços de opções *call* e *put* observados no mercado. Adicionalmente, utilizamos o modelo de Merton DD para estimar uma probabilidade de *default*. Por fim, procedemos à análise do estudo apresentado por Bharath and Shumway [6] utilizando dados de CDS.

4.1 Análise em ambiente de simulação

Numa primeira abordagem são usados dados simulados como forma de garantir que os processos de estimação, conseguem efetivamente apresentar estimativas interpretáveis em relação às diferentes versões dos modelos considerados. Dada a não linearidade da função objetivo, onde não existe a garantia de convexidade da mesma, a utilização de restrições não lineares, e ainda os desafios estatísticos conhecidos, resultantes da estimação dos parâmetros associados a misturas, o ambiente de simulação permite num primeiro teste a fiabilidade dos procedimentos.

Num ambiente de simulação não existe incerteza relativamente aos modelos, permitindo ainda comparar as estimativas dos parâmetros com os verdadeiros valores. Este tipo de análise permite numa análise com dados reais, que as diferenças de estimativas possam ser atribuídas apenas aos diferentes tipos de modelos considerados e não aos métodos de estimação utilizados.

Nesta secção, apresentamos uma análise teórica dos métodos referidos anteriormente, considerando valores para os seguintes parâmetros: $S_t = 50$, $r = 0.02$ e $\tau = T - t = 0.50$. No entanto, para uma melhor aproximação dos valores observados no mercado, procedemos à perturbação dos preços teóricos através das fórmulas $C_i^* = C_i + 0.05 C_i \varepsilon_i$ e $P_j^* = P_j + 0.05 P_j \eta_j$, onde C_i^* e P_j^*, com $i = 1, ..., NC$ e $j = 1, ..., NP$, correspondem a preços de opções *call* e *put* perturbados, e C_i e P_j representam os preços teóricos gerados através dos métodos em estudo, por fim, $\varepsilon_i, \eta_j \sim N(0,1)$. Através da perturbação de preços, procuramos introduzir heterocedasticidade aos métodos em estudo.

A primeira simulação diz respeito a gerar preços teóricos de opções *call* e *put* perturbados com base nas equações (3.15) e (3.16) do modelo de Black-Scholes-Merton. Consideramos $\sigma = 0.20$ e para os preços de exercício, X, valores entre 20 e 80.

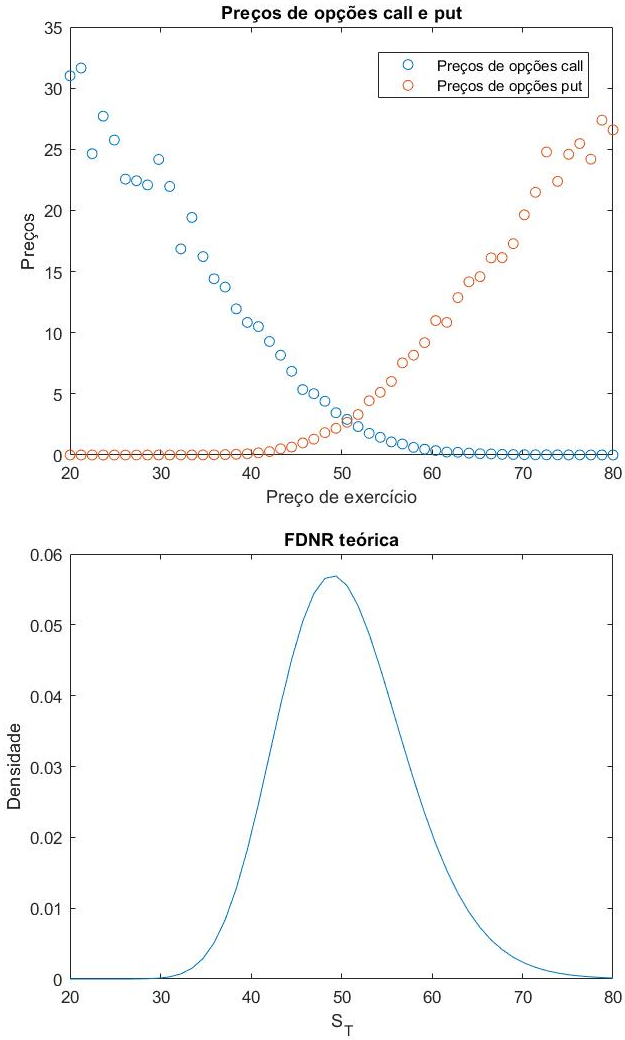

Fig. 4.1 Preços teóricos de opções *call* e *put* com perturbação de preços; Função densidade neutra ao risco (densidade lognormal) estimada a partir dos preços de opções *call* e *put* perturbados, gerados segundo o modelo de Black-Scholes-Merton

Na Figura 4.1, no gráfico de cima, estão representados os preços de opções *call* e *put* com perturbação, calculados segundo o modelo de Black-Scholes-Merton. Por último, no gráfico de baixo, está representada a estimativa da FDNR teórica. É fácil de verificar, pela análise do gráfico da FDNR, que existe uma assimetria positiva, visto que, a cauda direita é ligeiramente mais pesada do que a cauda esquerda.

Na segunda estimação pretende-se gerar os preços teóricos de opções *call* e *put* perturbados de acordo com uma mistura de duas distribuições lognormais, tendo em consideração as fórmulas (3.46)-(3.47). Para estimar os parâmetros σ_1, σ_2 e α, utilizamos o problema de otimização dado por (3.59). Deste modo, consideramos $\sigma_1 = 0.25$, $\sigma_2 = 0.75$ e $\alpha = 0.70$ a representar os parâmetros

teóricos da estimação e, considerando, para os preços de exercício, X, valores entre 10 e 90. Os valores estimados são os seguintes: $\hat{\sigma}_1 = 0.2435$, $\hat{\sigma}_2 = 0.8141$ e $\hat{\alpha} = 0.7313$. Constatamos que os resultados obtidos são boas aproximações dos parâmetros definidos inicialmente, tal como representado na Tabela 4.1.

Parâmetros	Valores Teóricos	Valores Estimados
σ_1	0.25	0.2435
σ_2	0.75	0.8141
α	0.70	0.7313

Tabela 4.1 Comparação entre os parâmetros teóricos e os estimados através de uma mistura de duas distribuições lognormais

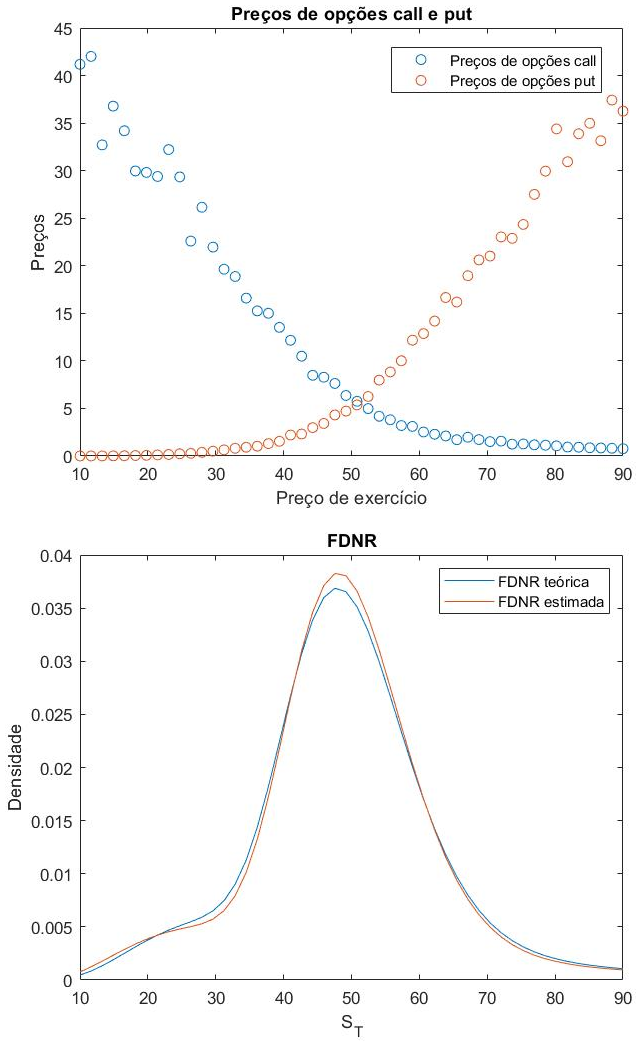

Fig. 4.2 Preços teóricos de opções *call* e *put* com perturbação de preços; Função densidade neutra ao risco estimada a partir de preços de opções *call* e *put* perturbados, gerados segundo uma mistura de duas distribuições lognormais

Na Figura 4.2 apresentamos, em cima, o gráfico dos preços de opções *call* e *put* gerados a partir de uma mistura de duas distribuições lognormais com perturbação de preços. Em contrapartida, no gráfico de baixo, temos apresentada a FDNR teórica e a FDNR estimada a partir de uma mistura de duas distribuições lognormais, considerando os preços de opções e os valores estimados pelo processo anterior. Pela análise do gráfico, é possível perceber que a estimação da FDNR apresenta um ajuste quase perfeito da FDNR teórica.

Na próxima estimação, pretendemos determinar um valor para a probabilidade de falência δ, de acordo com as fórmulas dos preços de opções *call* e *put*, (3.48), (3.49) e (3.50). Para proceder à estimação dos parâmetros σ e δ é necessário a resolução do problema de otimização (3.60). Posto isto, consideramos para os parâmetros teóricos os seguintes valores, $\sigma = 0.75$ e $\delta = 0.05$, e para os preços de exercício, X, valores entre 20 a 120. Assim, os valores estimados são os seguintes: $\hat{\sigma} = 0.7518$ e $\hat{\delta} = 0.0463$. Tal como representado na Tabela (4.2), constatamos que os valores estimados por uma distribuição delta-lognormal com probabilidade de falência são boas aproximações dos valores iniciais.

Parâmetros	Valores Teóricos	Valores Estimados
σ	0.75	0.7518
δ	0.05	0.0463

Tabela 4.2 Comparação entre os parâmetros teóricos e os estimados através de uma distribuição delta-lognormal com probabilidade de falência

A Figura 4.3, em cima, apresenta o gráfico dos preços teóricos de opções *call* e *put* perturbados, gerados a partir de uma distribuição delta-lognormal com probabilidade de falência. Em alternativa, no gráfico de baixo, temos representada a FDNR teórica e uma estimativa da FDNR obtida através dos parâmetros estimados.

A fim de terminar a fase de simulação de dados, inclui-se uma probabilidade de falência ao método de uma mistura de duas distribuições lognormais. Os preços de opções são calculados através das fórmulas (3.54) e (3.55) e para estimar os parâmetros σ_1, σ_2, α_1 e α_2 recorremos ao problema de otimização (3.61). Deste modo, aplicamos os seguintes valores iniciais $\sigma_1 = 0.25$, $\sigma_2 = 0.75$, $\alpha_1 = 0.70$ e $\alpha_2 = 0.25$ como parâmetros teóricos da estimação. Note-se que estes dados estão associados a uma mistura de duas distribuições lognormais com probabilidade de falência $1 - \alpha_1 - \alpha_2$ de valor 0.05. Os valores obtidos após a estimação são os seguintes: $\hat{\sigma}_1 = 0.2693$, $\hat{\sigma}_2 = 0.7217$, $\hat{\alpha}_1 = 0.7149$ e $\hat{\alpha}_2 = 0.0.2354$. Tal como representado na Tabela 4.3, os valores estimados são boas aproximações dos parâmetros iniciais.

Na Figura 4.4, em cima, apresentamos o gráfico dos preços de opções *call* e *put* perturbados, gerados a partir de uma mistura de duas distribuições lognormais com probabilidade de falência. Por outro lado, no gráfico de baixo, temos apresentado a FDNR teórica e a estimação da FDNR considerando os preços de opções e os valores estimados anteriormente. Pela análise do gráfico, é notória uma boa recuperação da FDNR. Segundo os valores estimados anteriormente e representados na Tabela 4.3 é possível retirar o valor estimado para a probabilidade de falência. Deste modo, visto que a probabilidade de falência é considerada por $1 - \alpha_1 - \alpha_2$, neste modelo foi estimada que apresente o valor de 0.0497, semelhante ao valor estabelecido.

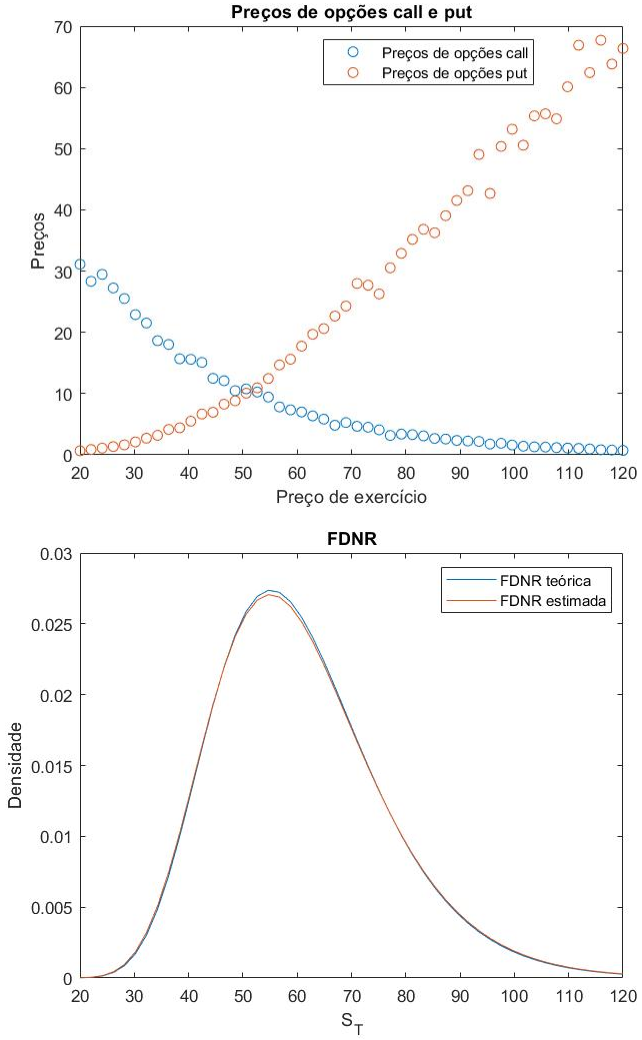

Fig. 4.3 Preços teóricos de opções *call* e *put* com perturbação de preços; Função densidade neutra ao risco estimada a partir de preços de opções *call* e *put* perturbados, gerados segundo uma distribuição delta-lognormal com probabilidade de falência

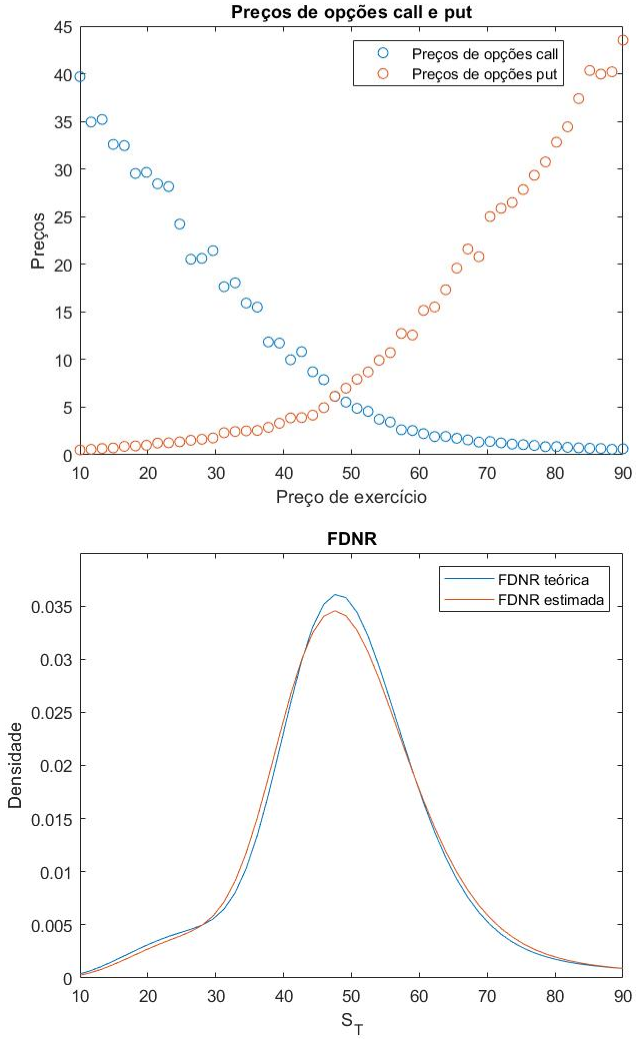

Fig. 4.4 Preços teóricos de opções *call* e *put* com perturbação de preços; Função densidade neutra ao risco estimada a partir de preços de opções *call* e *put* perturbados, gerados segundo uma mistura de duas distribuições com probabilidade de falência

Parâmetros	Valores Teóricos	Valores Estimados
σ_1	0.25	0.2693
σ_2	0.75	0.7217
α_1	0.70	0.7149
α_2	0.25	0.2354

Tabela 4.3 Comparação entre os parâmetros teóricos e os estimados através de uma mistura de duas distribuições lognormais com probabilidade de falência

4.2 Análise com dados de mercado

Nesta secção, apresentamos as estimativas da FDNR e da probabilidade de falência utilizando dados de duas empresas distintas, *Apple* e *GameStop*. A *Apple* é uma empresa norte-americana que projeta, fabrica e comercializa *smartphones*, computadores pessoais, *tablets* e outros acessórios digitais. De outro modo, a *GameStop* é uma empresa cujo principal objectivo é fornecer jogos, produtos de entretenimento e tecnologia, através dos seus serviços *online*.

Os dados da amostra são retirados do *site YahooFinance*, sendo necessário considerar valores referente ao preço de exercício, ao preço do ativo subjacente, ao volume de transações e ao preços de opções. De acordo com os dados relativos aos *Treasury Bills*, consideramos uma taxa de juro sem risco, r, de 0.5%.

Os preços de opções *call* e *put* para a empresa *Apple*, correspondem a observações de 22 a 25 de fevereiro de 2022, sendo definido uma maturidade de seis meses (17 de junho de 2022) e estão representados na Figura 4.5. Como é possível observar na Figura 4.5, o gráfico não apresenta grande dispersão relativamente aos preços de opções, o que garante uma baixa volatilidade. Pelo conhecimento histórico e financeiro da empresa, será de esperar um valor para a probabilidade de falência relativamente baixo.

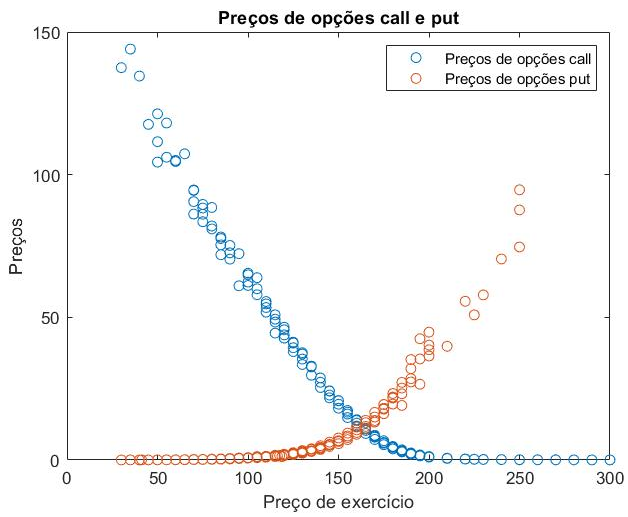

Fig. 4.5 Preços de opções *call* e *put* da empresa *Apple* entre os dias 22 a 25 de fevereiro com maturidade até 17 de junho de 2022

Por sua vez, os preços de opções *call* e *put* para a empresa *GameStop*, correspondem a observações de 25 a 28 de janeiro de 2022, com a mesma maturidade definida anteriormente, e estão representados na Figura 4.6. Na Figura 4.6 observa-se uma nuvem muito dispersa referente ao preços de opções *put*, o que poderá implicar uma elevada volatilidade. Visto que a sua configuração é mais instável que a anterior, será expectável que o valor correspondente à probabilidade de falência seja mais elevado.

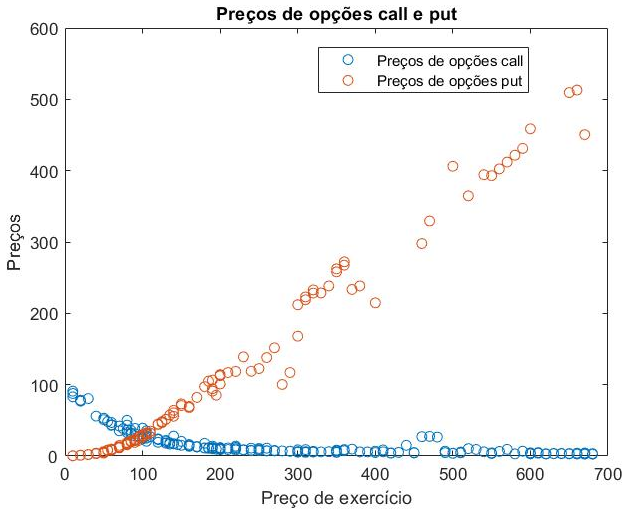

Fig. 4.6 Preços de opções *call* e *put* da empresa *GameStop* entre os dias 25 a 28 de janeiro com maturidade até 17 de junho de 2022

De seguida, realizou-se a estimação da probabilidade de falência para o caso das empresas *Apple* e *GameStop* segundo o método de Câmara et al. [8].

Primeiramente, realizou-se a estimação dos parâmetros σ e δ para o caso da empresa *Apple*. Na Figura 4.7 é possível observar a representação da FDNR para a empresa *Apple*. Como apresentado na Tabela 4.4, foi estimada uma volatilidade parcialmente baixa, tal como expectável, de cerca de 28% ao ano, e uma probabilidade de falência de aproximadamente 3%. Como esperado estas estimativas vão de encontro à realidade financeira da empresa, uma vez que estamos perante uma empresa que apresenta estabilidade financeira.

Parâmetros	Valores Estimados
σ	0.2816
δ	0.0321

Tabela 4.4 Estimação dos parâmetros para a empresa *Apple* através de uma distribuição delta-lognormal com probabilidade de falência

De seguida, procedeu-se à estimação dos parâmetros σ e δ para o caso da empresa *GameStop*. Na Figura 4.8 está representada a FDNR estimada para a empresa *GameStop*. O seu gráfico vai de encontro com as expetativas e com o comportamento observado nos dados. Tal como apresentado na Tabela 4.5, foi estimada uma volatilidade de cerca de 102% ao ano, e uma probabilida de falência de aproximadamente 17%. Como esperado estas estimativas vão de encontro à realidade, visto que estamos perante uma empresa com uma elevada instabilidade financeira.

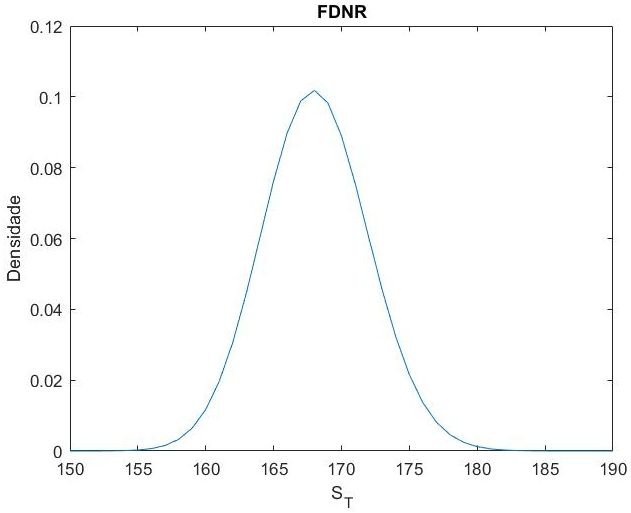

Fig. 4.7 Estimativa da função densidade neutra ao risco para a empresa *Apple*, obtida atavés de uma distribuição delta-lognormal com probabilidade de falência

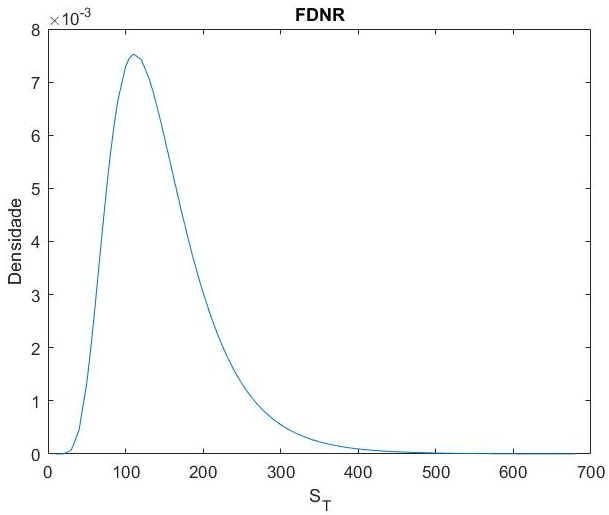

Fig. 4.8 Estimativa da função densidade neutra ao risco para a empresa *GameStop*, obtida atavés de uma distribuição delta-lognormal com probabilidade de falência

Parâmetros	Valores Estimados
σ	1.0242
δ	0.1689

Tabela 4.5 Estimação dos parâmetros para a empresa *GameStop* através de uma distribuição delta-lognormal com probabilidade de falência

Através das referidas estimações é possível comprovar que o modelo apresenta resultados esclarecedores com as realidades financeiras de ambas as empresas.

Numa última fase de estimação, pretendemos estimar a probabilidade de falência para as empresas *Apple* e *GameStop*, utilizando a implementação de uma mistura de duas distribuições lognormais com probabilidade de falência, segundo Taylor et al. [21]. Note-se que, nesta estimação, aplicamos a ideia dos autores na utilização de dados de opções *out-of-the-money*.

Procedeu-se à estimação dos parâmetros e da respetiva probabilidade de falência para o caso da empresa *Apple*. Tal como é possível observar na Tabela 4.6, foram estimadas volatilidades relativamente baixas, de cerca de 22% e 40% ao ano, e uma probabilidade de falência de cerca de 1%. Na Figura 4.9 está representada a FDNR estimada para a empresa *Apple*.

Parâmetros	Valores Estimados
σ_1	0.2224
σ_2	0.4018
α_1	0.9848
α_2	1.1288×10^{-12}

Tabela 4.6 Estimação dos parâmetros para a empresa *Apple* através de uma mistura de duas distribuições lognormais com probabilidade de falência

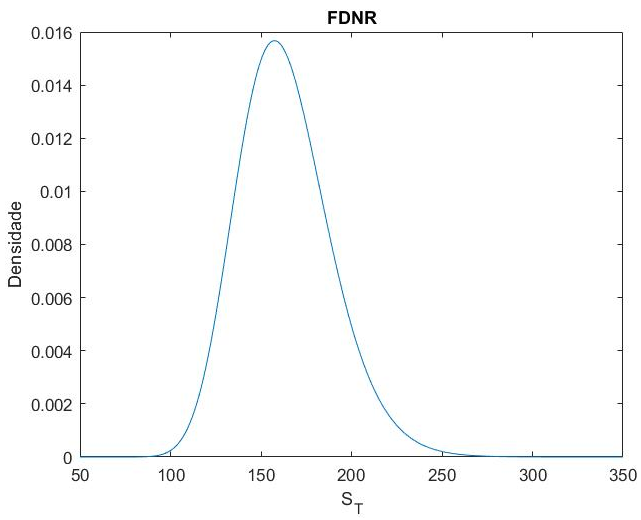

Fig. 4.9 Estimativa da função densidade neutra ao risco para a empresa *Apple*, obtida atavés de uma mistura de duas distribuições lognormais com probabilidade de falência

Relativamente, ao caso da estimação dos parâmetros para empresa *GameStop*, é possível observar que foram estimadas volatilidades relativamente elevadas comparativamente com as volatilidades da empresa anterior, de cerca de 61% e 188% ao ano, e uma probabilidade de falência de 1%. Na Figura 4.10 está representada a FDNR estimada para a empresa *GameStop*. Tal como é possível observar, temos presente uma FDNR com uma cauda esquerda relativamente pronunciada o que poderá refletir nas condições de crédito e de incerteza da empresa.

Parâmetros	Valores Estimados
σ_1	0.6070
σ_2	1.8763
α_1	0.6564
α_2	0.3324

Tabela 4.7 Estimação dos parâmetros para a empresa *GameStop* através de uma mistura de duas distribuições lognormais com probabilidade de falência

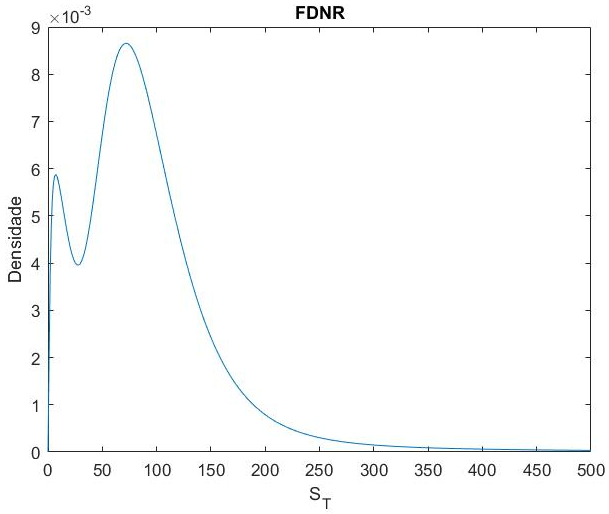

Fig. 4.10 Estimativa da função densidade neutra ao risco para a empresa *GameStop*, obtida atavés de uma mistura de duas distribuições lognormais com probabilidade de falência

Num ambiente de simulação não exite incerteza relativamente aos métodos, portanto os parâmetros resultantes das estimações são muito próximos dos valores teóricos, demonstrando a fiabilidade dos métodos.

Em contrapartida, num ambiente com dados de mercado a incerteza quanto aos métodos utilizados é bastante acentuda e recorrente, visto que com a utilização de dados de mercado os métodos estão mais suscetíveis à instabilidade do mercado.

Pode-se observar que, estimar pelo método segundo Câmara et al. [8] resulta em estimativas interpretáveis, uma vez que o método é mais simples e tem menos parâmetros a estimar. Por outro lado, estimar pelo método de Taylor et al. [21] observa-se que as estimativas apresentam resultados difíceis de serem interpretados, visto que estamos perante um método complexo e com mais parâmetros a

estimar comparativamente ao método anterior. Com esta modelização, verifica-se erros de estimação elevados o que poderá resultar da elevada incerteza ou baixa qualidade da base de dados utilizada.

4.3 Estimação da probabilidade de *default* usando o modelo de Merton DD

Procuramos implementar o modelo de Merton DD na estimação da probabilidade de *default* para cada uma das empresas *Apple* e *GameStop*. Para tal, resolvemos o sistema (3.31) de maneira a determinar o valor dos ativos V_t, e a sua respectiva volatilidade σ_V. De seguida, para determinar o cálculo da respectiva probabilidade de *default* utilizamos as fórmulas (3.32) e (3.33).

Tal como referido anteriormente, os parâmetros do modelo de Merton DD são o valor referente ao capital próprio de cada empresa E_t, a volatilidade associada ao capital próprio σ_E, o valor da dívida K, a taxa de juro sem risco r, e o tempo até à maturidade τ. O parâmetro σ_E é o desvio padrão anualizado dos retornos, estimados a partir dos preços diários das ações de cada empresa. Consideramos a taxa de juro sem risco r, como o valor de 0.5%, de acordo com os dados relativos aos *Treasury Bills*. O valor do capital próprio, E_t, é calculado como o produto do último preço diário da ação multiplicado pelo respetivo número total de ações. Para determinar o valor correspondente à dívida, K, para cada empresa, consideramos a soma da dívida de curto prazo e metade da dívida de longo prazo. Por último, consideramos uma maturidade, τ, igual a 1 ano, ou seja, janeiro de 2023.

Os dados para as empresas, *Apple* e *GameStop*, utilizados para obter os parâmetros, E, σ_E e K, são obtidos a partir da base de dados EIKON. Sendo que o valor das ações para cada uma das empresas corresponde ao período de tempo de 5 de janeiro de 2021 a 4 de janeiro de 2022, e por outro lado, o número total de ações, o valor da dívida atual e o valor da dívida a longo prazo são considerados para o ano de 2021.

Partindo dos dados da nossa amostra, podemos concluir que a probabilidade da empresa *Apple* entrar em *default* no próximo ano é de 0.0031%. Por outro lado, a probabilidade da empresa *GameStop* entrar em *default* é de 33.6%. Como apresentado na Tabela 4.8, comparando as duas probabilidades é notória uma grande diferença entre as duas empresas. No caso da *Apple*, estamos perante uma empresa com grande estabilidade financeira, o que poderá explicar a baixa probabilidade de *default*. Por outro lado, a *GameStop* é uma empresa com grandes oscilações no mercado financeiro, o que poderá justificar ua elevada probabilidade de *default*.

	Apple	GameStop
$P_{default}$	0.0031%	33.6%

Tabela 4.8 Probabilidade de *default* para as empresas, *Apple* e *GameStop*

4.4 Estimação da probabilidade de *default* usando dados dos *spreads* de CDS

Nesta secção, pretendemos estimar as probabilidades de *default*, utilizando dados dos *spreads* de contratos de CDS, para as empresas, *Apple* e *GameStop*.

Como referido na Secção 3.4, para determinar a probabilidade de uma empresa entrar em *default*, é necessário resolver a equação (3.58). Assim, para estimar o valor de P_{CDS}, consideramos os seguintes parâmetros: a taxa de recuperação ψ, a maturidade do contrato T, a taxa de juro sem risco r e s como um valor correspondente à taxa de *mid spread* para cada empresa, *Apple* e *GameStop*, durante cada ano até à maturidade.

Na nossa análise consideramos o valor médio entre os preços *bid - ask* (*mid spreads*) anuais, obtidos a partir da base de dados EIKON para o período de tempo de 20 de dezembro de 2017 a 20 de dezembro de 2022, e de 20 de dezembro de 2021 a 20 de dezembro de 2022. Escolhemos contratos de CDS com uma maturidade, T, de 1 ano e de 5 anos, uma taxa de recuperação, ψ, de 25%, tal como sugerido por Berndt et al. [5], e uma taxa de juro sem risco, r, de 0.5%. No entanto, para comparação e análise de resultados, consideramos uma taxa de recuperação de 40% (taxa considerada pela base de dados EIKON) e de 50% (considerada por Taylor et al. [21] e Longstaff et al. [15]). Os valores correspondentes à taxa de *mid spread* para cada empresa encontram-se referenciados nas Tabelas 4.9 e 4.10.

T (anos)	Apple (s_a)	GameStop (s_g)
1	0.0473%	0.455%
2	0.0860%	0.63%
3	0.1246%	0.805%
4	0.1482%	0.98%
5	0.2177%	1.155%

Tabela 4.9 Dados da taxa de *mid spread* para cada empresa, *Apple* e *GameStop*, para o período de 20 de dezembro de 2017 a 20 de dezembro de 2022 (CDS de 5 anos)

T (anos)	Apple (s_a)	GameStop (s_g)
1	0.0709%	0.32%

Tabela 4.10 Dados da taxa de *mid spread* para cada empresa, *Apple* e *GameStop*, para o período de 20 de dezembro de 2021 a 20 de dezembro de 2022 (CDS de 1 ano)

Na Figura 4.11 temos representado o gráfico referente à taxa de *mid spread* para as duas empresas em estudo durante cada ano até à respectiva maturidade do contrato de CDS, neste caso temos um contrato de CDS de 5 anos. Através da análise da Figura 4.11 e da Tabela 4.9, percebemos que os valores anuais da taxa de *mid spread* da empresa GameStop são elevados comparativamente com os valores da taxa de *mid spread* da empresa Apple. Esta diferença da taxa de *mid spread* das duas empresas, esta relacionada com o risco de crédito que cada uma representa num contrato de CDS, isto é, quanto maior for a taxa de *mid spread* maior será o risco de crédito associado à empresa em

questão. Portanto, comparando a taxa de *mid spread* das duas empresas, constatamos que a empresa *GameStop* apresenta valores superiores no que diz respeito aos valores da empresa *Apple*.

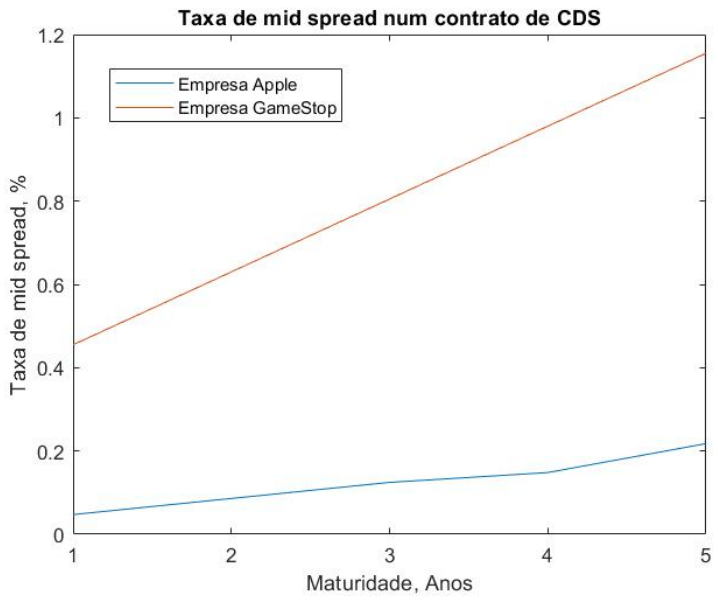

Fig. 4.11 Taxa de *mid spread* para cada empresa, *Apple* e *GameStop*, durante cada ano até à maturidade do contrato CDS de 5 anos

Taxa de recuperação (ψ)	P_{CDS}: Apple		P_{CDS}: GameStop	
	CDS 1 ano	CDS 5 anos	CDS 1 ano	CDS 5 anos
25%	0.0943%	0.1651%	0.4247%	1.0578%
40%	0.1178%	0.2063%	0.5306%	1.3189%
50%	0.1413%	0.2474%	0.6364%	1.5788%

Tabela 4.11 Comparação entre as probabilidades de *default* para empresas, *Apple* e *GameStop*, com contratos de 1 ano e 5 anos, para taxas de recuperação de 25%, 40% e 50%

De seguida, procedemos ao cálculo da probabilidade de *default*, P_{CDS}, para cada uma das empresas em estudo, e concluímos que empresa com uma maior probabilidade de *default* é a empresa *GameStop*. De facto, de acordo com os dados da Tabela 4.11, é possível perceber uma diferença de valores entre as duas empresas. Constatamos que para contratos de 1 ano, as probabilidades de *default* de ambas as empresas, são da mesma ordem de grandeza das probabilidades apresentadas na base de dados EIKON (cerca de 0.11% para a empresa *Apple*, e cerca de 0.50% para o caso da empresa *GameStop*). Relativamente ao contrato de 5 anos, o aumento da probabilidade de *default* poderá estar relacionado com um período de tempo instável e de alguma crise financeira para ambas as empresas, em particular para a empresa *GameStop* (período de 2020 a 2021). No que diz respeito à taxa de recuperação, não é muito relevante o valor considerado, visto que as probabilidades de *default* referentes a cada empresa têm valores muito próximos.

Capítulo 5

Conclusão

Os preços das opções financeiras podem revelar informações essenciais sobre as expetativas futuras dos investidores relativamente à evolução do preço do ativo subjacente. Através dos preços de opções, é também possível analisar o risco financeiro de um investimento. A estimação de uma função densidade neutra ao risco que estime os possíveis valores futuros do preço do ativo subjacente poderá fornecer uma informação relevante.

Neste trabalho, foram utilizados dois métodos de estimação de uma função densidade neutra ao risco a partir dos preços de opções *call* e *put*. Através de uma distribuição delta-lognormal com probabilidade falência (Câmara et al. [8]), e de uma mistura de duas distribuições lognormais com probabilidade de falência (Taylor et al. [21]), pretende-se estimar e comparar o parâmetro associado à probabilidade de falência. Para aprofundar o nosso estudo sobre as informações relativas ao mercado finaceiro, procurámos implementar a análise do risco financeiro através do modelo de Merton DD e dos dados relacionados com contratos de CDS.

Numa primeira fase realizou-se uma análise em ambiente de simulação, com o objetivo de garantir que os modelos são capazes de estimar de forma robusta os parâmetros teóricos, nomeadamente o parâmetro relativo à probabilidade de falência. Dado que, não existe incerteza relativamente aos modelos, é possível comparar as estimativas dos parâmetros com os valores reais usados na simulação, tendo se obtido estimativas credíveis.

Na análise com dados de mercado, foram considerados preços de opções *call* e *put* das empresas *Apple* e *GameStop*, para a mesma maturidade. Estas empresas foram escolhidas por apresentarem uma estabilidade financeira distinta, o que permite avaliar os métodos utilizados. Neste contexto, os métodos apresentaram comportamentos diferentes. O método de uma distribuição delta-lognormal com probabilidade de falência revela resultados interpretáveis, enquanto o método de uma mistura de duas distribuições lognormais com probabilidade de falência apresenta uma elevada incerteza nas estimações.

De seguida, foi estudada a aplicabilidade do modelo de Merton DD na estimação de uma probabilidade de *default*, para ambas as empresas. É possível de verificar que os resultados da probabilidade de *default* relativamente às duas abordagens para as duas empresas, em particular para a empresa *GameStop*, apresentam uma diferença bastante perceptível. Contudo, poderá dever-se ao período de tempo escolhido na análise, visto que, em particular, no fim de 2020 e início de 2021 a empresa *GameStop* registou uma grande instabilidade. No entanto, a estimação da probabilidade de *default*

através do modelo de Merton DD e de contratos de CDS poderá ser muito sensível aos dados obtidos no mercado, uma vez que com dados mais pormenorizados podemos ter estimativas diferentes.

Numa análise futura, seria interessante aplicar estes métodos a uma conjunto diversificado de empresas. Na aplicação do modelo de Merton DD, seria interessante comparar os nossos resultados com outras abordagens de outros autores.

Bibliografia

[1] Agarwal, V. and Taffler, R. (2008). Comparing the performance of market-based and accounting-based bankruptcy prediction models. *Journal of Banking and Finance*, 32:1541–1551.

[2] Aitchison, J. (1955). On the distribution of a positive random variable having a discrete probability mass at the origin. *American Statistical Association Journal*, 50:901–908.

[3] Anson, M. J. P., Fabozzi, F. J., Choudhry, M., and Chen, R. R. (2004). *Credit Derivatives: Instruments, Applications, and Pricing*. John Wiley and Sons, Inc.

[4] Bahra, B. (1997). Implied risk-neutral probability density functions from option prices: theory and application. *Bank of England Working Paper*.

[5] Berndt, A., Douglas, R., Duffie, D., Ferguson, M., and Schranz, D. (2005). Measuring default risk premia from default swap rates and edfs. *Working Paper, Stanford University*, (173):1–56.

[6] Bharath, S. T. and Shumway, T. (2008). Forecasting default with the merton distance to default model. *The Review of Financial Studies*, 21(3):1339–1369.

[7] Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3):637–654.

[8] Camara, A., Popova, I., and Simkins, B. (2012). A comparative study of the probability of default for global financial firms. *Journal of Banking and Finance*, 36:717–732.

[9] Cox, J. C. and Ross, S. A. (1976). The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, 3:145–166.

[10] Etheridge, A. (2002). *A Course in Financial Calculus*. Cambridge University Press.

[11] Hull, J. C. (2002). *Options, Futures and Other Derivates*. Prentice Hall.

[12] Hull, J. C., Nelken, I., and White, A. D. (2005). Merton's model, credit risk and volatility skews. *Journal of Credit Risk*, 1(1):3–27.

[13] Jondeau, E., Poon, S.-H., and Rockinger, M. (2007). *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions*. Springer-Verlag London.

[14] Jondeau, E. and Rockinger, M. (2000). Reading the smile: the message conveyed by methods which infer risk neutral densities. *Journal of International Money and Finance*, 19:885–915.

[15] Longstaff, F. A., Mithal, S., and Neis., E. (2005). Corporate yield spreads: Default risk or liquidity? new evidence from the credit-default swap market. *Journal of Finance*, 60:2213–2253.

[16] Melick, W. R. and Thomas, C. P. (1997). Recovering an asset's implied pdf from options prices: An application to crude oil during the gulf crisis. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32(1):91–115.

[17] Merton, R. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics*, 4(1):141–183.

[18] Merton, R. (1974). On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, 29(1):449–470.

[19] Ritchey, R. J. (1990). Call option valuation for discrete normal mixtures. *Journal of Financial Research*, 13:285–296.

[20] Söderlind, P. and Svensson, L. (1997). New techniques to extract market expectations from financial instruments. *Journal of Monetary Economics*, 40:383–429.

[21] Taylor, S. J., Tzeng, C.-F., and Widdicks, M. (2014). Bankruptcy probabilities inferred from option prices.

[22] Vassalou, M. and Xing, Y. (2004). Default risk in equity returns. *The Journal of Finance*, 59(2):831–868.