



UNIVERSIDADE DE  
COIMBRA

FACULDADE  
DE CIÊNCIAS  
E TECNOLOGIA

## **Previsão da fratura dúctil com recurso a modelos de dano desacoplados**

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia  
Mecânica na Especialidade de Produção e Projeto

## **Prediction of ductile fracture using uncoupled damage models**

**Autor**

**Carlos Manuel Jorge Oliveira Azenha Andrade**

**Orientador**

**Professora Doutora Marta Cristina Cardoso de Oliveira**

**Júri**

<b>Presidente</b>	Professor Doutor Pedro André Dias Prates
	Professor Auxiliar Convidado da Universidade de Coimbra
<b>Orientador</b>	Professora Doutora Marta Cristina Cardoso de Oliveira
	Professora Auxiliar da Universidade de Coimbra
<b>Vogal</b>	Professor Doutor José Luís de Carvalho Martins Alves
	Professor Associado da Universidade do Minho

**Coimbra, julho, 2018**



O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano.

Isaac Newton

Aos meus pais.



## **Agradecimentos**

O trabalho desenvolvido no âmbito desta dissertação só foi possível graças à colaboração e apoio de algumas pessoas, às quais não posso deixar de prestar o meu reconhecimento.

À Professora Doutora Marta Cristina Cardoso de Oliveira, pela disponibilidade demonstrada, pela preciosa ajuda e por todo o incentivo dado na procura de melhorar continuamente o trabalho desenvolvido.

Ao Professor Doutor Diogo Mariano Simões Neto, pelas reflexões críticas e pelo auxílio prestado durante a realização deste trabalho.

A toda a minha família, em especial aos meus pais, porque sem a sua ajuda e compreensão a realização deste trabalho não teria sido possível.

A todos os meus amigos, pelo seu companheirismo e por saber que posso contar sempre com a sua ajuda.

A todas as pessoas com quem convivo e que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Esta dissertação foi realizada no âmbito do projeto “Watch4ming: Monitorização da estampagem de aços de alta resistência” com referência P2020-PTDC/EMS-TEC/6400/2014 (POCI-01-0145-FEDER-016876), cofinanciado pela Fundação Portuguesa para a Ciência e Tecnologia (FCT) e pelo Fundo Europeu de Desenvolvimento Regional (FEDER), através do Programa Operacional Competitividade e Internacionalização (COMPETE 2020) e do projeto “MATIS: Materiais e Tecnologias Industriais Sustentáveis” (CENTRO-01-0145-FEDER-000014).



## Resumo

No panorama tecnológico atual os materiais de elevada resistência têm ganho um lugar de destaque, sendo cada vez mais empregues a nível industrial. Contudo, esta vantagem em relação a outros materiais é conseguida à custa da redução de ductilidade. Neste contexto, surgem desafios acrescidos em termos da conceção dos produtos, na medida em que existem limitações no processo de conformação plástica do material. Desta forma torna-se imprescindível que, em processos como a estampagem de chapas metálicas, se consiga prever a fratura dúctil do material, para que seja possível desenvolver processos de fabrico que minimizem a ocorrência deste tipo de defeitos. Consequentemente, é essencial ter noção do dano acumulado pelo material durante o processo de conformação, uma vez que este determina as propriedades mecânicas em fases de conformação subsequentes e mesmo em serviço. Assim, na simulação numérica de processos de conformação de materiais metálicos com o Método dos Elementos Finitos recorre-se a modelos de dano para efetuar a previsão da fratura dúctil. Esta ocorre quando a variável utilizada para quantificar a acumulação do dano atinge um valor crítico.

O objetivo desta dissertação é melhorar o conhecimento acerca dos modelos de dano desacoplados, através de uma análise numérica com o Método dos Elementos Finitos, recorrendo ao *solver* DD3IMP. Para tal, foram estudados dois modelos de dano distintos: o modelo proposto por Bao (2003) e o modelo proposto por Xue (2007). Numa primeira fase, a implementação destes modelos no DD3IMP foi validada com base em resultados conhecidos, ou seja, reproduziram-se resultados apresentados na literatura. Para o modelo proposto por Bao (2003) foi analisada uma liga Al-Si, obtida por fundição. Globalmente, os resultados obtidos com o DD3IMP mostraram uma excelente correlação com os resultados numéricos apresentados na literatura, exceto para o deslocamento à fratura, que foi sempre sobrestimado quando a força é subestimada. Para o modelo proposto por Xue (2007) foi analisada uma liga de alumínio 2024-T351. Também neste caso observou-se uma boa correlação com os valores experimentais disponíveis na literatura. Numa segunda fase, efetuou-se a calibração dos parâmetros dos dois modelos de dano para um aço DP780, com base em resultados numérico-experimentais de Roth e Mohr (2016). O procedimento de

calibração proposto recorre necessariamente a uma abordagem numérico-experimental para caracterizar o estado de tensão que conduz à fratura dúctil, em cada ensaio. Constatou-se que a discretização espacial adotada nos modelos numéricos dos ensaios mecânicos selecionados para a calibração pode condicionar este processo, uma vez que influencia os valores previstos para as grandezas que caracterizam o estado de tensão (triaxialidade, pressão hidrostática e ângulo de Lode). Por outro lado, estas grandezas não apresentam valores constantes, mesmo para ensaios que foram construídos com esse objetivo. Nestas circunstâncias será necessário recorrer a metodologias de análise inversa para calibração dos parâmetros, caso contrário os valores de deformação plástica equivalente na fratura previstos numericamente apresentam discrepâncias consideráveis em relação às curvas ou superfícies de fratura calibradas para os modelos de dano.

**Palavras-chave:** Fratura dúctil, Método dos Elementos Finitos, Dano, Modelos desacoplados, Deformação plástica equivalente na fratura, DD3IMP.



## Abstract

In the current technological panorama, high strength materials have gained a prominent place, being increasingly used at the industrial level. However, their advantages over other materials are achieved at the expense of a reduction in ductility. As a consequence, greater challenges arise in terms of product design, as there are limitations in the material's forming process. It is thus imperative to be able to predict the material's ductile fracture in the design of processes such as the deep-drawing of metal sheets, so that an efficient manufacturing process can be developed in order to avoid this type of defects. To achieve this, it is essential to be aware of the damage accumulated by the material during the forming process, since it determines its mechanical properties in subsequent forming phases and even the in-service behavior. In this context, in the numerical simulation of sheet metal forming processes using the Finite Element Method, damage models are used to predict the material's ductile fracture. This occurs when the variable used to quantify the damage accumulation reaches a critical value.

The objective of this work is to improve the knowledge concerning uncoupled damage models, when performing the numerical analysis with the Finite Element Method, using the DD3IMP solver. Two different damage models were studied: one suggested by Bao (2003) and the other by Xue (2007). In a first phase, the implementation of these models in the DD3IMP solver was validated based on results presented in the literature. For the model suggested by Bao (2003), a casted Al-Si alloy was analyzed. Overall, the results obtained using DD3IMP showed an excellent correlation with the numerical results presented in the literature, except for the fracture displacement, which was always overestimated when the force is underestimated. For the model suggested by Xue (2007), the 2024-T351 aluminum alloy was analyzed. The results showed a good correlation with the experimental ones available in the literature. In a second phase, the parameters of the two damage models were calibrated for a DP780 steel, based on the results of a hybrid experimental-numerical approach conducted by Roth and Mohr (2016). This calibration procedure requires a numerical-experimental approach to characterize the stress state that leads to the material's ductile fracture in each test. It was observed that the spatial

discretization adopted in the numerical models of the mechanical tests selected for the calibration can strongly affect this process, since it influences the predicted values of the quantities that characterize the stress state (triaxiality, hydrostatic pressure and Lode angle). Moreover, these quantities sometimes present non-constant evolutions, even for tests that are designed with this objective in mind. Under these circumstances, it is necessary to use methodologies based on inverse analysis to calibrate the parameters, otherwise the numerically predicted values of equivalent plastic strain at fracture can present significant discrepancies when compared with the curves or fracture surfaces calibrated for the damage models.

**Keywords** Ductile fracture, Finite Element Method, Damage, Uncoupled models, Fracture strain, DD3IMP.

## Índice

Índice de Figuras .....	ix
Índice de Tabelas .....	xiii
Lista de símbolos e siglas .....	xv
Operadores.....	xv
Lista de símbolos.....	xv
Siglas .....	xvii
1. Introdução.....	1
1.1. Enquadramento .....	1
1.2. Método dos Elementos Finitos .....	2
1.3. Objetivos.....	4
1.4. Estrutura da dissertação .....	4
2. Modelação do fenómeno de dano .....	7
2.1. Conceitos introdutórios.....	7
2.2. Caracterização do estado de tensão .....	8
2.3. Famílias de modelos de dano .....	15
2.3.1. Modelos de dano micromecânicos .....	15
2.3.2. Modelos de dano fenomenológicos .....	17
3. Modelos de dano em análise.....	21
3.1. Modelo de dano de Bao-Wierzbicki .....	21
3.1.1. Formulação matemática.....	21
3.1.2. Características do modelo.....	23
3.1.3. Acumulação do dano .....	24
3.1. Modelo de dano de Xue-Wierzbicki.....	24
3.1.1. Formulação matemática.....	24
3.1.2. Características do modelo.....	27
3.1.3. Acumulação do dano .....	28
4. Validação dos modelos de dano .....	31
4.1. Modelo de dano de Bao-Wierzbicki .....	32
4.1.1. Material: Al-Si.....	32
4.1.2. Modelos numéricos .....	35
4.1.3. Resultados e discussão .....	39
4.2. Modelo de dano de Xue-Wierzbicki.....	47
4.2.1. Material: liga de alumínio 2024-T351 .....	47
4.2.2. Modelos numéricos .....	49
4.2.3. Resultados e discussão .....	50
5. Calibração de parâmetros dos modelos de dano.....	55
5.1. Resultados numérico-experimentais da literatura.....	55
5.2. Material.....	56
5.3. Modelos numéricos.....	57

5.4.	Modelo de dano de Bao-Wierzbicki.....	61
5.4.1.	Procedimento de calibração .....	61
5.4.2.	Resultados e discussão .....	62
5.5.	Modelo de dano de Xue-Wierzbicki.....	65
5.5.1.	Procedimento de calibração .....	65
5.5.2.	Resultados e discussão .....	67
5.6.	Influência da discretização espacial .....	70
5.7.	Comparação dos modelos .....	74
6.	Conclusões .....	77
	Referências Bibliográficas .....	79
	Apêndice: Provete cilíndrico sem entalhe .....	83

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1. Representação de um estado de tensão no espaço das tensões principais (Bai 2008).....	11
Figura 2.2. Projeção do vetor de tensão $\overrightarrow{OP}$ no plano desviador (adaptado de Xue 2007). 12	
Figura 2.3. Valores de referência de triaxialidade e de parâmetro de Lode, no início do ensaio, para diferentes tipos de solicitação (Bai 2008). ....	15
Figura 3.1. Representação esquemática da evolução da deformação plástica equivalente na fratura com a triaxialidade de acordo com o modelo de Bao-Wierzbicki (Mae et al. 2007).....	23
Figura 3.2. Evolução da deformação plástica equivalente na fratura com a triaxialidade de acordo com o modelo de Bao-Wierzbicki segundo resultados apresentados por Mae et al. (2007). ....	24
Figura 3.3. Superfície de fratura no espaço da deformação plástica e da pressão hidrostática (adaptado de Xue e Wierzbicki 2008). ....	26
Figura 3.4. Representação, no plano das deformações principais, da função $\mu_\theta$ para diferentes valores de $\gamma$ e $k = 1$ (Xue e Wierzbicki 2008). ....	27
Figura 3.5. Influência do parâmetro $k$ na evolução da função $\mu_\theta$ com o ângulo de Lode para $\gamma = 0,4$ . ....	27
Figura 3.6. Superfície de fratura prevista para a liga 2024-T351 pelo modelo de Xue-Wierzbicki (Xue e Wierzbicki 2008). ....	28
Figura 3.7. Influência da variação do parâmetro $\beta$ nas curvas tensão-deformação da matriz para a liga de alumínio 2024-T351 (Xue e Wierzbicki 2008).....	29
Figura 4.1. Ajuste da lei de encruamento ao conjunto de pontos obtidos em Mae et al. (2007). ....	33
Figura 4.2. Dimensões dos modelos dos provetes cilíndricos (mm): a) Provete sem entalhe; b) Provete com entalhe de $R = 1,5$ mm; c) Provete com entalhe de $R = 4,5$ mm. 36	
Figura 4.3. Condições de fronteira aplicadas aos modelos dos provetes cilíndricos.....	36
Figura 4.4. Malha de elementos finitos dos modelos dos provetes cilíndricos: a) Provete sem entalhe (10800 elementos); b) Provete com entalhe de $R = 1,5$ mm (12600 elementos); c) Provete com entalhe de $R = 4,5$ mm (12600 elementos).....	37
Figura 4.5. Dimensões do modelo do provete <i>butterfly</i> (mm) (Mae et al. 2007). ....	37
Figura 4.6. Malha de elementos finitos do modelo do provete <i>butterfly</i> (49020 elementos). ....	38
Figura 4.7. Ângulo de inclinação do modelo do provete <i>butterfly</i> em relação à direção de carga da máquina de tração. ....	38

Figura 4.8. Localização da fratura dúctil para as simulações realizadas com os modelos dos provetes cilíndricos: a) Provete sem entalhe; b) Provete com entalhe de $R = 1,5$ mm; c) Provete com entalhe de $R = 4,5$ mm.....	40
Figura 4.9. Localização da fratura dúctil para as simulações realizadas com o modelo do provete <i>butterfly</i> : a) $\alpha = -10^\circ$ ; b) $\alpha = -5^\circ$ ; c) $\alpha = 0^\circ$ ; d) $\alpha = 10^\circ$ ; e) $\alpha = 20^\circ$ . ....	41
Figura 4.10. Curvas de evolução da força com o deslocamento imposto para os modelos dos provetes cilíndricos: a) Provete sem entalhe; b) Provete com entalhe de $R = 1,5$ mm; c) Provete com entalhe de $R = 4,5$ mm.....	43
Figura 4.11. Curvas de evolução da força com o deslocamento segundo $Ox'$ para o modelo do provete <i>butterfly</i> : a) $\alpha = -10^\circ$ ; b) $\alpha = -5^\circ$ ; c) $\alpha = 0^\circ$ ; d) $\alpha = 10^\circ$ ; e) $\alpha = 20^\circ$ . ....	44
Figura 4.12. Curvas de evolução da triaxialidade com a deformação plástica equivalente para os modelos dos provetes cilíndricos.....	45
Figura 4.13. Curvas de evolução da triaxialidade com a deformação plástica equivalente para o modelo do provete <i>butterfly</i> . ....	45
Figura 4.14. Comparação dos valores de deformação plástica equivalente e triaxialidade no instante de ocorrência de fratura com a curva do modelo de dano de Bao-Wierzbicki.....	46
Figura 4.15. Ajuste da lei de encruamento da liga de alumínio 2024-T351 ao conjunto de pontos obtidos em Xue e Wierzbicki (2008) para o caso em que $\beta = \infty$ .....	48
Figura 4.16. Ensaio de flexão em três pontos de uma barra (Xue e Wierzbicki 2008).....	49
Figura 4.17. Malha de elementos finitos utilizada nos modelos numéricos da barra: a) $L = 10$ mm (8700 elementos); b) $L = 30$ mm (13950 elementos); c) $L = 60$ mm (18600 elementos). ....	50
Figura 4.18. Distribuição do dano acumulado pelo material em cada simulação numérica realizada: a) $L = 10$ mm; b) $L = 30$ mm; c) $L = 60$ mm; d) $L = 60$ mm (deformação plana). ....	51
Figura 4.19. Curvas de evolução da força segundo $Oy$ com o deslocamento imposto para cada uma das simulações realizadas. ....	52
Figura 4.20. Comparação dos pontos correspondentes aos instantes de ocorrência de fratura previstos nas simulações numéricas com a superfície de fratura do modelo de dano de Xue-Wierzbicki. ....	53
Figura 4.21. Evolução da pressão hidrostática e do ângulo de Lode em função da deformação plástica equivalente das simulações realizadas com $L = 60$ mm e com o modelo de dano de Xue-Wierzbicki.....	54
Figura 5.1. Modelo numérico da chapa e das ferramentas no ensaio de expansão equi-biaxial.....	58
Figura 5.2. Malha de elementos finitos utilizada no modelo numérico da chapa no ensaio de expansão equi-biaxial (29000 elementos). ....	58
Figura 5.3. Representação esquemática do ensaio de flexão em V (adaptado de Roth e Mohr (2016)).....	59

---

Figura 5.4. Malha de elementos finitos utilizada na discretização da chapa no ensaio de flexão em V (20000 elementos). .....	59
Figura 5.5. Malha de elementos finitos utilizada na discretização da chapa com um furo central (17200 elementos). .....	59
Figura 5.6. Geometria do provete utilizado no ensaio de corte: (a) modelo completo; (b) detalhe com as dimensões utilizadas para definir os entalhes interiores do provete de corte (Roth e Mohr 2016). .....	60
Figura 5.7. Malha de elementos finitos utilizada na discretização do modelo do provete de corte (15776 elementos). .....	61
Figura 5.8. Curva do modelo de dano de Bao-Wierzbicki calibrada para o aço DP780. ....	62
Figura 5.9. Regiões dos modelos dos provetes onde foi prevista a acumulação de dano máxima nas simulações realizadas com o modelo de dano de Bao-Wierzbicki para o aço DP780. ....	63
Figura 5.10. Comparação dos pontos correspondentes ao instante de ocorrência de fratura para cada simulação com a curva do modelo de dano de Bao-Wierzbicki calibrada para o aço DP780. ....	64
Figura 5.11. Evolução da triaxialidade com a deformação plástica equivalente para todas as simulações numéricas realizadas com o modelo de dano de Bao-Wierzbicki para o aço DP780. ....	65
Figura 5.12. Superfície do modelo de dano de Xue-Wierzbicki calibrada para o aço DP780. ....	66
Figura 5.13. Regiões dos modelos dos provetes onde foi prevista a acumulação de dano máxima nas simulações realizadas com o modelo de dano de Xue-Wierzbicki para o aço DP780. ....	68
Figura 5.14. Comparação dos pontos correspondentes ao instante de ocorrência de fratura para cada simulação com a superfície de fratura do modelo de dano de Xue-Wierzbicki calibrada para o aço DP780. ....	69
Figura 5.15. Evolução da pressão hidrostática com a deformação plástica equivalente para todas as simulações numéricas realizadas com o modelo de dano de Xue-Wierzbicki para o aço DP780. ....	69
Figura 5.16. Evolução do ângulo de Lode com a deformação plástica equivalente para todas as simulações numéricas realizadas com o modelo de dano de Xue-Wierzbicki para o aço DP780. ....	70
Figura 5.17. Evolução da triaxialidade com a deformação plástica equivalente da simulação numérica do ensaio de corte com as malhas inicial e refinada e o modelo de dano de Bao-Wierzbicki para o aço DP780. ....	71
Figura 5.18. Evolução da pressão hidrostática com a deformação plástica equivalente para as simulações numéricas dos ensaios de tração da chapa com um furo central e de corte com as malhas inicial e refinada e o modelo de dano de Xue-Wierzbicki para o aço DP780. ....	72
Figura 5.19. Evolução do ângulo de Lode com a deformação plástica equivalente para as simulações numéricas dos ensaios de tração da chapa com um furo central e de	

---

corte com as malhas inicial e refinada e o modelo de dano de Xue-Wierzbicki para o aço DP780. ....	72
Figura 5.20. Distribuição no instante para o qual é prevista a fratura dúctil no ensaio de corte: a) da componente $\sigma_{11}$ do tensor das tensões de Cauchy; b) da variável de dano. Resultados obtidos para cada ponto de Gauss do modelo.....	74
Figura A.1. Localização da fratura dúctil para a simulação realizada com o modelo do provete cilíndrico sem entalhe para a liga Al-Si obtida por fundição com o modelo de dano de Bao-Wierzbicki: a) sem amarra; b) com amarra.....	83
Figura A.2. Comparação das curvas de evolução da força com o deslocamento para as simulações realizadas com o modelo do provete cilíndrico sem entalhe sem amarra e com amarra para a liga Al-Si obtida por fundição com o modelo de dano de Bao-Wierzbicki. ....	84



## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 4.1. Composição química da liga Al-Si em estudo (wt%) (Mae et al. 2007). ....	32
Tabela 4.2. Propriedades elásticas da liga Al-Si em estudo (Mae et al. 2007).....	33
Tabela 4.3. Parâmetros utilizados para descrever a lei de encruamento da liga Al-Si obtida por fundição.....	34
Tabela 4.4. Parâmetros calibrados para a equação que descreve o modelo de dano de Bao-Wierzbicki para a liga Al-Si obtida por fundição (Mae et al. 2007). ....	35
Tabela 4.5. Deslocamentos impostos nas simulações numéricas realizadas com os modelos dos provetes cilíndricos. ....	36
Tabela 4.6. Deslocamentos impostos nas simulações numéricas realizadas com o modelo do provete <i>butterfly</i> . ....	39
Tabela 4.7. Propriedades elásticas da liga de alumínio 2024-T351 (Huang e Xue 2009)...	47
Tabela 4.8. Parâmetros utilizados para descrever a lei de encruamento da liga de alumínio 2024-T351. ....	48
Tabela 4.9. Parâmetros calibrados para o modelo de dano de Xue-Wierzbicki para a liga de alumínio 2024-T351 (Xue e Wierzbicki 2008). ....	49
Tabela 4.10. Deslocamento imposto para o rolo de 50 mm de diâmetro em cada simulação (valor absoluto).....	50
Tabela 4.11. Erro relativo entre os valores de deformação plástica equivalente na fratura previstos nas simulações numéricas do ensaio de flexão em três pontos de uma barra e os respectivos valores sobre a superfície de fratura do modelo de dano de Xue-Wierzbicki. ....	53
Tabela 5.1. Deformação plástica equivalente na fratura, triaxialidade e parâmetro de Lode no instante de ocorrência de fratura em cada um dos ensaios (Roth e Mohr 2016). ....	56
Tabela 5.2. Propriedades elásticas e densidade do aço DP780 (Roth e Mohr 2016). ....	56
Tabela 5.3. Parâmetros utilizados para descrever a lei de encruamento do aço DP780 (adaptado de Roth e Mohr (2016)). ....	57
Tabela 5.4. Dimensões dos entalhes interiores do provete de corte [mm] (Roth e Mohr 2016).....	60
Tabela 5.5. Parâmetros do modelo de dano de Bao-Wierzbicki calibrados para o aço DP780.....	62
Tabela 5.6. Tensão equivalente, pressão hidrostática e ângulo de Lode calculados no instante de ocorrência de fratura em cada um dos ensaios realizados com o aço DP780.....	66

Tabela 5.7. Parâmetros do modelo de dano de Xue-Wierzbicki calibrados para o aço DP780.....	66
Tabela 5.8. Erro relativo entre os valores de deformação plástica equivalente na fratura previstos nas simulações numéricas e os respetivos valores sobre a superfície de fratura do modelo de dano de Xue-Wierzbicki calibrada para o aço DP780.....	69
Tabela 5.9. Erro relativo entre os valores de deformação plástica equivalente na fratura previstos nas simulações numéricas realizadas com uma malha refinada e os respetivos valores sobre a superfície de fratura do modelo de dano de Xue-Wierzbicki calibrada para o aço DP780.....	72

## LISTA DE SÍMBOLOS E SIGLAS

### Operadores

$d(*)$  – Incremento de uma variável

$\partial(*)$  – Derivada parcial

### Lista de símbolos

$\alpha$  – Ângulo de inclinação do provete *butterfly* em relação à direção de carga

$\alpha_p$  – Fator de ponderação, variável entre 0 e 1

$\beta$  – Parâmetro que descreve o amaciamento do material no modelo de dano de Xue-Wierzbicki

$\gamma$  – Parâmetro associado ao material no modelo de dano de Xue-Wierzbicki

$\varepsilon_0$  – Parâmetro da lei de encruamento de Swift

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – Deformações principais

$\bar{\varepsilon}_c$  – Valor crítico de deformação plástica equivalente para o qual ocorre a fratura (dependente da história de carregamento do material)

$\bar{\varepsilon}_f$  – Deformação plástica equivalente na fratura

$\bar{\varepsilon}_{f,s}$  – Deformação plástica equivalente na fratura para uma sollicitação de corte

$\bar{\varepsilon}_{f,t}$  – Deformação plástica equivalente na fratura para uma sollicitação de tração

$\bar{\varepsilon}_{f_0}$  – Deformação plástica equivalente na fratura de referência no modelo de dano de Xue-Wierzbicki

$\bar{\varepsilon}^p$  – Deformação plástica equivalente

$\boldsymbol{\varepsilon}$  – Tensor das deformações

$\eta$  – Triaxialidade

$\theta_L$  – Ângulo de Lode

$\bar{\theta}_L$  – Valor normalizado do ângulo de Lode ou parâmetro de Lode

$\lambda$  – Multiplicador plástico

$\mu_p$  – Função dependente da pressão hidrostática no modelo de dano de Xue-Wierzbicki

$\mu_\theta$  – Função dependente do ângulo de Lode no modelo de dano de Xue-Wierzbicki

$\nu$  – Coeficiente de Poisson

$\xi$  – Valor normalizado do terceiro invariante do tensor desviador

$\rho$  – Densidade

- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – Tensões principais  
 $\sigma_m$  – Tensão hidrostática ou tensão média  
 $\bar{\sigma}$  – Tensão equivalente  
 $\tilde{\sigma}$  – Tensão efetiva  
 $\boldsymbol{\sigma}$  – Tensor das tensões de Cauchy  
 $\varphi$  – Ângulo entre o eixo hidrostático e o vetor de tensão
- $\alpha_k$  ( $k = 1, \dots, 6$ ) – Coeficientes do critério de plasticidade CB2001  
 $A$  – Área total da secção transversal de um volume elementar de material  
 $\tilde{A}$  – Área resistente da secção transversal de um volume elementar de material  
 $A_D$  – Área dos defeitos presentes na secção transversal de um volume elementar de material  
 $b_k$  ( $k = 1, \dots, 11$ ) – Coeficientes do critério de plasticidade CB2001  
 $c$  – Coeficiente do critério de plasticidade CB2001  
 $C_Y$  – Parâmetro da lei de encruamento de Voce  
 $D$  – Variável de dano  
 $D_1, D_2, D_3, D_4$  – Parâmetros do modelo de dano de Bao-Wierzbicki  
 $\mathbf{D}^p$  – Tensor velocidade de deformação plástica  
 $E$  – Módulo de elasticidade longitudinal do material  
 $E(D)$  – Módulo de elasticidade longitudinal de um material com dano acumulado  
 $E_0$  – Módulo de elasticidade longitudinal de um material sem qualquer dano acumulado  
 $f$  – Fração volúmica de vazios no modelo de dano de Gurson e suas extensões  
 $f^*$  – Valor efetivo da fração volúmica de vazios  
 $f_c$  – Valor de porosidade a partir do qual começa a ocorrer coalescência de vazios  
 $F_{ext}$  – Carregamento externo  
 $F$  – Parâmetro do critério de plasticidade de Hill'48  
 $F(\boldsymbol{\sigma})$  – Critério de plasticidade  
 $\mathbf{F}$  – Vetor de força  
 $\mathbf{F}'$  – Vetor de força no sistema de eixos  $Ox'y'$   
 $G$  – Parâmetro do critério de plasticidade de Hill'48  
 $H$  – Parâmetro do critério de plasticidade de Hill'48  
 $I_1, I_2, I_3$  – Invariantes do tensor das tensões de Cauchy  
 $\mathbf{I}$  – Tensor identidade de segunda ordem  
 $J(D)$  – Função que descreve a evolução da variável de dano para modelos de dano desacoplados  
 $J_1, J_2, J_3$  – Invariantes do tensor desviador das tensões  
 $k$  – Parâmetro associado ao material no modelo de dano de Xue-Wierzbicki  
 $K$  – Parâmetro da lei de encruamento de Swift  
 $L$  – Parâmetro do critério de plasticidade de Hill'48

- $m$  – Parâmetro associado ao material no modelo de dano de Xue-Wierzbicki  
 $M$  – Parâmetro do critério de plasticidade de Hill’48  
 $n$  – Parâmetro da lei de encruamento de Swift  
 $N$  – Parâmetro do critério de plasticidade de Hill’48  
 $p$  – Pressão hidrostática  
 $p_{lim}$  – Valor limite de pressão hidrostática para além do qual o modelo de dano de Xue-Wierzbicki não prevê a acumulação de dano para o material  
 $q$  – Parâmetro associado ao material no modelo de dano de Xue-Wierzbicki  
 $\mathbf{R}$  – Matriz de rotação do sistema de eixos  $Oxy$  para o sistema de eixos  $Ox'y'$   
 $s_1, s_2, s_3$  – Valores próprios do tensor desviador das tensões  
 $\mathbf{S}$  – Tensor desviador das tensões  
 $u$  – Deslocamento  
 $\mathbf{u}$  – Vetor de deslocamento  
 $\mathbf{u}'$  – Vetor de deslocamento no sistema de eixos  $Ox'y'$   
 $w(D)$  – Função que descreve o amaciamento do material  
 $Y$  – Tensão de escoamento  
 $Y_0$  – Parâmetro da lei de encruamento de Voce  
 $Y_{sat}$  – Parâmetro da lei de encruamento de Voce  
 $Y_S$  – Tensão de escoamento definida pela lei de encruamento de Swift  
 $Y_V$  – Tensão de escoamento definida pela lei de encruamento de Voce

## Siglas

MEF – Método dos Elementos Finitos

DD3IMP – Contração de “*Deep Drawing 3D Implicit Finite Element Solver*”



# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. Enquadramento

A crescente procura da indústria (sobretudo da automóvel e aeroespacial) por materiais mais leves e resistentes, de que são exemplos os aços de alta resistência e algumas ligas de alumínio, tem levado ao aparecimento de novos desafios ao nível do desenvolvimento dos produtos, na medida em que se torna mais difícil conformar plasticamente o material de forma a obter a geometria final pretendida. Estes novos materiais apresentam como principal vantagem o facto de combinarem elevada resistência com peso reduzido (elevada resistência específica), o que permite alcançar uma redução significativa no consumo de combustível dos veículos. No entanto, esta elevada resistência é conseguida à custa de uma redução da ductilidade, o que limita o processo de conformação. Assim, para uma correta conceção do produto, torna-se fundamental ter a capacidade de prever a fratura dúctil do material, isto é, conhecer o instante e o local de iniciação da fratura. Só assim é possível delinear com rigor uma estratégia que permita definir o número de etapas necessárias para, a partir do esboço inicial, obter a geometria final do componente. É neste contexto que a simulação numérica com recurso ao Método dos Elementos Finitos se perfila como uma ferramenta indispensável, pois com a capacidade computacional existente atualmente é possível estudar como a variação de parâmetros geométricos das ferramentas, condições de contacto e variações na própria geometria do componente interferem no processo de conformação do material, reduzindo as demoradas e dispendiosas etapas de *trial-out*. A fratura dúctil é prevista pela simulação numérica com o auxílio de modelos de dano. À medida que um material dúctil é deformado plasticamente sofre deterioração interna gradual, que representa o dano acumulado pelo material. O trabalho plástico e o dano acumulado durante o processo de conformação determinam também as propriedades mecânicas em etapas subsequentes de conformação e em serviço. Assim, é fundamental contabilizar o seu efeito na simulação numérica do processo e no comportamento em serviço. Os modelos de dano são ferramentas numéricas que permitem identificar o início (*onset*) da fratura em termos de uma variável de dano, associada ao instante em que o material perde completamente a sua capacidade de suportar carga. Um dos principais desafios da

implementação de modelos de dano nas simulações numéricas de processos de conformação é a calibração dos parâmetros destes modelos para um determinado material. Frequentemente são escassos os resultados de ensaios experimentais que permitam a fácil determinação dos referidos parâmetros sendo, para além disso, necessário recorrer a uma abordagem híbrida, numérico-experimental, para caracterizar o estado de tensão no instante e local de ocorrência da fratura, na medida em que muitas grandezas são impossíveis de medir experimentalmente (Dunand 2013).

Os modelos de dano podem ser agrupados em duas categorias: modelos acoplados e modelos desacoplados, consoante o dano esteja ou não integrado no modelo constitutivo do material. Nesta dissertação o alvo de estudo são os modelos desacoplados. Em termos da formulação de um modelo de dano, esta pode estar associada a uma abordagem microscópica ou macroscópica, de acordo com a escolha efetuada para as variáveis internas do modelo. Estes conceitos, que permitem distinguir e caracterizar os diferentes modelos de dano, serão alvo de análise no Capítulo 2.

## **1.2. Método dos Elementos Finitos**

Muitos fenómenos físicos associados ao domínio científico (e em particular à engenharia) podem ser modelados matematicamente por equações diferenciais. Em geral, a resolução destas equações de forma analítica para geometrias complexas é praticamente impossível (Fish e Belytschko 2007). É neste contexto que surgem com grande preponderância as ferramentas numéricas de simulação, que tiveram um desenvolvimento exponencial com a rápida evolução dos computadores desde o final do século passado.

Uma das principais ferramentas matemáticas para a resolução de problemas de engenharia é o Método dos Elementos Finitos (MEF). Este método é relativamente recente, tendo as suas bases surgido no início do século XX. O MEF permite resolver numericamente as equações diferenciais associadas a um determinado problema (Fish e Belytschko 2007). Em engenharia, destaca-se a sua aplicação na análise de estruturas e em problemas de deformação de corpos sólidos, apesar de também ser utilizado em muitas outras áreas, como a transferência de calor e a mecânica dos fluidos (Bathe 1996).

De acordo com Reddy (1993), o MEF baseia-se em três princípios que o tornam uma ferramenta de sucesso. O primeiro é que um domínio geometricamente complexo associado a um determinado problema pode ser dividido em vários subdomínios



geometricamente mais simples, denominados elementos finitos (estes podem ser unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais). Cada elemento finito apresenta nós nas suas extremidades, tal que, por exemplo no caso de elementos lineares, um elemento finito unidimensional tem dois nós, um elemento finito bidimensional quadrilátero tem quatro nós e um elemento finito tridimensional hexaédrico tem oito nós. O segundo é que para cada um dos elementos finitos podem ser formuladas funções de aproximação de grandezas nodais (designadas por funções de interpolação), com base no princípio de que qualquer função contínua pode ser aproximada por uma combinação linear de polinómios. Por fim, podem ser determinadas as relações algébricas entre as grandezas nodais através da resolução do sistema de equações que rege o problema.

O MEF pode ser dividido em três etapas fundamentais (Zienkiewicz, Taylor, e Zhu 2005). A primeira corresponde à formulação integral do problema, que pode ser efetuada com recurso a vários métodos, como o método dos deslocamentos, o método dos resíduos pesados ou os métodos variacionais. A segunda etapa diz respeito à fase de discretização do problema, que é efetuada quer no domínio espacial quer no domínio temporal. A terceira etapa consiste na resolução do sistema de equações que regem o problema. Caso o problema seja linear, o sistema de equações é também linear, pelo que basta recorrer a um método de resolução iterativo ou direto, como por exemplo, o método de eliminação de Gauss. Para problemas não-lineares, como é o caso de problemas associados a grandes deformações de sólidos, o sistema de equações é também não-linear, pelo que é necessário recorrer a métodos iterativos para a sua resolução, como o método de Newton-Raphson. O recurso a este método exige que em cada iteração seja resolvido um sistema de equações lineares.

Todas as simulações numéricas apresentadas nesta dissertação foram realizadas com o *solver* de elementos finitos DD3IMP (contração de “*Deep Drawing 3D IMPLICIT finite element solver*”). O modelo mecânico adotado neste *solver* baseia-se na teoria das grandes transformações. É utilizada uma formulação *quasi*-estática, pelo que as equações de equilíbrio não contemplam quaisquer termos de inércia. Em qualquer instante de cálculo, o equilíbrio da estrutura é assegurado através da utilização de um algoritmo de integração temporal implícito, do tipo Newton-Raphson (Oliveira 2005).

Nesta dissertação, a construção da geometria dos modelos numéricos, das ferramentas e das suas malhas de elementos finitos (fase de pré-processamento) foi realizada

com recurso ao *software* GiD<sup>®</sup>. Os modelos numéricos foram sempre discretizados com elementos finitos hexaédricos com oito pontos de integração (pontos de Gauss), sendo que nas simulações se recorreu à integração reduzida seletiva. As ferramentas foram modeladas com uma malha de elementos finitos quadriláteros e suavizadas com recurso a superfícies Nagata (Neto, Oliveira, e Menezes 2017). A análise dos resultados, correspondente à fase de pós-processamento, foi realizada também com recurso ao *software* GiD<sup>®</sup>.

### 1.3. Objetivos

Como se referiu na secção anterior, a utilização do MEF na simulação numérica de processos de conformação de materiais metálicos é uma ferramenta poderosa e de vital importância. De modo a conseguir modelar da melhor forma o comportamento mecânico de um material e prever quando ocorre a fratura dúctil têm sido desenvolvidos ao longo das últimas décadas inúmeros modelos de dano.

Com este trabalho pretende-se melhorar o conhecimento acerca dos modelos de dano desacoplados, através de uma análise numérica com o MEF, com o *solver* DD3IMP. São alvo de estudo dois modelos distintos: o modelo de dano proposto por Bao (2003) e o modelo proposto por Xue (2007). O objetivo da aplicação destes modelos é prever a fratura dúctil do material, sendo os resultados da simulação numérica posteriormente comparados com resultados experimentais disponíveis na literatura, a fim de avaliar o potencial destes modelos. Numa primeira fase, estes modelos implementados no DD3IMP são validados com base em resultados da literatura, ou seja, procura-se reproduzir resultados conhecidos, estudando-se para o caso do modelo proposto por Bao (2003) uma liga de alumínio obtida por fundição e no caso do modelo proposto por Xue (2007) a liga de alumínio 2024-T351. Numa segunda fase, efetua-se a calibração dos parâmetros dos dois modelos de dano para o aço DP780, com base em resultados numérico-experimentais da literatura.

### 1.4. Estrutura da dissertação

O presente documento encontra-se dividido em seis capítulos. Neste primeiro capítulo é feita a introdução ao tema, sendo este enquadrado em termos da sua aplicação a nível industrial. É também feita referência à importância do MEF em aplicações de engenharia e são descritos os princípios subjacentes ao *solver* de elementos finitos DD3IMP,

utilizado em todas as simulações numéricas apresentadas neste documento. Referem-se também os objetivos principais do trabalho desenvolvido no âmbito da dissertação.

No segundo capítulo apresentam-se os conceitos fundamentais no âmbito deste trabalho, em particular a definição de dano e da sua acumulação no material até à ocorrência de fratura. De seguida, são apresentados conceitos teóricos relacionados com grandezas que caracterizam o estado de tensão num ponto de um corpo sólido deformável, uma vez que um grande número de modelos de dano utilizam estas grandezas na definição das suas variáveis internas. São referidas as principais famílias em que os modelos de dano podem ser agrupados, com base na sua formulação, e é feita uma breve descrição dos principais modelos. É também explicada a diferença entre modelos de dano acoplados e desacoplados, de acordo com a sua influência no modelo constitutivo do material.

Após esta revisão bibliográfica, no terceiro capítulo apresentam-se os modelos de dano propostos por Bao (2003) e por Xue (2007), em termos da sua formulação matemática, principais características e evolução da variável utilizada para quantificar a acumulação do dano.

No capítulo quatro é feita a validação da implementação no *solver* DD3IMP dos dois modelos de dano desacoplados mencionados anteriormente. Para tal, recorre-se à comparação de resultados obtidos para diferentes ensaios com os apresentados na literatura (Mae et al. 2007, Xue e Wierzbicki 2008).

Uma vez validada a implementação, no capítulo cinco descreve-se um procedimento proposto para efetuar a calibração dos parâmetros dos dois modelos de dano para um aço DP780. O procedimento recorre a uma abordagem híbrida numérico-experimental. Neste contexto, foi necessário construir os modelos de outros ensaios mecânicos, que são descritos de forma detalhada.

Por fim, no capítulo seis, apresentam-se as principais conclusões resultantes do estudo desenvolvido nesta dissertação.

Inclui-se ainda um Apêndice onde é analisada a influência da discretização espacial na previsão do deslocamento à fratura de um provete cilíndrico sem entalhe.



## **2. MODELAÇÃO DO FENÓMENO DE DANO**

### **2.1. Conceitos introdutórios**

A comunidade científica tem desenvolvido um esforço crescente para melhorar a compreensão do fenómeno da acumulação de dano e da iniciação da fratura dúctil desde a década de 60 do século XX. Nesse contexto, foram propostos inúmeros modelos de dano, formulados segundo diferentes perspetivas (Xue 2007). A maioria destes modelos baseia-se na Mecânica dos Meios Contínuos, i.e. assumem que o material sólido é um meio contínuo. De facto, para deformações plásticas moderadas, pode considerar-se que a microestrutura do material permanece inalterada. Neste contexto, entende-se por deformação plástica moderada um estado de deformação em que a deformação plástica é bastante superior à deformação elástica, mas muito inferior à deformação plástica na fratura. Para condições de deformação plástica moderada, a teoria clássica da plasticidade, entendida como uma lei de encruamento, uma lei de escoamento e um critério de plasticidade, é suficiente para analisar as condições de solicitação de componentes metálicos em diversas áreas de engenharia. No entanto, para solicitações que conduzem a deformações plásticas superiores à moderada, as alterações na microestrutura do material deixam de ser desprezáveis, pelo que não devem ser ignoradas, uma vez que desempenham um papel importante na previsão da fratura dúctil (Xue 2007).

A fratura dúctil de estruturas é normalmente um fenómeno que compreende três fases: acumulação de dano, iniciação da fratura com geração de fendas e sua propagação (Chaboche 1988, Bao 2003). Uma forma de entender a iniciação da fratura é considerá-la como o resultado da acumulação de dano (Xue 2007, Dunand 2013). O dano representa o processo físico de deterioração progressiva de um material que pode levar ao seu colapso macroscópico e está, desta forma, relacionado com a densidade de defeitos internos do material. A deterioração do material resulta da nucleação, crescimento e coalescência de microfissuras ou microcavidades (poros). De facto, os componentes metálicos apresentam sempre defeitos internos, mas para deformações plásticas moderadas estes são visíveis apenas através de observações microscópicas. O nível de degradação de um componente

metálico, assim como a sua escala (microscópica, macroscópica ou estrutural), é fortemente dependente do material, do tipo de solicitação e da sua velocidade de aplicação, da temperatura de serviço e de outros fatores ambientais a que o material está sujeito (Teixeira 2010). Ao nível macroscópico, a degradação do material resulta numa diminuição da sua rigidez, resistência mecânica e ductilidade. Estas alterações das propriedades mecânicas do material são frequentemente utilizadas como indicadores para quantificar a degradação de modo a prever o início (*onset*) da fratura (Xue 2007).

Na Mecânica do Dano Contínuo a deterioração do material é descrita por uma variável interna, a variável de dano. A variável de dano deve ser distinguida da ductilidade e da deformação plástica equivalente na fratura, na medida em que se trata de uma variável interna, que não pode ser medida experimentalmente (Xue 2007). A maioria dos modelos de dano considera que a variável de dano é isotrópica, apesar de alguns trabalhos discutirem a necessidade de recorrer a um tensor para representar o seu carácter anisotrópico (Murakami 1988, Teixeira 2010). A adoção de uma variável de dano isotrópica possibilita o seu tratamento como um escalar, simplificação que é justificada por alguns autores com base nos bons resultados obtidos na previsão da fratura dúctil (Xue 2007, Teixeira 2010). A variável interna de dano deve evoluir em função do trabalho plástico imposto ao material, pelo que apresenta um carácter cumulativo. Para utilizar a acumulação do dano como critério para prever o *onset* da fratura dúctil é necessário estabelecer relações entre esta variável e outras quantidades mensuráveis. É neste contexto que surgem os modelos de dano, que são propostos como forma de interligar variáveis de campo mensuráveis com a evolução do dano até à ocorrência de fratura (Xue 2007).

## 2.2. Caracterização do estado de tensão

Os modelos de dano são muitas vezes estudados para estados de tensão de referência, e.g. tração uniaxial. Neste contexto, muitos modelos de dano utilizam grandezas que caracterizam o estado de tensão na definição das suas variáveis internas. Neste subcapítulo apresentam-se as definições de algumas das grandezas empregues mais frequentemente.

O estado de tensão num ponto de um corpo sólido deformável é caracterizado através do tensor das tensões de Cauchy  $\sigma$ .

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Qualquer que seja o estado de tensão existente num determinado ponto material é sempre possível descrevê-lo através das tensões principais  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , o que é conseguido rodando o sistema de eixos inicial para um novo sistema de eixos, em que apenas existem componentes normais de tensão (as tensões de corte são nulas). Por convenção, as tensões principais são ordenadas em função da sua magnitude, pelo que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  e o tensor das tensões de Cauchy pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Um determinado estado de tensão é caracterizado por três invariantes, que se definem de acordo com as seguintes expressões:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad (2.3)$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3, \quad (2.4)$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3, \quad (2.5)$$

em função das tensões principais. O tensor das tensões de Cauchy pode também ser decomposto em duas componentes: a de tensão hidrostática ou tensão média, designada por  $\sigma_m$ , e a de tensão desviadora, designada por  $\mathbf{S}$ . Assim, pode escrever-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} + \sigma_m \mathbf{I}, \quad (2.6)$$

em que  $\mathbf{I}$  representa o tensor identidade de ordem 2. A tensão média é um escalar definido de acordo com a seguinte expressão:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3}. \quad (2.7)$$

Desta forma, o tensor desviador é dado por:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \mathbf{I}. \quad (2.8)$$

Também o tensor desviador apresenta três invariantes  $(J_1, J_2 \text{ e } J_3)$ , que são definidos no sistema de eixos principal de tensões de acordo com as seguintes expressões:

$$J_1 = s_1 + s_2 + s_3, \quad (2.9)$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2), \quad (2.10)$$

$$J_3 = s_1 s_2 s_3, \quad (2.11)$$

em que  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$  são os valores próprios do tensor que define a componente desviadora do tensor das tensões, sendo que o primeiro invariante  $J_1$  é por definição nulo.

Para um material isotrópico, cujo comportamento mecânico é descrito pelo critério de plasticidade de von Mises, a tensão equivalente correspondente a um determinado estado de tensão é definida como (Hill 1950):

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{3J_2}. \quad (2.12)$$

O material transita do domínio elástico para o domínio plástico quando o segundo invariante do tensor desviador  $J_2$  atinge um valor crítico. Em termos gráficos, a função que descreve a superfície de plasticidade do critério de von Mises representa, no espaço das tensões principais (espaço de Haigh–Westergaard), um cilindro cujo eixo é coincidente com o eixo hidrostático ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ). Com base nas grandezas apresentadas é possível caracterizar o estado de tensão em função de três outras quantidades: triaxialidade, pressão hidrostática e ângulo de Lode (Xue e Wierzbicki 2009b).

A triaxialidade,  $\eta$ , é definida como a razão entre a tensão média e a tensão equivalente correspondente ao critério de von Mises:

$$\eta = \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}}. \quad (2.13)$$

Para referência, a triaxialidade toma o valor de  $1/3$  no caso de uma solicitação de tração uniaxial e o valor  $0$  no caso de uma solicitação de corte (trajetórias de carregamento monótonas).

A pressão hidrostática  $p$  é definida como:

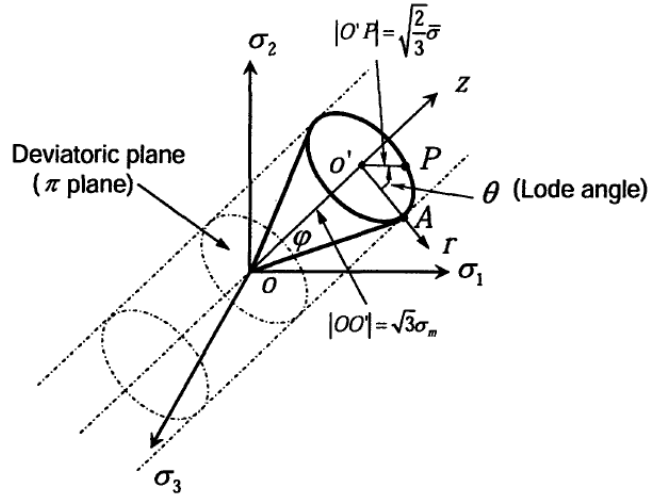
$$p = -\sigma_m. \quad (2.14)$$

Para referência, a pressão hidrostática toma o valor de  $-\sigma/3$  no caso de uma solicitação de tração uniaxial ( $\sigma$ ) e o valor  $0$  no caso de uma solicitação de corte (trajetórias de carregamento monótonas).

Um determinado estado de tensão pode ser representado no espaço das tensões principais por um vetor. Seja  $P$  um ponto genérico de coordenadas  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  tal que  $\overrightarrow{OP}$  representa o vetor de tensão desse ponto (Figura 2.1). Este vetor de tensão pode ser decomposto numa componente hidrostática  $\overrightarrow{OO'}$  (perpendicular ao plano octaédrico, que é o



plano cuja normal está igualmente inclinada em relação aos três eixos principais de tensão) e numa componente desviadora  $\overrightarrow{O'P}$  (sobre o plano octaédrico).



**Figura 2.1.** Representação de um estado de tensão no espaço das tensões principais (Bai 2008).

As componentes hidrostática e desviadora relacionam-se com a tensão média e com a tensão equivalente de von Mises, de acordo com as seguintes expressões (Bai 2008):

$$\overrightarrow{OO'} = \sqrt{3}\sigma_m, \quad (2.15)$$

$$\overrightarrow{O'P} = \sqrt{\frac{2}{3}}\bar{\sigma}. \quad (2.16)$$

O plano que passa pela origem  $O$  do sistema de eixos e é perpendicular ao eixo hidrostático é também designado por plano  $\pi$ , ou plano desviador. O ângulo  $\varphi$  representado na Figura 2.1 pode ser diretamente relacionado com a triaxialidade  $\eta$ :

$$\tan \varphi = \frac{|\overrightarrow{O'A}|}{|\overrightarrow{OO'}|} \Leftrightarrow \frac{1}{\tan \varphi} = \frac{\sqrt{3}\sigma_m}{\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{\sigma}} \Leftrightarrow \cot \varphi = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\eta. \quad (2.17)$$

Esta expressão mostra que a cotangente do ângulo  $\varphi$  é proporcional à triaxialidade. Mas, a um determinado valor de triaxialidade corresponde um número infinito de estados de tensão, representados pela superfície do cone visível na Figura 2.1 (Morales 2013). Admitindo que a pressão hidrostática também é conhecida, os estados de tensão possíveis correspondem à circunferência representada na Figura 2.1. Assim, para caracterizar completamente o estado

de tensão é necessária a definição de uma outra grandeza, o ângulo de Lode,  $\theta_L$ . Este ângulo representa a relação entre a magnitude da tensão principal intermédia  $\sigma_2$  e a maior e a menor das tensões principais ( $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ , respetivamente) e geometricamente está relacionado com a posição do ponto  $P$  na circunferência representada na Figura 2.1 (Morales 2013).

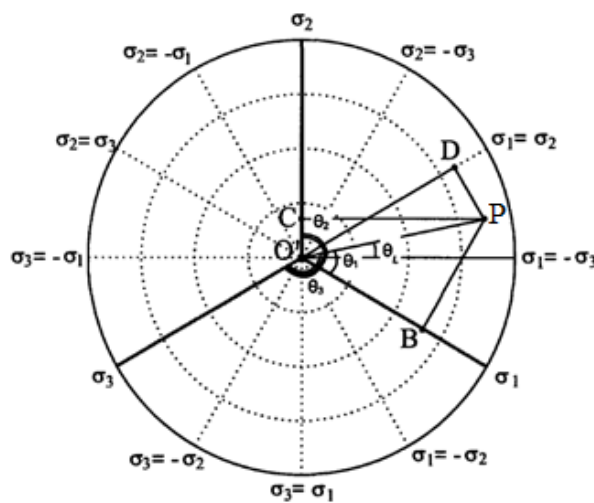
As componentes desviadoras da tensão podem ser obtidas através da projeção do vetor de tensão  $\overrightarrow{OP}$  no plano desviador (Figura 2.2). Neste plano, o ângulo entre os eixos das tensões principais é de  $120^\circ$ . Na Figura 2.2 representa-se o ângulo de Lode  $\theta_L$  medido entre a linha que representa uma solicação de corte ( $\sigma_1 = -\sigma_3$ ) e a projeção do vetor de tensão no plano desviador. Deste modo, pode escrever-se (Morales 2013):

$$\tan \theta_L = \frac{\sigma_2 - \sigma_1 \sin 30^\circ - \sigma_3 \sin 30^\circ}{\sigma_1 \cos 30^\circ - \sigma_3 \cos 30^\circ}. \quad (2.18)$$

Simplificando e explicitando a expressão anterior para  $\theta_L$  resulta:

$$\theta_L = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}\right). \quad (2.19)$$

De acordo com esta formulação, a gama de variação do ângulo de Lode é  $-\frac{\pi}{6} \leq \theta_L \leq \frac{\pi}{6}$ , uma vez que é definido em cada sextante. Para referência, o ângulo de Lode toma o valor de  $-\pi/6$  para uma solicação de tração uniaxial ( $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ), o valor 0 no caso de uma solicação de corte ( $\sigma_1 = -\sigma_3, \sigma_2 = 0$ ) e o valor de  $\pi/6$  para uma solicação de compressão uniaxial ( $\sigma_1 = \sigma_2, \sigma_3 < 0$ ).



**Figura 2.2.** Projeção do vetor de tensão  $\overrightarrow{OP}$  no plano desviador (adaptado de Xue 2007).

O ângulo de Lode pode também ser formulado a partir da sua relação com o valor normalizado do terceiro invariante do tensor da tensão desviadora, designado por  $\xi$ . Este último é definido da seguinte forma:

$$\xi = \frac{J_3}{2} \left( \frac{3}{J_2} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{27}{2} \frac{J_3}{\bar{\sigma}^3}, \quad (2.20)$$

tal que a sua gama de variação é  $-1 \leq \xi \leq 1$ . O valor de  $\xi$  caracteriza a magnitude da tensão principal  $\sigma_2$  em relação às tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ . Para  $\xi = -1$  tem-se  $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ ; quando  $\xi = 1$  tem-se  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$  e para  $\xi = 0$  tem-se  $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$  (Morales 2013). Existem várias formas de definir o ângulo de Lode como função de  $\xi$ , que diferem entre si na função trigonométrica utilizada. Assim, relativamente à função cosseno tem-se a seguinte relação (Xue 2007, Bai 2008):

$$\cos(3\theta_L) = \xi \Leftrightarrow \theta_L = \frac{1}{3} \arccos(\xi). \quad (2.21)$$

De acordo com esta formulação, a gama de variação do ângulo de Lode é  $0 \leq \theta_L \leq \frac{\pi}{3}$ . Neste caso, o ângulo de Lode é medido, na Figura 2.2, no sentido anti-horário, a partir do eixo da tensão principal  $\sigma_1$  (Morales 2013). Segundo esta formulação,  $\theta_L$  toma o valor 0 para uma solicitação de tração uniaxial, o valor de  $\pi/6$  para uma solicitação de corte e o valor de  $\pi/3$  para uma solicitação de compressão uniaxial.

Nesta dissertação considera-se, para a determinação do ângulo de Lode, a relação entre  $\theta_L$  e  $\xi$  que recorre ao simétrico da função seno (Huang e Xue 2009, Xue e Wierzbicki 2009a, Xue e Wierzbicki 2009b):

$$-\sin(3\theta_L) = \xi \Leftrightarrow \theta_L = -\frac{1}{3} \arcsen(\xi). \quad (2.22)$$

De acordo com esta formulação, a gama de variação do ângulo de Lode é  $-\frac{\pi}{6} \leq \theta_L \leq \frac{\pi}{6}$ . Assim, os valores de referência indicados para o caso das solicitações de tração, corte e compressão são os mesmos que foram referidos para a formulação apresentada de acordo com a expressão (2.19).

É também frequente encontrar na literatura o valor do ângulo de Lode na sua forma normalizada,  $\bar{\theta}_L$ , cuja gama de variação é  $-1 \leq \bar{\theta}_L \leq 1$ . A relação entre  $\bar{\theta}_L$  e  $\theta_L$  é, de acordo com Bai (2008), dada por:

$$\bar{\theta}_L = 1 - \frac{6\theta_L}{\pi}. \quad (2.23)$$

A expressão anterior é válida para uma gama de variação do ângulo de Lode entre 0 e  $\pi/3$ , ou seja, quando a função trigonométrica utilizada para a determinação desta grandeza é o cosseno. A relação entre  $\bar{\theta}_L$  e  $\theta_L$  para o caso em que a gama de variação do ângulo de Lode é entre  $-\pi/6$  e  $\pi/6$  é dada por (Cao 2013):

$$\bar{\theta}_L = -\frac{6\theta_L}{\pi}. \quad (2.24)$$

O valor normalizado do ângulo de Lode,  $\bar{\theta}_L$ , é também frequentemente denominado de parâmetro de Lode, e pode ser relacionado diretamente com o valor normalizado do terceiro invariante do tensor da tensão desviadora através da seguinte equação (Marcadet et al. 2015, Bai 2008, Cao 2013):

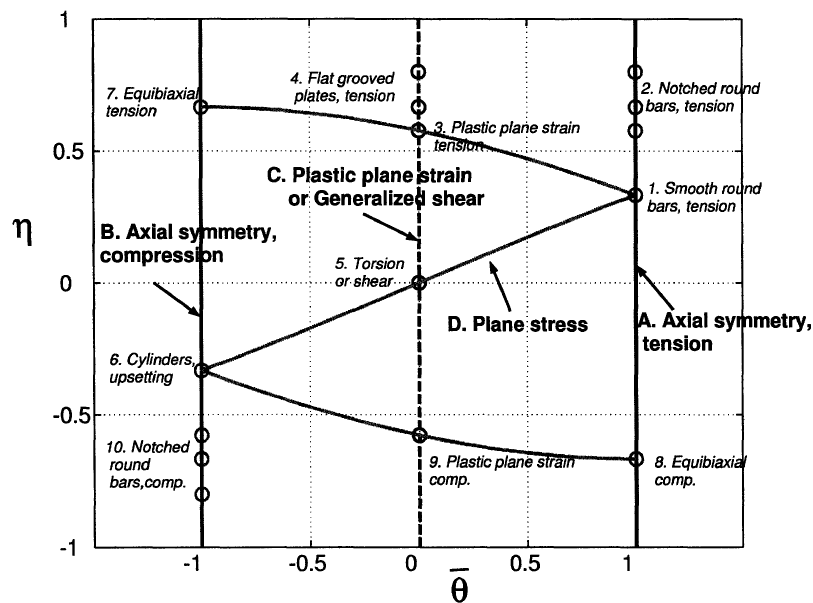
$$\bar{\theta}_L = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos(\xi). \quad (2.25)$$

Para um estado plano de tensão ( $\sigma_3 = 0$ ), o parâmetro de Lode pode ser diretamente relacionado com a triaxialidade, através da seguinte expressão (Bai 2008):

$$\bar{\theta}_L = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos \left[ -\frac{27}{2} \eta \left( \eta^2 - \frac{1}{3} \right) \right] \quad (2.26)$$

Na Figura 2.3 apresenta-se a representação gráfica da expressão (2.26). Os valores indicados são válidos para o estado de tensão existente no início do ensaio. Assim, para referência,  $\bar{\theta}_L$  toma o valor 1 para solicitações de tração axissimétrica, o valor 0 para solicitações de corte e o valor  $-1$  para solicitações de compressão axissimétrica ou de expansão equi-biaxial (Bai 2008, Morales 2013).

Em conclusão, um estado de tensão representado pelas tensões principais no sistema de coordenadas cartesianas ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) pode também ser representado no sistema de coordenadas cilíndricas ( $\sigma_m, \bar{\sigma}, \theta_L$ ) ou no sistema de coordenadas esféricas ( $\bar{\sigma}, \eta, \theta_L$ ) (Bai 2008, Cao 2013, Morales 2013).



**Figura 2.3.** Valores de referência de triaxialidade e de parâmetro de Lode, no início do ensaio, para diferentes tipos de sollicitação (Bai 2008).

## 2.3. Famílias de modelos de dano

Em geral, distinguem-se duas abordagens para modelar o dano acumulado no material: a microscópica e a macroscópica (Xue 2007). Os modelos de dano que se baseiam na primeira abordagem são também designados por modelos micromecânicos e os que se baseiam na segunda são denominados de modelos fenomenológicos.

### 2.3.1. Modelos de dano micromecânicos

Os modelos micromecânicos consideram a acumulação do dano como um mecanismo à escala atômica, molecular ou a nível cristalino, sendo as suas variáveis internas definidas nestas escalas. Em geral, as variáveis internas representam quantidades discretas e a sua avaliação em termos contínuos (nível macroscópico) envolve a utilização de técnicas de homogeneização (Pires 2005, Teixeira 2010). Em geral, estes modelos consideram o dano acoplado às equações do modelo constitutivo do material, i.e. a resistência mecânica do material diminui à medida que este é deformado. No entanto, os primeiros modelos associados a esta família recorriam a uma variável de dano apenas como valor indicativo da ocorrência de fratura (dano desacoplado das equações constitutivas).

O estudo da influência das microfissuras (vazios) na fratura dúctil foi modelado, de forma pioneira, por McClintock, Kaplan, e Berg (1966), que analisaram a evolução da

dimensão de um vazio cilíndrico numa matriz de material elastoplástico. Rice e Tracey (1969) estudaram a evolução da dimensão de vazios esféricos numa matriz de material com comportamento elástico-perfeitamente plástico. Nestes estudos não foram consideradas a interação entre os vazios, o processo de coalescência e o efeito provocado pelo encruamento do material. A fratura dúctil é prevista quando o raio do vazio atinge um valor crítico, específico para cada material. Os resultados destes estudos mostraram que o crescimento dos vazios é fortemente influenciado pelo nível de triaxialidade existente (Cao 2013). No entanto, estes modelos de dano foram desenvolvidos considerando que a variável de dano é apenas um parâmetro indicador da ocorrência de fratura (modelos desacoplados).

Posteriormente, Gurson (1977) formulou um modelo para descrever a degradação do material utilizando como variável interna a fração volúmica de vazios (porosidade), designada por  $f$ , em que os vazios são representados por esferas ou por cilindros. O acoplamento entre a teoria da plasticidade e o dano é feito através de uma função de plasticidade macroscópica para um material poroso, ou seja, considera uma matriz de material elastoplástico que contém um determinado volume de vazios (Teixeira 2010). A fração volúmica de vazios corresponde à razão entre o volume acumulado de vazios existente num determinado volume elementar de material e o volume desse mesmo volume elementar. O modelo de dano de Gurson considera ainda que a componente hidrostática do tensor das tensões provoca a dilatação macroscópica do material afetando, desta forma, a superfície de plasticidade. Como a matriz (material que circunda os vazios) é idealizada como sendo homogénea e incompressível, a dilatação ocorre apenas devido ao crescimento dos vazios (Gurson 1977). A fratura dúctil resulta da coalescência dos vazios, e ocorre quando a fração volúmica de vazios iguala a unidade (Morales 2013).

O modelo de Gurson foi continuamente melhorado por vários autores, de forma a tentar superar as suas incapacidades. Neste contexto, destacam-se os trabalhos desenvolvidos por Tvergaard (1981) e Tvergaard e Needleman (1984), que resultaram na introdução de dois parâmetros adicionais na função de plasticidade proposta por Gurson (Bao 2003, Basaran 2011), a fim de melhorar a sua precisão na previsão da fratura dúctil (Cao 2013). Tvergaard e Needleman (1984) estenderam também o modelo de Gurson de forma a incluir o mecanismo de coalescência dos vazios. Assim, consideraram como variável de dano não a fração volúmica de vazios  $f$  mas o seu valor efetivo  $f^*$ , que representa uma função de dois ramos (Malcher 2012). A distinção entre os ramos é feita consoante a fração

volúmica de vazios  $f$  seja inferior ou superior ao valor da porosidade a partir da qual começa a ocorrer coalescência, designado por  $f_c$  (Malcher 2012). A extensão do modelo de Gurson proposta por Tvergaard e Needleman, conhecida por modelo GTN, é um dos modelos micromecânicos mais referidos na literatura. Este modelo apresenta, no entanto, uma grande dificuldade em termos da sua aplicação: a identificação dos parâmetros. O elevado número de parâmetros a determinar associado ao facto destes estarem fortemente interligados torna muito complicada a utilização com sucesso deste modelo de dano em aplicações industriais (Bao 2003, Cao 2013).

### **2.3.2. Modelos de dano fenomenológicos**

Os modelos fenomenológicos baseiam-se no estudo da acumulação do dano num volume elementar representativo de material, com dimensão suficiente para ser considerado um meio contínuo homogéneo. As variáveis internas destes modelos estão diretamente associadas ao comportamento dissipativo observado a nível macroscópico, em termos de quantidades como a tensão e a deformação (Pires 2005, Teixeira 2010).

Uma das alternativas possíveis para descrever a relação entre o dano acumulado por um material e o seu comportamento mecânico é designada por Mecânica do Dano Contínuo, que é um ramo da Mecânica dos Meios Contínuos. De acordo com esta abordagem, a deterioração do material pode ser representada por uma variável escalar, vetorial ou tensorial, designada de variável de dano (Pires 2005). O primeiro estudo neste âmbito foi desenvolvido por Kachanov (1958), que propôs a definição de uma variável interna para representar a densidade de defeitos do material de forma a refletir a perda da sua capacidade de suportar carga observada macroscopicamente (Teixeira 2010). Contudo, este autor não atribuiu um significado físico bem definido a esta variável interna. Esta interpretação física do fenómeno de dano foi posteriormente introduzida por Rabotnov (1963), ao considerar que a presença de vazios no material provocava a redução da área de secção transversal resistente de um volume representativo de material. Neste volume representativo considera-se que o material apresenta vazios aleatoriamente dispersos, de tal forma que o fenómeno de dano pode ser quantificado corretamente por uma variável média (Teixeira 2010). Esta variável, designada por  $D$ , representa assim o quociente entre a área dos defeitos presentes na secção transversal do volume elementar de material ( $A_D$ ) e a área total da secção transversal ( $A$ ):

$$D = \frac{A_D}{A}. \quad (2.27)$$

A área correspondente aos defeitos é dada pela diferença entre a área total da secção transversal e a área resistente da secção, designada por  $\tilde{A}$  (Teixeira 2010). A variável de dano  $D$  pode assim ser tratada como um escalar, de tal forma que a sua gama de variação é entre 0 e 1 (toma o valor 0 para um material sem qualquer dano acumulado e o valor 1 para um material totalmente danificado, sem qualquer capacidade de suportar carga). A diminuição da área resistente da secção traduz-se no aumento da tensão induzida por um carregamento externo  $F_{ext}$ , de tal forma que se considera uma tensão efetiva  $\tilde{\sigma}$  dada por (Teixeira 2010):

$$\tilde{\sigma} = \frac{F_{ext}}{\tilde{A}} = \frac{F_{ext}}{A - A_D} = \frac{F_{ext}}{A(1 - D)} = \frac{\sigma}{(1 - D)}. \quad (2.28)$$

Os conceitos teóricos associados à Mecânica do Dano Contínuo foram posteriormente explorados por vários autores, sendo de destacar o modelo de dano proposto por Lemaitre (1985), que recorre a uma formulação de base termodinâmica. Esta permite construir um modelo que considera o dano de forma acoplada com o modelo constitutivo do material. A variável de dano  $D$  é assumida como isotrópica, de tal forma que é representada por intermédio de um escalar, variável entre 0 e 1, como descrito anteriormente.

Nos modelos de dano acoplados, o dano está integrado nas equações que descrevem o modelo constitutivo do material (que de acordo com a teoria clássica da plasticidade é constituído por uma lei de encruamento, um critério de plasticidade e uma lei de escoamento plástico). Assim, à medida que o material é deformado, as suas propriedades mecânicas vão-se degradando. Este amaciamento do material é descrito através de uma função  $w(D)$ , que pode ser definida da seguinte forma:

$$w(D) = 1 - D. \quad (2.29)$$

Com base nesta definição, o acoplamento do critério de plasticidade com o dano pode ser feito recorrendo à seguinte expressão (Xue e Wierzbicki 2009a, Xue e Wierzbicki 2009b):

$$\bar{\sigma} \leq w(D)Y \quad (2.30)$$

em que  $Y$  representa a tensão de escoamento do material.

As propriedades elásticas do material também sofrem degradação, exceto o coeficiente de Poisson. Por exemplo, o módulo de elasticidade  $E$  do material é afetado pela acumulação do dano, sendo a sua variação descrita pela seguinte expressão:

$$E(D) = w(D)E_0 \quad (2.31)$$



em que  $E_0$  representa o módulo de elasticidade inicial do material, sem qualquer dano acumulado. Nestas condições, os parâmetros do modelo constitutivo e de dano devem ser identificados também de forma acoplada, o que torna o procedimento mais complexo.

No entanto, muitos modelos fenomenológicos consideram a acumulação de dano como um fenómeno independente do comportamento plástico do material, ou seja, as propriedades mecânicas do material não variam à medida que este é deformado e acumula dano (Teixeira 2010). Nestes modelos, a variável de dano torna-se apenas numa variável de pós-processamento, utilizada como um indicador para prever a iniciação da fratura (Morales 2013). Estes modelos designam-se por modelos desacoplados, já que a equação que descreve a evolução do dano é desacoplada das equações que definem o modelo constitutivo do material. Em relação aos modelos desacoplados, as suas principais vantagens são a sua simplicidade e o facto de não requererem maior capacidade computacional para a realização das simulações numéricas. No entanto, apresentam como principal desvantagem o facto de a fratura ser modelada como uma queda súbita na curva tensão-deformação. Esta queda repentina da resistência do material pode ser expressa através da seguinte expressão (Xue 2007):

$$\bar{\sigma} \leq [1 - J(D)]Y, \quad (2.32)$$

em que  $J(D)$  é uma função por ramos definida por:

$$J(D) = \begin{cases} 0, & 0 \leq D < 1 \\ 1, & 1 \leq D \end{cases}. \quad (2.33)$$

Como se pode verificar, a resistência do material não é alterada pelo facto de ocorrer dano. Nestas condições, pode recorrer-se aos mesmos procedimentos de identificação de parâmetros do modelo constitutivo adotado na teoria da plasticidade, para descrever deformações plásticas moderadas. Por outro lado, esta é uma forma pouco realista de descrever o comportamento real do material, uma vez que não se considera o seu amaciamento à medida que este é deformado. Por este motivo, em muitas situações, estes modelos não conseguem prever corretamente a iniciação da fratura (Xue 2007). Apesar disso, devido à sua simplicidade, são amplamente empregues em aplicações industriais (Basaran 2011, Cao 2013).

Existem inúmeros modelos de dano fenomenológicos desacoplados que, por vezes, diferem entre si apenas em pequenos aspetos. Estes modelos têm geralmente uma formulação empírica, ou seja, as suas equações são definidas de forma a conseguir reproduzir

da melhor forma possível os resultados observados a nível experimental. A variável de dano é, neste caso, independente de qualquer propriedade do material, sendo geralmente uma função cumulativa da deformação plástica equivalente (Cao 2013). Considera-se, assim, que a fratura dúctil ocorre quando o seguinte integral atinge um valor crítico  $C$  (Bao 2003):

$$\int_0^{\bar{\epsilon}_f} g(\sigma_{ij}) d\bar{\epsilon}^p = C, \quad (2.34)$$

em que  $g(\sigma_{ij})$  é uma função dependente do tensor das tensões,  $\bar{\epsilon}^p$  representa a deformação plástica equivalente,  $\bar{\epsilon}_f$  é a deformação plástica equivalente no instante de ocorrência de fratura e  $C$  representa uma constante associada ao material. Dividindo ambos os membros da expressão (2.34) pela constante  $C$  obtém-se o critério que caracteriza a ocorrência de fratura em função da variável de dano  $D$  (Bao 2003):

$$D = \int_0^{\bar{\epsilon}_f} f(\sigma_{ij}) d\bar{\epsilon}^p = 1. \quad (2.35)$$

Dos inúmeros modelos existentes nesta família destacam-se os propostos por Johnson e Cook (1985) e Wilkins, Streit, e Reaugh (1980), pela sua aplicação por outros autores. Os dois modelos de dano alvo de estudo neste trabalho são os propostos por Bao (2003) e por Xue (2007), que serão descritos no capítulo seguinte.

### 3. MODELOS DE DANO EM ANÁLISE

Os modelos de dano propostos por Bao (2003) e por Xue (2007) são doravante designados como modelo de Bao-Wierzbicki e de Xue-Wierzbicki, respetivamente, atendendo a que esta é a sua designação corrente na literatura. Estes modelos enquadram-se na família de modelos de dano fenomenológicos, desacoplados, e a sua formulação é empírica, tendo por base o objetivo de garantir o melhor ajuste possível com resultados experimentais de ensaios mecânicos. Estes ensaios são realizados em provetes com diferentes geometrias, de forma a abranger uma ampla gama de estados de tensão. Em cada ensaio é identificado o local de iniciação da fratura e é determinada a deformação à fratura. Posteriormente, procede-se à simulação numérica de cada ensaio de modo a determinar os parâmetros do modelo que conduzem a valores de deslocamento à fratura idênticos aos observados experimentalmente.

#### 3.1. Modelo de dano de Bao-Wierzbicki

##### 3.1.1. Formulação matemática

Neste modelo, a deformação plástica equivalente na fratura,  $\bar{\epsilon}_f$ , é função apenas da triaxialidade, ou seja:

$$\bar{\epsilon}_f = f(\eta) = f\left(\frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}}\right). \quad (3.1)$$

Em Bao (2003) e Bao e Wierzbicki (2004) é descrito o extenso número de ensaios experimentais realizados para a liga de alumínio 2024-T351 e é proposto um modelo em que a deformação plástica equivalente na fratura é uma função definida por três ramos, ao invés de uma função monótona. Nos diferentes trabalhos apresentados por estes autores, as expressões que definem cada um dos ramos são por vezes diferentes, de modo a garantir um melhor ajuste com os resultados experimentais. Nesta dissertação considera-se que  $\bar{\epsilon}_f$  evolui com a triaxialidade de acordo com a expressão apresentada por Mae et al. (2007):

$$\bar{\varepsilon}_f = \begin{cases} \frac{D_4}{1 + 3\eta}, & -\frac{1}{3} < \eta \leq 0 \\ \bar{\varepsilon}_{f,t} + (\bar{\varepsilon}_{f,t} - \bar{\varepsilon}_{f,s})(3\eta - 1), & 0 \leq \eta \leq \frac{1}{3} \\ D_1 + D_2 \exp(D_3\eta), & \eta \geq \frac{1}{3} \end{cases} \quad (3.2)$$

Da expressão anterior é possível concluir que este modelo apresenta um valor limite inferior de triaxialidade abaixo do qual não é possível prever a fratura dúctil, que corresponde ao valor de  $\eta = -\frac{1}{3}$ , inclusive<sup>1</sup>. Para baixa triaxialidade (primeiro ramo da função), a evolução da deformação plástica equivalente na fratura é descrita por uma hipérbole. No segundo ramo, correspondente a uma gama de triaxialidade intermédia, é descrita por uma equação linear, enquanto para triaxialidade elevada (terceiro ramo) é descrita por uma função exponencial.  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  e  $D_4$  são os parâmetros do modelo, que devem ser determinados de forma a aproximar da melhor forma os ramos da função aos resultados experimentais.  $\bar{\varepsilon}_{f,s}$  e  $\bar{\varepsilon}_{f,t}$  representam a deformação plástica equivalente na fratura para uma solitação de corte e para uma solitação de tração, respetivamente.

Os parâmetros do modelo devem ser determinados de forma a garantir a continuidade da função em  $\eta = 0$  (corte):

$$\frac{D_4}{1 + 3(0)} = \bar{\varepsilon}_{f,t} + (\bar{\varepsilon}_{f,t} - \bar{\varepsilon}_{f,s})(3(0) - 1) \Leftrightarrow \bar{\varepsilon}_{f,s} = D_4, \quad (3.3)$$

e em  $\eta = \frac{1}{3}$  (tração pura):

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{f,t} + (\bar{\varepsilon}_{f,t} - \bar{\varepsilon}_{f,s}) \left( 3 \left( \frac{1}{3} \right) - 1 \right) &= D_1 + D_2 \exp \left( D_3 \left( \frac{1}{3} \right) \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \bar{\varepsilon}_{f,t} = D_1 + D_2 \exp \left( \frac{D_3}{3} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

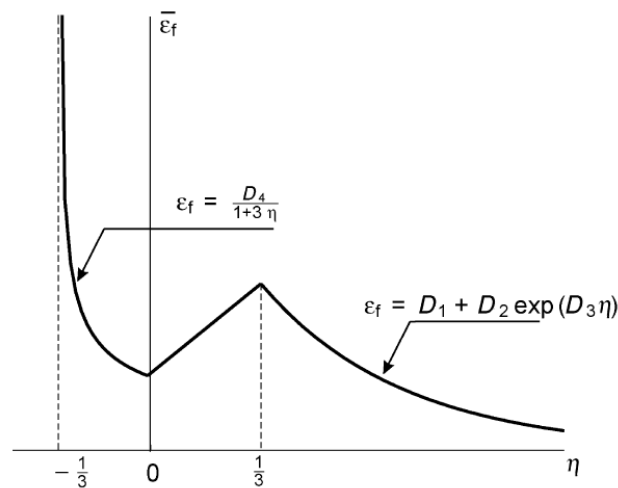
Assim, o modelo apresenta três parâmetros a calibrar em função do material:  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$ , mas que não são independentes. É recomendada a realização dos ensaios de tração e de corte para a identificação dos parâmetros do modelo. Com a realização destes ensaios os dois

<sup>1</sup> Foi necessário alterar a implementação original deste modelo no DD3IMP de modo a evitar o cálculo do dano para valores de triaxialidade inferiores ou iguais a -1/3. Este problema foi detetado com base no cálculo de valores de dano inferiores a zero.

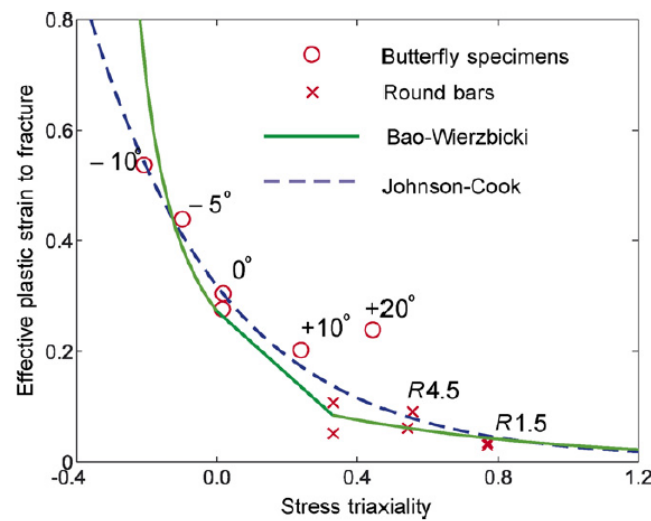
primeiros ramos da função  $\bar{\varepsilon}_f$  ficam definidos. Para identificar os parâmetros presentes no terceiro ramo da função são necessários pelo menos mais dois ensaios.

### 3.1.2. Características do modelo

De forma a ter uma noção mais clara da forma como o modelo descreve a evolução da deformação plástica equivalente na fratura com a triaxialidade apresenta-se, na Figura 3.1, a sua representação esquemática. Para valores de triaxialidade entre  $-\frac{1}{3}$  e 0, a deformação plástica equivalente na fratura decresce acentuadamente. Para a gama de triaxialidade entre 0 e  $\frac{1}{3}$  o segmento de reta que descreve a evolução de  $\bar{\varepsilon}_f$  pode ter declive positivo (como representado na Figura 3.1) ou negativo, conforme os resultados apresentados por Mae et al. (2007) (Figura 3.2). No terceiro ramo, ou seja, para triaxialidade superior a  $\frac{1}{3}$ , a deformação plástica equivalente na fratura decresce exponencialmente.



**Figura 3.1.** Representação esquemática da evolução da deformação plástica equivalente na fratura com a triaxialidade de acordo com o modelo de Bao-Wierzbicki (Mae et al. 2007).



**Figura 3.2.** Evolução da deformação plástica equivalente na fratura com a triaxialidade de acordo com o modelo de Bao-Wierzbicki segundo resultados apresentados por Mae et al. (2007).

### 3.1.3. Acumulação do dano

De acordo com Bao (2003), a variável de dano  $D$  tem uma evolução linear com a deformação plástica equivalente, tal que:

$$D = \int_0^{\bar{\epsilon}^p} \frac{1}{\bar{\epsilon}_f} d\bar{\epsilon}^p. \quad (3.5)$$

De acordo com esta expressão, a deformação plástica equivalente é normalizada com o valor da deformação plástica equivalente na fratura. Desta forma, para trajetórias monótonas, garante-se que a fratura dúctil ocorre para um valor de deformação plástica equivalente no ponto de Gauss igual ao previsto para a fratura ( $D = 1$ ).

## 3.1. Modelo de dano de Xue-Wierzbicki

### 3.1.1. Formulação matemática

De acordo com este modelo, a localização da fratura é definida em termos da deformação plástica equivalente acumulada pelo material, que é função da pressão hidrostática e do ângulo de Lode:

$$\bar{\epsilon}_f = f(p, \theta_L). \quad (3.6)$$

Desta forma, considera-se na previsão da fratura dúctil que o fenómeno de dano depende não só do primeiro invariante do tensor das tensões e do segundo invariante do tensor desviador, mas também do terceiro invariante do tensor desviador, através da influência do

ângulo de Lode (Xue 2007). A deformação plástica equivalente na fratura é, de acordo com este modelo, uma superfície definida pela seguinte expressão (Xue and Wierzbicki 2008):

$$\bar{\varepsilon}_f = \bar{\varepsilon}_{f_0} \mu_p \mu_\theta. \quad (3.7)$$

Nesta expressão  $\bar{\varepsilon}_{f_0}$  representa o valor de deformação plástica equivalente na fratura de referência (parâmetro a calibrar) e  $\mu_p$  e  $\mu_\theta$  são funções dependentes da pressão hidrostática,  $p$ , e do ângulo de Lode,  $\theta_L$ , respetivamente. O modelo considera que o efeito da pressão hidrostática é independente do efeito do ângulo de Lode e, como tal, a influência de cada uma destas variáveis é tratada de forma separada (Huang e Xue 2009).

A função  $\mu_p$  é dada por:

$$\mu_p = \begin{cases} 1 - q \ln \left( 1 - \frac{p}{p_{lim}} \right), & p \geq p_{lim} \left[ 1 - \exp \left( \frac{1}{q} \right) \right] \\ 0, & p < p_{lim} \left[ 1 - \exp \left( \frac{1}{q} \right) \right] \end{cases}. \quad (3.8)$$

$q$  ( $> 0$ ) e  $p_{lim}$  são parâmetros associados ao material, que necessitam de ser calibrados de acordo com os resultados experimentais. A Figura 3.3 apresenta a superfície de fratura prevista pelo modelo, no espaço das deformações e da tensão média, de modo a evidenciar os limites de influência da pressão hidrostática. De facto, a equação (3.8) impõe um valor mínimo de pressão abaixo do qual  $\mu_p$  toma o valor zero (*cut-off pressure* na Figura 3.3)<sup>2</sup>. Nesta condição, a deformação volumétrica torna-se considerável e o material colapsa para uma solitação de tração hidrostática (Xue e Wierzbicki 2008). Por outro lado, existe também um valor limite de pressão hidrostática,  $p_{lim}$ , para além do qual o modelo não prevê a acumulação de dano para o material (*limiting pressure* na Figura 3.3). Entre estes dois limites a influência da pressão na deformação plástica equivalente à fratura é descrita por uma função logarítmica.

A função  $\mu_\theta$  é definida através da seguinte expressão:

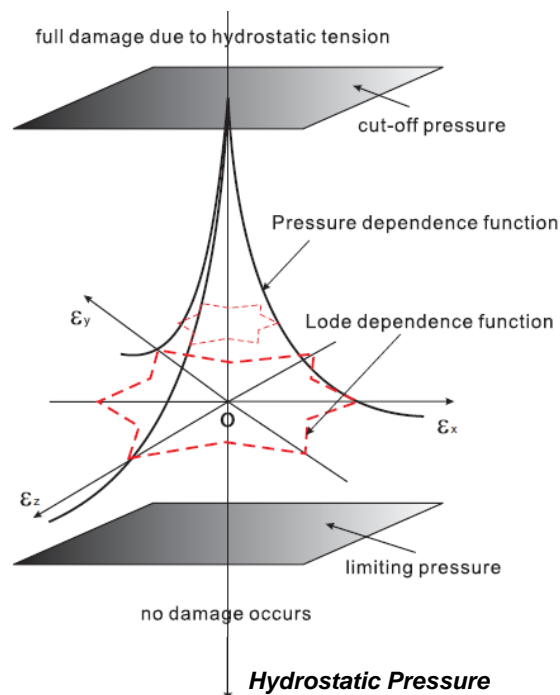
$$\mu_\theta = \gamma + (1 - \gamma) \left( \frac{6|\theta_L|}{\pi} \right)^k, \quad (3.9)$$

em que  $\gamma$  e  $k$  são parâmetros associados ao material ( $\gamma, k > 0$ ). O parâmetro  $\gamma$  é uma constante não-negativa que representa a razão entre a deformação plástica equivalente na

<sup>2</sup> Na implementação original deste modelo no DD3IMP a função  $\mu_p$  era calculada utilizando apenas o primeiro ramo da equação (3.8), independentemente do valor de pressão hidrostática calculado no ponto de Gauss. A implementação do modelo foi alterada de modo a garantir que a função  $\mu_p$  toma o valor zero para pressões hidrostáticas inferiores ao valor de *cut-off*.

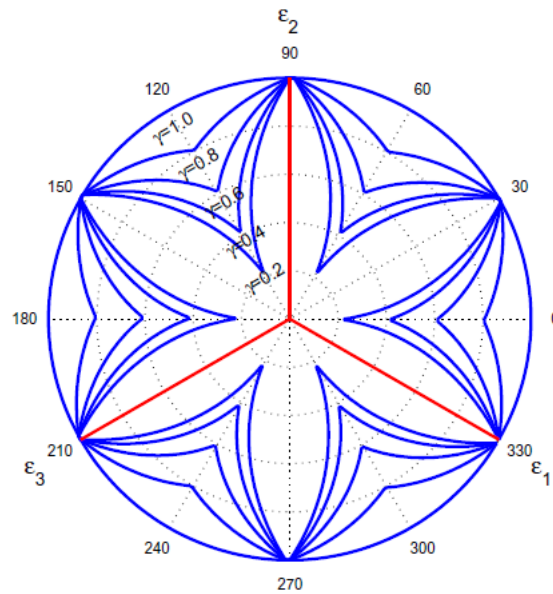
fratura para uma solitação de corte e a deformação plástica equivalente na fratura para uma solitação de tração uniaxial, para a mesma pressão hidrostática (Xue e Wierzbicki 2008). O modelo considera que o ângulo de Lode é definido pela equação (2.22). Na Figura 3.4 representa-se, no plano das deformações principais, a influência do parâmetro  $\gamma$  na função  $\mu_\theta$  para um valor de  $k$  igual a 1. Como é possível observar na Figura 3.4, a função  $\mu_\theta$  reduz-se à forma de um círculo para o caso particular em que  $\gamma = 1$  (Xue 2007).

O parâmetro  $k$  é responsável pela forma da função  $\mu_\theta$ . Na Figura 3.5 apresenta-se a influência da variação de  $k$  na evolução de  $\mu_\theta$  com o ângulo de Lode, para um valor de  $\gamma$  constante e igual a 0,4. Para  $k \neq 1$ , a função  $\mu_\theta$  deixa de ter um mínimo num vértice e uma variação linear com  $\theta_L$  e passa a apresentar uma curvatura. À medida que  $k$  aumenta, a função passa a apresentar uma região de valores constantes mínimos para uma gama de valores de  $\theta_L$  cada vez maior. Todas as simulações numéricas realizadas neste trabalho consideram  $k$  igual a 1.

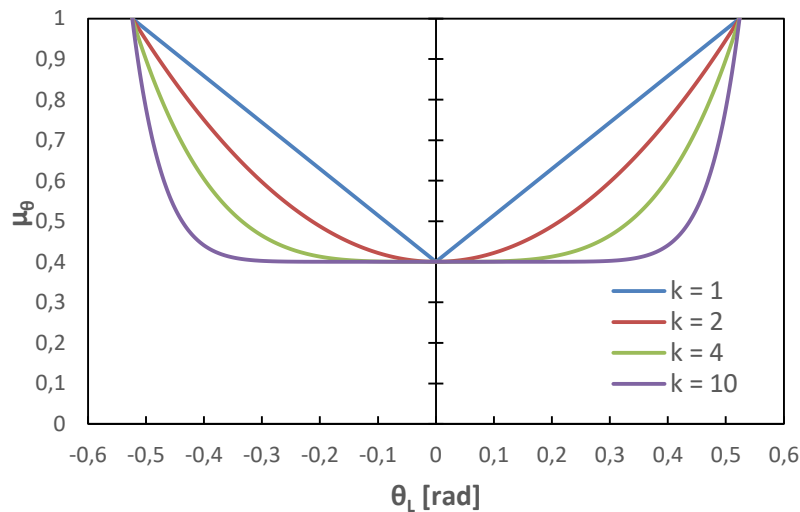


**Figura 3.3.** Superfície de fratura no espaço da deformação plástica e da pressão hidrostática (adaptado de Xue e Wierzbicki 2008).





**Figura 3.4.** Representação, no plano das deformações principais, da função  $\mu_\theta$  para diferentes valores de  $\gamma$  e  $k = 1$  (Xue e Wierzbicki 2008).

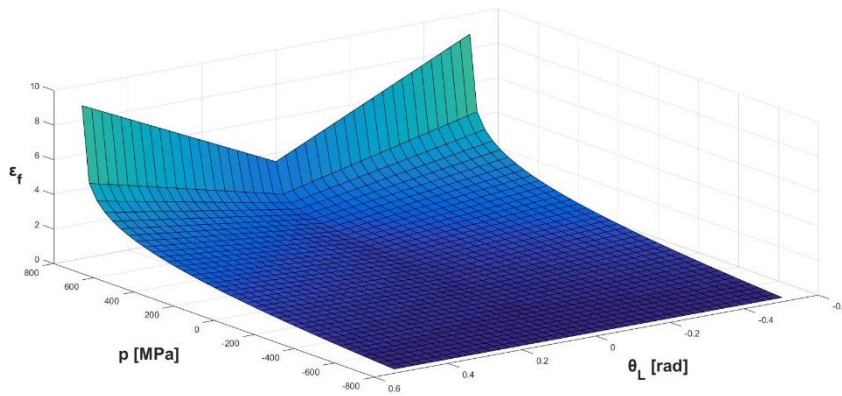


**Figura 3.5.** Influência do parâmetro  $k$  na evolução da função  $\mu_\theta$  com o ângulo de Lode para  $\gamma = 0,4$ .

### 3.1.2. Características do modelo

A Figura 3.6 apresenta um exemplo de uma superfície de fratura gerada por este modelo (obtida com o auxílio do Matlab®). É possível observar a evolução da deformação plástica equivalente na fratura com a pressão hidrostática e com o ângulo de Lode. Os resultados apresentados foram obtidos para a liga de alumínio 2024-T351 (Xue e Wierzbicki 2008). Esta figura mostra que, para um determinado valor do ângulo de Lode, a deformação plástica equivalente na fratura cresce de forma contínua com o aumento da pressão

hidrostática. Por outro lado, para um determinado valor fixo de pressão hidrostática, a deformação plástica equivalente na fratura apresenta uma variação com um comportamento simétrico em relação ao ângulo de Lode de 0, uma vez que a função  $\mu_\theta$  considera o módulo (ver equação (3.9)). Assim, a deformação plástica equivalente na fratura apresenta um valor mínimo para  $\theta_L = 0$  e atinge o seu valor máximo para os valores extremos do ângulo de Lode, ou seja,  $-\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{\pi}{6}$ .



**Figura 3.6.** Superfície de fratura prevista para a liga 2024-T351 pelo modelo de Xue-Wierzbicki (Xue e Wierzbicki 2008).

### 3.1.3. Acumulação do dano

A evolução da variável de dano é dada pela seguinte expressão (Xue e Wierzbicki 2008):

$$D = m \int_0^{\bar{\varepsilon}_c} \left( \frac{\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\varepsilon}_f} \right)^{(m-1)} \frac{1}{\bar{\varepsilon}_f} d\bar{\varepsilon}^p, \quad (3.10)$$

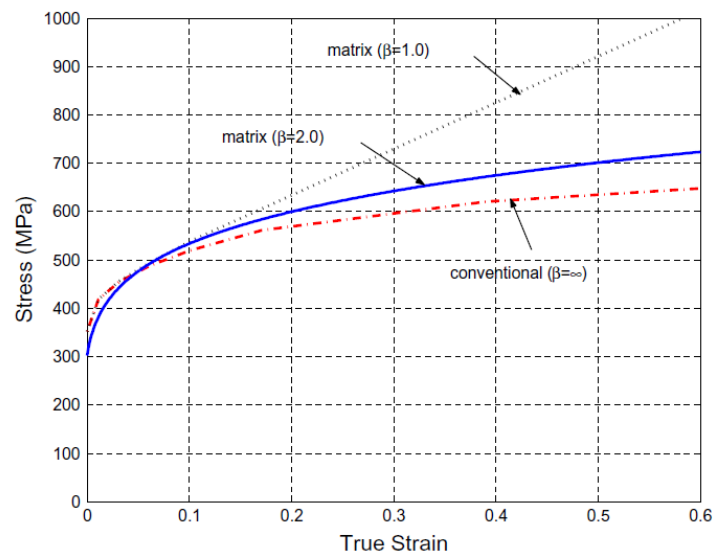
em que  $m$  representa um parâmetro do material e  $\bar{\varepsilon}_c$  é o valor crítico de deformação plástica equivalente para o qual a fratura ocorre, que é dependente da história de carregamento do material. Para trajetórias de carregamento monótonas, em que  $\bar{\varepsilon}_f$  é constante, observa-se que  $D$  atinge o valor 1 quando  $\bar{\varepsilon}_c = \bar{\varepsilon}_f$  (Xue e Wierzbicki 2008). Em resumo, o modelo apresenta seis parâmetros a calibrar em função do material:  $\bar{\varepsilon}_{f0}$ ,  $q$ ,  $p_{lim}$ ,  $\gamma$ ,  $k$  e  $m$ .

No caso específico deste modelo, os autores sugerem a sua utilização de forma acoplada, com o auxílio da seguinte expressão:

$$\bar{\sigma} \leq (1 - D^\beta)Y, \quad (3.11)$$

i.e. a função  $w(D)$  definida na equação (2.29) é função de um parâmetro  $\beta$  que descreve o amaciamento do material (constante não-negativa) e que necessita de calibração. Para o caso linear, ou seja,  $\beta = 1$ , a função de amaciamento que afeta a rigidez do material (módulo de elasticidade) é a mesma que afeta a sua resistência macroscópica. A introdução deste parâmetro é justificada uma vez que podem existir situações em que a função de amaciamento que afeta a rigidez é inferior à que descreve a acumulação do dano na resistência macroscópica do material (Xue e Wierzbicki 2008).

Tal como foi referido anteriormente, a utilização do modelo de forma acoplada afeta a identificação dos parâmetros do modelo constitutivo, em particular da lei de encruamento. A Figura 3.7 apresenta as curvas tensão-deformação da matriz para valores de  $\beta$  igual a 1, 2 e  $\infty$  para a liga de alumínio 2024-T351 (Xue e Wierzbicki 2008). No caso de se pretender utilizar este modelo de dano de forma desacoplada, em que não se considera o amaciamento progressivo do material, recupera-se a curva tensão-deformação convencional obtida com base nos resultados experimentais ( $\beta = \infty$ ).



**Figura 3.7.** Influência da variação do parâmetro  $\beta$  nas curvas tensão-deformação da matriz para a liga de alumínio 2024-T351 (Xue e Wierzbicki 2008).



## 4. VALIDAÇÃO DOS MODELOS DE DANO

Neste capítulo, é validada a implementação dos modelos de dano anteriormente apresentados no *solver* DD3IMP, ou seja, são simulados diferentes tipos de ensaios de modo a prever a fratura dúctil e comparar os resultados com os existentes na literatura.

De acordo com a teoria clássica da plasticidade, para descrever o comportamento plástico de um material associado a um determinado estado de tensão é necessário definir: um critério de plasticidade, que traduz a relação entre as componentes do tensor das tensões no instante em que o material transita do domínio elástico para o domínio plástico; uma lei de encruamento, que descreve a evolução da tensão de escoamento do material com a deformação plástica e uma lei de plasticidade, que expressa, em cada instante, a relação entre os incrementos das componentes do tensor das deformações e as componentes do tensor das tensões (Banabic 2010). Neste trabalho considera-se que os materiais são isotrópicos, ou seja, que as suas propriedades mecânicas não variam com a direção considerada. Neste contexto, recorre-se ao critério de plasticidade de von Mises (ver Equação (2.12)). Assume-se ainda que o encruamento é descrito apenas por uma componente isotrópica, ou seja, a superfície de plasticidade sofre apenas uma expansão uniforme após a aplicação de um incremento de deformação plástica (Banabic 2010). Por último, recorre-se a uma lei de plasticidade associada para estabelecer as relações tensão-deformação, expressa da seguinte forma:

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (4.1)$$

Nesta expressão  $\mathbf{D}^p$  representa o tensor velocidade de deformação plástica,  $\dot{\lambda}$  representa a taxa de variação do denominado multiplicador plástico (que se demonstra ser equivalente à taxa de variação da deformação plástica equivalente) e  $F(\boldsymbol{\sigma})$  representa a função que descreve o critério de plasticidade. No caso do critério de plasticidade adotado ser o critério de von Mises tem-se:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\lambda \mathbf{S}. \quad (4.2)$$

Assim, a relação entre a deformação e a tensão no sistema de eixos principal pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{cases} d\varepsilon_1 = d\lambda \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} \\ d\varepsilon_2 = d\lambda \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3} \\ d\varepsilon_3 = d\lambda \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \end{cases} \quad (4.3)$$

#### 4.1. Modelo de dano de Bao-Wierzbicki

O modelo de dano de Bao-Wierzbicki foi aplicado para prever a fratura dúctil de uma liga de alumínio obtida por fundição, sendo os resultados de referência os apresentados por Mae et al. (2007).

##### 4.1.1. Material: Al-Si

As ligas de alumínio obtidas por fundição apresentam uma ampla gama de aplicações no fabrico de componentes de paredes finas com formas complexas, em geral mais relacionados com as indústrias automóvel e aeroespacial. Para melhorar o desempenho destes componentes obtidos por fundição é necessário descrever corretamente o comportamento plástico do material e prever corretamente a sua fratura (Mae et al. 2007).

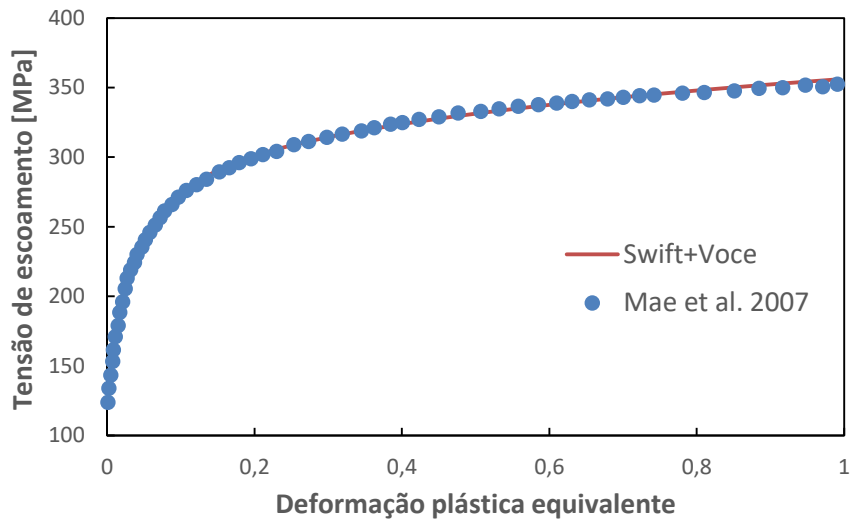
A liga de alumínio em estudo é uma liga de Al-Si-Fe-Cu-Mg-Mn com a composição química que se apresenta na Tabela 4.1 (valores indicados em termos da percentagem ponderal). A designação da liga não é indicada por Mae et al. (2007), no entanto, uma vez que o silício (Si) é o componente de liga maioritário, neste documento este material será designado por liga Al-Si. As propriedades elásticas documentadas para esta liga são o módulo de elasticidade longitudinal  $E$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$ , cujos valores se encontram listados na Tabela 4.2.

**Tabela 4.1.** Composição química da liga Al-Si em estudo (wt%) (Mae et al. 2007).

Al	Cu	Si	Mg	Fe	Mn	Sn	Ni	Outros
89,49	0,06	9,00	0,30	0,50	0,40	~ 0,05	~ 0,05	~ 0,15

**Tabela 4.2.** Propriedades elásticas da liga Al-Si em estudo (Mae et al. 2007).

$E$ [GPa]	$\nu$
86,0	0,33

**Figura 4.1.** Ajuste da lei de encruamento ao conjunto de pontos obtidos em Mae et al. (2007).

Os parâmetros da lei de encruamento do material não são fornecidos por Mae et al. (2007), pelo que foi necessário proceder à sua determinação com base no ajuste da curva tensão-deformação. Para tal, recorreu-se ao *software* Plot Digitizer®, para selecionar os pontos de forma a obter as coordenadas de tensão e de deformação. Posteriormente, procedeu-se ao ajuste de diferentes leis de encruamento, com recurso ao *Solver* disponível no MS Excel®. A lei de encruamento que conduziu à minimização da distância aos pontos digitalizados corresponde a uma combinação linear da lei de Swift com a lei de Voce (Swift+Voce), como se mostra na Figura 4.1. Esta lei de encruamento é descrita pela expressão:

$$Y = \alpha_p Y_S + (1 - \alpha_p) Y_V, \quad (4.4)$$

em que  $\alpha_p$  representa um fator de ponderação, variável entre 0 e 1 ( $\alpha_p \in [0,1]$ ),  $Y_S$  representa a tensão de escoamento de acordo com a lei de Swift e  $Y_V$  refere-se à tensão de escoamento calculada de acordo com a lei de Voce. A lei de Swift é descrita pela seguinte expressão:

$$Y_S = K(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p)^n, \quad (4.5)$$

em que  $K$ ,  $\varepsilon_0$  e  $n$  são parâmetros. A lei de Voce é dada por:

$$Y_V = Y_0 + (Y_{sat} - Y_0)[1 - \exp(-C_Y \bar{\epsilon}^p)]. \quad (4.6)$$

Os parâmetros desta lei são  $Y_0$ ,  $Y_{sat}$  e  $C_Y$ . Na Tabela 4.3 listam-se os parâmetros da lei utilizada para descrever a encruamento do material.

**Tabela 4.3.** Parâmetros utilizados para descrever a lei de encruamento da liga Al-Si obtida por fundição.

$\alpha_p$	$K$ [MPa]	$\epsilon_0$	$n$	$Y_0$ [MPa]	$Y_{sat}$ [MPa]	$C_Y$
0,6341	388,830	0,0001	0,1541	88,658	299,804	21,122

Dos critérios de plasticidade implementados no *solver* DD3IMP em combinação com a lei de Swift+Voce, o selecionado foi o critério CB2001, proposto por Cazacu e Barlat (Cazacu e Barlat 2001), que é expresso de acordo com a seguinte expressão:

$$f^0 = (J_2^0)^3 - c(J_3^0)^2 = k^2. \quad (4.7)$$

Na expressão anterior  $c$  é uma constante e  $k^2$  é definido por:

$$k^2 = 27 \left( \frac{Y}{3} \right)^6. \quad (4.8)$$

O terceiro invariante generalizado do tensor desviador,  $J_3^0$ , é expresso por uma função polinomial de ordem 3 com 11 coeficientes  $b_k$  ( $k = 1, \dots, 11$ ):

$$\begin{aligned} J_3^0 = & \frac{1}{27}(b_1 + b_2)\sigma_x^3 + \frac{1}{27}(b_3 + b_4)\sigma_y^3 + \frac{1}{27}[2(b_1 + b_4) - b_2 - b_3]\sigma_z^3 \\ & - \frac{1}{9}(b_1\sigma_y + b_2\sigma_z)\sigma_x^2 - \frac{1}{9}(b_3\sigma_z + b_4\sigma_x)\sigma_y^2 \\ & - \frac{1}{9}[(b_1 - b_2 + b_4)\sigma_x + (b_1 - b_3 + b_4)\sigma_y]\sigma_z^2 \\ & + \frac{2}{9}(b_1 + b_4)\sigma_x\sigma_z\sigma_y - \frac{\sigma_{xz}^2}{3}[2b_9\sigma_y - b_8\sigma_z - (2b_9 - b_8)\sigma_x] \\ & - \frac{\sigma_{xy}^2}{3}[2b_{10}\sigma_z - b_5\sigma_y - (2b_{10} - b_5)\sigma_x] \\ & - \frac{\sigma_{yz}^2}{3}[(b_6 + b_7)\sigma_x - b_6\sigma_y - b_7\sigma_z] + 2b_{11}\sigma_{xy}\sigma_{xz}\sigma_{yz}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

O segundo invariante generalizado do tensor desviador,  $J_2^0$ , é expresso por uma função polinomial de ordem 2 com 6 coeficientes  $a_k$  ( $k = 1, \dots, 6$ ):

$$J_2^0 = \frac{a_1}{6}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \frac{a_2}{6}(\sigma_y - \sigma_z)^2 + \frac{a_3}{6}(\sigma_x - \sigma_z)^2 + a_4\sigma_{xy}^2 + a_5\sigma_{xz}^2 + a_6\sigma_{yz}^2. \quad (4.10)$$



Existem, assim, no total, 18 coeficientes a determinar. Em isotropia, os coeficientes  $a_k$  e  $b_k$  são unitários e o coeficiente  $c$  tem o valor zero, reduzindo-se o critério CB2001 ao critério de plasticidade de von Mises.

Mae et al. (2007) utilizaram uma abordagem híbrida numérico-experimental para identificar os parâmetros que descrevem o *onset* da fratura em termos da deformação plástica equivalente, que correspondem aos indicados na Tabela 4.4. Estes foram utilizados na simulação numérica de diferentes ensaios mecânicos, que são descritos na secção seguinte. Convém referir que estes parâmetros correspondem a  $\bar{\epsilon}_{f,s} = 0,2733$  e  $\bar{\epsilon}_{f,t} = 0,0847$ , uma vez que estes são os parâmetros a definir no DD3IMP, sendo que estes valores são obtidos para  $D_3 = -1,54$ , uma vez que este é o valor pré-definido no DD3IMP.

**Tabela 4.4.** Parâmetros calibrados para a equação que descreve o modelo de dano de Bao-Wierzbicki para a liga Al-Si obtida por fundição (Mae et al. 2007).

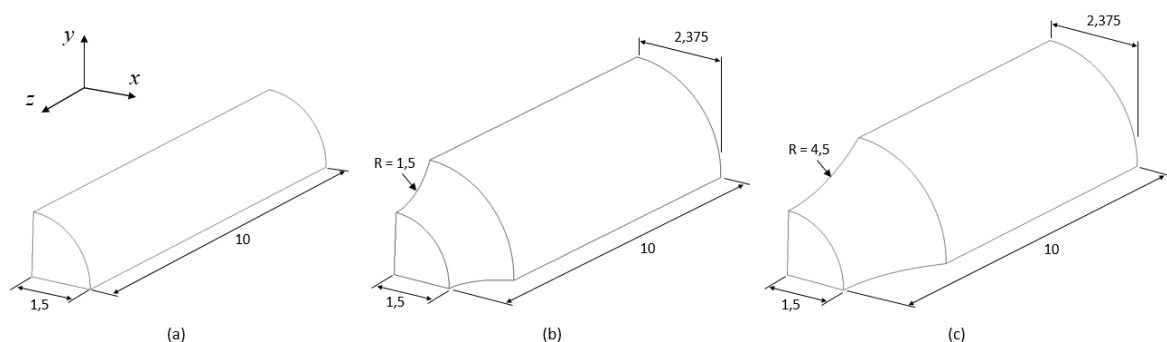
$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$
0,0	0,1417	-1,545	0,2733

#### 4.1.2. Modelos numéricos

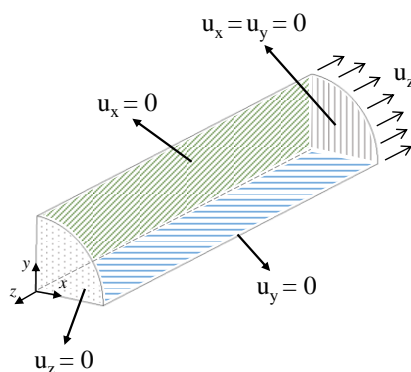
De forma a abranger uma ampla gama de triaxialidade foram realizadas simulações numéricas com provetes de diversas geometrias, para assim induzir diferentes estados de tensão no material. Realizaram-se simulações do ensaio de tração de provetes cilíndricos, sem entalhe e com entalhe (sendo estudadas duas situações distintas: entalhes com  $R = 1,5$  mm e  $R = 4,5$  mm). O outro conjunto de ensaios recorre ao provete *butterfly*, que, devido à sua geometria e à forma como pode ser orientado em relação à direção de carga da máquina de tração, permite produzir solicitações de corte ou uma combinação de corte e tração ou corte e compressão. No presente estudo, realizaram-se simulações para valores do ângulo de inclinação do provete em relação à direção de carga de:  $-10^\circ$ ,  $-5^\circ$ ,  $0^\circ$  (corte),  $10^\circ$  e  $20^\circ$ .

As dimensões consideradas para cada provete cilíndrico são indicadas na Figura 4.2. O modelo do provete cilíndrico sem entalhe foi representado sem a zona correspondente à amarra, tendo-se, no entanto, garantido que o seu comprimento útil apresenta uma dimensão adequada. Para cada caso, foi modelado apenas um oitavo da geometria do

proвете, devido à simetria em relação aos planos  $Oxy$ ,  $Oyz$  e  $Oxz$ . Para os três modelos de provetes cilíndricos foram aplicadas as condições de fronteira apresentadas na Figura 4.3. A secção transversal de cada modelo está representada no plano  $Oxy$ , sendo o eixo  $Oz$  a direção segundo a qual se aplica o deslocamento de tração. Na Tabela 4.5 apresentam-se os valores absolutos de deslocamento ( $u_z$ ) impostos em cada caso, de modo a garantir a ocorrência de fratura.



**Figura 4.2.** Dimensões dos modelos dos provetes cilíndricos (mm): a) Proвете sem entalhe; b) Proвете com entalhe de  $R = 1,5$  mm; c) Proвете com entalhe de  $R = 4,5$  mm.



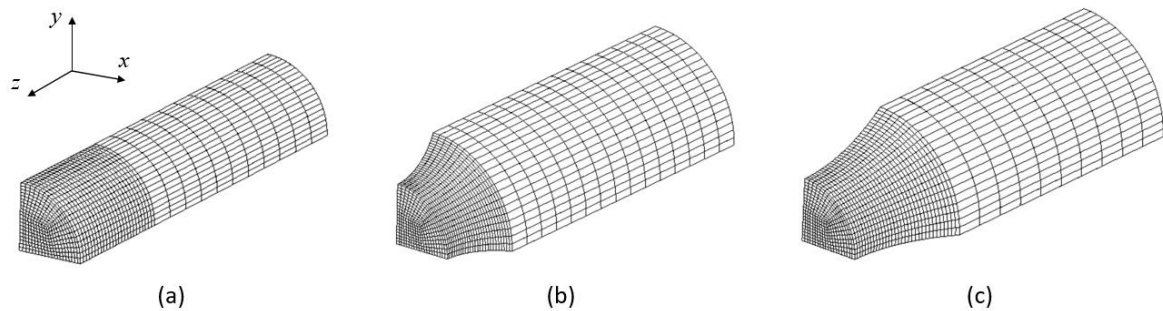
**Figura 4.3.** Condições de fronteira aplicadas aos modelos dos provetes cilíndricos.

**Tabela 4.5.** Deslocamentos impostos nas simulações numéricas realizadas com os modelos dos provetes cilíndricos.

Modelo	$u_z$ [mm]
Sem entalhe	1,2
Entalhe $R = 1,5$ mm	0,2
Entalhe $R = 4,5$ mm	0,4

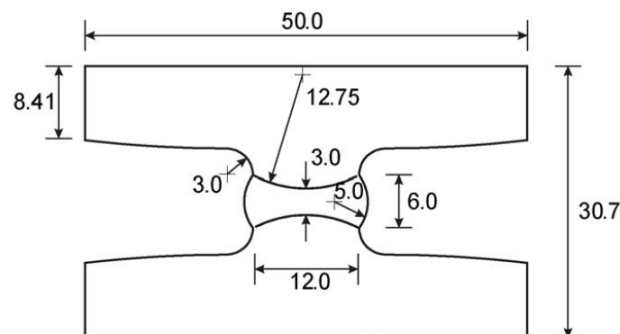
A malha de elementos finitos utilizada em cada um dos modelos dos provetes cilíndricos é constituída por elementos hexaédricos e é estruturada. A região junto ao centro

de cada provete apresenta um maior nível de refinamento, dado que é nessa zona que se prevê que ocorra a acumulação de dano máxima. Na Figura 4.4 mostra-se a malha de elementos finitos considerada para cada um dos modelos em estudo.

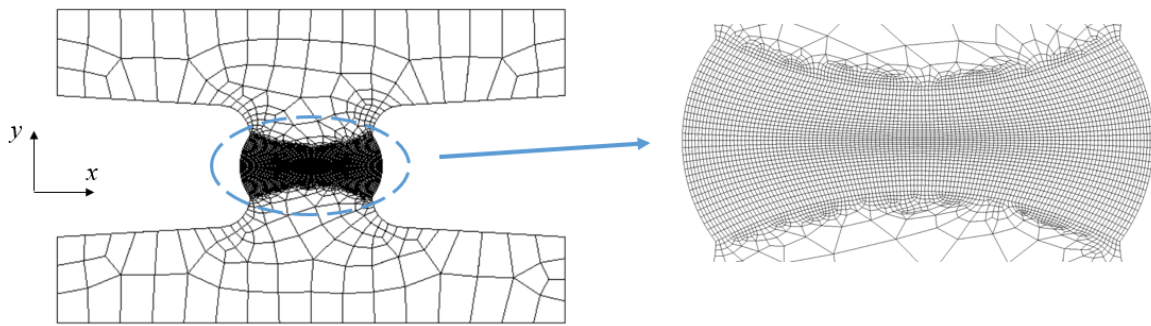


**Figura 4.4.** Malha de elementos finitos dos modelos dos provetes cilíndricos: a) Provette sem entalhe (10800 elementos); b) Provette com entalhe de  $R = 1,5$  mm (12600 elementos); c) Provette com entalhe de  $R = 4,5$  mm (12600 elementos).

O modelo do provete *butterfly* foi representado na íntegra, sendo as suas dimensões indicadas na Figura 4.5. Para assegurar que a fratura ocorre na região central do provete, esta zona apresenta uma espessura de apenas 1 mm, bastante inferior à espessura do restante provete, que é de 3 mm (Mae et al. 2007). A malha de elementos finitos utilizada no modelo deste provete consiste numa malha semi-estruturada de elementos hexaédricos. Em espessura (direção do eixo  $Oz$ ), a malha é estruturada em todo o provete. No plano  $Oxy$ , existem duas zonas distintas: uma zona de malha estruturada, na região central do provete, e uma zona de malha não-estruturada, na restante área do plano, como se mostra na Figura 4.6.



**Figura 4.5.** Dimensões do modelo do provete *butterfly* (mm) (Mae et al. 2007).

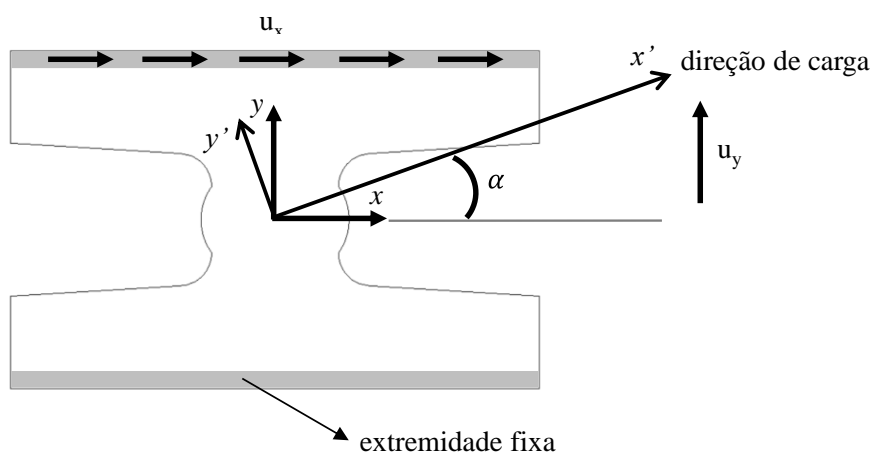


**Figura 4.6.** Malha de elementos finitos do modelo do provete *butterfly* (49020 elementos).

No caso em que o ângulo de inclinação do modelo é de  $0^\circ$  em relação à direção de carga (Figura 4.6), a sollicitação é de corte. Nesta situação, as condições de fronteira a aplicar ao modelo são: extremidade inferior encastrada e deslocamento imposto, segundo a direção  $Ox$ , na extremidade superior. A alteração do ângulo  $\alpha$  representado na Figura 4.7 permite produzir estados de tensão que são uma combinação de corte e tração ( $\alpha$  positivo) ou corte e compressão ( $\alpha$  negativo). Para estes casos, torna-se também necessário definir o deslocamento a impor segundo  $Oy$ . A relação entre os deslocamentos impostos segundo  $Oy$  e segundo  $Ox$  é dada por:

$$\tan \alpha = \frac{u_y}{u_x} \Leftrightarrow u_y = u_x \tan \alpha \quad (4.11)$$

Na Tabela 4.6 resumem-se os deslocamentos impostos para cada valor de  $\alpha$  considerado.



**Figura 4.7.** Ângulo de inclinação do modelo do provete *butterfly* em relação à direção de carga da máquina de tração.

**Tabela 4.6.** Deslocamentos impostos nas simulações numéricas realizadas com o modelo do provete *butterfly*.

$\alpha$ [°]	$u_x$ [mm]	$u_y$ [mm]
-10	2	-0,3527
-5	1	-0,0875
0	1	0
10	1	0,17633
20	1	0,36397

A utilização do sistema de eixos global apresentado na Figura 4.7 facilita a realização das simulações numéricas para as diferentes condições de carga, mas não permite uma comparação direta com os resultados experimentais. Devido à rotação do provete em relação à direção de carga da máquina de tração para solicitações que não a de corte, o sistema de eixos onde se avaliam as forças e os deslocamentos deve ser o  $Ox'y'$ , como indicado na Figura 4.7. Assim, torna-se necessário definir a matriz de rotação  $\mathbf{R}$  do sistema de eixos  $Oxy$  para o sistema de eixos  $Ox'y'$ :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos(90^\circ - \alpha) \\ \cos(90^\circ + \alpha) & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

de tal forma que os vetores de força e de deslocamento no sistema de eixos final (designados por  $\mathbf{F}'$  e  $\mathbf{u}'$ ) se relacionam com os respetivos vetores no sistema de eixos inicial ( $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{u}$ ) por:

$$\mathbf{F}' = \begin{Bmatrix} F'_x \\ F'_y \end{Bmatrix} = \mathbf{R}\mathbf{F} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \cos \alpha + F_y \cos(90^\circ - \alpha) \\ F_x \cos(90^\circ + \alpha) + F_y \cos \alpha \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

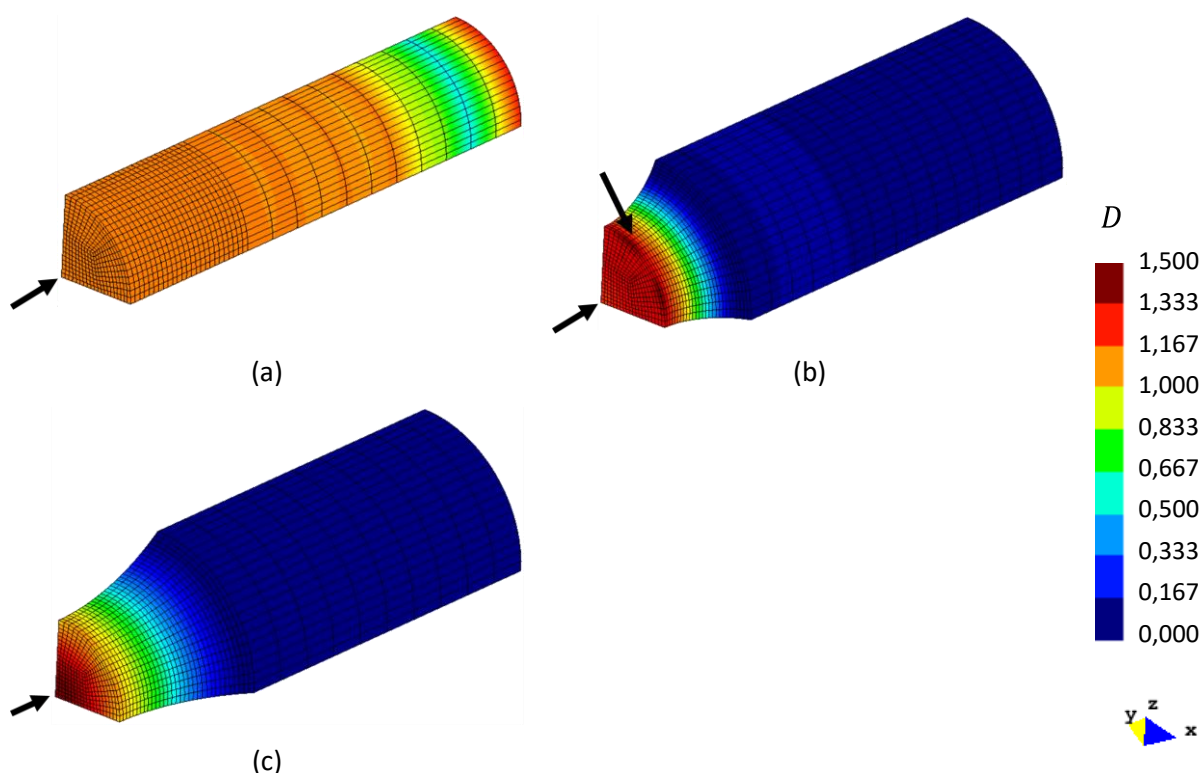
$$\mathbf{u}' = \mathbf{R}\mathbf{u} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x \cos \alpha + u_y \cos(90^\circ - \alpha) \\ u_x \cos(90^\circ + \alpha) + u_y \cos \alpha \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

#### 4.1.3. Resultados e discussão

Nesta secção apresentam-se os resultados obtidos para a evolução da força com o deslocamento imposto (valores globais, dado que a força e o deslocamento são avaliados nos nós sujeitos à condição de carga imposta), a evolução da triaxialidade com a deformação plástica equivalente e os valores de triaxialidade e deformação plástica equivalente na fratura previstos pelo modelo de dano (valores locais, avaliados num determinado ponto de Gauss de um elemento finito). Na Figura 4.8 e na Figura 4.9 mostra-se a localização da fratura dúctil prevista pelo modelo de dano de Bao-Wierzbicki para os provetes cilíndricos e para o

provetes *butterfly*, respetivamente. Nestas figuras assinala-se com uma seta o elemento finito para o qual foi selecionado um ponto de Gauss para análise dos resultados. Em geral, a zona de localização da fratura prevista numericamente coincide com o que é observado experimentalmente, i.e. no caso dos provetes cilíndricos, a acumulação do dano é máxima na zona central e no caso do provete *butterfly* é máxima à superfície, na região central (Mae et al. 2007). No entanto, em alguns casos, a localização da fratura foi prevista numa região que não corresponde à obtida experimentalmente.

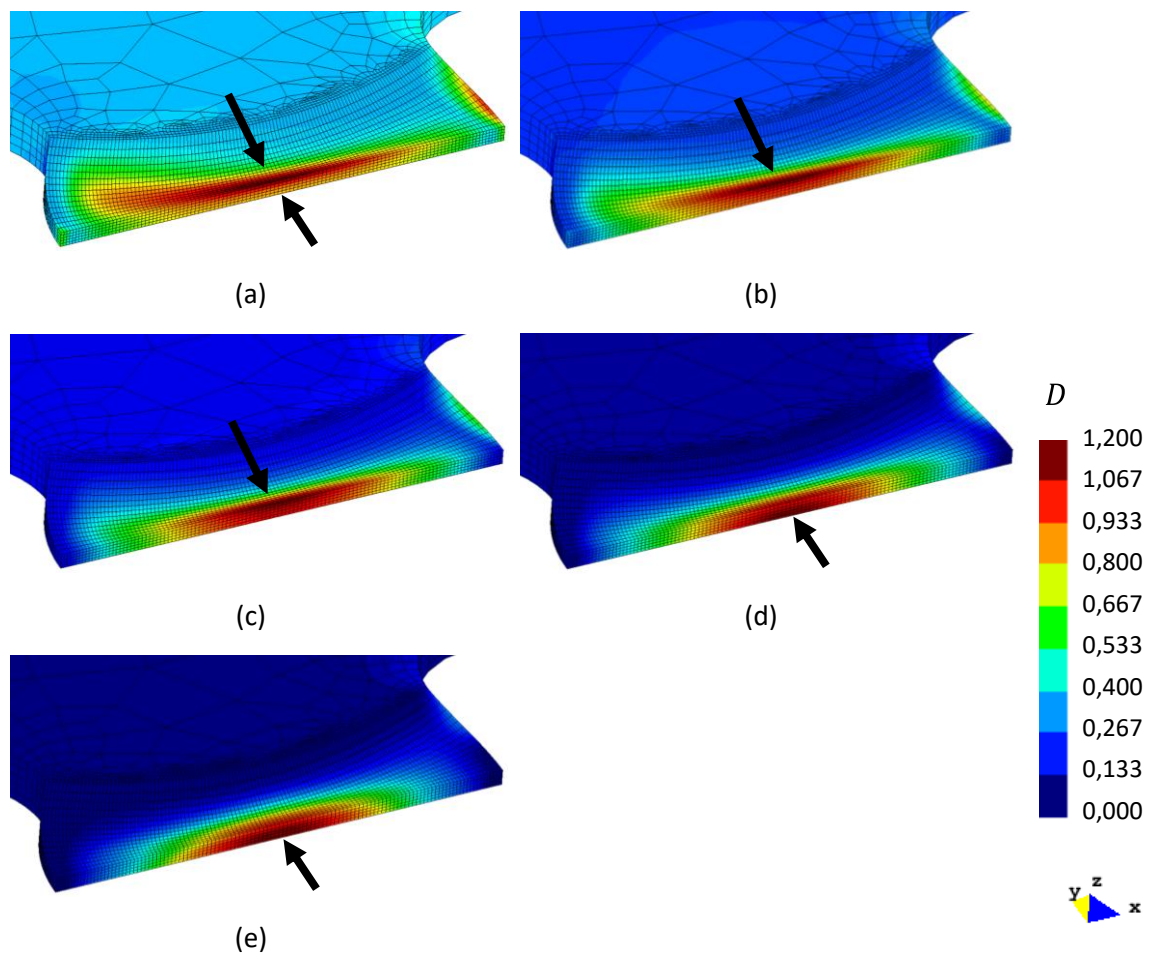
No caso do modelo do provete cilíndrico com entalhe de  $R = 1,5$  mm, a fratura dúctil ocorre na secção de menor área, como seria de esperar, mas não no centro do modelo, localizando-se à superfície. Para este caso, foram analisados os resultados para um ponto de Gauss do elemento finito onde o dano é máximo e para um ponto de Gauss do elemento finito localizado no centro do modelo (ver Figura 4.8).



**Figura 4.8.** Localização da fratura dúctil para as simulações realizadas com os modelos dos provetes cilíndricos: a) Provette sem entalhe; b) Provette com entalhe de  $R = 1,5$  mm; c) Provette com entalhe de  $R = 4,5$  mm.

Para o provete *butterfly*, a fratura dúctil ocorre na superfície da região central do modelo para os ensaios com componente de compressão e para o ensaio de corte, como se

pode observar na Figura 4.9 a), b) e c). No entanto, nos casos em que é imposta uma componente de tração (Figura 4.9 d) e e)), a região onde o dano acumulado é máximo é no interior do modelo. Para as simulações realizadas com o modelo deste provete, os resultados foram analisados no ponto de Gauss onde o dano acumulado é máximo de acordo com a simulação numérica. No caso do ensaio com  $\alpha = -10^\circ$  foi também analisado um ponto de Gauss no centro do modelo (ver Figura 4.9).



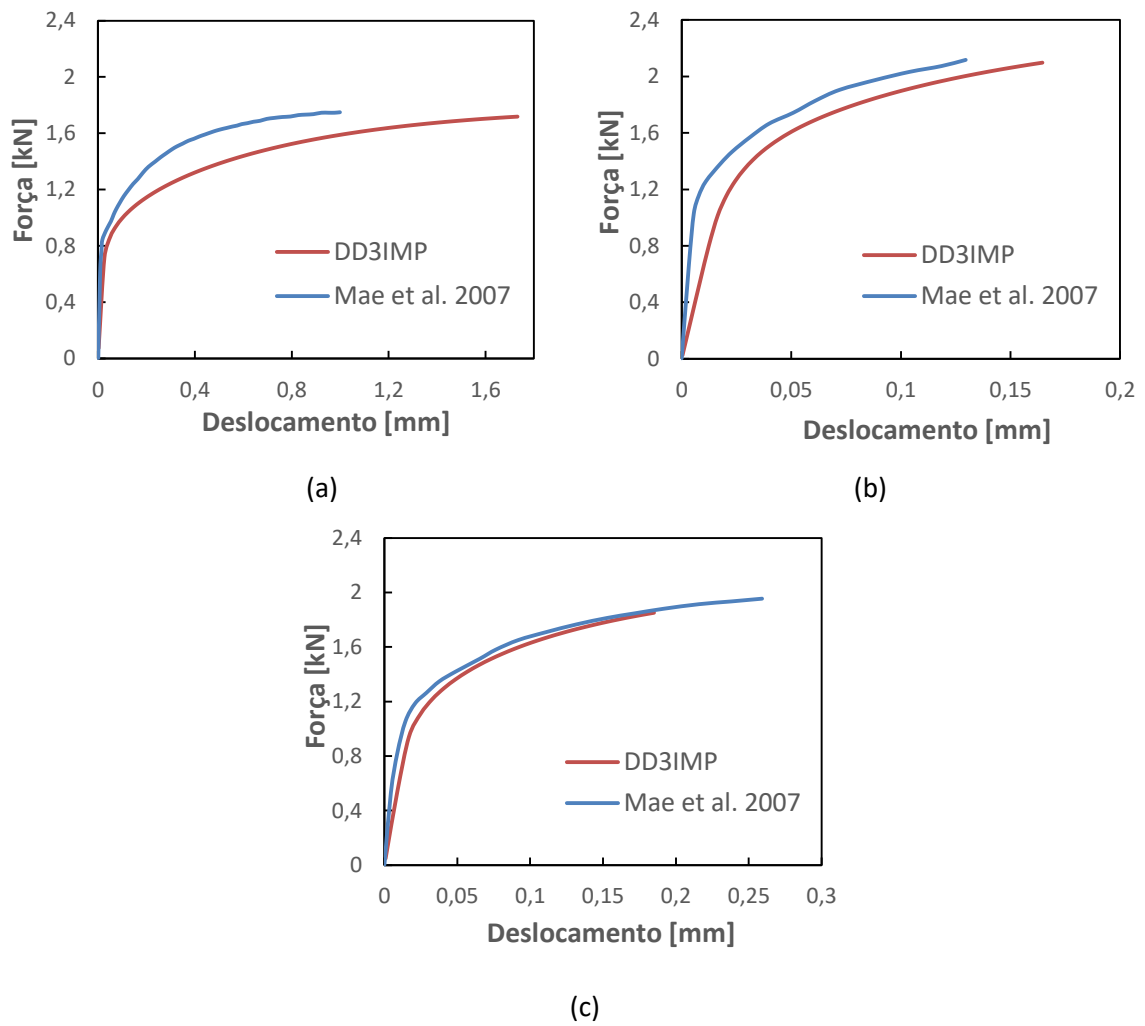
**Figura 4.9.** Localização da fratura dúctil para as simulações realizadas com o modelo do provete *butterfly*: a)  $\alpha = -10^\circ$ ; b)  $\alpha = -5^\circ$ ; c)  $\alpha = 0^\circ$ ; d)  $\alpha = 10^\circ$ ; e)  $\alpha = 20^\circ$ .

Na Figura 4.10 e na Figura 4.11 apresentam-se as curvas de evolução da força com o deslocamento para o caso dos modelos dos provetes cilíndricos e do modelo do provete *butterfly*, respetivamente. As figuras mostram também os resultados numéricos reportados por Mae et al. (2007). Para efeitos de comparação de resultados, no caso dos

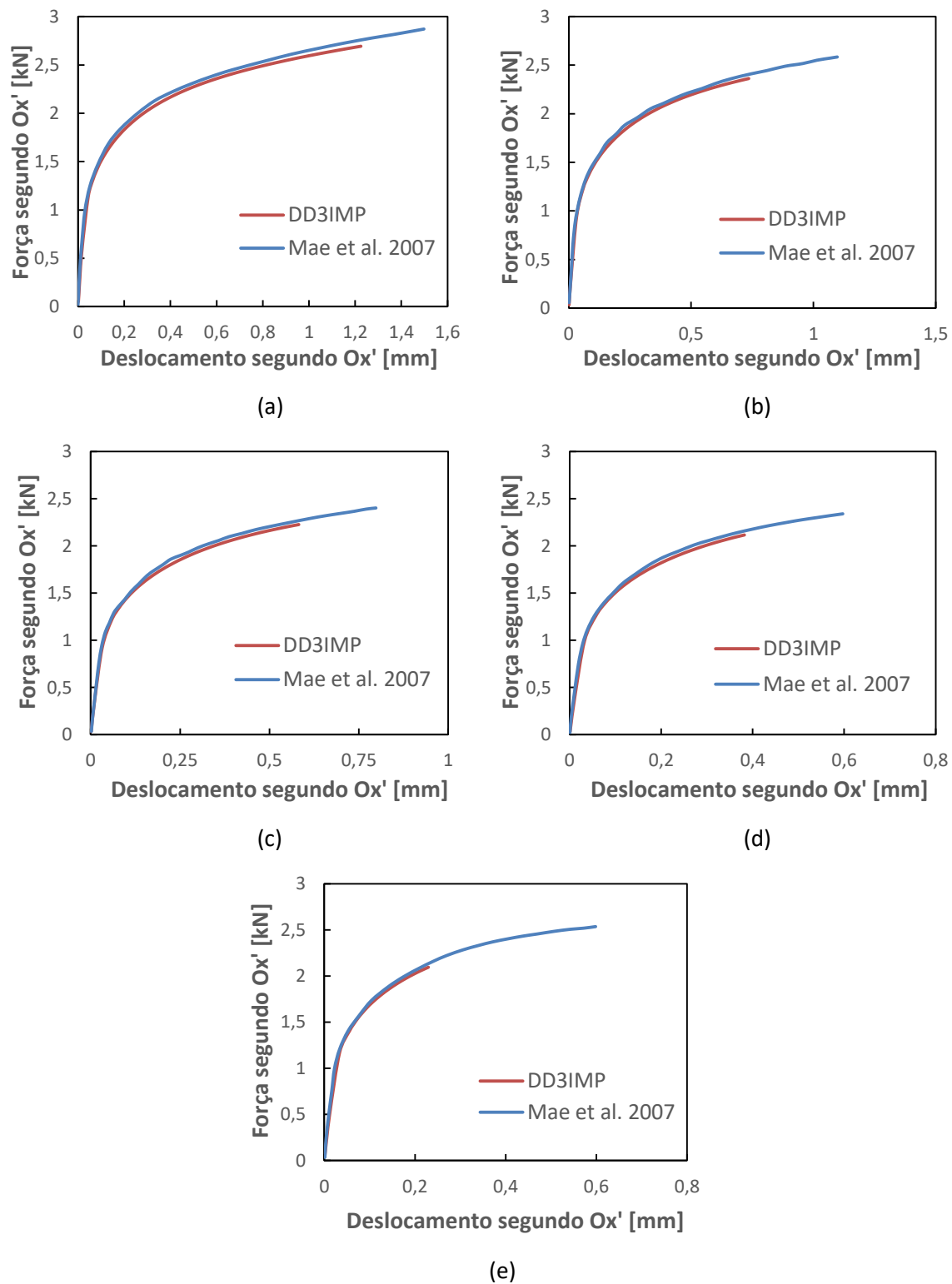
provetes cilíndricos é necessário duplicar o valor do deslocamento em relação ao imposto na simulação. No caso do modelo do provete *butterfly*, apresenta-se a força e o deslocamento segundo a direção  $Ox'$  (ver Figura 4.7). O último valor de deslocamento das curvas apresentadas nas figuras corresponde ao previsto pela simulação numérica na fratura, i.e. o valor de deslocamento no instante em que a variável de dano  $D$  ultrapassa a unidade. De realçar ainda que, devido à grande diferença observada nos valores do deslocamento na fratura entre as várias simulações, o eixo horizontal das figuras não apresenta sempre a mesma escala. Na Figura 4.10 observa-se que os valores da força são ligeiramente subestimados no caso do modelo do provete sem entalhe e do provete com entalhe de  $R = 1,5$  mm. Para a simulação realizada com o modelo do provete com entalhe de  $R = 4,5$  mm obteve-se uma excelente correlação. O deslocamento na fratura é sobrestimado nos casos em que a força é subestimada. De notar também a diferença relativa entre o deslocamento à fratura para o modelo sem entalhe em relação aos outros. De modo a compreender melhor esta diferença, no Apêndice é analisado em maior detalhe este modelo. Na Figura 4.11 observa-se a excelente correlação existente entre as curvas obtidas para o provete *butterfly* com recurso ao DD3IMP e as curvas reportadas por Mae et al. (2007). No entanto, o deslocamento na fratura é sempre subestimado. A dimensão do incremento de deslocamento adotado nas simulações numéricas realizadas com o DD3IMP não influencia esta tendência.

A evolução da triaxialidade com a deformação plástica equivalente é apresentada na Figura 4.12 e na Figura 4.13 para os modelos dos provetes cilíndricos e para o modelo do provete *butterfly*, respetivamente. A comparação dos resultados obtidos com os apresentados em Mae et al. (2007) revela uma boa correlação para o provete sem entalhe e para o com entalhe de  $R = 4,5$  mm (ver Figura 4.12). No caso do modelo com entalhe de  $R = 1,5$  mm apresentam-se duas curvas: uma correspondente a um ponto de Gauss do elemento onde o dano é máximo (Entalhe  $R = 1,5$  mm superfície) e outra que diz respeito a um ponto de Gauss do elemento localizado no centro do modelo (Entalhe  $R = 1,5$  mm centro). A curva correspondente ao ponto que pertence ao elemento central apresenta um comportamento muito próximo da curva apresentada na literatura. No entanto, é possível observar que o ponto de Gauss à superfície apresenta um valor menor de triaxialidade,  $\sim 0,45$ . No global, nestes ensaios o valor da triaxialidade é aproximadamente constante.

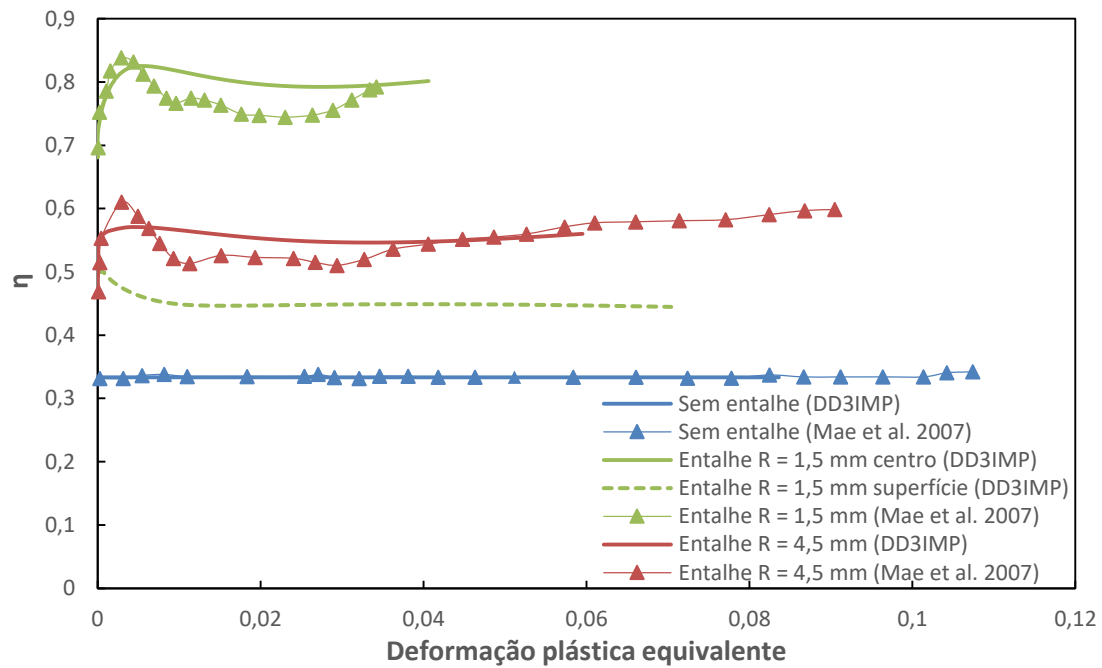




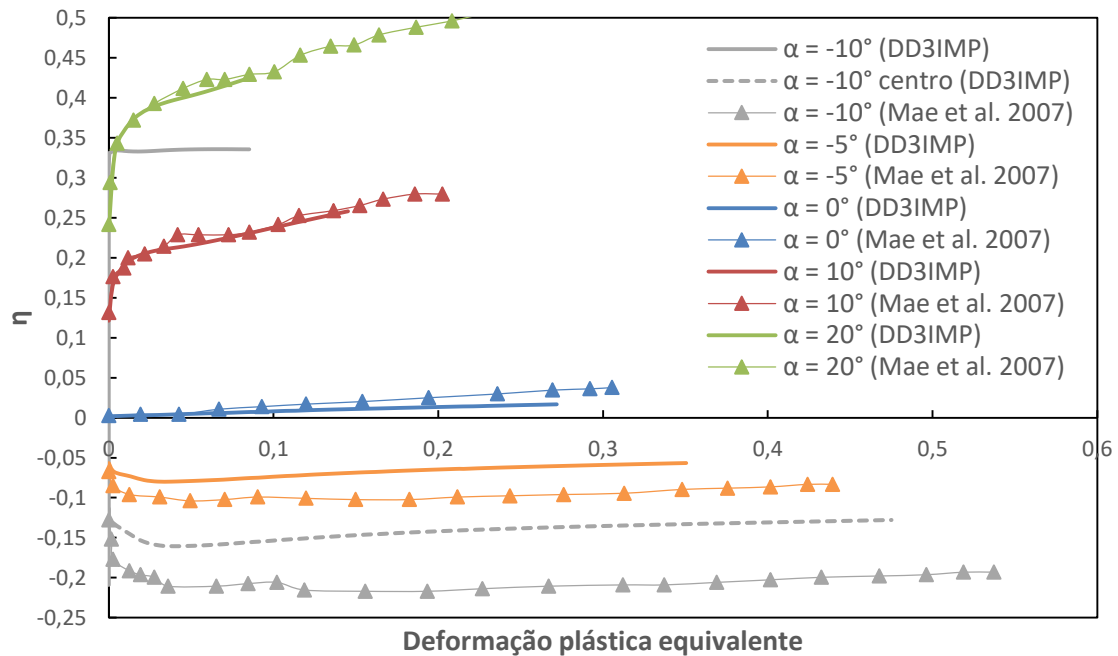
**Figura 4.10.** Curvas de evolução da força com o deslocamento imposto para os modelos dos provetes cilíndricos: a) Provete sem entalhe; b) Provete com entalhe de  $R = 1,5$  mm; c) Provete com entalhe de  $R = 4,5$  mm.



**Figura 4.11.** Curvas de evolução da força com o deslocamento segundo Ox' para o modelo do provete *butterfly*: a)  $\alpha = -10^\circ$ ; b)  $\alpha = -5^\circ$ ; c)  $\alpha = 0^\circ$ ; d)  $\alpha = 10^\circ$ ; e)  $\alpha = 20^\circ$ .

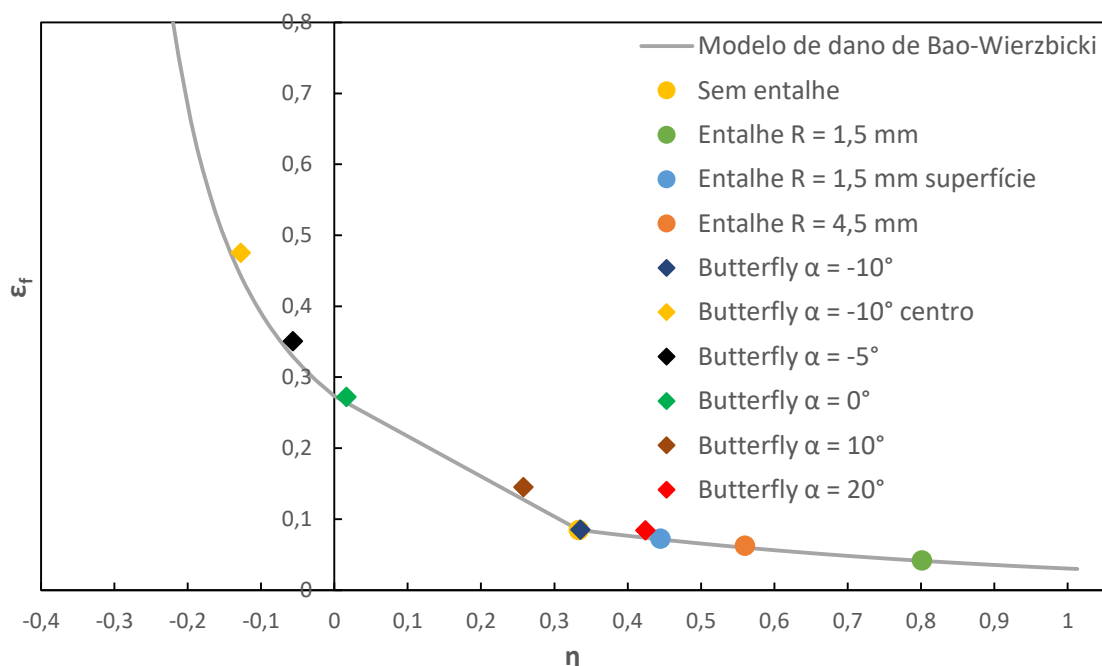


**Figura 4.12.** Curvas de evolução da triaxialidade com a deformação plástica equivalente para os modelos dos provetes cilíndricos.



**Figura 4.13.** Curvas de evolução da triaxialidade com a deformação plástica equivalente para o modelo do provete butterfly.

O provete *butterfly* apresenta evoluções muito idênticas às da literatura para valores de  $\alpha$  de  $-5^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $10^\circ$  e  $20^\circ$ . Para  $\alpha = -10^\circ$  encontram-se representadas na Figura 4.13 duas curvas: uma correspondente a um ponto de Gauss do elemento onde o dano é máximo ( $\alpha = -10^\circ$ ) e outra que diz respeito a um ponto de Gauss do elemento localizado no centro do provete ( $\alpha = -10^\circ$  centro). A curva correspondente ao ponto que pertence ao elemento central tem um comportamento próximo da curva apresentada na literatura, no entanto, os valores de triaxialidade são menos negativos. No global, a triaxialidade é aproximadamente constante para o ensaio de corte e para os ensaios com componente de compressão, mas no caso em que é adicionada uma componente de tração apresenta uma tendência crescente.



**Figura 4.14.** Comparação dos valores de deformação plástica equivalente e triaxialidade no instante de ocorrência de fratura com a curva do modelo de dano de Bao-Wierzbicki.

Por fim, apresenta-se na Figura 4.14 a curva de evolução da deformação plástica equivalente na fratura com a triaxialidade, de acordo com os parâmetros identificados para o modelo de dano de Bao-Wierzbicki (ver Tabela 4.4) e os valores destas grandezas no instante da ocorrência de fratura previstos em cada simulação numérica realizada. Como se pode verificar, os valores de deformação plástica equivalente e triaxialidade na fratura previstos pelas simulações numéricas estão, no global, de acordo com a evolução descrita

pela curva teórica do modelo de dano. De facto, como se mostra na Figura 4.12 e na Figura 4.13 a localização da fratura ocorre para pontos que apresentam evoluções de triaxialidade muito constante, o que permite determinar o valor de  $\bar{\epsilon}_f$  uma vez conhecido o valor de triaxialidade. Deste modo, os ensaios que apresentam uma maior diferença entre o valor analítico e numérico de  $\bar{\epsilon}_f$  são os que apresentam uma evolução crescente da triaxialidade em função da deformação plástica equivalente (i.e. corte combinado com tração). Este resultado permite evidenciar a importância da acumulação de dano, como previsto neste modelo pela equação (3.5).

## 4.2. Modelo de dano de Xue-Wierzbicki

O modelo de dano de Xue-Wierzbicki foi aplicado para prever a fratura dúctil da liga de alumínio 2024-T351, sendo os resultados de referência os apresentados por Xue e Wierzbicki (2008).

### 4.2.1. Material: liga de alumínio 2024-T351

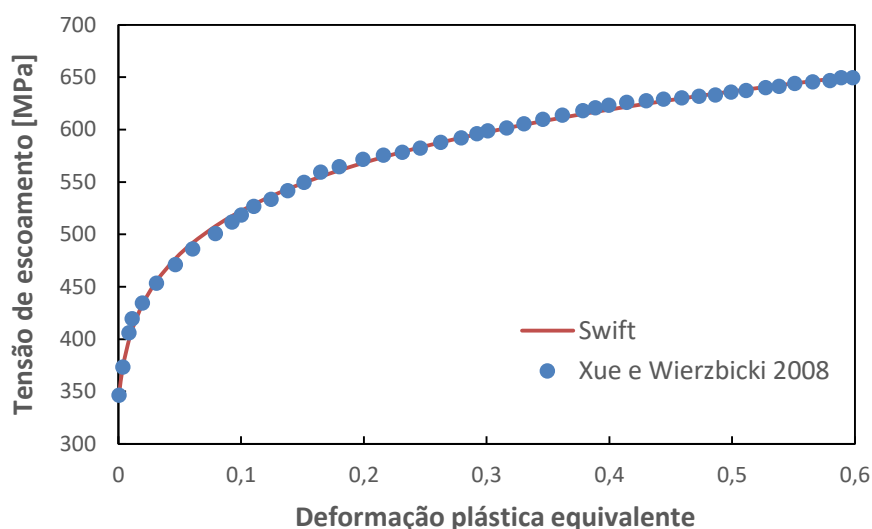
A liga de alumínio 2024-T351 é uma das ligas mais documentadas em termos de ensaios de fratura. Na Tabela 4.7 apresentam-se os valores do módulo de elasticidade longitudinal  $E$  e do coeficiente de Poisson  $\nu$  desta liga (Huang e Xue 2009).

**Tabela 4.7.** Propriedades elásticas da liga de alumínio 2024-T351 (Huang e Xue 2009).

$E$ [GPa]	$\nu$
70,0	0,30

Os parâmetros da lei de encruamento do material são fornecidos por Xue e Wierzbicki (2008) para o caso em que  $\beta = 2$  (modelo acoplado), mas não para o caso em que  $\beta = \infty$  (modelo desacoplado). Assim, procedeu-se à determinação dos parâmetros com base no ajuste da curva tensão-deformação apresentada (ver Figura 3.7). Para tal, recorreu-se uma vez mais ao *software* Plot Digitizer®, de modo a avaliar coordenadas de tensão e deformação. De seguida, com recurso ao *Solver* do MS Excel®, procedeu-se ao ajuste de diferentes leis de encruamento ao conjunto de pontos, sendo que a lei de encruamento de Swift conduziu a uma excelente correlação com a curva apresentada na literatura, como se

mostra na Figura 4.15. Os valores dos parâmetros desta lei utilizados no ajuste são apresentados na Tabela 4.8.



**Figura 4.15.** Ajuste da lei de encruamento da liga de alumínio 2024-T351 ao conjunto de pontos obtidos em Xue e Wierzbicki (2008) para o caso em que  $\beta = \infty$ .

**Tabela 4.8.** Parâmetros utilizados para descrever a lei de encruamento da liga de alumínio 2024-T351.

$K$ [MPa]	$\epsilon_0$	$n$
693,3968	0,003385	0,12482

Uma vez que o comportamento plástico do material é considerado isotrópico, selecionou-se como critério de plasticidade o critério de Hill'48, com os parâmetros adequados de forma a obter o critério de von Mises, dado que este último critério não está diretamente implementado no DD3IMP. A tensão equivalente de acordo com o critério de Hill'48 é calculada através da seguinte expressão (Hill 1950):

$$\bar{\sigma} = \sqrt{F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2}, \quad (4.15)$$

em que  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $L$ ,  $M$  e  $N$  são os parâmetros do critério. Para obter o critério de von Mises, os parâmetros do critério de Hill'48 devem tomar os seguintes valores:  $F = G = H = 0,5$  e  $L = M = N = 1,5$ .

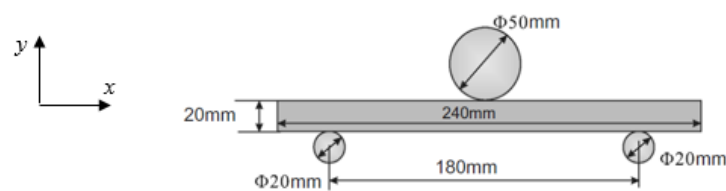
Os parâmetros calibrados para descrever o *onset* da fratura em termos da deformação plástica equivalente (ver Equação (3.7)) e para a acumulação de dano no material (ver Equação (3.10)) estão indicados na Tabela 4.9.

**Tabela 4.9.** Parâmetros calibrados para o modelo de dano de Xue-Wierzbicki para a liga de alumínio 2024-T351 (Xue e Wierzbicki 2008).

$\bar{\epsilon}_{f_0}$	$p_{lim}$ [MPa]	$q$	$\gamma$	$k$	$m$	$\beta$
0,80	800	1,5	0,4	1	2	$\infty$

#### 4.2.2. Modelos numéricos

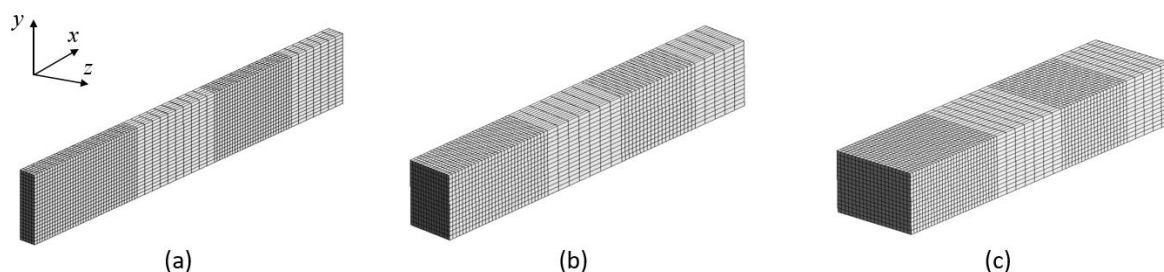
Para validar a implementação deste modelo de dano no *solver* DD3IMP foram realizadas simulações numéricas do ensaio de flexão em três pontos de uma barra (*“Three point bending”* – TPB). Foram estudadas três dimensões diferentes para a largura  $L$  da barra: 10 mm, 30 mm e 60 mm. Na Figura 4.16 apresenta-se um esquema que descreve o ensaio realizado. A largura da barra corresponde à dimensão perpendicular ao plano representado na figura (direção do eixo  $Oz$ ).



**Figura 4.16.** Ensaio de flexão em três pontos de uma barra (Xue e Wierzbicki 2008).

Neste ensaio os dois rolos de 20 mm de diâmetro estão fixos e o rolo de 50 mm de diâmetro desloca-se na direção do eixo  $Oy$ , no sentido descendente. Atendendo às condições de simetria, considerou-se apenas metade do comprimento e metade da largura da barra. No caso das ferramentas (rolos) considerou-se apenas metade da superfície cilíndrica. O coeficiente de atrito entre os rolos e a barra é de 0,2. O comprimento dos rolos utilizado nas simulações numéricas foi obtido somando 4 mm à largura da barra (2 mm por excesso em cada extremidade da barra). Na Figura 4.17 apresenta-se a malha de elementos finitos utilizada nos modelos numéricos da barra, que consiste numa malha estruturada de elementos hexaédricos. Em cada um dos modelos apresentados a malha é mais refinada junto ao centro da barra, onde as tensões são superiores, e na zona em contacto com o rolo estacionário. Para o caso da barra com largura de 60 mm realizou-se ainda uma outra simulação, assumindo condições de deformação plana, tal como proposto por Xue e Wierzbicki (2008). Para este caso, considerou-se apenas um elemento finito na direção da largura, o que conduz a um total de 930 elementos. Os valores absolutos de deslocamento

segundo Oy impostos para o rolo de 50 mm de diâmetro, em cada simulação numérica, encontram-se listados na Tabela 4.10.



**Figura 4.17.** Malha de elementos finitos utilizada nos modelos numéricos da barra: a)  $L = 10$  mm (8700 elementos); b)  $L = 30$  mm (13950 elementos); c)  $L = 60$  mm (18600 elementos).

**Tabela 4.10.** Deslocamento imposto para o rolo de 50 mm de diâmetro em cada simulação (valor absoluto).

Modelo	$u_y$ [mm]
$L = 10$ mm	55
$L = 30$ mm	55
$L = 60$ mm	40
$L = 60$ mm (deformação plana)	40

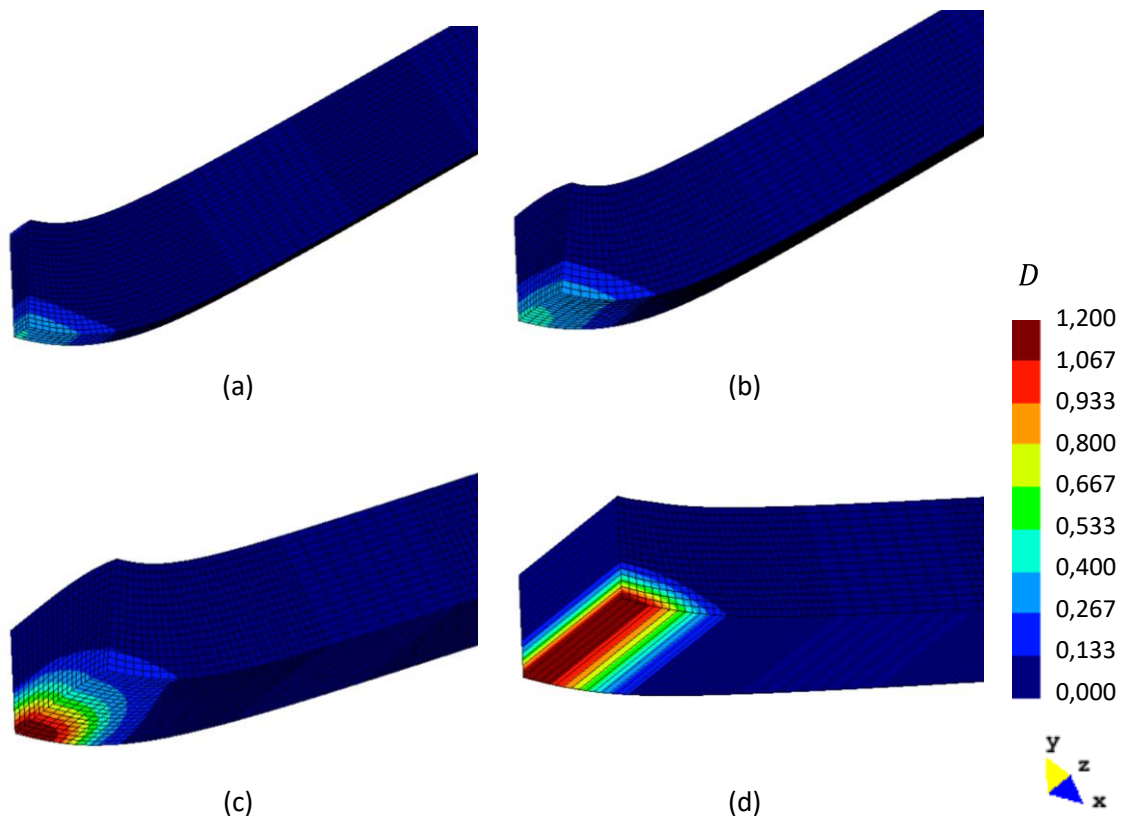
### 4.2.3. Resultados e discussão

Nesta secção apresenta-se a comparação das curvas de evolução da força segundo Oy com o deslocamento imposto, já que este é o único resultado apresentado por Xue e Wierzbicki (2008). Apresenta-se também a representação gráfica dos valores de pressão hidrostática, ângulo de Lode e deformação plástica equivalente na fratura previstos pela simulação numérica e a sua comparação com a superfície de fratura definida pelo modelo de dano.

A Figura 4.18 mostra a distribuição do dano acumulado pelo material para o instante correspondente ao deslocamento total imposto (casos a) e b)) e para o primeiro instante em que a variável de dano é superior a 1 (casos c) e d)). Para este ensaio, apenas foi prevista a ocorrência de fratura para o caso das simulações da barra com  $L = 60$  mm. Nos restantes casos, a variável de dano  $D$  atingiu valores inferiores a 1, mesmo para o valor de deslocamento de 55 mm. Estes resultados estão de acordo com os obtidos por Xue e Wierzbicki (2008), i.e. em ensaios de flexão, a utilização do modelo desacoplado conduz a



resultados pouco realistas, já que mesmo para valores de deslocamento imposto muito elevados a variável de dano não prevê a ocorrência de fratura.

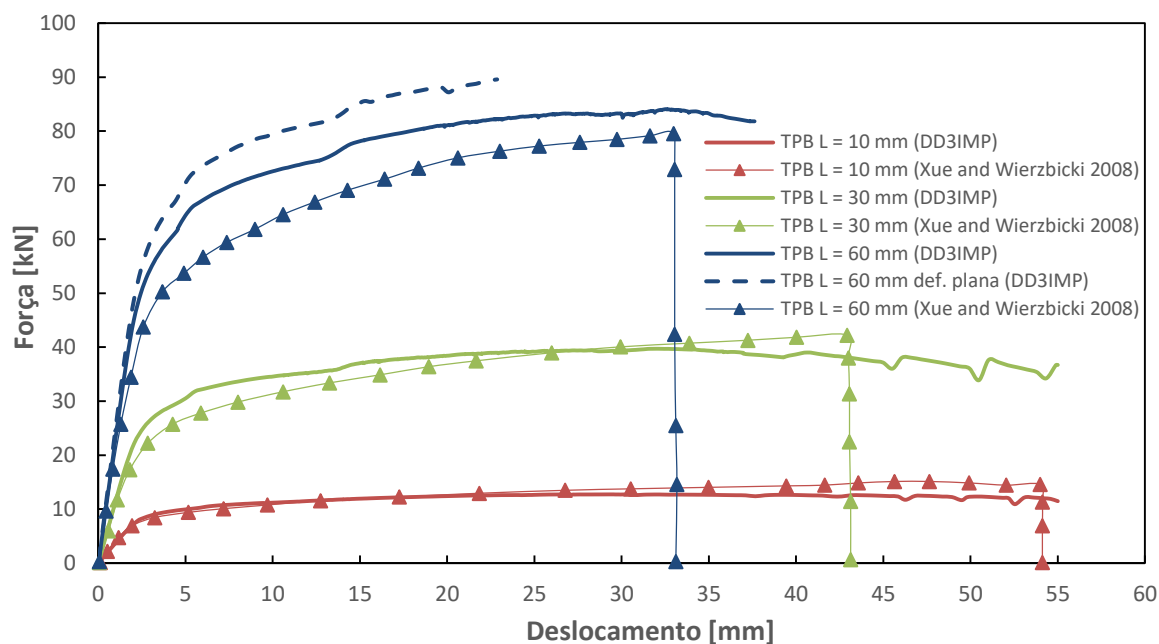


**Figura 4.18.** Distribuição do dano acumulado pelo material em cada simulação numérica realizada: a)  $L = 10$  mm; b)  $L = 30$  mm; c)  $L = 60$  mm; d)  $L = 60$  mm (deformação plana).

Na Figura 4.19 apresentam-se as curvas de evolução da força segundo  $O_y$  com o deslocamento imposto para cada uma das simulações realizadas, bem como a sua comparação com os resultados experimentais disponíveis na literatura. Para as simulações em que não foi prevista a ocorrência de fratura, o último ponto da curva força-deslocamento corresponde ao ponto de deslocamento máximo (ver Tabela 4.10).

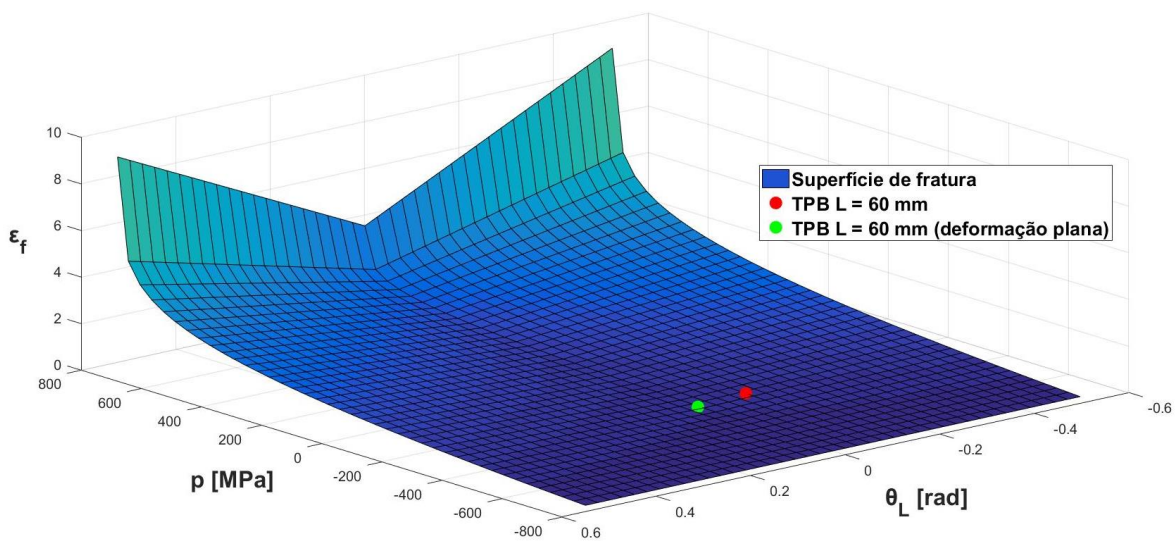
Para a simulação com  $L = 10$  mm a curva obtida com recurso ao DD3IMP apresenta uma excelente correlação com a curva da literatura. Para a simulação com  $L = 30$  mm, as duas curvas têm um comportamento semelhante, mas a força é ligeiramente sobrestimada na fase inicial e subestimada na fase final. A curva obtida com recurso ao DD3IMP atinge um valor máximo de força de cerca de 39,7 kN para um deslocamento de aproximadamente 32 mm. Para  $L = 60$  mm a evolução das curvas é semelhante à da curva apresentada na literatura, mas os valores da força são sobrestimados. A simulação em que se

considerou a condição de deformação plana foi aquela cuja curva se afastou mais em relação ao resultado experimental apresentado por Xue e Wierzbicki (2008). Como a largura da barra neste caso é apenas três vezes superior à espessura, torna-se questionável a assunção da condição de deformação plana, daí que para a simulação em que não se considerou esta condição a curva obtida esteja mais próxima dos resultados experimentais.



**Figura 4.19.** Curvas de evolução da força segundo Oy com o deslocamento imposto para cada uma das simulações realizadas.

Na Figura 4.20 encontram-se representados os pontos correspondentes aos instantes de ocorrência de fratura previstos pelas simulações numéricas e a superfície de fratura descrita pelo modelo de dano. As duas simulações para as quais a ocorrência de fratura foi prevista ( $L = 60$  mm) apresentam valores de deformação plástica equivalente na fratura muito próximos da superfície de fratura definida de acordo com os parâmetros considerados para o modelo de dano de Xue-Wierzbicki (ver Figura 4.20). Na Tabela 4.11 quantifica-se esta diferença, através do cálculo do erro relativo entre os valores de deformação plástica equivalente na fratura previstos nas simulações numéricas e os respetivos valores sobre a superfície de fratura (designados por  $\bar{\epsilon}_f$  superfície). A comparação entre os valores de  $\bar{\epsilon}_f$  é feita para os valores de pressão hidrostática e ângulo de Lode previstos nas simulações numéricas no instante de ocorrência de fratura.

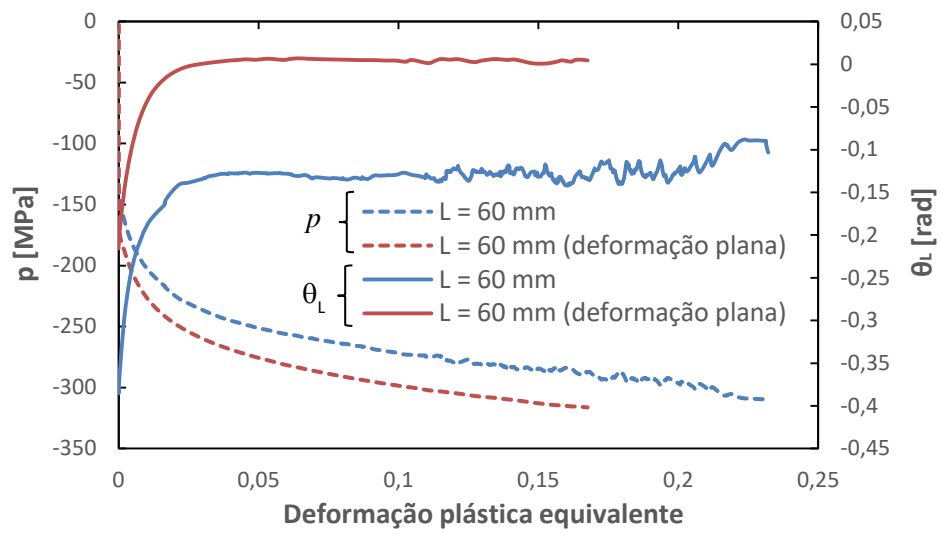


**Figura 4.20.** Comparação dos pontos correspondentes aos instantes de ocorrência de fratura previstos nas simulações numéricas com a superfície de fratura do modelo de dano de Xue-Wierzbicki.

**Tabela 4.11.** Erro relativo entre os valores de deformação plástica equivalente na fratura previstos nas simulações numéricas do ensaio de flexão em três pontos de uma barra e os respectivos valores sobre a superfície de fratura do modelo de dano de Xue-Wierzbicki.

	$p$ [MPa]	$\theta_L$ [rad]	$\bar{\epsilon}_f$	$\bar{\epsilon}_f$ superfície	Erro relativo [%]
L = 60 mm	-306,522	-0,1034	0,2322	0,2130	9,014
L = 60 mm (deformação plana)	-316,291	0,0045	0,1677	0,1621	3,455

Como se pode verificar na Tabela 4.11, os valores calculados para o erro relativo são baixos, o que sugere que os valores da pressão hidrostática e do ângulo de Lode sejam relativamente constantes ao longo das simulações numéricas. Para confirmar a veracidade desta suposição, apresenta-se na Figura 4.21 a evolução da pressão hidrostática e do ângulo de Lode em função da deformação plástica equivalente em cada simulação. Para as duas simulações consideradas,  $\theta_L$  apresenta, de facto, valores aproximadamente constantes. A tendência decrescente de  $p$  justifica os erros relativos apresentados na Tabela 4.11 e realça a importância da acumulação de dano, como previsto neste modelo pela equação (3.10). Estes resultados permitem assim validar a implementação do modelo de dano no DD3IMP.



**Figura 4.21.** Evolução da pressão hidrostática e do ângulo de Lode em função da deformação plástica equivalente das simulações realizadas com  $L = 60$  mm e com o modelo de dano de Xue-Wierzbicki.

## 5. CALIBRAÇÃO DE PARÂMETROS DOS MODELOS DE DANO

Neste capítulo, os modelos de dano cuja implementação no *solver* DD3IMP foi previamente validada, são aplicados para prever a fratura dúctil do aço DP780. Para tal, procedeu-se à calibração dos parâmetros dos modelos para este material.

### 5.1. Resultados numérico-experimentais da literatura

Os ensaios experimentais que serviram de base para a calibração dos parâmetros dos modelos são os apresentados por Roth e Mohr (2016). Nesse artigo descrevem-se os procedimentos experimentais adotados em quatro ensaios distintos: expansão equi-biaxial, flexão em V, tração de uma chapa com um furo central e corte, sendo que o modelo de dano utilizado nas simulações numéricas para prever a fratura do material foi o de Hosford-Coulomb. Este modelo define a deformação plástica equivalente na fratura em função da triaxialidade e do parâmetro de Lode. Por esse motivo, são fornecidos os valores destas grandezas, bem como da deformação plástica equivalente, para o instante em que ocorre a fratura.

Atendendo a que o estado plano de tensão é o mais representativo dos ensaios experimentais descritos, na calibração do modelo de dano de Hosford-Coulomb assume-se esta condição, já que obter experimentalmente um determinado estado de tensão 3D é uma tarefa complicada (Roth e Mohr 2016).

A determinação experimental da deformação plástica equivalente na fratura é realizada com base na determinação do campo de deslocamentos. Com recurso à correlação digital de imagem, é possível determinar as deformações logarítmicas  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  (deformações de Hencky) na superfície do provete (Roth e Mohr 2016). De seguida, assume-se a hipótese de incompressibilidade plástica do material:

$$d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = 0, \quad (5.1)$$

e recorre-se ao critério de von Mises para determinar o valor da deformação plástica equivalente, através da seguinte expressão (Roth e Mohr 2016):

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}. \quad (5.2)$$

Posteriormente, realizaram-se simulações numéricas em que se procura garantir que o valor de deformação plástica equivalente na fratura é igual ao observado experimentalmente. A evolução da triaxialidade e do parâmetro de Lode é determinada de forma numérica, dado que não é possível medir estas grandezas experimentalmente. Os valores de deformação plástica equivalente, triaxialidade e parâmetro de Lode no instante de ocorrência de fratura fornecidos por Roth e Mohr (2016) são sumariados na Tabela 5.1. De referir que o valor do parâmetro de Lode no ensaio de tração da chapa com um furo central não é apresentado, pelo que foi deduzido com base na expressão (2.32) para o valor de triaxialidade indicado.

**Tabela 5.1.** Deformação plástica equivalente na fratura, triaxialidade e parâmetro de Lode no instante de ocorrência de fratura em cada um dos ensaios (Roth e Mohr 2016).

	$\bar{\varepsilon}_f$	$\eta$	$\bar{\theta}_L$
Expansão equi-biaxial	0,72	2/3	-1
Flexão em V	0,518	0,57735	0
Tração de chapa com furo central	0,79	0,53	0,244825
Corte	0,86	0,12	0,32

## 5.2. Material

Os provetes utilizados nos ensaios experimentais foram obtidos a partir de uma chapa de 1 mm de espessura de aço DP780. Este aço é constituído por uma matriz ferrítica com inclusões de martensite e apresenta um tamanho de grão médio de cerca de 8  $\mu\text{m}$  (Roth e Mohr 2016). As suas propriedades elásticas estão indicadas na Tabela 5.2.

**Tabela 5.2.** Propriedades elásticas e densidade do aço DP780 (Roth e Mohr 2016).

$E$ [GPa]	$\nu$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
194	0,33	7850

A lei de encruamento utilizada é uma combinação da lei de Swift com a lei de Voce (Swift+Voce), descrita pela equação (4.4). Os valores dos parâmetros desta lei utilizados para descrever o encruamento do material estão listados na Tabela 5.3. Em todas

as simulações realizadas, o material foi considerado isotrópico. Assim, foi selecionado o critério de plasticidade CB2001 com as constantes adequadas de forma a obter o critério de von Mises, conforme descrito anteriormente (ver secção 4.1.1).

**Tabela 5.3.** Parâmetros utilizados para descrever a lei de encruamento do aço DP780 (adaptado de Roth e Mohr (2016)).

$\alpha_p$	$K$ [MPa]	$\epsilon_0$	$n$	$Y_0$ [MPa]	$Y_{sat}$ [MPa]	$C_Y$
0,70	1315,40	$0,28 \times 10^{-4}$	0,146	349,540	885,900	93,07

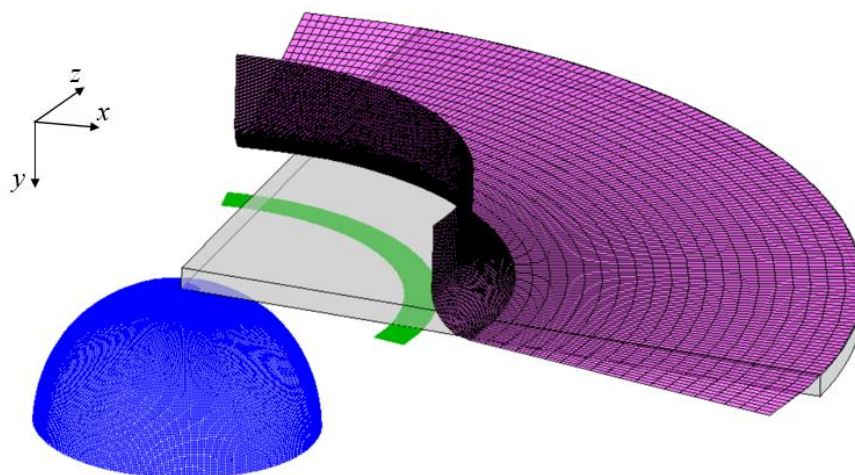
### 5.3. Modelos numéricos

Nesta secção apresentam-se os modelos numéricos dos provetes e das ferramentas utilizados nas simulações relativas aos ensaios experimentais descritos por Roth e Mohr (2016). De acordo com os autores, a geometria de cada um dos provetes foi desenhada de forma a tentar garantir que a evolução da triaxialidade e do parâmetro de Lode são o mais constantes possível durante os ensaios (Roth e Mohr 2016).

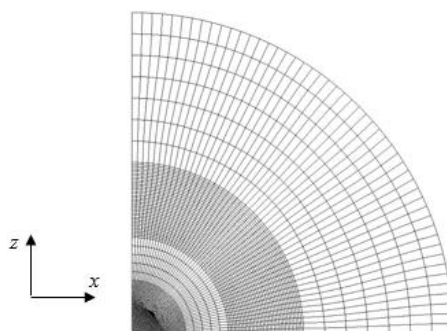
Na simulação relativa ao ensaio de expansão equi-biaxial, um punção hemisférico com um raio  $R = 6,35$  mm desloca-se verticalmente, deformando uma chapa circular com 60 mm de diâmetro e 1 mm de espessura. A chapa está em contacto, na superfície inferior, com uma matriz cuja geometria simplificada corresponde a um anel de 9,85 mm de diâmetro interno e 11,35 mm de diâmetro externo e, na superfície superior, com um cerra-chapas de geometria anelar com 25,4 mm de diâmetro interno e 60 mm de diâmetro externo. Devido às condições de simetria existentes, foi modelado apenas um quarto da geometria da chapa. A geometria do cerra-chapas e da matriz foi modelada de forma a apresentar mais 10° de coordenada angular em relação a cada extremidade do quarto de chapa, a fim de evitar problemas de contacto, pelo facto de poder existir dificuldade na projecção dos pontos da chapa em relação às ferramentas. O punção hemisférico, por simplicidade, foi representado na sua totalidade. Na Figura 5.1 apresenta-se uma representação da posição relativa das ferramentas em relação à chapa para este ensaio. A chapa foi discretizada com uma malha estruturada de elementos hexaédricos (ver Figura 5.2). O deslocamento imposto ao punção foi de 9,25 mm.

No ensaio de flexão em V, dois rolos cilíndricos com 30 mm de diâmetro deslocam-se verticalmente, fletindo uma chapa retangular com 60x20x1 mm sobre uma lâmina, que

apresenta, no topo, uma superfície plana com 0,8 mm. A distância entre os centros dos rolos é de 33,8 mm. Na Figura 5.3 apresenta-se uma representação esquemática deste ensaio. No modelo numérico utilizado nas simulações relativas a este ensaio considerou-se apenas metade do comprimento e metade da largura da chapa, devido às condições de simetria. Por este motivo, foi também representada apenas metade da geometria da lâmina e um dos rolos. Como só a metade inferior do rolo está em contacto com a chapa, apenas foi representada a superfície correspondente a esta parte da ferramenta. A chapa foi discretizada com uma malha estruturada de elementos finitos hexaédricos, como se mostra na Figura 5.4. O deslocamento imposto para o rolo foi de 25 mm.

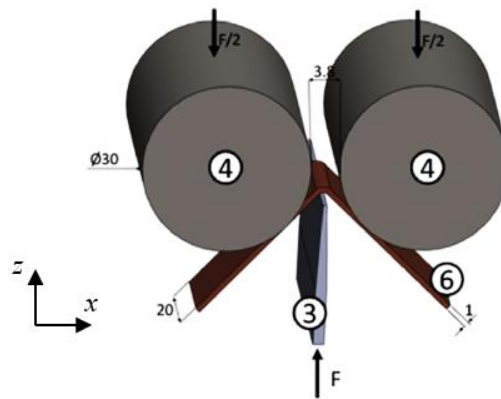


**Figura 5.1.** Modelo numérico da chapa e das ferramentas no ensaio de expansão equi-biaxial.

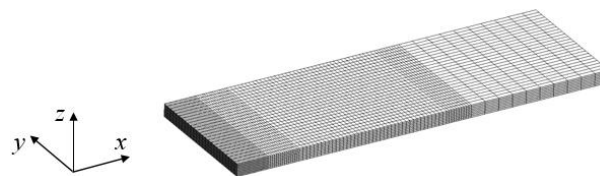


**Figura 5.2.** Malha de elementos finitos utilizada no modelo numérico da chapa no ensaio de expansão equi-biaxial (29000 elementos).



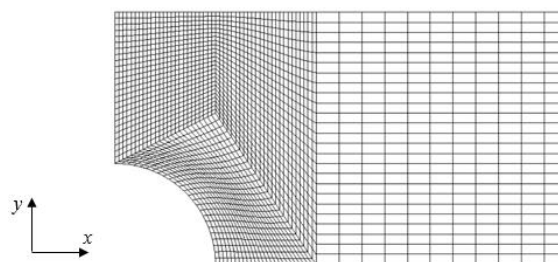


**Figura 5.3.** Representação esquemática do ensaio de flexão em V (adaptado de Roth e Mohr (2016)).



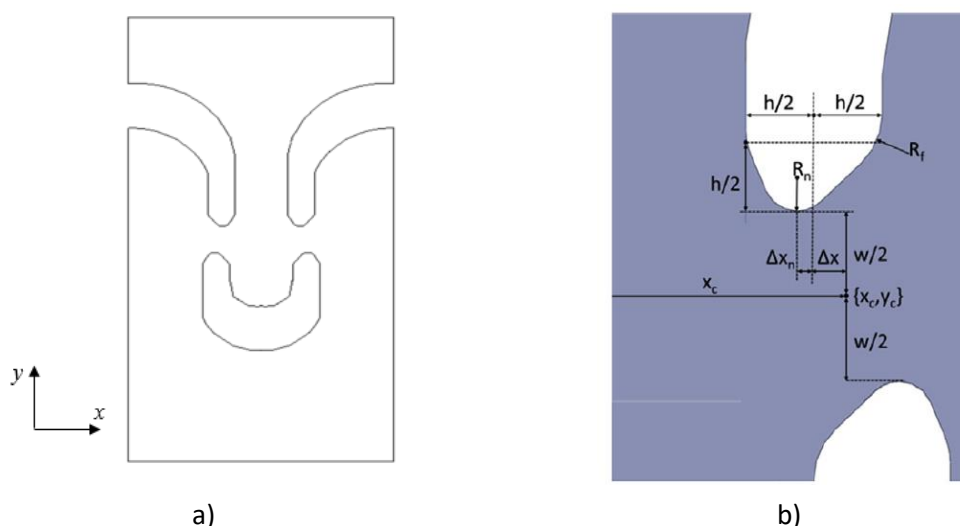
**Figura 5.4.** Malha de elementos finitos utilizada na discretização da chapa no ensaio de flexão em V (20000 elementos).

Na simulação relativa ao ensaio de tração de uma chapa com um furo central representou-se apenas um oitavo da geometria da chapa, que tem de dimensões totais 36x20x1 mm. A chapa foi representada no plano  $Oxy$ , pelo que a espessura corresponde à direção do eixo  $Oz$ . A tração foi efetuada na direção do eixo  $Ox$ , sendo o deslocamento imposto de 1,74 mm. O furo central tem um diâmetro de 8 mm. Na Figura 5.5 apresenta-se a malha de elementos finitos utilizada na discretização da chapa. A malha utilizada é uma malha estruturada de elementos finitos hexaédricos, com 8 elementos em espessura. A região junto ao furo central é bastante mais refinada que a restante área da chapa, uma vez que é nesta zona que se prevê que o dano acumulado seja maior.



**Figura 5.5.** Malha de elementos finitos utilizada na discretização da chapa com um furo central (17200 elementos).

O provete utilizado no ensaio de corte tem a geometria apresentada na Figura 5.6 a) (plano Oxy). Este provete foi desenhado para que, ao ser tracionado segundo a direção do eixo Oy (direção do comprimento do provete), a fratura ocorra na região dos entalhes interiores, próximos do centro do provete, devido às solicitações de corte aí desenvolvidas. O provete tem 40 mm de comprimento, 20 mm de largura e 1 mm de espessura. Na Figura 5.6 b) representa-se o detalhe ampliado da região dos entalhes interiores do provete. De acordo com Roth e Mohr (2016), as dimensões indicadas foram otimizadas recorrendo a sucessivas simulações numéricas, de modo a garantir que a fratura ocorre efetivamente devido às solicitações de corte na região destes entalhes e não devido à tração na zona central do provete. Na Tabela 5.4 apresentam-se os valores das dimensões indicadas na literatura. As restantes dimensões foram obtidas com base nestes valores.



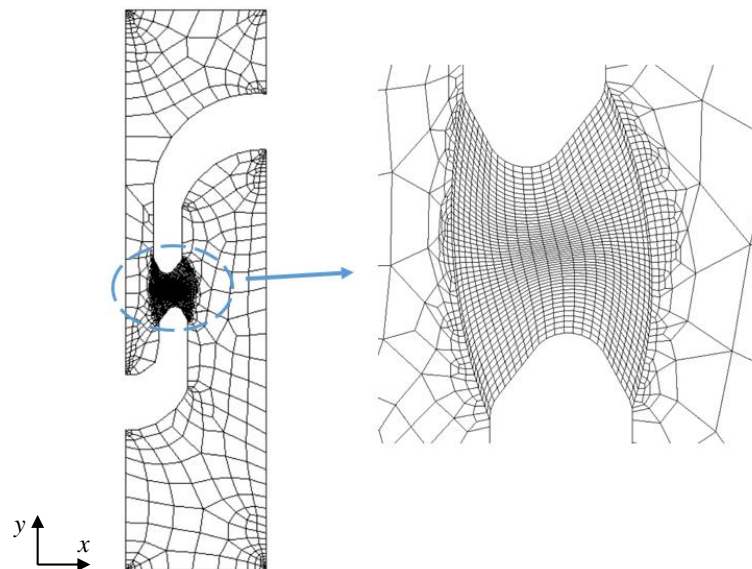
**Figura 5.6.** Geometria do provete utilizado no ensaio de corte: (a) modelo completo; (b) detalhe com as dimensões utilizadas para definir os entalhes interiores do provete de corte (Roth e Mohr 2016).

**Tabela 5.4.** Dimensões dos entalhes interiores do provete de corte [mm] (Roth e Mohr 2016).

$h$	$w$	$R_n$	$\Delta x$
2,04	2,36	0,62	0,19

As coordenadas do centro da região dos entalhes interiores são  $x_c = 3,21$  mm e  $y_c = 20$  mm (ver Figura 5.6 b). Os entalhes superior e inferior são simétricos em relação aos eixos vertical e horizontal que passam pelo ponto de coordenadas  $(x_c, y_c)$ . Para o valor de  $\Delta x_n$

considerou-se 0,1 mm. Já para  $R_f$  tomou-se o valor de 0,5 mm. No modelo numérico relativo a este ensaio considerou-se apenas um quarto da geometria do provete (metade da largura e metade da espessura), devido às condições de simetria. A extremidade inferior é encastrada e na extremidade superior impôs-se o deslocamento pretendido, que neste caso foi de 2,8 mm. Na Figura 5.7 representa-se a malha de elementos finitos utilizada na discretização deste modelo. Considerou-se uma malha semi-estruturada de elementos finitos hexaédricos. No plano, existem duas zonas distintas: uma zona de malha estruturada, na região entre os entalhes interiores do provete, e uma zona de malha não-estruturada, na restante área do plano. Em espessura, a malha é estruturada em todo o provete (8 elementos segundo esta direção).



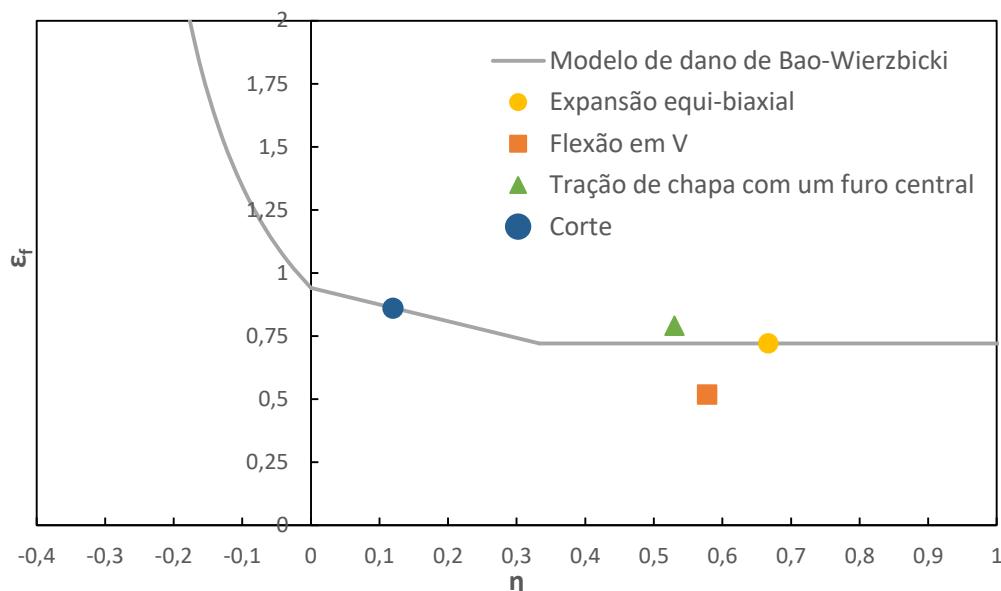
**Figura 5.7.** Malha de elementos finitos utilizada na discretização do modelo do provete de corte (15776 elementos).

## 5.4. Modelo de dano de Bao-Wierzbicki

### 5.4.1. Procedimento de calibração

A calibração dos parâmetros do modelo de Bao-Wierzbicki foi realizada de forma a minimizar a distância da curva que descreve a evolução de  $\bar{\epsilon}_f$  com  $\eta$  aos resultados dos ensaios experimentais (pontos definidos pelas coordenadas de triaxialidade e de deformação plástica equivalente na fratura). Este procedimento foi realizado com recurso ao *Solver* disponível no MS Excel® e permitiu obter a curva apresentada na Figura 5.8. Os valores calibrados para os parâmetros do modelo de dano estão listados na Tabela 5.5. Como

é possível observar na Figura 5.8, para o conjunto de pontos utilizado na calibração, o terceiro ramo da função  $\bar{\epsilon}_f$  é aproximado por uma função constante ( $D_3 = 0,0$ ). Por outro lado, uma vez que não existe nenhum ensaio com uma sollicitação com uma componente de compressão, não existe nenhum ponto na região do primeiro ramo da função.



**Figura 5.8.** Curva do modelo de dano de Bao-Wierzbicki calibrada para o aço DP780.

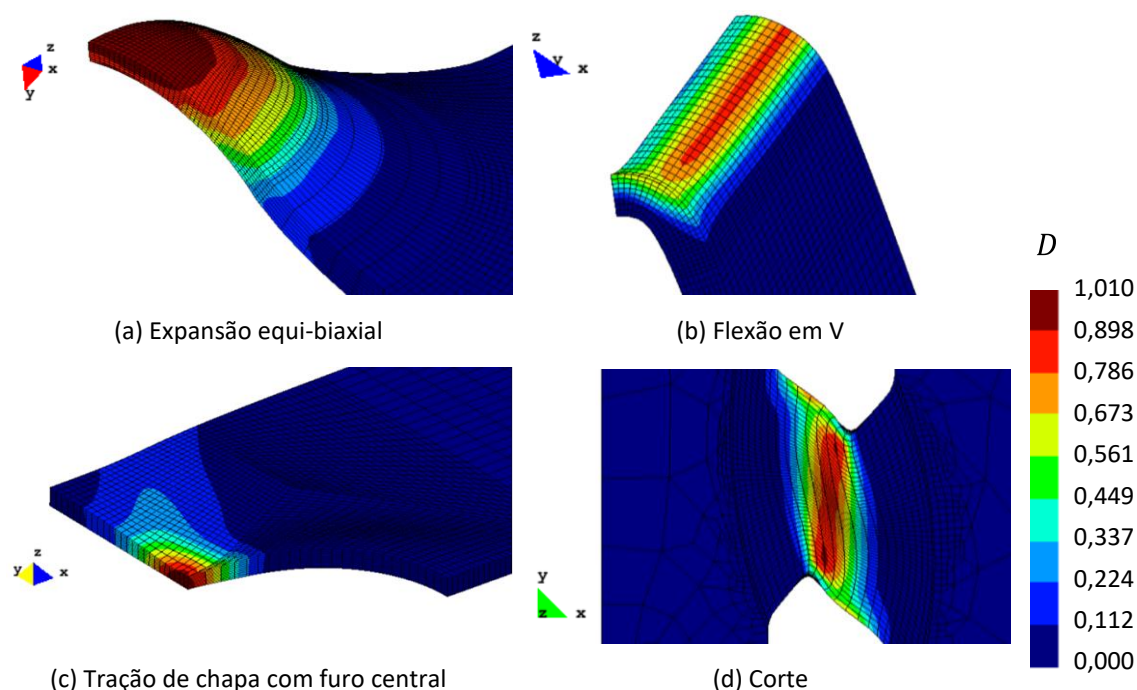
**Tabela 5.5.** Parâmetros do modelo de dano de Bao-Wierzbicki calibrados para o aço DP780.

$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$
0,5686	0,1519	0,0	0,9408

#### 5.4.2. Resultados e discussão

Nesta secção analisam-se os resultados das simulações numéricas dos quatro ensaios experimentais descritos anteriormente, com base no modelo de dano de Bao-Wierzbicki (ver Tabela 5.5). Nestas simulações, o critério de paragem não foi o deslocamento imposto, mas a variável de dano  $D$  atingir um valor maior ou igual a 1. Na Figura 5.9 apresentam-se as zonas dos modelos em que foi prevista a acumulação de dano máxima. Para o ensaio de flexão em V não foi prevista a ocorrência de fratura, pelo que se apresenta na Figura 5.9 b) a chapa deformada, para um deslocamento de 16,4 mm, apenas para destacar a região onde o dano se acumula de forma mais acentuada. Para valores de

deslocamento superiores a 16,4 mm a chapa começa a fletir sobre a superfície lateral da lâmina.

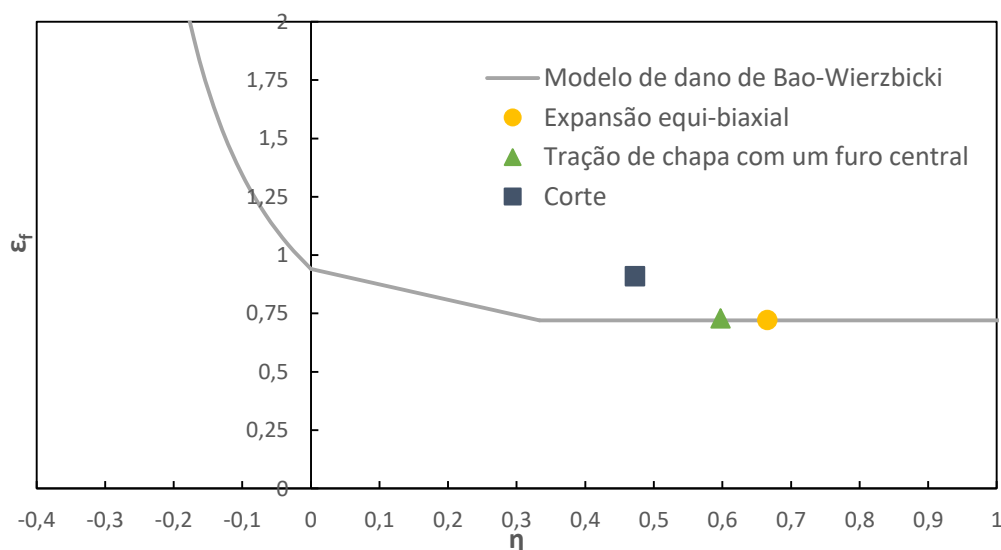


**Figura 5.9.** Regiões dos modelos dos provetes onde foi prevista a acumulação de dano máxima nas simulações realizadas com o modelo de dano de Bao-Wierzbicki para o aço DP780.

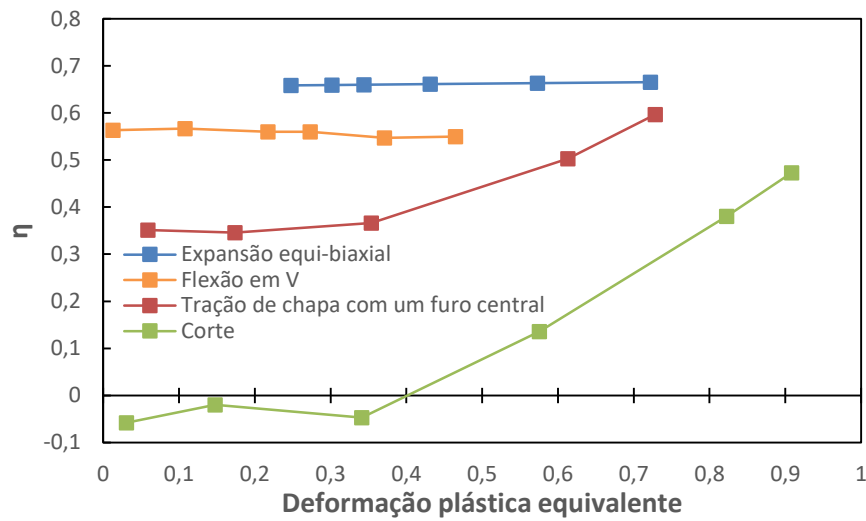
Os resultados obtidos para cada uma das simulações em que foi prevista a ocorrência de fratura dúctil estão representados na Figura 5.10, no plano de coordenadas  $(\eta, \bar{\epsilon}_f)$ , juntamente com a curva calibrada para o modelo de Bao-Wierzbicki. Os valores de  $(\eta, \bar{\epsilon}_f)$  correspondentes às simulações dos ensaios de expansão equi-biaxial e de tração de uma chapa com um furo central estão sobre a curva respeitante ao terceiro ramo da função  $\bar{\epsilon}_f$  calibrada para o modelo de dano de Bao-Wierzbicki. No entanto, na simulação do ensaio de corte, o valor de triaxialidade no instante de ocorrência de fratura é significativamente mais elevado do que o valor do ponto homólogo utilizado para a calibração. De forma a compreender este comportamento representa-se, na Figura 5.11, para todas as simulações numéricas realizadas, a evolução da triaxialidade com a deformação plástica equivalente.

Para o caso da expansão equi-biaxial, a evolução da triaxialidade é constante, e o seu valor é praticamente coincidente com o valor do ponto utilizado para a calibração, pelo que é de esperar que a deformação plástica equivalente na fratura seja coincidente com a curva

calibrada. Para o caso do ensaio de tração da chapa com um furo central, apesar da evolução da triaxialidade apresentar uma tendência crescente, para um dano acumulado próximo de 1, o valor da deformação plástica equivalente na fratura é coincidente com a curva calibrada. No caso da simulação do ensaio de flexão em V, apesar da triaxialidade evoluir de forma praticamente constante com a deformação plástica equivalente, como o ponto deste ensaio utilizado para efetuar a calibração apresenta uma grande discrepância em termos da deformação plástica equivalente na fratura em relação à curva calibrada (ver Figura 5.8), nunca se atingem valores de  $\bar{\epsilon}^p$  da ordem de 0,72 (valor constante correspondente ao terceiro ramo da função  $\bar{\epsilon}_f$  calibrada). No caso da simulação do ensaio de corte, a triaxialidade permanece relativamente constante até um valor de cerca de 0,34 de deformação plástica equivalente, apresentando depois uma tendência acentuadamente crescente (ver Figura 5.11). Idealmente, num ensaio de corte, a triaxialidade deveria ser o mais próximo possível de 0. No entanto, os próprios autores do provete indicam um valor de triaxialidade de 0,12 (ver Tabela 5.1). A divergência observada no comportamento desta grandeza neste caso pode dever-se à discretização espacial escolhida para o modelo numérico. Este assunto será tratado com maior detalhe na secção 5.6.



**Figura 5.10.** Comparação dos pontos correspondentes ao instante de ocorrência de fratura para cada simulação com a curva do modelo de dano de Bao-Wierzbicki calibrada para o aço DP780.



**Figura 5.11.** Evolução da triaxialidade com a deformação plástica equivalente para todas as simulações numéricas realizadas com o modelo de dano de Bao-Wierzbicki para o aço DP780.

## 5.5. Modelo de dano de Xue-Wierzbicki

### 5.5.1. Procedimento de calibração

No caso da calibração dos parâmetros do modelo de dano de Xue- Wierzbicki foi necessário, em primeiro lugar, conhecer, para cada ensaio, o valor da tensão equivalente no instante de ocorrência de fratura. Este foi calculado substituindo o valor de deformação plástica equivalente na fratura na lei de encruamento do material, uma vez que em carga  $\bar{\sigma} = Y$ . Assim, substituiu-se na equação (4.4) os valores dos parâmetros da lei de encruamento indicados na Tabela 5.3 e os valores de deformação plástica equivalente na fratura indicados na Tabela 5.1, para determinar os valores de  $\bar{\sigma}$  na fratura. Conhecida a tensão equivalente e a triaxialidade no instante de ocorrência de fratura, foi possível calcular a pressão hidrostática  $p$ , recorrendo às expressões (2.13) e (2.14). O ângulo de Lode foi calculado a partir do valor do parâmetro de Lode, de acordo com a expressão (2.24). Os valores calculados para  $\bar{\sigma}$ ,  $p$  e  $\theta_L$  estão indicados na Tabela 5.6.

Reunidos os valores de  $p$ ,  $\theta_L$  e  $\bar{\epsilon}_f$  para cada ensaio experimental, procedeu-se de seguida à calibração de quatro dos parâmetros do modelo de dano ( $\bar{\epsilon}_{f0}$ ,  $p_{lim}$ ,  $q$  e  $\gamma$ ), através da minimização da distância da superfície de fratura do modelo aos pontos correspondentes aos ensaios. Como se considerou o modelo na sua forma desacoplada, tem-se que  $\beta = \infty$ . Para os parâmetros  $m$  e  $k$  considerou-se os valores sugeridos pelos autores do modelo, i.e.  $m = 2$  e  $k = 1$ . Este procedimento de calibração foi realizado, uma vez mais, com recurso



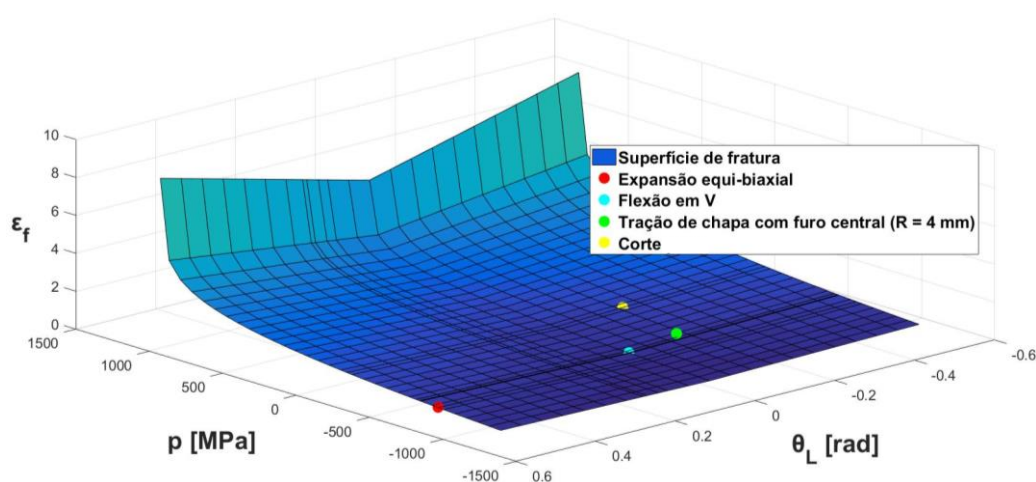
ao *Solver* disponível no MS Excel® e permitiu obter os valores dos parâmetros do modelo indicados na Tabela 5.7, com os quais se gerou a superfície apresentada na Figura 5.12 (com recurso ao Matlab®). A superfície é interpoladora dos pontos correspondentes a todos os ensaios (distância inferior a  $10^{-4}$ ), exceto para o ensaio de tração da chapa com um furo central, para o qual a deformação plástica equivalente prevista na fratura é de 0,595, em vez de 0,79.

**Tabela 5.6.** Tensão equivalente, pressão hidrostática e ângulo de Lode calculados no instante de ocorrência de fratura em cada um dos ensaios realizados com o aço DP780.

	$\bar{\sigma}$ [MPa]	$p$ [MPa]	$\theta_L$ [rad]
Expansão equi-biaxial	1143,435	-762,290	-0,5236
Flexão em V	1102,242	-636,380	0
Tração de chapa com furo central	1155,405	-612,365	0,12819
Corte	1166,500	-139,980	0,167552

**Tabela 5.7.** Parâmetros do modelo de dano de Xue-Wierzbicki calibrados para o aço DP780.

$\bar{\epsilon}_{f_0}$	$p_{lim}$ [MPa]	$q$	$\gamma$
1,24	1131,949	0,8146	0,6562



**Figura 5.12.** Superfície do modelo de dano de Xue-Wierzbicki calibrada para o aço DP780.



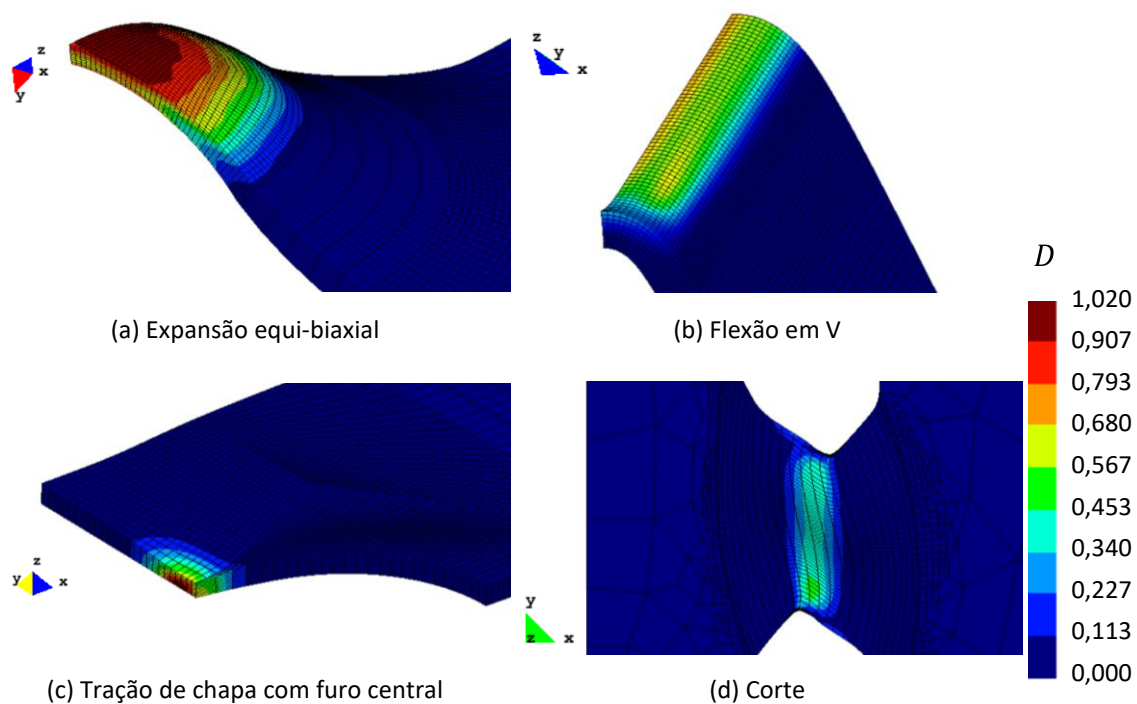
### 5.5.2. Resultados e discussão

Após a calibração dos parâmetros do modelo de dano, realizaram-se as simulações numéricas correspondentes aos quatro ensaios experimentais referidos anteriormente. O critério de paragem destas simulações foi, uma vez mais, a variável de dano  $D$  atingir a unidade. Na Figura 5.13 apresentam-se as zonas dos modelos em que foi prevista a acumulação de dano máxima. Para o ensaio de flexão em V não foi prevista a ocorrência de fratura, pelo que se apresenta na Figura 5.13 b), para um deslocamento de 14,8 mm, a representação da chapa deformada apenas para mostrar a região onde o dano se acumula de forma mais acentuada.

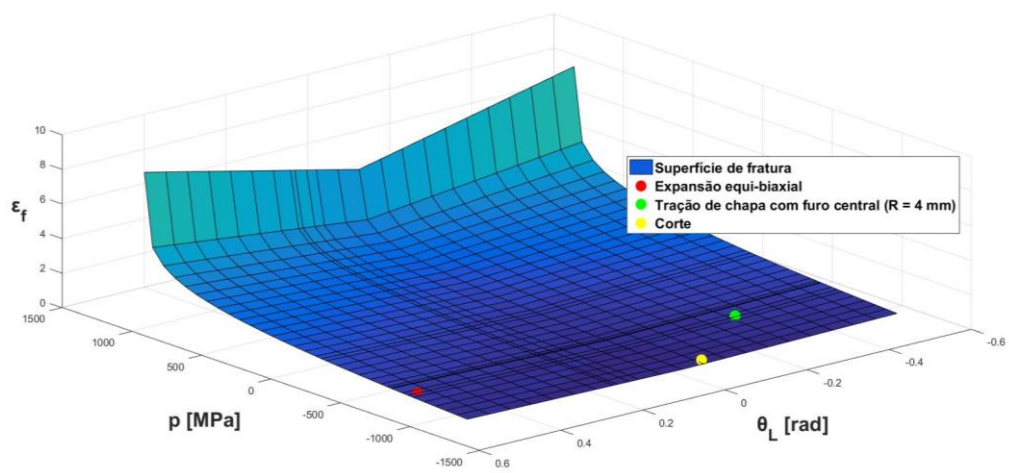
Os resultados obtidos para cada uma das simulações em que foi prevista a ocorrência de fratura dúctil estão representados na Figura 5.14, no espaço de coordenadas  $(p, \theta_L, \bar{\epsilon}_f)$ , juntamente com a superfície de fratura calibrada para o modelo de Xue-Wierzbicki. Na Tabela 5.8 quantifica-se a diferença entre os valores de deformação plástica equivalente na fratura previstos nas simulações numéricas e os respetivos valores sobre a superfície de fratura (designados por  $\bar{\epsilon}_f$  superfície), através do cálculo do erro relativo. A comparação entre os valores de  $\bar{\epsilon}_f$  é feita para os valores de pressão hidrostática e ângulo de Lode previstos nas simulações numéricas no instante de ocorrência de fratura.

Como se pode verificar na Tabela 5.8, para a simulação do ensaio de expansão equi-biaxial o valor do erro relativo é baixo, para o caso do ensaio de tração da chapa com um furo central é elevado e no caso do ensaio de corte é muito elevado. Na Figura 5.15 e na Figura 5.16 apresentam-se, para todas as simulações numéricas realizadas, a evolução da pressão hidrostática e do ângulo de Lode com a deformação plástica equivalente, respetivamente. No caso da simulação do ensaio de expansão equi-biaxial, uma vez que os valores da pressão hidrostática e do ângulo de Lode são praticamente constantes ao longo da simulação, a deformação plástica equivalente na fratura é também praticamente coincidente com a superfície de fratura, pelo que o erro relativo é baixo. No caso da simulação do ensaio de tração da chapa com um furo central, a pressão hidrostática apresenta uma tendência decrescente e o ângulo de Lode apresenta uma tendência crescente. Esta evolução de  $p$  e de  $\theta_L$  conduz a um erro relativo elevado. No caso do ensaio de flexão em V, apesar da pressão hidrostática e do ângulo de Lode evoluírem de forma aproximadamente constante, nunca se atinge um valor de deformação plástica equivalente próximo do valor de deformação plástica equivalente na fratura. No caso do ensaio de corte, a variação acentuada de  $p$  e de  $\theta_L$  ao

longo da simulação conduz a uma enorme diferença na deformação plástica equivalente na fratura em comparação com o valor correspondente sobre a superfície de fratura. De facto, esta comparação direta é questionável, uma vez que  $p$  e  $\theta_L$  não são constantes durante o ensaio. Mas, mais relevante é o facto destas variáveis apresentarem valores muito distintos dos indicados pelos autores (comparar Tabela 5.6 com a Tabela 5.8). Assim, na secção seguinte será analisada a influência da discretização espacial na evolução prevista para estas variáveis.



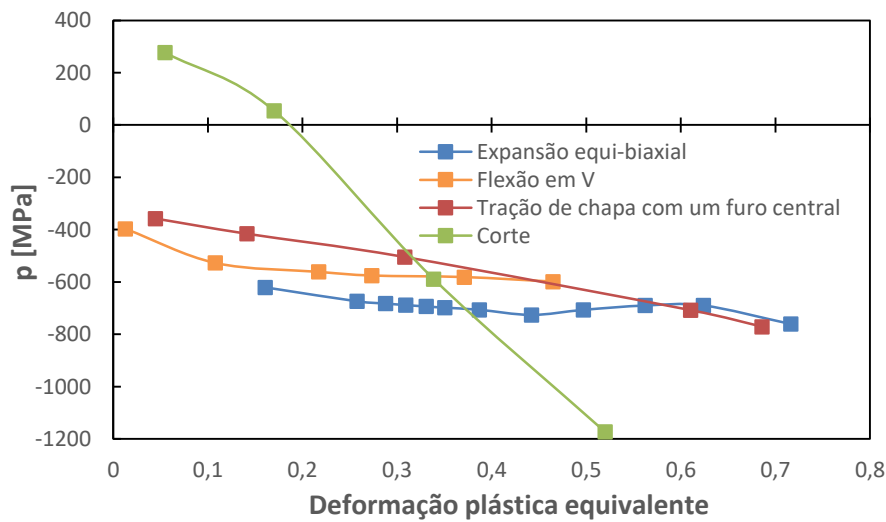
**Figura 5.13.** Regiões dos modelos dos provetes onde foi prevista a acumulação de dano máxima nas simulações realizadas com o modelo de dano de Xue-Wierzbicki para o aço DP780.



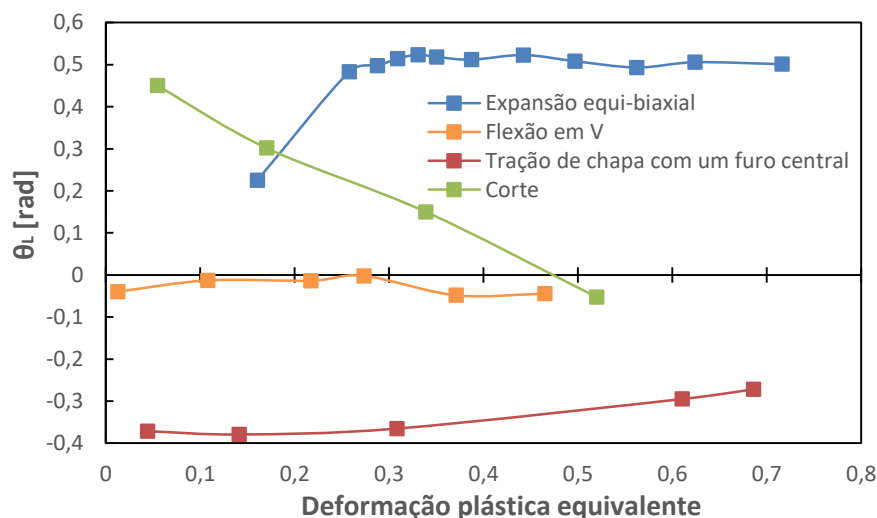
**Figura 5.14.** Comparação dos pontos correspondentes ao instante de ocorrência de fratura para cada simulação com a superfície de fratura do modelo de dano de Xue-Wierzbicki calibrada para o aço DP780.

**Tabela 5.8.** Erro relativo entre os valores de deformação plástica equivalente na fratura previstos nas simulações numéricas e os respectivos valores sobre a superfície de fratura do modelo de dano de Xue-Wierzbicki calibrada para o aço DP780.

	$p$ [MPa]	$\theta_L$ [rad]	$\bar{\epsilon}_f$	$\bar{\epsilon}_f$ superfície	Erro relativo [%]
Expansão equi-biaxial	-761,681	0,500194	0,7238	0,7092	2,059
Tração de chapa com furo central	-770,964	-0,27195	0,6860	0,5971	14,889
Corte	-1173,29	-0,0528	0,5200	0,3603	44,324



**Figura 5.15.** Evolução da pressão hidrostática com a deformação plástica equivalente para todas as simulações numéricas realizadas com o modelo de dano de Xue-Wierzbicki para o aço DP780.



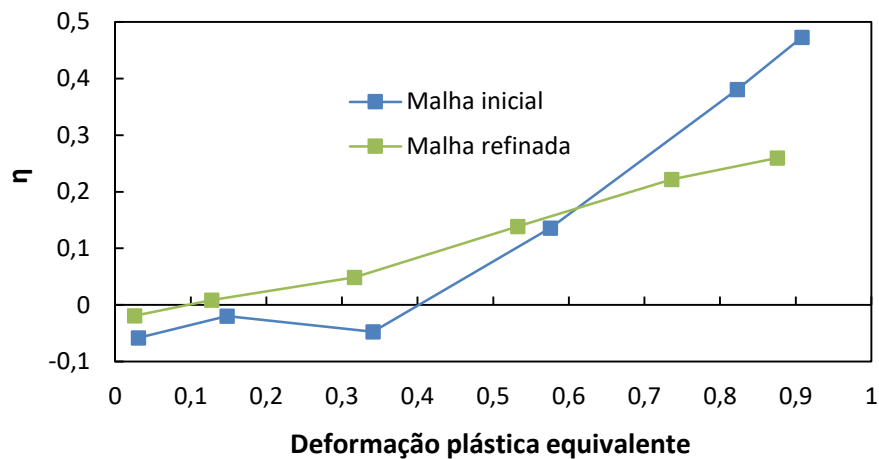
**Figura 5.16.** Evolução do ângulo de Lode com a deformação plástica equivalente para todas as simulações numéricas realizadas com o modelo de dano de Xue-Wierzbicki para o aço DP780.

## 5.6. Influência da discretização espacial

Como se constatou nas secções 5.4.2 e 5.5.2, existem por vezes variações acentuadas de triaxialidade, pressão hidrostática e ângulo de Lode ao longo das simulações, o que conduz a diferenças consideráveis no valor da deformação plástica equivalente na fratura em relação ao valor correspondente sobre a curva ou superfície de fratura. Neste contexto, importa referir que os modelos contemplam a variação destas variáveis na expressão adotada para a acumulação do dano. A questão é avaliar até que ponto a calibração dos parâmetros dos modelos pode ser realizada assumindo valores aproximadamente constantes. Assim, para os casos em que estas grandezas variam de forma mais significativa, analisa-se, nesta secção, a influência da utilização de uma malha de elementos finitos mais refinada no erro relativo cometido no valor da deformação plástica equivalente na fratura.

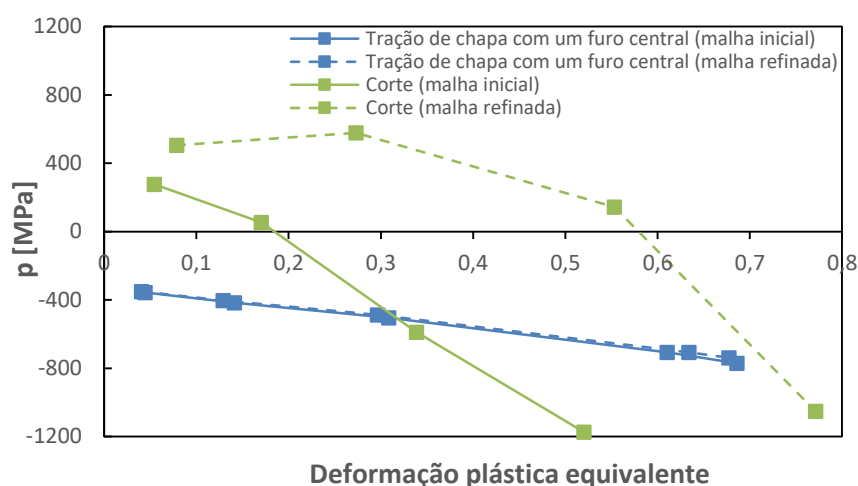
Relativamente ao modelo de Bao-Wierzbicki, no caso da simulação do ensaio de corte, realizou-se uma nova simulação em que se procedeu ao refinamento da malha na região central do modelo, de tal forma que o número total de elementos finitos hexaédricos passou a ser de 55752 (Malha refinada). A evolução da triaxialidade com a deformação plástica equivalente para esta nova simulação numérica encontra-se representada na Figura 5.17, onde se mostra também, para comparação, a evolução prevista com a discretização apresentada na Figura 5.7 (Malha inicial). Observa-se que o comportamento global da

evolução desta grandeza permanece idêntico ao descrito anteriormente. No entanto, o valor de triaxialidade no instante de ocorrência de fratura (último ponto na Figura 5.17) reduz consideravelmente, sendo agora de  $\eta = 0,26$ . O valor de  $\bar{\epsilon}_f$  obtido para esta simulação foi de cerca de 0,876 pelo que o ponto de coordenadas  $(\eta, \bar{\epsilon}_f)$  relativo a esta simulação se encontra bastante próximo do segundo ramo da curva do modelo de Bao-Wierzbicki representada na Figura 5.10.

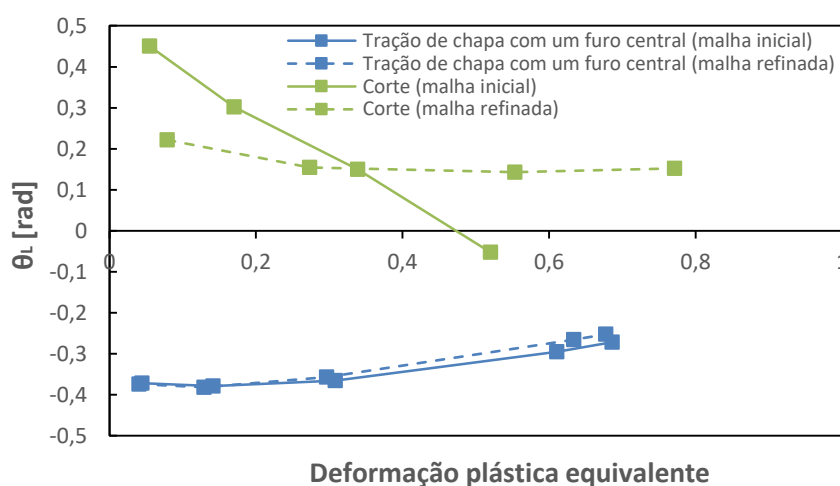


**Figura 5.17.** Evolução da triaxialidade com a deformação plástica equivalente da simulação numérica do ensaio de corte com as malhas inicial e refinada e o modelo de dano de Bao-Wierzbicki para o aço DP780.

Relativamente ao modelo de Xue-Wierzbicki, nos casos dos ensaios de tração da chapa com um furo central e do ensaio de corte, realizaram-se novas simulações em que se procedeu ao refinamento da malha nas regiões de maior acumulação de dano. Assim, no caso da chapa com um furo central, o número total de elementos finitos hexaédricos passou a ser de 64000 e no caso do provete do ensaio de corte passou a ser de 55752. Na Figura 5.18 e na Figura 5.19 representam-se, respetivamente, a evolução da pressão hidrostática e do ângulo de Lode com a deformação plástica equivalente em cada uma destas simulações. Para facilitar a comparação, apresenta-se nestas figuras a evolução obtida com as discretizações consideradas anteriormente (Malha inicial). Os novos valores de  $p$ ,  $\theta_L$  e  $\bar{\epsilon}_f$  no instante de ocorrência de fratura para cada uma das simulações são os indicados na Tabela 5.9, onde se calcula também os valores do erro relativo de  $\bar{\epsilon}_f$  em relação à superfície de fratura.



**Figura 5.18.** Evolução da pressão hidrostática com a deformação plástica equivalente para as simulações numéricas dos ensaios de tração da chapa com um furo central e de corte com as malhas inicial e refinada e o modelo de dano de Xue-Wierzbicki para o aço DP780.



**Figura 5.19.** Evolução do ângulo de Lode com a deformação plástica equivalente para as simulações numéricas dos ensaios de tração da chapa com um furo central e de corte com as malhas inicial e refinada e o modelo de dano de Xue-Wierzbicki para o aço DP780.

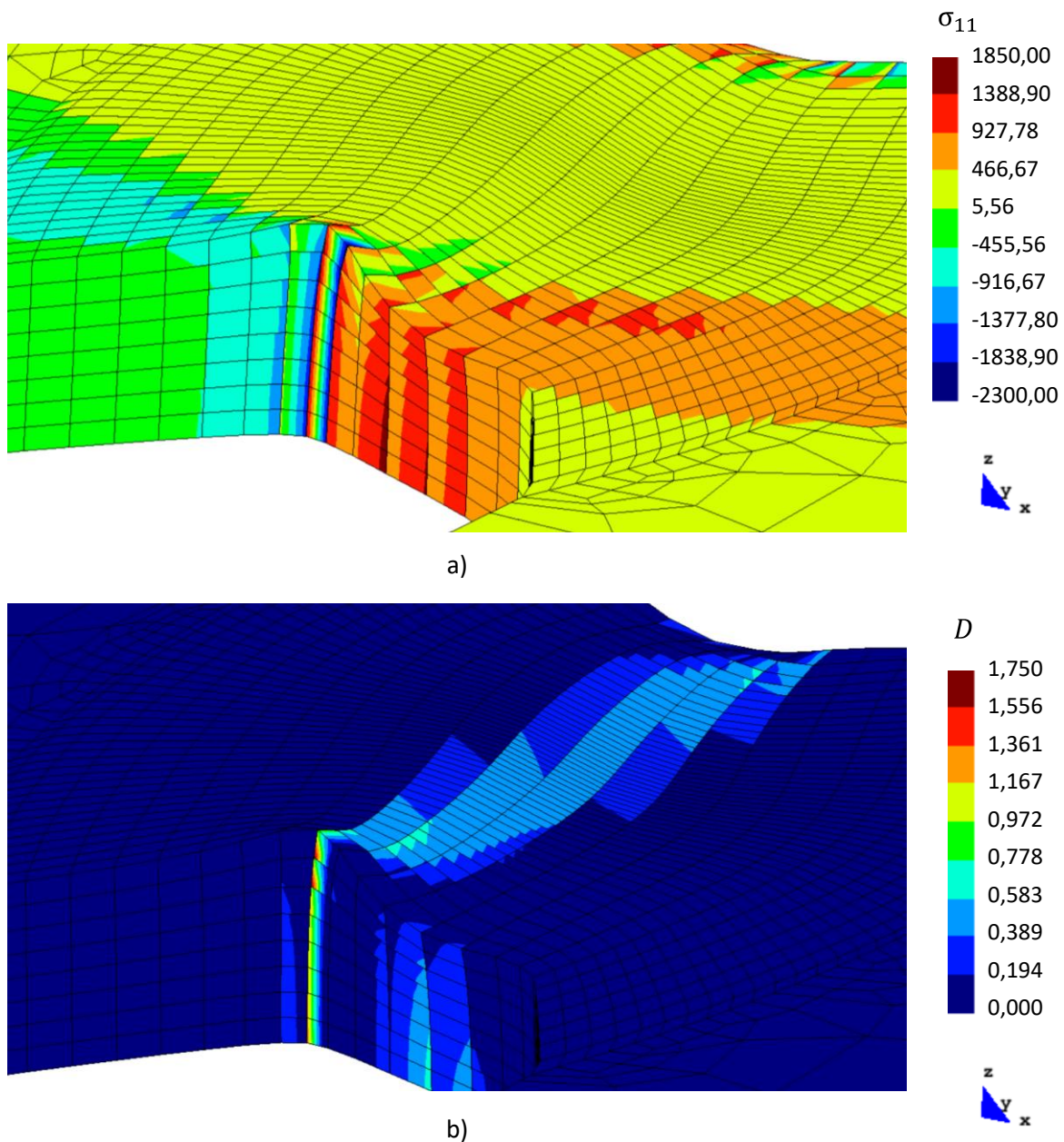
**Tabela 5.9.** Erro relativo entre os valores de deformação plástica equivalente na fratura previstos nas simulações numéricas realizadas com uma malha refinada e os respetivos valores sobre a superfície de fratura do modelo de dano de Xue-Wierzbicki calibrada para o aço DP780.

	$p$ [MPa]	$\theta_L$ [rad]	$\bar{\epsilon}_f$	$\bar{\epsilon}_f$ superfície	Erro relativo [%]
Tração de chapa com furo central	-738,703	-0,25266	0,67734	0,60227	12,465
Corte	-1052,297	0,152461	0,77134	0,43567	77,047

No caso do ensaio de tração da chapa com um furo central, o refinamento da malha teve pouca influência na evolução de  $p$  e de  $\theta_L$ , pelo que se observa apenas uma ligeira diminuição do erro relativo (ver Tabela 5.8). No caso da simulação do ensaio de corte, o refinamento da malha permitiu estabilizar a evolução do ângulo de Lode, que apresenta valores mais próximos dos indicados por Roth e Mohr (2016). No entanto, a pressão hidrostática continua a apresentar uma forte variação durante o ensaio, apresentando valores claramente negativos no final, ao contrário do utilizado no procedimento de calibração. O valor da pressão hidrostática no final do ensaio é idêntico para as duas discretizações. No entanto, observa-se um grande aumento do erro relativo em termos do valor de  $\bar{\epsilon}_f$ . Este aumento resulta da alteração observada para o ângulo de Lode, uma vez que a deformação plástica equivalente na fratura é ditada pela combinação dos dois parâmetros: pressão hidrostática e ângulo de Lode.

Importa referir que a avaliação da triaxialidade, pressão hidrostática e ângulo de Lode foi sempre realizada no ponto de Gauss para o qual foi previsto um valor de  $D$  maior do que 1. No entanto, em alguns casos, observam-se elevados gradientes das variáveis que caracterizam o estado de tensão e, consequentemente, do dano para os diferentes pontos de Gauss do elemento finito, em função do tipo de solicitação. Na Figura 5.20 apresenta-se um exemplo onde este facto é claramente evidenciado para o ensaio de corte. A análise deste figura evidencia o carácter fortemente local do dano acumulado.





**Figura 5.20.** Distribuição no instante para o qual é prevista a fratura dúctil no ensaio de corte: a) da componente  $\sigma_{11}$  do tensor das tensões de Cauchy; b) da variável de dano. Resultados obtidos para cada ponto de Gauss do modelo.

## 5.7. Comparação dos modelos

Após a calibração da curva ou superfície a partir dos quatro ensaios experimentais descritos, estas funções passam a ser a referência para posteriormente avaliar os resultados previstos nas simulações numéricas. Globalmente, comparando de forma direta os dois modelos de dano quanto à proximidade dos valores previstos para a deformação



plástica equivalente na fratura em relação aos respetivos valores das funções calibradas, é possível constatar que o modelo de Bao-Wierzbicki apresenta o melhor desempenho. De facto, com este modelo de dano obtiveram-se excelentes resultados para as simulações numéricas dos ensaios de expansão equi-biaxial e de tração da chapa com um furo central e bons resultados no caso do ensaio de corte, após refinamento da malha. Para o modelo de Xue-Wierzbicki apenas se conseguiu obter um excelente resultado no caso da simulação do ensaio de expansão equi-biaxial. Nos ensaios de tração da chapa com um furo central e de corte obtiveram-se grandes discrepâncias em relação à função calibrada, mesmo após refinamento da malha. Como referido anteriormente, nenhum destes modelos de dano previu a ocorrência de fratura no caso do ensaio de flexão em V. Para o modelo de Bao-Wierzbicki este resultado está associado à pouca flexibilidade do modelo para representar o comportamento experimental observado para triaxialidade superior a 1/3 (ver Figura 5.8). Globalmente, obtiveram-se valores inferiores de deformação plástica equivalente na fratura nas simulações realizadas com o modelo de Xue-Wierzbicki, uma vez que a função utilizada para descrever a evolução da variável de dano prevê a acumulação do dano de forma mais acentuada (ver equação (3.10)). No entanto, esta alteração da função que rege a acumulação de dano não é suficiente para permitir prever a fratura no caso do ensaio de flexão em V.

Os resultados realçam a importância do procedimento de calibração numérico-experimental recorrer a parâmetros de caracterização do estado de tensão que sejam os previstos pelos modelos numéricos. Neste contexto, a discretização espacial adotada relevou-se muito influente. Mesmo para discretizações espaciais muito refinadas, os parâmetros de caracterização do estado de tensão não apresentam uma evolução temporal constante. Tal implica que a correta calibração da função de acumulação de dano, no caso do modelo de Xue-Wierzbicki, deva ser realizada com recurso a um procedimento de análise inversa. O procedimento de calibração adotado neste trabalho não conduz a uma correta descrição de todos os ensaios utilizados na calibração, que é uma das dificuldades normalmente apontadas a estes modelos (Malcher 2012). Logo, é questionável a utilização dos modelos calibrados para prever a fratura dúctil noutros ensaios, que é o verdadeiro objetivo da aplicação destes modelos.



## 6. CONCLUSÕES

Este trabalho focou-se na previsão da fratura dúctil de diferentes materiais, com recurso aos modelos de dano desacoplados propostos por Bao (2003) (modelo de Bao-Wierzbicki) e por Xue (2007) (modelo de Xue-Wierzbicki). As simulações numéricas com o MEF foram realizadas com recurso ao *solver* DD3IMP.

Numa fase inicial, realizou-se a validação da implementação no DD3IMP dos modelos de dano alvo de estudo. Foi necessário efetuar pequenas modificações no código relativo a cada um dos modelos. No caso do modelo de Bao-Wierzbicki, de modo a evitar o cálculo de valores de dano inferiores a zero, garantiu-se que o dano só é determinado para valores de triaxialidade superiores a  $-1/3$ . No caso do modelo de Xue-Wierzbicki, a função  $\mu_p$  foi alterada de modo a garantir que toma o valor zero para pressões hidrostáticas inferiores ao valor de *cut-off*. Para cada modelo foram estudados materiais diferentes: uma liga Al-Si obtida por fundição para o modelo de Bao-Wierzbicki; uma liga de alumínio 2024-T351, no caso do modelo de Xue-Wierzbicki. Os resultados das simulações numéricas realizadas com o primeiro modelo mostraram, globalmente, uma excelente correlação com os resultados numéricos apresentados na literatura, exceto para o deslocamento à fratura. Para as simulações realizadas com o segundo modelo observou-se uma boa correlação com os valores experimentais disponíveis na literatura.

Numa segunda fase, efetuou-se a calibração dos parâmetros dos dois modelos de dano para um aço DP780, com base em resultados numérico-experimentais apresentados por Roth e Mohr (2016). O procedimento de calibração proposto neste trabalho assume que todos os ensaios utilizados apresentam valores constantes de triaxialidade, pressão hidrostática e ângulo de Lode. Esta suposição possibilita a determinação dos parâmetros dos modelos com recurso a um procedimento direto de minimização do erro entre resultados experimentais e os previstos pelos modelos. No entanto, convém realçar que a calibração recorre aos valores numéricos apresentados por Roth e Mohr (2016) para caracterizar o estado de tensão. Posteriormente, realizaram-se simulações numéricas dos ensaios utilizados na calibração, com o objetivo de comparar os valores de deformação plástica equivalente na fratura, obtidos com recurso ao DD3IMP, com a curva (no caso do modelo de Bao-

Wierzbicki) ou com a superfície (no caso do modelo de Xue-Wierzbicki) de fratura calibrada. Globalmente, observa-se que, quanto mais constante for a evolução da triaxialidade (no caso do modelo de Bao-Wierzbicki), da pressão hidrostática e do ângulo de Lode (no caso do modelo de Xue-Wierzbicki) com a deformação plástica equivalente, menor é o erro relativo cometido no valor da deformação plástica equivalente na fratura. Este resultado realça a importância das suposições consideradas no procedimento de calibração. De facto, observa-se que em alguns ensaios a triaxialidade, a pressão hidrostática e o ângulo de Lode não têm uma evolução constante. Essa situação obriga a adotar um procedimento mais complexo para a correta calibração dos parâmetros do modelo, uma vez que é necessário avaliar a acumulação do dano. Para além disso, em alguns ensaios, observou-se uma disparidade entre os valores numéricos previstos por Roth e Mohr (2016) e os obtidos com o DD3IMP, em particular para a pressão hidrostática. Neste contexto, mostrou-se que a escolha da discretização espacial dos modelos numéricos pode influenciar de forma significativa o erro cometido na avaliação da deformação plástica equivalente na fratura.

Em resumo, pode afirmar-se que estes modelos de dano desacoplados, apesar da sua simplicidade em termos de formulação e implementação em *solvers* baseados no MEF, apresentam dificuldades no processo de calibração. De facto, é sempre necessário recorrer a uma abordagem numérico-experimental para determinar as grandezas que caracterizam o estado de tensão dos ensaios experimentais selecionados para a calibração. A discretização espacial dos modelos numéricos utilizados nas simulações dos ensaios de calibração condiciona todo o processo subsequente, pelo que deve ser sempre feita uma análise de sensibilidade. O cuidado na realização desta análise pode garantir uma correta previsão da deformação na fratura para estados de tensão próximos dos utilizados na calibração. No entanto, nada é garantido em relação a solicitações que envolvem trajetórias de deformação complexas. Neste contexto, os dois modelos recorrem a duas formulações distintas para a acumulação de dano, sendo que a utilizada no modelo de Xue-Wierzbicki recorre também a parâmetros de calibração. Estes não foram analisados neste trabalho, uma vez que se admitiu que os ensaios escolhidos apresentam trajetórias monótonas. No entanto, a conceção de componentes com recurso a processos multi-etapa requer um estudo mais aprofundado destes modelos de dano, incluindo da função que rege o dano acumulado, bem como de todos os aspetos relacionados com a análise e pós-tratamento dos resultados das simulações numéricas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bai, Y. (2008). “Effect of Loading History on Necking and Fracture”. PhD Thesis, Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology.
- Banabic, D. (2010). “*Sheet Metal Forming Processes*”. Edition SPRINGER. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-88113-1>.
- Bao, Y. (2003). “Prediction of Ductile Crack Formation in Uncracked Bodies”. PhD Thesis, Department of Ocean Engineering, Massachusetts Institute of Technology.
- Bao, Y., and Wierzbicki, T. (2004). “On Fracture Locus in the Equivalent Strain and Stress Triaxiality Space”. *International Journal of Mechanical Sciences* 46 (1). Pergamon: 81–98. <https://doi.org/10.1016/J.IJMECSCI.2004.02.006>.
- Basaran, M. (2011). “Stress State Dependent Damage Modeling with a Focus on the Lode Angle Influence”. PhD Thesis, Faculty of Mechanical Engineering, RWTH Aachen University. <https://doi.org/urn:nbn:de:hbz:82-opus-38332>.
- Bathe, K. J. (1996). “*Finite Element Procedures*”. Prentice-Hall, Inc.
- Cao, T. S. (2013). “Modeling Ductile Damage for Complex Loading Paths”. PhD Thesis, MINES ParisTech.
- Cazacu, O., and Barlat, F. (2001). “Generalization of Drucker’s Yield Criterion to Orthotropy”. *Mathematics and Mechanics of Solids* 6 (6): 613–30. <https://doi.org/10.1177/108128650100600603>.
- Chaboche, J. L. (1988). “Continuum Damage Mechanics: Part II - Damage Growth, Crack Initiation, and Crack Growth”. *Journal of Mechanics* 55 (March 1988): 65–72. <https://doi.org/10.1115/1.3173662>.
- Dunand, M. (2013). “Ductile Fracture at Intermediate Stress Triaxialities: Experimental Investigations and Micro-Mechanical Modeling”. PhD Thesis, Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology.
- Fish, J., and Belytschko, T. (2007). “*A First Course in Finite Elements*”. JohnWiley & Sons, Ltd. <https://doi.org/10.1002/9780470510858>.
- Gurson, A. L. (1977). “*Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I—Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media*”. *Journal of Engineering Materials and Technology*. Vol. 99. <https://doi.org/10.1115/1.3443401>.
- Hill, R. (1950). “*The Mathematical Theory of Plasticity*”. First Edition. Oxford University Press.
- Huang, H., and Xue, L. (2009). “Prediction of Slant Ductile Fracture Using Damage Plasticity Theory”. *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 86 (5). Elsevier Ltd: 319–28. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2008.11.027>.
- Johnson, G., and Cook, W. (1985). “Fracture Characteristics of Three Metals Subjected

- to Various Strains, Strain Rates, Temperatures and Pressures”. *Engineering Fracture Mechanics* 21 (1). Pergamon: 31–48. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(85\)90052-9](https://doi.org/10.1016/0013-7944(85)90052-9).
- Kachanov, L. (1958). “Time of the Rupture Process under Creep Conditions”. *Izvestiia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Teckhnicheskikh Nauk*, 8, 26–31.
- Lemaitre, J. (1985). “A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture”. *Journal of Engineering Materials and Technology* 107 (January 1985): 83–89. <https://doi.org/10.1115/1.3225775>.
- Mae, H., Teng, X., Bai, Y. and Wierzbicki, T. (2007). “Calibration of Ductile Fracture Properties of a Cast Aluminum Alloy”. *Materials Science and Engineering: A* 459 (1–2). Elsevier: 156–66. <https://doi.org/10.1016/J.MSEA.2007.01.047>.
- Malcher, L. (2012). “Continuum Modelling and Numerical Simulation of Damage for Ductile Materials”. Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto.
- Marcadet, S., Roth, C., Erice, B. and Mohr, D. (2015). “A Rate-Dependent Hosford-Coulomb Model for Predicting Ductile Fracture at High Strain Rates”. *EPJ Web of Conferences* 94: 01080. <https://doi.org/10.1051/epjconf/20159401080>.
- McClintock, F., Kaplan, S. and Berg, C. (1966). “Ductile Fracture by Hole Growth in Shear Bands”. *International Journal of Fracture Mechanics* 2 (4): 614–27. <https://doi.org/10.1007/BF00184558>.
- Morales, E. D. (2013). “Análise De Critérios De Falha Em Materiais Dúcteis : Um Estudo Numérico E Experimental”. Tese de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- Murakami, S. (1988). “Mechanical Modeling of Material Damage”. *Journal of Applied Mechanics* 55 (2): 280–86. <https://doi.org/10.1115/1.3173673>.
- Neto, D. M., Oliveira, M. C. and Menezes, L. F. (2017). “Surface Smoothing Procedures in Computational Contact Mechanics”. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 24, 37–87.
- Oliveira, M. C. (2005). “Algoritmos e Estratégias de Gestão Do Problema de Contacto Com Atrito Em Grandes Deformações Aplicação à Estampagem de Chapas Metálicas”. Tese de Doutoramento, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Coimbra.
- Pires, F. M. (2005). “Issues on the Finite Element Modelling of Degradation and Prediction of Failure in Finitely Straining Ductile Materials”. PhD Thesis, Swansea School of Engineering, University of Wales.
- Rabotnov, Y. (1963). “On the Equation of State of Creep”. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Conference Proceedings* 178 (1): 2-117-2–122.
- Reddy, J. N. (1993). “An Introduction to the Finite Element Method. Mathematics of Computation”. Second Edition. McGraw-Hill, Inc. <https://doi.org/10.2307/2007936>.
- Rice, J. R., and Tracey, D. M. (1969). “On the Ductile Enlargement of Voids in Triaxial Stress Fields\*”. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 17 (3): 201–17.

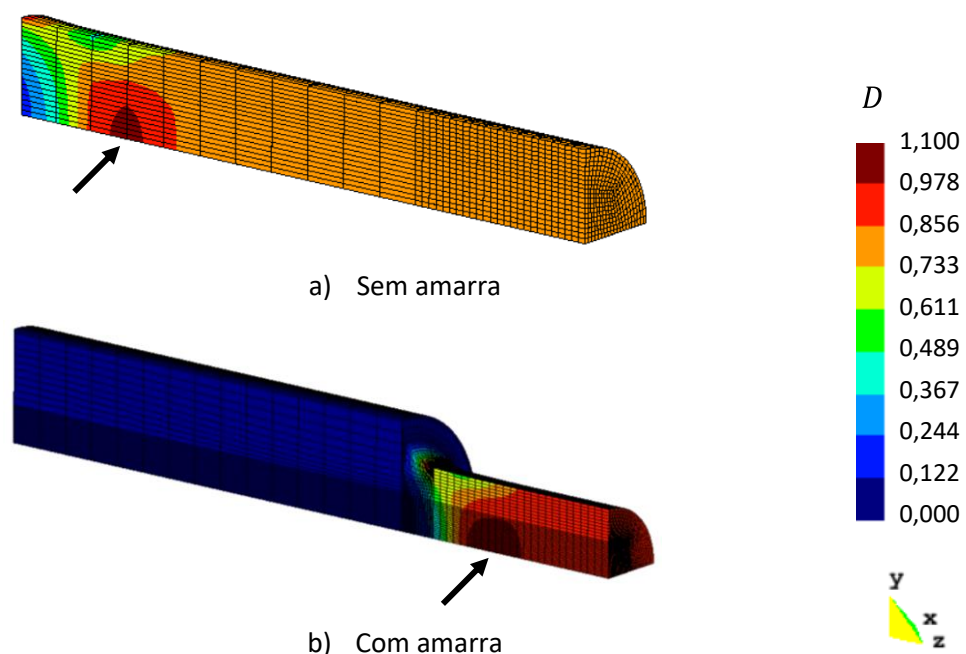
- [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(69\)90033-7](https://doi.org/10.1016/0022-5096(69)90033-7).
- Roth, C., and Mohr, D. (2016). “Ductile Fracture Experiments with Locally Proportional Loading Histories”. *International Journal of Plasticity* 79. Elsevier Ltd: 328–54. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2015.08.004>.
- Teixeira, P. M. (2010). “Ductile Damage Prediction in Sheet Metal Forming and Experimental Validation”. Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2015.11.006>.
- Tvergaard, V. (1981). “Influence of Voids on Shear Band Instabilities under Plane Strain Conditions”. *International Journal of Fracture* 17 (4): 389–407. <https://doi.org/10.1007/BF00036191>.
- Tvergaard, V., and Needleman, A. (1984). “Analysis of the Cup-Cone Fracture in a Round Tensile Bar”. *Acta Metallurgica* 32 (1). Pergamon: 157–69. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(84\)90213-X](https://doi.org/10.1016/0001-6160(84)90213-X).
- Wilkins, M. L., Streit, R. D. and Reaugh, J. E. (1980). “Cumulative-Strain-Damage Model of Ductile Fracture: Simulation and Prediction of Engineering Fracture Tests”. <https://doi.org/10.2172/6628920>.
- Xue, L. (2007). “Ductile Fracture Modeling - Theory , Experimental Investigation and Numerical Verification”. PhD Thesis, Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology.
- Xue, L., and Wierzbicki, T. (2008). “Ductile Fracture Initiation and Propagation Modeling Using Damage Plasticity Theory”. *Engineering Fracture Mechanics* 75 (11). Pergamon: 3276–93. <https://doi.org/10.1016/J.ENGFRACMECH.2007.08.012>.
- Xue, L., and Wierzbicki, T. (2009a). “Ductile Fracture Characterization of Aluminum Alloy 2024-T351 Using Damage Plasticity Theory”. *International Journal of Applied Mechanics*. Vol. 01. <https://doi.org/10.1142/S1758825109000198>.
- Xue, L., and Wierzbicki, T. (2009b). “Numerical Simulation of Fracture Mode Transition in Ductile Plates”. *International Journal of Solids and Structures* 46 (6). Elsevier Ltd: 1423–35. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.11.009>.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. and Zhu, J. Z. (2005). “*The Finite Element Method: Its Basics and Fundamentals*”. Sixth Edition. Elsevier.





## APÊNDICE: PROVETE CILÍNDRICO SEM ENTALHE

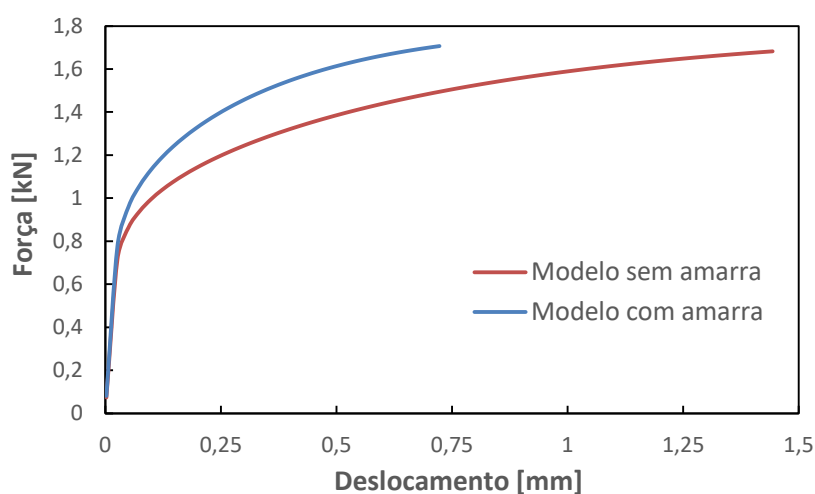
Na fase de validação da implementação do modelo de dano de Bao-Wierzbicki no *solver* DD3IMP, efetuada no Capítulo 4, considerou-se para a análise dos resultados, no caso do modelo do provete cilíndrico sem entalhe, um ponto de Gauss pertencente ao elemento finito localizado no centro do modelo. No entanto, a acumulação de dano máxima prevista pela simulação ocorre junto à extremidade do modelo numérico onde se impõe o deslocamento, na região de malha mais grosseira (Figura A.1 a)). Este ponto apresenta um valor de triaxialidade de cerca de 0,38 (aproximadamente constante durante o ensaio). Como apresenta na fase inicial o maior valor de deformação plástica, justifica-se a previsão do modelo. Neste modelo numérico não se representou a região correspondente à amarra, tendo-se optado por aumentar o comprimento da zona útil do provete. Assim, neste apêndice apresentam-se os resultados da simulação em que se modelou a geometria do provete, tal como indicado em Mae et al. (2007) (Figura A.1 b)).



**Figura A.1.** Localização da fratura dúctil para a simulação realizada com o modelo do provete cilíndrico sem entalhe para a liga Al-Si obtida por fundição com o modelo de dano de Bao-Wierzbicki: a) sem amarra; b) com amarra.

Como se pode constatar, a localização prevista para o dano máximo continua a não ser a região central do provete, apesar de no caso do modelo com amarra se ter considerado uma malha mais refinada em toda a zona útil do provete (74625 elementos). De facto, para maiores valores de deslocamento da amarra, a localização da deformação (*necking*) ocorre para ambos os modelos na zona central. No entanto, uma vez que o modelo de dano se baseia na deformação plástica na fratura prevista para um determinado valor de triaxialidade, é importante referir que neste caso a localização não é corretamente prevista. Também se observou que a distribuição da deformação plástica equivalente ao longo do ensaio é muito influenciada pelos parâmetros do modelo constitutivo.

Na Figura A.2 representam-se as curvas de evolução da força com o deslocamento para as simulações realizadas com os modelos sem amarra e com amarra. De referir que o comprimento total dos modelos com e sem amarra é o mesmo. Nesta figura, o último valor de deslocamento das curvas corresponde ao deslocamento à fratura previsto nas simulações numéricas. A diferença observada nas curvas da força em função do deslocamento deve-se simplesmente à discretização espacial adotada. A curva de evolução de força com o deslocamento da amarra, prevista para o modelo com amarra, é muito mais próxima do resultado numérico reportado por Mae et al. (2007) (ver Figura 4.10). Com o modelo refinado o deslocamento à fratura é subestimado, quando comparado com o resultado apresentado por Mae et al. (2007). Este resultado realça a importância da discretização espacial adotada também na previsão do deslocamento à fratura.



**Figura A.2.** Comparação das curvas de evolução da força com o deslocamento para as simulações realizadas com o modelo do provete cilíndrico sem entalhe sem amarra e com amarra para a liga Al-Si obtida por fundição com o modelo de dano de Bao-Wierzbicki.